Федак І.В.

Розв'язуємо рівняння в цілих числах

На багатьох математичних олімпіадах та турнірах часто зустрічаються рівняння, розв'язки яких необхідно знайти на множині цілих чи натуральних чисел. Їх ще називають діофантовими рівняннями.

Не стали винятками у цьому плані і XIX Всеукраїнський турнір юних математиків імені професора М.Й. Ядренка та XII Івано-Франківський обласний ТЮМ, частина задач яких виявилася спільною.

У пропонованій Вашій статті наводяться задачі цих турнірів, розв'язки яких необхідно знайти у цілих числах, та методи їх розв'язування.

1. У Буратіно є 2016 золотих. Карабас Барабас пропонує йому зіграти в музичне казино з виконанням трьох пісень. Перед кожною з пісень Буратіно ставить якусь кількість золотих на кін і намагається вголос вгадати, хто буде співати наступну пісню: Карабас Барабас або Дуремар. Ті чують прогноз Буратіно і після цього обирають, хто буде співати. Якщо Буратіно вгадує, то поставлена сума подвоюється і повертається Буратіно. В іншому випадку Карабас Барабас і Дуремар забирають її собі. Умовою гри передбачено, що Дуремар буде співати більше пісень, аніж Карабас Барабас. Який найбільший гарантований виграш може забезпечити собі Буратіно?

Розв'язання. Припустимо, що Буратіно поставив на кін $x<2016$ золотих і назвав виконавцем Дуремара. Якщо заспівав Карабас Барабас, то Буратіно два наступні рази знову назве виконавцем Дуремара, ставлячи при цьому на кін всі свої гроші. У результаті цього в нього вкінці стане $4\cdot(2016-x)$ золотих. Якщо ж заспівав Дуремар, то після першої пісні в Буратіно стане $2016+x$ золотих, а з двох наступних пісень Дуремар виконає не менше, ніж Карабас Барабас.

Якщо би Буратіно перший раз запропонував співати Карабасу Барабасу, то у випадку згоди він, називаючи два наступні рази виконавцем Дуремара, отримав би вкінці $4\cdot(2016+x)$ золотих, що є більше, ніж у першому випадку. Але, якщо б при цьому заспівав Дуремар, то ситуація звелась би до другого з розглянутих вище варіантів тільки з $2016-x$ золотих у Буратіно. Отже, Буратіно для отримання найбільшого гарантованого прибутку перший раз необхідно пропонувати співати Дуремарові.

З аналогічних міркувань приходимо до висновку, що у випадку першої пісні, виконаної Дуремаром, друга пропозиція має бути зроблена йому ж з постановкою на кін $y<2016+x$ золотих. У випадку відмови, Буратіно третю пісню також пропонує співати Дуремарові, на що той змушений буде погодитися, і завершує гру, маючи $2\cdot(2016+x-y)$ золотих. А якщо Дуремар заспівав і другу пісню, то після неї в Буратіно виявиться $2016+x+y$ золотих. Але тепер, кому б Буратіно не запропонував співати третю пісню, він в обох випадках може втратити поставлені на кін золоті. Щоб така втрата була мінімальною, у такому разі остання ставка має скласти 1 золотий, після чого у Буратіно залишиться $2016+x+y-1$ золотих.

Визначивши x та y з системи рівнянь

$$4\cdot(2016-x)=2\cdot(2016+x-y)=2016+x+y-1,$$

отримаємо $x=1008\frac{1}{8}$, $y=1008\frac{3}{8}$, що відповідає максимальному гарантованому виграшу Буратіно в $4\cdot\left(2016-1008\frac{1}{8}\right)-2016=2015\frac{1}{2}$ золотих. А оскільки такий виграш має бути цілим числом, то він не перевищить 2015. Саме таку суму отримаємо для $x=y=1008$, якщо гра піде за останнім з описаних сценаріїв. У всіх інших випадках ця сума виявиться не меншою 2016.

2. Знайдіть усі трійки натуральних чисел $x>y>z$, для яких справджуються рівності: а) $x^2+y^2+z^2=2016$; б) $x^3+y^3+z^3=2016$.

Розв'язання. а). Оскільки при діленні квадратів натуральних чисел на 4 можливі лише остачі 0 або 1, то числа x,y,z – парні. Нехай $x=2m,\ y=2n,\ z=2k$. Тоді $m^2+n^2+k^2=504$. При цьому числа m,n,k – також парні. Якщо $m=2a,\quad n=2b,\quad k=2c,$ то $a^2+b^2+c^2=126$. Звідси простим перебором отримуємо 3 розв'язки (a,b,c): $(11,2,1)$, $(10,5,1)$, $(9,6,3)$. Відповідно для (x,y,z) отримаємо розв'язки: $(44,8,4)$, $(40,20,4)$, $(36,24,12)$.

б). Таких натуральних чисел x,y,z не існує. При діленні кубів натуральних чисел на 7 можливі лише остачі 0, 1 або 6, тому одне з чисел x,y,z ділиться на 7, отже, дорівнює 7, бо $14^3=2744>2016$. При діленні кубів натуральних чисел на 9 можливі лише остачі 0, 1 або 8, тому одне з чисел x,y,z ділиться на 3. Воно менше за 12, бо $7^3+12^3=2071>2016$. Але жодне з рівнянь: $7^3+3^3+z^3=2016$, $7^3+6^3+z^3=2016$, $7^3+9^3+z^3=2016$ не має розв'язків $z\in N$.

3. Піфагорова трійка $(x,y,z)=(3,4,5)$ має таку властивість: x,y – два послідовні натуральні числа. Чи існують ще такі трійки? Якщо так, то скільки їх існує – скінченна чи нескінченна кількість?

Розв'язання. $x^2+(x+1)^2=z^2 \Leftrightarrow 2z^2-(2x+1)^2=1.$ Позначивши $2x+1=t,$ отримаємо рівняння $2z^2-t^2=1,$ яке, наприклад, задовольняють числа $z_1=5,\ t_1=7.$

Нехай $z_n=z_{n-1}+t_{n-1},\ t_n=2z_{n-1}+t_{n-1},\ n\ge 2.$ Маємо

$$2z_n^2-t_n^2=2(z_{n-1}+t_{n-1})^2-(2z_{n-1}+t_{n-1})^2=-(2z_{n-1}^2-t_{n-1}^2) \text{ та } 2z_1^2-t_1^2=1.$$

Тому $2z_n^2-t_n^2=(-1)^{n-1}$, $n\in N$. Звідси знаходимо нескінченну кількість шуканих трійок (x,y,z): $x=x_n=\frac{1}{2}(t_n-1)$, $y=y_n=\frac{1}{2}(t_n+1)$, $z=z_n$, де $n\in N$ – непарні числа. Наприклад, для $n=3$ отримаємо трійку $(20,21,29)$.

Відзначимо, що лише в одній з таких трійок число z є квадратом натурального числа. Це трійка – $(119,120,169)$.

4. Чи можна заповнити цілими числами таблицю 6×6 так, щоб сума всіх чисел у кожному квадраті 3×3 цієї таблиці дорівнювала 2016, а сума всіх чисел у кожному квадраті 5×5 таблиці дорівнювала 2015 ?

Розв'язання. Існує нескінченна кількість варіантів такого заповнення. Розглянемо наступні дві таблиці:

a	b	a	a	b	a
a	b	a	a	b	a
a	b	a	a	b	a
a	b	a	a	b	a
a	b	a	a	b	a
a	b	a	a	b	a

x	y	x	x	y	x
y	z	y	y	z	y
x	y	x	x	y	x
x	y	x	x	y	x
y	z	y	y	z	y
x	y	x	x	y	x

У першій з них числа a та b потрібно вибрати такими, що $6a+3b=2016 \Leftrightarrow 2a+b=672$ та $15a+10b=2015 \Leftrightarrow 3a+2b=403$. Звідси знаходимо $a=941,\ b=-1210$.

У другій для виконання умов задачі, числа x, y, z потрібно взяти такими, що $4x+4y+z=2016$ та $9x+12y+4z=2015$. Звідси отримуємо: $z=2016-4x-4y$ та $7x+4y=6049$. Оскільки числа 7 та 4 є взаємно простими, то існує нескінченна кількість пар цілих чисел, які задовольняють останнє з цих рівнянь, отже, й нескінченна кількість трійок цілих чисел x, y, z, які задовольняють умови задачі. Наприклад, покладаючи $y=2$, знайдемо $x=863,\ z=-1444$.

5. Розв'яжіть у натуральних числах k,l,m рівняння

$$1+2^k+2^{k+l}=5^m.$$

Розв'язання. Для $k=1$ рівність не справджується, бо при діленні на 4 її ліва частина дає остачу 3, а права – остачу 1.

Для $k=2$ рівність не справджується, бо її ліва частина не ділиться на 5, а права – ділиться.

Для $k=3$ при діленні на 8 її ліва частина дає остачу 1, а права дає остачу 1 лише для парних $m=2n$. Тому рівняння можна записати у вигляді $2^{k+l}=\left(5^n-3\right)\left(5^n+3\right)$. При цьому множники у правій частині отриманого рівняння мають бути степенями двійки, різниця яких дорівнює 6. Це можливо лише для $n=1$. Отже, отримуємо розв'язок: $k=3,\ l=1,\ m=2$.

Для $k\geq 4$ при діленні на 16 її ліва частина дає остачу 1, а права дає остачу 1 лише для $m=4n$. Тому рівняння можна записати у вигляді $2^k\left(1+2^l\right)=625^n-1$. Для кожного натурального n права частина отриманого рівняння ділиться на $625-1=624=16\cdot 39$, отже, ділиться на 39. А його ліва частина на 39 не ділиться, бо остачі чисел 2^l при діленні на 39 можуть набувати лише значень 1, 2, 4, 8, 16, 32, 25, 11, 22, 5, 10, 20, які періодично повторюються з періодом 12. Тому інших розв'язків у натуральних числах немає.

6. Розв'яжіть у цілих числах рівняння

$$\sqrt{x^3-3xy^2+2y^3}=\sqrt[3]{13x+8}.$$

Розв'язання. Запишемо рівняння задачі у вигляді: $|x-y|\sqrt{x+2y}=\sqrt[3]{13x+8}$. Нехай $x-y=m\in Z$, $x+2y=n^2\in N$, ($n=0$ умову задачі не задовольняє). Тоді $13x+8=\left(|m|n\right)^3$. Числа x, $|m|$ та n^2 є цілими, тому звідси випливає, що число n раціональне, отже, й ціле, бо його квадрат – натуральне число. Можна вважати, що $n\in N$.

Оскільки $3x=n^2+2m$, то останню рівність запишемо у вигляді: $3\left(|m|n\right)^3=13n^2+26m+24$. Якщо $n\geq 2$ та $|m|\geq 2$, то $3\left(|m|n\right)^3\geq 48n^2$ та $3\left(|m|n\right)^3\geq 96|m|$. Отже, $3\left(|m|n\right)^3\geq 24n^2+48|m|>13n^2+26m+24$. Тому принаймні одне з чисел $|m|$ чи n повинно дорівнювати 1. Розглянемо чотири можливі випадки:

1). $n=1,\ m>0\Rightarrow 3m^3=26m+37$;

2). $n=1,\ m<0\Rightarrow -3m^3=26m+37$;

3). $m=-1,\ n\in N\Rightarrow -3n^3=13n^2-2$;

4). $m=1,\ n\in N\Rightarrow 3n^3=13n^2+50$.

Перші три рівняння розв'язків у цілих числах не мають. А четверте рівняння запишемо у вигляді: $(n-5)\left(3n^2+2n-10\right)=0$.

Звідси знаходимо єдиний цілий розв’язок $n=5$. При цьому пара $x=9$ та $y=8$ виявиться єдиним розв’язком задачі.

7. Знайдіть усі пари цілих чисел x та y, для яких

$$\left[\frac{x^2-y^3}{x+y^2}\right]=1+x-y.$$

(Тут $[a]$ – ціла частина числа a, тобто найбільше ціле число, що не перевищує a.)

Розв’язання. Додавши до обох частин рівності ціле число $y-x$, запишемо її у вигляді $\left[\frac{-xy(y-1)}{x+y^2}\right]=1$. Оскільки $\frac{-xy(y-1)}{x+y^2}\le 0$ для $x\ge 0$ та довільних цілих y, то підійдуть лише від’ємні цілі значення x. При цьому для $x\le -3$ отримаємо: $\frac{-xy(y-1)}{x+y^2}\ge\frac{3y(y-1)}{y^2-3}\ge 2$ при $x+y^2>0$ та $\frac{-xy(y-1)}{x+y^2}\le 0$ при $x+y^2<0$. Тому залишається проаналізувати лише два значення x:

1). $x=-1\Rightarrow\left[\frac{y(y-1)}{y^2-1}\right]=1\Rightarrow\left[\frac{y}{y+1}\right]=1\Rightarrow y=-n,\ n\ge 3;$

2). $x=-2\Rightarrow\left[\frac{2y(y-1)}{y^2-2}\right]=1\Rightarrow y=m,\ m\ge 3.$

У наступній задачі не ставиться безпосереднє завдання знаходження цілочислових розв’язків рівняння. Але відшукання таких коренів буде корисним при розв’язуванні.

8. Розв’яжіть рівняння $2^x=\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}x+1.$

Розв’язання. Легко переконатися, що коренями цього рівняння є числа: $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=3$. Доведемо, що інших коренів немає. Нехай $f(x)=2^x-\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{3}x-1$. Тоді

$$f'(x)=2^x\ln 2-\frac{4}{3}x-\frac{1}{3},\quad f''(x)=2^x\ln^2 2-\frac{4}{3},\quad f'''(x)=2^x\ln^3 2>0.$$

Звідси випливає, що рівняння $f''(x)=0$ має не більше одного кореня, рівняння $f'(x)=0$ – не більше двох коренів, а рівняння $f(x)=0$ – не більше трьох коренів.

І на завершення статті наведемо ще одну турнірну задачу, при розв'язуванні якої неявно довелося мати справу з діофантовими рівняннями.

9. У шаховому турнірі змагалися 5 шахістів: A, B, C, D, E. Турнір проходив у декілька кіл (кожен із кожним зіграв одну й ту саму кількість партій). Відомо, що всі учасники набрали різну кількість очок і за кількістю очок розташувались у порядку ABCDE (за перемогу нараховується 1 очко, за нічию – $1/2$, за поразку – 0). Відомо також, що за кількістю здобутих перемог вони розташувались у зворотному порядку: EDCBA, тобто найбільшу кількість перемог здобув E, учасник D здобув перемог менше за E, проте більше за C тощо. Доведіть, що не менше 15 партій завершились унічию.

Розв'язання. Оскільки кількості перемог учасників турніру різні, то в учасника D принаймні на 3 нічиї більше, ніж в E, в C – принаймні на 3 більше, ніж в D, в B – принаймні на 3 більше, ніж в C, в A – принаймні на 3 більше, ніж в B. Разом в учасників A, B, C, D маємо нічиїх принаймні на $3+6+9+12=30$ більше, ніж в E. При цьому кожна нічия врахована двічі, тому всього буде не менше 15 нічиїх. Рівно 15 нічиїх можна отримати, наприклад, у випадку шести кіл за такої турнірної таблиці:

	A	**B**	**C**	**D**	**E**	Очки	Пере-моги	Нічиї
A		+0=6–0	+1=4–1	+2=2–2	+4=0–2	13	7	12
B	+0=6–0		+2=2–2	+2=1–3	+4=0–2	12,5	8	9
C	+1=4–1	+2=2–2		+3=0–3	+3=0–3	12	9	6
D	+2=2–2	+3=1–2	+3=0–3		+2=0–4	11,5	10	3
E	+2=0–4	+2=0–4	+3=0–3	+4=0–2		11	11	0