Федак І.В.

Математична олімпіада XIX Всеукраїнського турніру імені професора М. Й. Ядренка

З 31 жовтня по 5 листопада 2016 року в Чернівцях проходив XIX Всеукраїнський турнір юних математиків імені професора М.Й. Ядренка за участю 21 команди. За результатами чотирьох чвертьфінальних боїв 9 з них продовжили боротьбу у півфіналі, паралельно з яким для членів інших 12 команд 3 листопада була проведена олімпіада з математики.

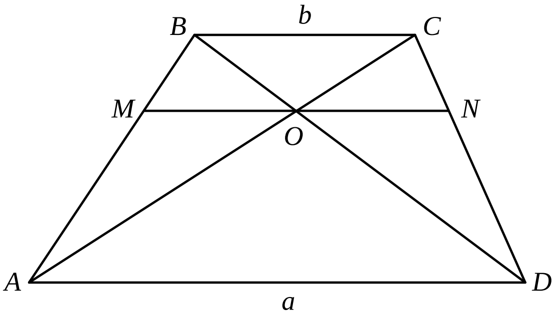
Перевіривши роботи учасників олімпіади, журі рекомендувало оргкомітету відзначити дипломами переможців таких учнів: Штефан Дмитро (І місце); Чередніченко Олександр, Боровков Микола, Качанов Станіслав, Левкович Роман, Валігура Михайло, Таргонський Валерій (ІІ місце); Іваненко Вікторія, Котельникова Валерія, Квасова Катерина, Гайдук Руслан, Тихомиров Валентин, Орел Ольга, Лазурко Віталій (ІІІ місце).

Пропонуємо вашій увазі умови завдань олімпіади та їх розв’язання.

1. Через точку O перетину діагоналей трапеції з основами $AD = a$ та $BC = b$ провели відрізок MN з кінцями на бічних сторонах трапеції, паралельний до її основ. Знайдіть довжину цього відрізка.

Відповідь. $MN = \dfrac{2ab}{a+b}$.

Скористаймося подібністю пар трикутників ABD і MBO, трикутників BDC і ODN та трикутників BOC і DOA (див. рис.).



З рівностей $\dfrac{MO}{a} = \dfrac{BO}{BD}$, $\dfrac{ON}{b} = \dfrac{OD}{BD}$ та $\dfrac{BO}{OD} = \dfrac{b}{a}$ отримаємо рівності $MO = ON$ та $\dfrac{MO}{a} + \dfrac{ON}{b} = 1$. Отже, $MN = \dfrac{2ab}{a+b}$.

2. На столі знаходяться 2016 монет. Двоє грають у гру, по черзі забираючи монети зі столу. За один раз можна взяти одну або дві монети. Крім того, один раз протягом гри кожен гравець має право забрати зі столу три монети. Програє той, хто змушений буде забрати останню монету. У котрого з двох гравців є виграшна стратегія? Опишіть цю стратегію і доведіть, що вона справді приводить до перемоги.

Відповідь. У першого гравця.

Для цього йому достатньо першим своїм ходом забрати зі столу одну монету, а далі на взяття суперником однієї монети відповідати забиранням двох монет, а на взяття суперником двох чи трьох монет – забиранням однієї монети доти, поки на столі після його ходу не залишаться 5 (якщо суперник жодного разу не взяв трьох монет) або 4 монети (якщо суперник скористався правом взяття трьох монет). Тоді наступним ходом перший зможе залишити на столі одну монету, яку змушений буде забрати другий, а отже, програти.

3. Дослідіть, яку найбільшу кількість цілих коренів може мати рівняння

$$x\left(x^2-1\right)\left(x^2-19\right)=a,\ a\in\mathrm{R}.$$

Відповідь. Щонайбільше три цілі корені, наприклад: $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=-1$ для $a=0$. Для $a\neq 0$ поза інтервалом $(-1;1)$ таке рівняння має не більше трьох дійсних коренів, а отже, й не більше трьох цілих коренів. При цьому на інтервалі $(-1;1)$ цілих коренів рівняння не має. (Скористайтесь для наочності ескізом графіка функції $y=x\left(x^2-1\right)\left(x^2-19\right)$.)

4. Знайдіть всі натуральні значення n, для яких $n^4+2n^3+2n^2+2n+2$ є квадратом натурального числа.

Відповідь. $n=1$.

Для інших натуральних n справджується нерівність

$$\left(n^2+n\right)^2<n^4+2n^3+2n^2+2n+2<\left(n^2+n+1\right)^2.$$

5. Розв’яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} x^3+x+y=x^2+2, \\ y^3+y+z=y^2+2, \\ z^3+z+x=z^2+2. \end{cases}$$

Відповідь. (1; 1; 1).

Запишемо задану систему рівнянь у вигляді:

$$\begin{cases}(x-1)(x^2+1)=1-y,\\(y-1)(y^2+1)=1-z,\\(z-1)(z^2+1)=1-x.\end{cases}$$

Отже, єдиний розв'язок: $x=y=z=1$. Справді, якщо $x<1$, то з рівнянь системи послідовно отримуємо $y>1$, $z<1$, $x>1$. Тому маємо суперечність. Аналогічно для $x>1$.

6. Задано три відрізки. Якщо з них не можна скласти трикутник, то більший з них вкорочують на суму довжин двох менших відрізків. Якщо трикутник знову не можна утворити, то повторюють вказану операцію. Чи може такий процес тривати до нескінченності?

Відповідь. Може.

Нехай довжини відрізків дорівнюють $1, x, x^2$, де x – корінь рівняння $x^3+x^2+x=1$ з інтервалу $(0;1)$. Тоді $1>x>x^2$ та $1>x+x^2$. Вкоротивши відрізок довжиною 1 на суму довжин двох менших відрізків, отримаємо три відрізки, довжини яких пропорційні довжинам початкових відрізків і дорівнюють $x, x^2, 1-x-x^2=x^3$. Така пропорційність зберігатиметься до нескінченності.