УДК 517.91

Р. М. Тацій, В. В. Мазуренко

ДИСКРЕТНО-НЕПЕРЕРВНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ КВАЗІДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПАРНОГО ПОРЯДКУ

Для квазідиференціальних рівнянь парного порядку отримано основні спектральні властивості задач на власні значення і встановлено структуру узагальненої функції Гріна.

Вступ. Крайові задачі (зокрема, задачі на власні значення) для квазідиференціальних рівнянь (КДР) досліджувались багатьма авторами (див. [2, 8] і бібліографію, наведену там). Однак отримані результати стосувались переважно рівнянь, коефіцієнти яких були або неперервними, або сумовними за Лебегом функціями. Теорія ж прикладних задач [3, 6, 9] вимагає більш загальних постановок, які б враховували природну єдність дискретного та неперервного. У такому аспекті цікавими є роботи Каца, Крейна та Гантмахера (див. доповнення в [1, 4]), у яких детально вивчались крайові задачі (задачі на власні значення) для звичайних диференціальних рівнянь другого та четвертого порядків, що описують відповідно вільні коливання струни і балки з дискретно-неперервним розподілом маси. Ці дослідження проводились без використання теорії узагальнених функцій, і в зв'язку зі специфікою задач методи їх дослідження не вдалося застосувати до рівнянь багаточленного класу. Пізніше вагомі результати в цьому напрямку були отримані в роботах [12,13,15–18].

Об'єктом досліджень пропонованої роботи є лінійні КДР довільного парного порядку, в яких коефіцієнти (і праві частини) є узагальненими функціями. Характерною особливістю цих рівнянь є також те, що вони містять у тому чи іншому вигляді добутки розривних функцій на узагальнені похідні від функцій обмеженої варіації (міри [19]) [12 (с. 5), 22]. Коректні розширення звичайних (класичних) розв'язків диференціальних рівнянь на клас функцій обмеженої варіації [13] розглядаємо як розв'язки таких рівнянь. Для вказаного класу рівнянь досліджуємо дискретно-неперервні крайові задачі, постановка яких здійснена в [12] (там розглянуто також часткові випадки), а по суті – швидше в [1].

Зауважимо також, що детальний огляд диференціальних рівнянь, які містять узагальнені функції в коефіцієнтах, наведено в [19].

1. Позначення. Нехай I – відкритий інтервал дійсної осі. Простір локально абсолютно неперервних на I функцій позначимо через $AC(I)$, простір квадратично сумовних за Лебегом на I функцій – через $L_2(I)$, простір неперервних праворуч функцій локально обмеженої на I варіації – через $BV^+_{\mathrm{loc}}(I)$, простір $l \times k$ матриць-функцій, визначених на I, – через $\Im(I^{l\times k})$. Під $\Delta f(x) = f(x) - f(x-0)$ розуміємо стрибок функції $f(x) \in BV^+_{\mathrm{loc}}(I)$ у точці $x \in I$, під $\|\mathbf{A}\|$ – норму матриці $\mathbf{A} \in \Im(I^{l\times k})$, яка визначається як сума модулів усіх її елементів a_{ij}:

$$\|\mathbf{A}\| = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{k} |a_{ij}|,$$

під $\mathrm{V}_a^b\mathbf{A}(x)$ – повну варіацію матриці $\mathbf{A} \in \Im(I^{l\times k})$ на $[a, b]$, що дорівнює сумі повних варіацій всіх її елементів $a_{ij}(x)$:

$$\mathrm{V}_a^b\mathbf{A}(x) = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{k} \mathrm{V}_a^b a_{ij}(x).$$

Означимо (квазі)диференціальні вирази (КДВ) $l_{nn}[y]$ та $l_{n-1,n-1}[y]$:

$$l_{nn}[y] \equiv \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}(b_{ij}(x)y^{(n-i)})^{(n-j)}, \tag{1}$$

$$l_{n-1,n-1}[y] \equiv \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{n-j}(a_{ij}(x)y^{(n-i)})^{(n-j)}, \tag{2}$$

причому диференціювання (тут і надалі) розуміємо в сенсі теорії узагальнених функцій.

На коефіцієнти $b_{ij}(x)$, $a_{ij}(x)$ накладаємо такі умови:

1°. b_{00}^{-1} – локально обмежена і вимірна за Лебегом на I функція;

2°. b_{i0}, $b_{0j} \in L_2(I)$, $i, j = \overline{1,n}$;

3°. $\forall i, j = \overline{1,n}$ b_{ij}, a_{ij} – міри на I (див. [20, с. 160]), тобто $b_{ij} = \beta'_{ij}$, $a_{ij} = \alpha'_{ij}$, β_{ij}, $\alpha_{ij} \in BV_{\text{loc}}^{+}(I)$;

4°. $\forall i, j = \overline{1,n}$ $b_{ij} = b_{ji}$, $a_{ij} = a_{ji}$;

5°. $\forall i, j = \overline{1,n}$ α_{ij} – неспадні на I функції (тобто a_{ij} – додатні міри).

Для КДВ $l_{nn}[y] - \lambda l_{n-1,n-1}[y]$, де λ – деякий (комплексний) параметр, введемо квазіпохідні $y^{[k]}(x)$, $k = \overline{0, 2n-1}$:

$$y^{[0]}(x) \overset{\text{def}}{=} y(x), \quad y^{[k]} = y^{(k)}, \quad k = \overline{1, n-1}, \;\; y^{[n]} = \sum_{i=0}^{n} b_{i0}(x)\cdot y^{(n-i)},$$

$$y^{[n+m]} = b_{0m}(x)\cdot y^{(n)} + \sum_{i=1}^{n}\left(b_{im}(x) - \lambda a_{im}(x)\right)\, y^{(n-i)} - \left(y^{[n+m-1]}\right)', \;\; m = \overline{1, n-1}. \tag{3}$$

2. Задача на власні значення. Розглянемо задачу на власні значення

$$l_{nn}[y] - \lambda l_{n-1,n-1}[y] = 0, \quad x \in [a,b] \subset I, \tag{4}$$

$$\sum_{\nu=1}^{2n} p_{k\nu} y^{[\nu-1]}(a) = \sum_{\nu=1}^{2n} q_{k\nu} y^{[\nu-1]}(b), \quad k = \overline{1, 2n}, \tag{5}$$

де $p_{k\nu}, q_{k\nu}$ – деякі (комплексні) числа, $k, \nu = \overline{1, 2n}$, причому такі, що

$$\sum_{j=1}^{n} p_{kj}\bar{p}_{\nu,2n-j+1} - \sum_{j=1}^{n} p_{k,2n-j+1}\bar{p}_{\nu j} = \sum_{j=1}^{n} q_{kj}\bar{q}_{\nu,2n-j+1} - \sum_{j=1}^{n} q_{k,2n-j+1}\bar{q}_{\nu j}. \tag{6}$$

Лінійна теорія КДР (4) викладена в [14].

2.1. ***Постановка еквівалентної задачі.*** Переформулюємо задачу (4), (5) у вигляді задачі на власні значення для деякої коректної в сенсі теорії узагальнених функцій [11] диференціальної системи першого порядку з мірами (*узагальнена схема Аткінсона* [14]). Для цього за допомогою вектора

$$\mathbf{Y}(x) = \operatorname{col}\left(y(x), y^{[1]}(x), \ldots, y^{[2n-1]}(x)\right) \tag{7}$$

і сталих матриць $\mathbf{P} = \| p_{k\nu} \|_{k,\nu=1}^{2n}$, $\mathbf{Q} = \| q_{k\nu} \|_{k,\nu=1}^{2n}$ задачу (4), (5) зведемо до такої:

$$\mathbf{Y}'(x) = \left(\mathbf{B}_1'(x) + \lambda \mathbf{A}_1'(x)\right)\cdot \mathbf{Y}(x), \tag{8}$$

$$\mathbf{P}\cdot\mathbf{Y}(a) = \mathbf{Q}\cdot\mathbf{Y}(b), \tag{9}$$

де матриці-міри $\mathbf{B}_1'$, $\mathbf{A}_1' \in \mathfrak{Z}(I^{2n\times 2n})$, $\mathbf{B}_1, \mathbf{A}_1 \in BV_{\text{loc}}^{+}(I)$, мають вигляд:

$$
\mathbf{B}_1' = \left\| \begin{matrix}
0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
-\dfrac{b_{n0}}{b_{00}} & -\dfrac{b_{n-1,0}}{b_{00}} & \cdots & -\dfrac{b_{10}}{b_{00}} & b_{00}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\
b_{n1} - \dfrac{b_{n0}b_{01}}{b_{00}} & b_{n-1,1} - \dfrac{b_{n-1,0}b_{01}}{b_{00}} & \cdots & b_{11} - \dfrac{b_{10}b_{01}}{b_{00}} & \dfrac{b_{01}}{b_{00}} & -1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
b_{n,n-1} - \dfrac{b_{n0}b_{0,n-1}}{b_{00}} & b_{n-1,n-1} - \dfrac{b_{n-1,0}b_{0,n-1}}{b_{00}} & \cdots & b_{1,n-1} - \dfrac{b_{10}b_{0,n-1}}{b_{00}} & \dfrac{b_{0,n-1}}{b_{00}} & 0 & \cdots & -1 \\
b_{nn} - \dfrac{b_{n0}b_{0n}}{b_{00}} & b_{n-1,n} - \dfrac{b_{n-1,0}b_{0n}}{b_{00}} & \cdots & b_{1n} - \dfrac{b_{10}b_{0n}}{b_{00}} & \dfrac{b_{0n}}{b_{00}} & 0 & \cdots & 0
\end{matrix} \right\|,
$$

$$
\mathbf{A}_1' = \left\| \begin{matrix}
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
-a_{n1} & \cdots & -a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
-a_{nn} & \cdots & -a_{1n} & 0 & \cdots & 0
\end{matrix} \right\|.
$$

Умову (6) у матричному вигляді запишемо як

$$
\mathbf{P}\mathbf{J}^{-1}\mathbf{P}^* = \mathbf{Q}\mathbf{J}^{-1}\mathbf{Q}^* \tag{10}
$$

зі сталою й неособливою косоермітовою матрицею $\mathbf{J} \in \Im(I^{2n\times 2n})$:

$$
\mathbf{J} = \left\| \begin{matrix} 0 & -\mathbf{J}_n \\ \mathbf{J}_n & 0 \end{matrix} \right\|, \tag{11}
$$

де $\mathbf{J}_n$ – квадратна матриця n-го порядку, що містить одиниці на побічній діагоналі, а всі решта елементи – нулі; індексом «$*$» позначено ермітове спряження.

Задача (8), (9), в свою чергу, еквівалентна такій задачі (*узагальнена схема Аткінсона*):

$$
\mathbf{J} \cdot \mathbf{Y}'(x) = \left(\mathbf{B}'(x) + \lambda \mathbf{A}'(x)\right) \cdot \mathbf{Y}(x), \tag{12}
$$

$$
\mathbf{Y}(a) = \mathbf{M}\mathbf{v}, \qquad \mathbf{Y}(b) = \mathbf{N}\mathbf{v} \tag{13}
$$

з ермітовими за умови 4° матрицями $\mathbf{B}', \mathbf{A}' \in \Im(I^{2n\times 2n})$, $\mathbf{B}, \mathbf{A} \in BV_{loc}^+(I)$:

$$
\mathbf{B}' = \left\| \begin{matrix}
\dfrac{b_{n0}b_{0n}}{b_{00}} - b_{nn} & \dfrac{b_{n-1,0}b_{0n}}{b_{00}} - b_{n-1,n} & \cdots & \dfrac{b_{10}b_{0n}}{b_{00}} - b_{1n} & -\dfrac{b_{0n}}{b_{00}} & 0 & \cdots & 0 \\
\dfrac{b_{n0}b_{0,n-1}}{b_{00}} - b_{n,n-1} & \dfrac{b_{n-1,0}b_{0,n-1}}{b_{00}} - b_{n-1,n-1} & \cdots & \dfrac{b_{10}b_{0,n-1}}{b_{00}} - b_{1,n-1} & -\dfrac{b_{0,n-1}}{b_{00}} & 0 & \cdots & 1 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \vdots \\
\dfrac{b_{n0}b_{01}}{b_{00}} - b_{n1} & \dfrac{b_{n-1,0}b_{01}}{b_{00}} - b_{n-1,1} & \cdots & \dfrac{b_{10}b_{01}}{b_{00}} - b_{11} & -\dfrac{b_{01}}{b_{00}} & 1 & \cdots & 0 \\
-\dfrac{b_{n0}}{b_{00}} & -\dfrac{b_{n-1,0}}{b_{00}} & \cdots & -\dfrac{b_{10}}{b_{00}} & b_{00}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{matrix} \right\|, \tag{14}
$$

$$
\mathbf{A}' = \begin{Vmatrix} a_{nn} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{Vmatrix} \tag{15}
$$

і сталими матрицями $\mathbf{M}$, $\mathbf{N} \in \Im(I^{2n\times 2n})$ такими, що

$$
\mathbf{M}^*\mathbf{J}\mathbf{M} = \mathbf{N}^*\mathbf{J}\mathbf{N}. \tag{16}
$$

Причому з рівності $\mathbf{Mv} = \mathbf{Nv} = 0$, де $\mathbf{v} \in \Im(I^{(2n\times 1)})$ – деякий сталий і ненульовий вектор, випливає, що $\mathbf{v} \equiv 0$.

Зауважимо, що матриці $\mathbf{M}$ і $\mathbf{N}$ конструктивно будуються за відомими матрицями $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ за формулами

$$
\mathbf{M} = -\mathbf{J}^{-1}\mathbf{P}^*, \qquad \mathbf{N} = -\mathbf{J}^{-1}\mathbf{Q}^*.
$$

Звідси на підставі (10) випливає, зокрема, справедливість рівності (16).

Залишилось показати, що система (12) є коректною, тобто, що виконується умова $\left\{\mathbf{J}^{-1}\left[\Delta\mathbf{B}(x) + \lambda\Delta\mathbf{A}(x)\right]\right\}^2 = 0 \quad \forall x \in [a,b]$. Ця умова встановлюється безпосередньою перевіркою з використанням (11) і структур матриць стрибків

$$
\Delta\mathbf{B} = \begin{Vmatrix} -\Delta\beta_{nn} & \cdots & -\Delta\beta_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\Delta\beta_{n1} & \cdots & -\Delta\beta_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{Vmatrix}, \qquad \Delta\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} \Delta\alpha_{nn} & \cdots & \Delta\alpha_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta\alpha_{n1} & \cdots & \Delta\alpha_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{Vmatrix}.
$$

Будемо вважати, що функція $\mathbf{Y} \in \Im(I^{2n\times 2n})$ належить до допустимого класу D_k, якщо $\mathbf{Y} \in BV^+_{\mathrm{loc}}(I)$ і $\Delta\mathbf{C}\cdot\Delta\mathbf{Y} = 0 \quad \forall x \in I$, де $\mathbf{C}(x,\lambda) = \mathbf{J}^{-1}[\mathbf{B}(x) + \lambda\mathbf{A}(x)]$. Очевидно, в класі D_k добуток $\mathbf{C}'\cdot\mathbf{Y}$ існує (є коректним) у сенсі теорії узагальнених функцій (секвенціальний підхід див. у [22], функціональний – у [12, с. 5]).

Означення 1. Під розв'язком задачі (12), (13) розуміємо функцію $\mathbf{Y} \in D_k$, яка задовольняє (в сенсі теорії узагальнених функцій) рівняння (12) і початкову умову (13). Тоді під розв'язком задачі (4), (5) будемо розуміти першу координату $y(x)$ вектор-розв'язку $\mathbf{Y}(x)$ задачі (12), (13).

Будемо шукати ті значення параметра λ, при яких задача (4), (5) має нетривіальні розв'язки.

Таким чином, приходимо до наступного висновку: задача на власні значення (4), (5) за умов 1°–5° та (6) еквівалентна задачі на власні значення (12)–(16).

Припустимо додатково, що для довільного нетривіального розв'язку $\mathbf{Y}(x)$ системи (11) виконується умова додатної визначеності

$$
\int_a^b \mathbf{Y}^*(x)\cdot d\mathbf{A}(x)\cdot\mathbf{Y}(x) > 0. \tag{17}
$$

Властивості задачі (12)–(16) при виконанні додаткової умови (17) отримано в роботі [14] (див. також [16]).

2.2. ***Основні результати.*** Нехай виконуються умови $1^\circ - 5^\circ$ і (6).

Означення 2. Матрицю-функцію $\mathcal{Y}(x,s,\lambda)$, яка за змінною x є розв'язком (у сенсі означення 1) системи (12) і задовольняє початкову умову $\mathcal{Y}(s,s,\lambda) = \mathcal{E}$, $s \in I$ (тут $\mathcal{E}$ – одинична матриця), називаємо еволюційним оператором (матрицею Коші) цієї системи, що відповідає КДР (4).

Теорема 1. *Еволюційний оператор, що відповідає КДР (4), є цілою функцією від параметра λ і має за λ порядок зростання ρ, де $\rho \le 1/2$.*

Доведення. Першу частину теореми легко отримати методом, подібним до [1, с. 407]. Тому встановимо лише справедливість оцінки $\rho \le \frac{1}{2}$.

Наслідуючи [21, с. 481], систему (12) запишемо у вигляді

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{Y}'_\lambda = \left[\mathbf{B}'_\lambda(x) + \lambda^{1/2}\mathbf{A}'(x)\right] \cdot \mathbf{Y}_\lambda , \tag{18}$$

де $\mathbf{Y}_\lambda \in BV^+_{\mathrm{loc}}(I)$ і $\mathbf{B}'_\lambda \in \Im(I^{2n\times 2n})$, $\mathbf{B}_\lambda \in BV^+_{\mathrm{loc}}(I)$, визначаються рівностями

$$\mathbf{Y}_\lambda = \mathrm{col}\left(y, \ldots, y^{[n-1]}, \lambda^{-1/2}y^{[n]}, \ldots, \lambda^{-1/2}y^{[2n-1]}\right),$$

$$\mathbf{B}'_\lambda = \left\| \begin{matrix}
\dfrac{\frac{b_{n0}b_{0n}}{b_{00}} - b_{nn}}{\sqrt{\lambda}} & \dfrac{\frac{b_{n-1,0}b_{0n}}{b_{00}} - b_{n-1,n}}{\sqrt{\lambda}} & \cdots & \dfrac{\frac{b_{10}b_{0n}}{b_{00}} - b_{1n}}{\sqrt{\lambda}} & -\dfrac{b_{0n}}{b_{00}} & 0 & \cdots & 0 \\
\dfrac{\frac{b_{n0}b_{0,n-1}}{b_{00}} - b_{n,n-1}}{\sqrt{\lambda}} & \dfrac{\frac{b_{n-1,0}b_{0,n-1}}{b_{00}} - b_{n-1,n-1}}{\sqrt{\lambda}} & \cdots & \dfrac{\frac{b_{10}b_{0,n-1}}{b_{00}} - b_{1,n-1}}{\sqrt{\lambda}} & -\dfrac{b_{0,n-1}}{b_{00}} & 0 & \cdots & 1 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & ⋰ & \vdots \\
\dfrac{\frac{b_{n0}b_{01}}{b_{00}} - b_{n1}}{\sqrt{\lambda}} & \dfrac{\frac{b_{n-1,0}b_{01}}{b_{00}} - b_{n-1,1}}{\sqrt{\lambda}} & \cdots & \dfrac{\frac{b_{10}b_{01}}{b_{00}} - b_{11}}{\sqrt{\lambda}} & -\dfrac{b_{01}}{b_{00}} & 1 & \cdots & 0 \\
-\dfrac{b_{n0}}{b_{00}} & -\dfrac{b_{n-1,0}}{b_{00}} & \cdots & -\dfrac{b_{10}}{b_{00}} & b_{00}^{-1}\sqrt{\lambda} & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{matrix} \right\|, \tag{19}$$

а матриця $\mathbf{A}'(x)$ має вигляд (15).

Еволюційний оператор $\mathcal{Y}_\lambda(x,s,\lambda)$ системи (18), очевидно, задовольняє також інтегральне рівняння

$$\mathcal{Y}_\lambda(x,s,\lambda) = \mathcal{E} + \int_s^x d\left[\mathbf{B}_\lambda(\tau) + \lambda^{1/2}\mathbf{A}(\tau)\right] \cdot \mathcal{Y}_\lambda(\tau,s,\lambda). \tag{20}$$

Переходячи до норм у рівнянні (20) і застосовуючи узагальнену лему Гронуолла – Беллмана [10], отримуємо таку оцінку:

$$\| \mathcal{Y}_\lambda(x,s,\lambda) \| \le 2n \exp\left\{ \mathrm{V}_s^x\left[\mathbf{B}_\lambda + \lambda^{1/2}\mathbf{A}\right](\tau)\right\} \le 2n \exp\left\{ \mathrm{V}_a^b\left[\mathbf{B}_\lambda + \lambda^{1/2}\mathbf{A}\right](x)\right\}. \tag{21}$$

З рівностей (15) і (19) на основі означення повної варіації маємо при $|\lambda| \to \infty$:

$$\mathrm{V}_a^b\left[\mathbf{B}_\lambda + \lambda^{1/2}\mathbf{A}\right](x) \le c_1 \,|\,\lambda\,|^{1/2} + o(|\,\lambda\,|^{1/2})$$

і оцінка (21) набуває вигляду

$$\| \mathcal{Y}_\lambda(x,s,\lambda) \| \le c_2 \exp\left\{ c_1 \,|\,\lambda\,|^{1/2} + o(|\,\lambda\,|^{1/2})\right\},$$

де $c_i = \mathrm{const} > 0$, $i = 1, 2$. Значить, для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться $c(\varepsilon)$ таке, що при $|\lambda| \to \infty$ виконується

$$\left\| \mathscr{Y}_\lambda(x,s,\lambda) \right\| \le \exp\left\{ c(\varepsilon)\cdot |\,\lambda\,|^{1/2+\varepsilon} \right\}.$$

Це фактично означає, що порядок [7] цілої за параметром λ функції $\mathscr{Y}_\lambda(x,s,\lambda)$ не перевищує $1/2$.

Еволюційні оператори $\mathscr{Y}(x,s,\lambda)$ і $\mathscr{Y}_\lambda(x,s,\lambda)$ пов'язані формулою

$$\mathscr{Y}(x,s,\lambda) = \begin{Vmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda^{1/2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \lambda^{1/2} \end{Vmatrix} \cdot \mathscr{Y}_\lambda(x,s,\lambda) = \mathscr{T}(\lambda)\cdot \mathscr{Y}_\lambda(x,s,\lambda).$$

Порядок функції $\mathscr{T}(\lambda) \in \mathfrak{I}(I^{2n\times 2n})$ як многочлена відносно λ дорівнює нулеві. Тому ціла за параметром λ функція $\mathscr{Y}(x,s,\lambda)$ має порядок

$$\rho \le \max\{0, 1/2\} = 1/2,$$

що й завершує доведення теореми. ◊

Теорема 2. *Власні значення* λ_k, $k = 0,1,\ldots$, *задачі* (4), (5) *є всі дійсними, а їх множина не має скінченної граничної точки, при цьому* $\forall \varepsilon > 0$

$$\sum_{\lambda_k \ne 0} |\,\lambda_k\,|^{-1/2-\varepsilon} < \infty. \tag{22}$$

Власні функції, що відповідають різним власним значенням, ортогональні в тому сенсі, що

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\int_a^b y^{[j]}(x,\lambda_k)\,y^{[i]}(x,\lambda_\nu)\,d\alpha_{n-i,n-j}(x) = 0, \quad \lambda_k \ne \lambda_\nu. \tag{23}$$

Доведення. На підставі сказаного вище (див. п. 2.1) для доведення теореми (за винятком збіжності ряду (22)) досить переконатися в справедливості умов теорем 1 і 2 з роботи [16], тобто, по суті, в справедливості нерівності (17). У розглядуваному випадку нерівність встановлюється з використанням рівностей (7), (15) та умови 5°.

Оскільки власні значення задачі (4), (5) є коренями рівняння $\det(\mathbf{P} - \mathbf{Q}\cdot\mathscr{Y}(b,a,\lambda)) = 0$, де $\mathscr{Y}(x,s,\lambda)$ – еволюційний оператор системи (12) (чи рівносильної їй системи (8)), то збіжність ряду в (22) випливає з теореми 1. Теорему доведено. ◊

Зауваження 1. Якщо власні функції задачі (4), (5) нормувати, поклавши $y_k(x) = y(x,\lambda_k)\left(\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\int_a^b y^{[j]}(x,\lambda_k)\,y^{[i]}(x,\lambda_k)\,d\alpha_{n-i,n-j}(x)\right)^{-1/2}$, то співвідношення ортогональності (23) можна переписати у вигляді

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\int_a^b y^{[j]}(x,\lambda_k)\,y^{[i]}(x,\lambda_\nu)\,d\alpha_{n-i,n-j}(x) = \delta_{k\nu} \tag{24}$$

при умові, що $\lambda_k \ne \lambda_\nu$, коли $k \ne \nu$ ($\delta_{k\nu}$ – символ Кронекера).

Зауваження 2. У випадку кратних власних значень довільно вибрані власні функції, взагалі кажучи, не задовольняють співвідношення (24). Однак їх можна вибрати такими за допомогою модифікації процесу ортогоналізації [1, с. 298]. Отже, можна вважати, що співвідношення (24) справджуються й тоді, коли $\lambda_m = \lambda_n$, незалежно від того, чи $m = n$, чи $m \ne n$, тобто в усіх випадках.

Зауваження 3. У роботі [9] вивчаються «класичні» самоспряжені КДВ вигляду

$$L_{nn}[y] \equiv \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \left(p_i(x) y^{(n-i)}\right)^{(n-i)},$$

які часто виникають у прикладних задачах. Очевидно, що більш загальні КДВ (1), (2) набувають такого самого вигляду, якщо в них покласти $a_{ij}(x) = b_{ij}(x) = 0$ при $i \neq j$, а подвійні індекси замінити одинарними, вважаючи $a_{ij}(x) \overset{\text{def}}{=} a_i(x)$, $b_{ij}(x) \overset{\text{def}}{=} b_i(x)$. У цьому окремому випадку відповідно змінюються й квазіпохідні (3):

$$y^{[k]} = y^{(k)}, \quad k = \overline{0, n-1}, \qquad\qquad y^{[n]} = b_0(x) \cdot y^{(n)},$$

$$y^{[n+m]} = \left(b_m(x) - \lambda a_m(x)\right) \cdot y^{(n-m)} - \left(y^{[n+m-1]}\right)', \quad m = \overline{1, n-1}.$$

Умови ортогональності (24) набувають більш «традиційного» вигляду:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \int_a^b y^{[i]}(x, \lambda_k) y^{[i]}(x, \lambda_\nu)\, d\alpha_{n-i}(x) = \delta_{k\nu},$$

де під знаком інтеграла «квадратична форма» при $k = \nu$ зводиться до «суми квадратів».

Теорема 4 (про розвинення за власними функціями). *Нехай функції* $p^{(k)}(x) \in AC(I)$, $k = \overline{0, n-1}$, *а функція* $\varphi(x)$ *задовольняє неоднорідне КДР*

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \left(b_{ij}(x) \cdot \varphi^{(n-i)}\right)^{(n-j)} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n-j} \left(a_{ij}(x) \cdot p^{(n-i)}\right)^{(n-j)}$$

і крайові умови (5). *Для довільного* $\Lambda > 0$ *позначимо*

$$\varphi_\Lambda^{[k]}(x) = \varphi^{[k]}(x) - \sum_{|\lambda_r| \le \Lambda} c_r y^{[k]}(x, \lambda_r), \quad k = \overline{0, n-1}, \tag{25}$$

де коефіцієнти c_r *задаються формулою*

$$c_r = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \int_a^b y^{[j]}(x, \lambda_r) \varphi^{[i]}(x)\, d\alpha_{n-i, n-j}(x). \tag{26}$$

Тоді ряд Фур'є $\varphi(x) \sim \sum_r c_r y(x, \lambda_r)$, *а також ряди, які отримуються з нього почленним диференціюванням до* $(n-1)$*-го порядку включно, збігаючись на* $[a, b]$ *абсолютно й рівномірно по* x, *наближають функцію* $\varphi(x)$ *у сенсі, що*

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \int_a^b \varphi_\Lambda^{[j]}(x)\, \varphi_\Lambda^{[i]}(x)\, d\alpha_{n-i, n-j}(x) \le$$

$$\le \Lambda^{-2} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \int_a^b p^{(n-j-1)}(x) p^{(n-i-1)}(x)\, d\alpha_{n-i, n-j}(x). \tag{27}$$

Д о в е д е н н я. Переконаємось, що виконуються умови теореми 3 з роботи [16], тобто покажемо, що функція $\chi \in \Im(I^{2n \times 1})$, $\chi \in BV_{\text{loc}}^{+}(I)$, яка в цьому випадку має вигляд $\chi(x) = \operatorname{col}\left(p(x), p'(x), \ldots, p^{(n-1)}(x), 0, \ldots, 0\right)$, сумовна з квадратом у тому сенсі, що $\int_a^b \chi^*(x) \cdot d\mathbf{A}(x) \cdot \chi(x) < \infty$. Для цього достатньо показати, що $\Delta\mathbf{A}(x)\cdot\Delta\chi(x)=0\quad\forall x\in[a,b]$. Ця умова, очевидно, виконується внаслідок припущень стосовно функцій $p^{(k)}(x)$, $k=\overline{0,n-1}$. Отже, твердження теореми випливає з теореми 3 роботи [16]. Теорему доведено. ◊

Зауваження 4. З нерівності (27) при $\Lambda\to\infty$ на підставі формул (24)–(26) одержуємо також рівність Парсеваля

$$\sum_{k=0}^{\infty}|c_k|^2=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\int_a^b\varphi^{[j]}(x)\varphi^{[i]}(x)\,d\alpha_{n-i,n-j}(x).$$

Зауваження 5. У випадку «класичних» КДР [3, 5, 9] формула (26) для знаходження коефіцієнтів c_r спрощується:

$$c_r=\sum_{i=0}^{n-1}\int_a^b y^{[i]}(x,\lambda_r)\varphi^{[i]}(x)\,d\alpha_{n-i}(x).$$

При цьому нерівність (27) набуває вигляду

$$\sum_{i=0}^{n-1}\int_a^b\left[\varphi_\Lambda^{[i]}(x)\right]^2d\alpha_{n-i}(x)\le\Lambda^{-2}\sum_{i=0}^{n-1}\int_a^b\left[p^{(n-i-1)}(x)\right]^2d\alpha_{n-i}(x).$$

Це співвідношення нагадує збіжність у середньому квадратичному, що є узагальненим аналогом відомих результатів [2, 6].

4. Неоднорідна задача. Розглянемо крайову задачу для неоднорідного КДР

$$L_{nn}[y]-\lambda L_{n-1,n-1}[y]=\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{i+1}f_i^{(i+1)}(x),\quad x\in[a,b]\subset I, \tag{28}$$

з крайовими умовами (5), де $f_i(x)\in BV_{\mathrm{loc}}^{+}(I)$, а $f_i^{(i+1)}(x)$ – її $(i+1)$-а узагальнена похідна.

Теорема 5. *При вибраних вище* **J**, **M** *і* **N** *крайова задача* (28), (5) *еквівалентна до неоднорідної задачі*

$$\mathbf{J}\cdot\mathbf{Y}'(x)=\left[\mathbf{B}'(x)+\lambda\mathbf{A}'(x)\right]\cdot\mathbf{Y}(x)+\mathbf{F}'(x) \tag{29}$$

з крайовими умовами (13), *де* $\mathbf{F}'\in\Im(I^{2n\times1})$, *причому* $\mathbf{F}\in BV_{loc}^{+}(I)$ *і має вигляд*

$$\mathbf{F}=\mathrm{col}\left(-f_0,-f_1,\ldots,-f_{n-1},0,\ldots,0\right).$$

Зведення рівняння (28) до системи (29) цілком аналогічне процедурі з п. 2.1. Зауважимо лише, що квазіпохідні для КДР (28) мають вигляд

$$y^{[k]}=y^{(k)},\quad k=\overline{0,n-1},\quad y^{[n]}=\sum_{i=0}^{n}b_{i0}(x)y^{(n-i)},$$

$$y^{[n+m]}=b_{0m}(x)y^{(n)}+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left(b_{im}(x)-\lambda a_{im}(x)\right)y^{(n-i)}-\left(y^{[n+m-1]}\right)'+f_{n-m}'(x),\quad m=\overline{1,n-1},$$

і, очевидно, співпадають з квазіпохідними (3) лише у випадку, коли $f_i'(x)\equiv0$, $i=\overline{0,n-1}$.

Теорема 6. *Якщо* λ *не є власним значенням задачі* (4), (5), *то неоднорідна задача* (28), (5) *має єдиний розв'язок* $y(x)$, *який є абсолютно неперервною на* I *функцією разом зі своїми квазіпохідними* $y^{[k]}(x)$ *до* $(n-1)$-*го порядку включно; квазіпохідні* $y^{[n+\nu]}(x)$, $\nu=\overline{0,n-1}$, *є (неперервними справа) функціями обмеженої на* I *варіації, стрибки яких визначаються за формулами*

$$\Delta y^{[n+v]}(x_s) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} (\Delta\beta_{n-k,\nu}(x_s) - \lambda\Delta\alpha_{n-k,\nu}(x_s))\, y^{[k]}(x_s) + \Delta f_{n-v-1}(x_s), \quad \nu = \overline{0, n-1}.$$

Цей розв'язок можна подати у вигляді

$$y(x, \lambda) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_a^b \frac{\partial^i G(x, s, \lambda)}{\partial s^i}\, df_i(s).$$

Доведення. Побудуємо розв'язок КДР

$$L_{nn}[y] - \lambda L_{n-1,n-1}[y] = (-1)^{i+1} f_i^{i+1}(x) \qquad \forall i = \overline{0, n-1} \tag{30}$$

при крайових умовах (5) і підсумуємо.

Нехай $\mathcal{K}(x, s, \lambda)$ − «функція Коші» КДР (4). Тоді функція

$$y_i(x, \lambda) = \sum_{m=0}^{2n-1} \mathcal{K}^{\{m\}}(x, a, \lambda) \cdot c_m + \int_a^x \mathcal{K}^{\{i\}}(x, s, \lambda)\, df_i(s), \quad i = \overline{0, n-1},$$

є загальним розв'язком неоднорідного КДР (28) і містить $2n$ невідомих констант. Для їх знаходження необхідно задовольнити крайові умови (5). В результаті отримуємо систему $2n$ алгебричних рівнянь:

$$\sum_{\nu=1}^{2n} p_{k\nu} \left(\sum_{m=0}^{2n-1} \mathcal{K}^{\{m\}[\nu-1]}(a, a, \lambda) \cdot c_m \right) =$$
$$= \sum_{\nu=1}^{2n} q_{k\nu} \left(\sum_{m=0}^{2n-1} \mathcal{K}^{\{m\}[\nu-1]}(b, a, \lambda) \cdot c_m + \int_a^b \mathcal{K}^{\{i\}[\nu-1]}(b, s, \lambda)\, df_i(s), \quad k = \overline{1, 2n},\right.$$

або на підставі означення «функції Коші» [13] − систему:

$$\sum_{m=0}^{2n-1} \left[p_{k,2n-m} - \sum_{\nu=1}^{2n} q_{k\nu} \mathcal{K}^{\{m\}[\nu-1]}(b, a, \lambda) \right] c_m =$$
$$= \sum_{\nu=1}^{2n} q_{k\nu} \int_a^b \mathcal{K}^{\{i\}[\nu-1]}(b, s, \lambda)\, df_i(s), \quad i = \overline{0, n-1}, \quad k = \overline{1, 2n}. \tag{31}$$

Оскільки λ не є власним значенням задачі (4), (5), то визначник цієї системи

$$\Delta(\lambda) = \det \left\| p_{k,2n-m} - \sum_{\nu=1}^{2n} q_{k\nu} \mathcal{K}^{\{m\}[\nu-1]}(b, a, \lambda) \right\|, \quad m = \overline{0, 2n-1}, \quad k = \overline{1, 2n}, \tag{32}$$

відмінний від нуля. У такому випадку константи c_m, $m = \overline{0, 2n-1}$, можуть бути визначені з системи єдиним чином.

Через $\gamma_{k\nu}(\lambda)$, $k, \nu = \overline{1, 2n}$, позначимо елементи матриці, яка є оберненою до матриці, складеної з коефіцієнтів системи (31). Тоді

$$c_m = \sum_{k=1}^{2n} \sum_{\nu=1}^{2n} \gamma_{m+1,k}(\lambda)\, q_{k\nu} \int_a^b \mathcal{K}^{\{i\}[\nu-1]}(b, s, \lambda)\, df_i(s), \quad m = \overline{0, 2n-1}.$$

Отже,

$$y(x, \lambda) = \sum_{m=0}^{2n-1} \sum_{k=1}^{2n} \sum_{\nu=1}^{2n} \mathcal{K}^{\{m\}}(x, a, \lambda)\, \gamma_{m+1,k}(\lambda)\, q_{k\nu} \int_a^b \mathcal{K}^{\{i\}[\nu-1]}(b, s, \lambda) df_i(s) +$$
$$+ \int_a^x \mathcal{K}^{\{i\}}(x, s, \lambda)\, df_i(s), \qquad i = \overline{0, n-1}.$$

Нехай $\gamma_{m+1,k}(\lambda)\,q_{k\nu} = \sigma^{k}_{m+1,\nu}(\lambda)$, $k,\nu=\overline{1,2n}$, $m=\overline{0,2n-1}$. Введемо позначення

$$G_i(x,s,\lambda) =$$

$$= \begin{cases} \sum_{m=0}^{2n-1}\sum_{k=1}^{2n}\sum_{\nu=1}^{2n}\sigma^{k}_{m+1,\nu}(\lambda)\,\mathcal{K}^{\{m\}}(x,a,\lambda)\,\mathcal{K}^{\{i\}[\nu-1]}(b,s,\lambda)+\mathcal{K}^{\{i\}}(x,s,\lambda), & x>s, \\ \sum_{m=0}^{2n-1}\sum_{k=1}^{2n}\sum_{\nu=1}^{2n}\sigma^{k}_{m+1,\nu}(\lambda)\,\mathcal{K}^{\{m\}}(x,a,\lambda)\,\mathcal{K}^{\{i\}[\nu-1]}(b,s,\lambda), & x<s, \quad i=\overline{0,n-1}. \end{cases}$$

Оскільки $\mathcal{K}^{\{i\}}(x,s,\lambda) = \dfrac{\partial^i \mathcal{K}(x,s,\lambda)}{\partial s^i}$, $i=\overline{0,n-1}$, то, очевидно, $G_i(x,s,\lambda) = \dfrac{\partial^i G(x,s,\lambda)}{\partial s^i}$. Теорему доведено. ◊

Означення 3. Функцію $G(x,s,\lambda) \overset{\text{def}}{=} G_0(x,s,\lambda)$ називаємо узагальненою функцією Гріна крайової задачі (4), (5). Вона має такі властивості:

1. $G(x,s,\lambda)$ на кожному з інтервалів (a,s), (s,b) за змінною x задовольняє однорідне КДР (4), а в точках a та b – крайові умови (5);
2. $G(x,s,\lambda)$ абсолютно неперервна за кожною змінною при фіксованій іншій та неперервна за сукупністю змінних (λ – параметр);
3. $G(x,s,\lambda)$ при $x=s$ задовольняє умови стрибків:

$$G^{[k]}(s+0,s,\lambda)-G^{[k]}(s-0,s,\lambda)=0, \quad k=\overline{0,n-1},$$
$$G^{[k]}(s+0,s,\lambda)-G^{[k]}(s-0,s,\lambda)=\Phi(\Delta\alpha_{ij},\Delta\beta_{ij}), \quad k=\overline{n,2n-2},$$
$$G^{[2n-1]}(s+0,s,\lambda)-G^{[2n-1]}(s-0,s,\lambda)=1+\Gamma(\Delta\alpha_{ij},\Delta\beta_{ij}),$$

де Φ,Γ – певні функції стрибків, причому
$\Phi(\Delta\alpha_{ij},\Delta\beta_{ij})=\Gamma(\Delta\alpha_{ij},\Delta\beta_{ij})=0$ при $\Delta\alpha_{ij}=\Delta\beta_{ij}=0$;

4. $G(x,s,\lambda)=G(s,x,\lambda)$.

Властивості *1–3* легко випливають з означення функції $G(x,s,\lambda)$ та елементарної теорії узагальнених КДР [13]. Доведення властивості *4* проводиться за схемою доведення подібної властивості з роботи [17].

Зауважимо, що у випадку, коли в коефіцієнтах $b_{ij}(x), a_{ij}(x)$ $\forall i,j$ відсутні дискретні компоненти, властивість *4* набуває «класичного» вигляду:

$$G^{[k]}(s+0,s,\lambda)-G^{[k]}(s-0,s,\lambda)=0, \quad k=\overline{0,2n-2},$$

$$G^{[2n-1]}(s+0,s,\lambda)-G^{[2n-1]}(s-0,s,\lambda)=1.$$

1. *Аткинсон Ф.* Дискретные и непрерывные граничные задачи. – М.: Мир, 1968. – 749 с.
2. *Ахиезер Н. И., Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Наука, 1966. – 543 с.
3. *Вибрации* в технике: Справочник в 6 т. / Под ред. В. В. Болотина. – М.: Машиностроение, 1978. – Т. 1. – 352 с.
4. *Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г.* Осциляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. – М.: Гостехтеоретиздат, 1951. – 318 с.
5. *Коддингтон Э. Д., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Из-дво иностр. лит., 1958. – 474 с.
6. *Коллатц Л.* Задачи на собственные значения с техническими приложениями. – М.: Наука, 1968. – 503 с.
7. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. – М.: Гостехтеоретиздат, 1956. – 632 с.

8. *Наймарк М. А* Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 526 с.
9. *Образцов И. Ф., Онанов Г. Г.* Строительная механика скошенных тонкостенных систем. – М.: Машиностроение, 1973. – 659 с.
10. *Пахолок Б. Б.* Об одном неравенстве типа Гронуолла – Беллмана // Вестн. Львов. политехн. ин-та. – 1989. – № 232. – С. 109–110.
11. *Стасюк М. Ф., Таций Р. М.* Корректные дифференциальные системы с мерами // Вестн. Львов. политехн. ин-та. – 1988. – № 222. – С. 89–90.
12. *Таций Р. М., Кисилевич В. В.* Краевая задача для обобщенной дифференциальной системы. – Львов, 1992. – 37 с. – Деп. в УкрИНТЭИ, № 1047.
13. *Тацій Р. М.* Дискретно-неперервні крайові задачі для диференціальних рівнянь з мірами: Автореф. дис. ... д-ра фіз.-мат. наук. – Львів, 1994. – 37 с.
14. *Тацій Р. М.* Узагальнені квазідиференціальні рівняння. – К., 1994. – 54 с. – (Препр. / АН України. Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача; № 2-94).
15. *Тацій Р. М., Копач М. І., Мазуренко В. В.* Аналітична залежність від параметра розв'язків узагальненого квазідиференціального рівняння другого порядку // Вісн. Прикарпат. ун-ту. – 1999. – № 2. – С. 3–6.
16. *Тацій Р. М., Стасюк М. Ф., Кісілевич В. В.* Неоднорідна дискретно-неперервна крайова задача для векторного КДР // Вісн. держ. ун-ту «Львів. політехніка». Сер. Прикл. математика. – 1998. – № 346. – С. 120–124.
17. *Тацій Р. М., Стасюк М. Ф., Кісілевич В. В.* Про спектральні властивості однієї дискретно-неперервної крайової задачі // Вісн. держ. ун-ту «Львів. політехніка». Сер. Прикл. математика. – 1996. – № 299. – С. 165–170.
18. *Тацій Р. М., Стасюк М. Ф., Кісілевич В. В., Мазуренко В. В.* Узагальнені дискретно-неперервні крайові задачі для векторного квазідиференціального рівняння четвертого порядку // Вісн. держ. ун-ту «Львів. політехніка». Сер. Прикл. математика. – 2000. – № 407. – С. 21–27.
19. *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. – М.: Наука, 1985. – 224 с.
20. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем. – М.: Мир, 1971. – 312 с.
21. *Якубович В. А., Старжинский В. М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. – М.: Наука, 1972. – 720 с.
22. *Antosik P., Ligeza J.* Products of measures and functions of finite variations // Proc. conf. «Generalized functions and operational calculus», Varna, 1975. – Sofia, 1979. – P. 20–26.

ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНЫЕ ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ КВАЗИДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТНОГО ПОРЯДКА

Для квазидифференциальных уравнений четного порядка получены основные спектральные свойства задач на собственные значения и установлена структура обобщенной функции Грина.

DISCRETE-CONTINUOUS BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR QUASI-DIFFERENTIAL EQUATIONS OF EVEN ORDER

For quasi-differential equations of even order, the fundamental spectral properties of the problems of eigenvalues are received and structure of the generalized Green function is established.

Нац. ун-т «Львів. політехніка»

Одержано
29.12.00