Дискретне Трійкове Симетричне Вейвлет-Перетворення та Його Застосування для Цифрової Обробки Інформації у Розподілених Системах Управління

Артем Ізмайлов
кафедра інформатики
Прикарпатський національний університет
Івано-Франківськ, Україна
aiartefact@gmail.com

Любомир Петришин
кафедра управління
Університет AGH
Краків, Польща
l.b.petryshyn@gmail.com

Discrete Symmetric Ternary Wavelet Transform and Its Application for Digital Information Processing in Dispersed Management Systems

Artem Izmailov
dept. of Computer Science
Precarpathian National University
Ivano-Frankivsk, Ukraine
aiartefact@gmail.com

Lubomyr Petryshyn
dept. of Management
AGH University
Krakow, Poland
l.b.petryshyn@gmail.com

***Анотація*—На основі трійкових симетричних функцій синтезовано відповідне дискретне вейвлет-перетворення. Ефективність застосування отриманого перетворення у задачах відновлення даних за частиною коефіцієнтів оцінена у порівнянні з біортогональними вейвлетами та вейвлетом Хаара.**

***Abstract*—A discrete wavelet transform was synthesized on the basis of symmetric ternary functions. The application effectiveness of the synthesized transform was estimated for the problems of recovering data using part of the coefficients in comparison with biorthogonal and Haar wavelets.**

***Ключові слова*—цифрова обробка інформації; дискретне вейвлет-перетворення; трійкові симетричні функції**

***Keywords*—digital information processing; discrete wavelet-transform; symmetric ternary functions**

I. Вступ

Цифрова обробка інформації є ключовим елементом багатьох технічних систем, які використовуються у різних галузях економіки, управління, виробництва, зв'язку та медицини [1 – 8]. Відповідно, ефективні рішення у галузі цифрової обробки інформації призведуть до підвищення ефективності перебігу процесів, які включають цифрову обробку інформації, у прикладних галузях.

Одним із актуальних завдань цифрової обробки інформації є обробка цифрових сигналів на основі вейвлет-перетворень [1 – 3, 9, 10]. Відомо, що кожен вейвлет (та відповідне йому перетворення) пристосований для обробки лише певного класу сигналів, тобто має обмежений спектр застосування [2, 9, 10]. Звідси випливає, що актуальною є проблема синтезу нових вейвлет-функцій та відповідних їм вейвлет-перетворень, які дозволять з вищою ефективністю проводити обробку конкретних цифрових сигналів, у тому числі тих, для яких існуючі методи працюють із недостатнім рівнем ефективності.

Аналіз останніх досліджень у галузі вейвлет-перетворень вказує на те, що дослідження щодо реалізації дискретних вейвлет-перетворень на основі трійкових симетричних функцій не проводились [1 – 3, 5]. Водночас, доведена вища ефективність трійкової симетричної логіки у порівнянні із двійковою [4] та успішний синтез дискретного ортогонального перетворення на основі трійкових симетричних функцій [8] вказують на перспективність розвідок у описаному напрямі.

Метою дослідження є синтез дискретного вейвлет-перетворення на основі трійкових симетричних функцій та оцінювання ефективності його застосування за критерієм середньоквадратичної похибки відновлення за частиною коефіцієнтів перетворення.

Наукова новизна отриманих результатів полягає в успішному синтезі дискретного вейвлет-перетворення на основі трійкових симетричних функцій та проведенні оцінки ефективності його застосування у порівнянні з найбільш уживаними вейвлет-перетвореннями за критерієм середньоквадратичної похибки відновлення за частиною коефіцієнтів перетворення.

II. Трійковий симетричний материнський вейвлет

В основі довільного вейвлет-перетворення лежить функція, яку називають материнським вейвлетом [2, 9]. Відповідне вейвлет перетворення синтезується на основі системи функцій, які є стисненими та зсунутими по осі абсцис (здебільшого представляє вісь часу) копіями материнського вейвлета [2, 9]. Якщо материнський вейвлет позначити, як ψ, то описана система функцій набуде вигляду (1) [9].

$$\psi_{m,n}(x) = a_0^{-m/2}\psi(a_0^{-m}x - nb_0), \tag{1}$$

де $a_0 \neq 1$ – параметр стиску, b_0 – параметр зсуву, $m,n \in \mathrm{Z}$.

У роботах [5 – 7] синтезовано ортогоналізовану систему добутків трійкових симетричних функцій, на основі якої успішно побудоване відповідне ортогональне перетворення [8]. У роботі [5] доведено доцільність дослідження можливості застосування функцій синтезованої системи у якості материнського вейвлета. Відправною точкою даного дослідження можуть слугувати функції з першого піднабору нульового набору синтезованої системи ортогоналізованих добутків трійкових симетричних функцій, графіки яких представлені на рис. 1.

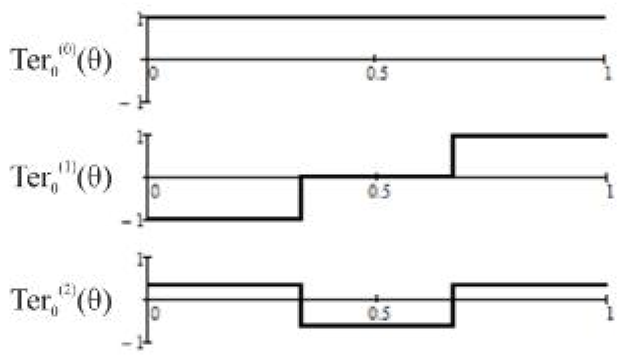

Рис. 1. Графіки функцій нульового набору системи ортогоналізованих добутків трійкових симетричних функцій

У якості материнського вейвлета доцільно обрати функцію $Ter_0^{(1)}(\theta)$, оскільки вона являє собою трійкову симетричну функцію у класичному вигляді. Дана функція не є нормалізованою (її норма у просторі L_2 не дорівнює одиниці), тому доцільно використати її нормалізовану форму, яка використовується у відповідному ортогональному перетворенні (детальна інформація про перебіг даної нормалізації може бути знайдена у [8]). Відповідно, трійковий симетричний материнський вейвлет може бути визначений у вигляді (2).

$$\psi 1(t) = \begin{cases} -\sqrt{\dfrac{3}{2}}, t \in [0, \dfrac{1}{3}), \\ \sqrt{\dfrac{3}{2}}, t \in [\dfrac{2}{3}, 1), \\ 0, t \notin [0, \dfrac{1}{3}) \cup [\dfrac{2}{3}, 1). \end{cases} \tag{2}$$

Функція (2) є вейвлетом, оскільки її середнє значення рівне нулю по всій часовій області, на що вказує значення інтегралу (3).

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi 1(t)dt = 0 . \tag{3}$$

Зі скінченності інтегралу (4) випливає, що функція (2) володіє скінченною енергією та одиничною нормою у просторі L_2.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi 1(t)|^2 dt = 1 . \tag{4}$$

Для того, щоб функція (2) могла бути використаною у якості основи відповідного вейвлет-перетворення необхідно, щоб вона мала принаймні один нульовий момент [9]. Довільна функція $f(t) \in L_2(R)$ має M нульових моментів, якщо для всіх цілих значень k=0,1,2,…,M–1 виконується рівність (5).

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^k f(t)dt = 0 . \tag{5}$$

Функція (2) має один і тільки один нульовий момент, оскільки при k=0 інтеграл у рівності (5) рівний нулю, а при k=1 – ні. Цей факт підтверджує те, що функція (2) не є гладкою функцією (вона є кусково-неперервною).

Функція (2) має компактний носій, що очевидно з її аналітичного виразу. Дана властивість вказує на можливість побудови на основі даної функції швидкого вейвлет-перетворення [9].

Функція (2) задовольняє умову допустимості (6) [9], оскільки для даної функції вираз (6) приймає значення ≈0.1152. Скінченність виразу (6) є необхідною умовою існування оберненого вейвлет-перетворення на основі вейвлета ψ(x) [9].

$$C_{\psi} = \int_{0}^{\infty} \frac{\left|\hat{\psi}(f)\right|^2}{f} dt < +\infty, \quad (6)$$

де $\hat{\psi}(x)$ – Фур'є-образ вейвлета $\psi(x)$.

Оскільки функція (2) задовольняє усі описані вимоги, то вона може бути використана у якості материнського вейвлета і на її основі можливий синтез відповідного вейвлет-перетворення, зокрема неперервного.

III. Дискретне вейвлет-перетворення на основі трійкових симетричних функцій

У випадку неперервного вейвлет-перетворення відбувається інтегрування по параметрах зсуву та стиску у виразі (1). Неперервне вейвлет-перетворення дозволяє здійснити найточніший вейвлет-аналіз сигналу (у порівнянні з дискретним перетворенням), однак, дуже часто, це доволі громіздкий процес, який не передбачає, навіть, подальше відновлення сигналу [2, 9]. Відповідно, сферою застосування неперервного вейвлет-перетворення є спеціалізовані системи, які рідко зустрічаються у повсякденних застосунках цифрової обробки інформації. Натомість, дискретне вейвлет-перетворення забезпечує меншу, але цілком прийнятну, точність аналізу сигналів та набагато вищу швидкість обчислення (швидкі алгоритми з використанням згорткових фільтрів), що зумовило широкий спектр його застосування у системах цифрової обробки інформації.

Дискретизація неперервного вейвлет-перетворення накладає ряд обмежень на покривання спектру аналізованого сигналу спектром вейвлет-функції, для подолання яких необхідно увести масштабну функцію φ, причому вона повинна володіти рядом властивостей. По-перше, її середнє значення повинне бути рівне одиниці, по-друге, повинні існувати залежності (7) та (8), по-третє, функції, які породжені функціями φ та ψ, повинні бути ортогональними [9].

$$\varphi(x) = \sum_{n} c_n \varphi(a_0 x - b_0 n), \quad (7)$$

де $\sum_{n} |c_n| < \infty$.

$$\psi(x) = \sum_{n} g_n \varphi(a_0 x - b_0 n), \quad (8)$$

де $\sum_{n} |g_n| < \infty$.

Сімейство функцій, породжених функцією φ утворюється згідно залежності (1), з параметрами зсуву та стиску аналогічними до обраної функції ψ. Очевидною є вимога рівності носіїв функцій φ та ψ.

У якості масштабної функції для вейвлета $\psi 1$ найпростіше обрати характеристичну функцію на проміжку [0, 1) (9), яка є масштабною функцією у вейвлет-перетворенні Хаара [9].

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1, t \in [0, 1), \\ 0, t \notin [0, 1). \end{cases} \quad (9)$$

Прийнято вважати, що у виразі (1) $a_0 > 1$, а $b_0 > 0$, хоча дані обмеження не є обов'язковими [9]. Для кожного вейвлета параметри стиску та зсуву підбираються індивідуально. При розробці багатьох систем вейвлетів параметр a_0 приймався рівним 2, а параметр b_0 – 1, як найпростіший можливий варіант [9]. Застосування даної практики до функцій (2) та (9) приведе до неортогональної системи функцій та неможливості формування для функцій φ та ψ виразу (8). Однак, якщо покласти параметр a_0 рівним 3, а b_0 – 1, то можливість формування залежності (8) стає очевидною, а система функцій породжених функцією (2) (система, яка породжена функцією (9) формується аналогічно) буде задана аналітичним виразом (10).

$$\psi_{m,n}(x) = 3^{-m/2} \psi(3^{-m} x - n). \quad (10)$$

Водночас, як показано у [9], при стисненні функцій у 3 рази з кожною новою ітерацією перетворення, спектр, який покривається функціями φ та ψ буде теж зменшуватись утричі, тобто покриватись буде лише 2/3 спектру вхідного сигналу. Відповідно, виникає необхідність уведення ще одного материнського вейвлета і відповідної йому системи функцій (побудованої аналогічно до (10)). Враховуючи взаємну ортогональність функцій $Ter_n^{(i)}(\theta)$ та отримані у роботах [5 – 8] результати, у якості другого материнського вейвлета доцільно обрати нормалізовану функцію $Ter_0^{(2)}(\theta)$ у вигляді (11).

$$\psi 2(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}, t \in [0, \frac{1}{3}) \cup [\frac{2}{3}, 1), \\ -\sqrt{2}, t \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}), \\ 0, t \notin [0, 1). \end{cases} \quad (11)$$

Функція (11) задовольняє усі наведені вимоги для вейвлет-функцій та має 2 і тільки 2 нульових моменти, що збільшує можливості вейвлет-аналізу гладких функцій. Аналітична залежність виду (8) для функцій (9) та (11) є очевидною.

Враховуючи те, що функції (2), (9) та (11) є, за своєю суттю, нормалізованими функціями $Ter_0^{(i)}(\theta)$, i=0,…,2, та ортогональність матриці їх значень на проміжку [0, 1) [8], а також трійкову природу їх проміжків значень, можна стверджувати, що породжені ними згідно (10) функції утворюють ортогональну систему, з чого випливає можливість синтезу на основі функцій (2), (9) та (11) дискретного вейвлет-перетворення.

IV. Ефективність застосування дискретного трійкового симетричного вейвлет-перетворення

Одним із завдань вейвлет-аналізу у системах цифрової обробки інформації є відновлення сигналу за частиною вейвлет-коефіцієнтів [2, 10]. Для оцінювання ефективності функціонування вейвлет-перетворень за даним критерієм використовується критерій середньо-квадратичної похибки відновлення MSE (12) [10].

$$MSE = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}(X(i) - X_r(i))^2 , \qquad (12)$$

де $X(i)$ – вхідні дані, $X_r(i)$ – відновлені за частиною коефіцієнтів дані.

Згідно критерію (12) здійснено оцінку ефективності відновлення сигналів за 10%, 5%, 1% коефіцієнтів вейвлет-перетворення дискретного трійкового симетричного вейвлет-перетворення (ST) у порівнянні з вейвлетом Хаара (Haar) та біортогональним вейвлетом з параметрами 1.3 (bior1.3). Аналіз проводився з використанням тестових сигналів freqbrk (два синусоїдальні сигнали з різними частотами), noissin (зашумлений синусоїдальний сигнал) та sumsin (сума двох синусоїдальних сигналів). Результати проведеного аналізу наведено у табл. 1.

Таблиця I. Значення похибок відновлення сигналів за 10%, 5%, 1% коефіцієнтів вейвлет-перетворення

Сигнал	**% коефіцієнтів**	**ST**	**Haar**	**bior1.3**
freqbrk	10%	0,0335	0,0443	0,0402
	5%	0,0917	0,1094	0,1029
	1%	0,2504	0,2731	0,3066
noissin	10%	0,0618	0,0615	0,0637
	5%	0,083	0,0811	0,0844
	1%	0,2349	0,2241	0,2615
sumsin	10%	0,6249	0,6585	0,6738
	5%	0,7873	0,8071	0,8246
	1%	1,1335	1,1343	1,2227

З табл. 1 випливає, що в узагальненому випадку за критерієм (12) дискретне трійкове симетричне вейвлет-перетворення ефективніше у порівнянні з перетворенням Хаара на 5,4%, у порівнянні з біортогональним вейвлетом з параметрами 1.3 на 8,8%. При цьому, спостерігається менша (приблизно на 1,5%) ефективність у порівнянні з перетворенням Хаара для сигналу noissin, яка пов'язана із синусоїдальним трендом даного сигналу, який ефективніше апроксимується синусоподібними функціями Хаара.

Загальна ефективність розробленого перетворення пояснюється вищою концентрацією енергії у апроксимуючих коефіцієнтах за рахунок зменшення їх кількості на кожній ітерації, у порівнянні з перетвореннями, для яких параметр стиску рівний *2*.

Висновки

Трійкові симетричні функції задовольняють вимоги щодо материнських вейвлетів, а тому можуть слугувати основою для синтезу відповідного дискретного вейвлет-перетворення. Водночас, синтез даного перетворення вимагає принципово відмінного підходу щодо формування сімейств вейвлет-функцій, а саме використання параметру стиску a_0 рівного *3* (замість найбільш уживаного значення *2*). Даний підхід вимагає уведення другого материнського вейвлета у перетворення, що спричиняє зміну співвідношення кількості апроксимуючих та деталізуючих (яких тепер удвічі більше, і які поділені на дві групи) коефіцієнтів. Дана конструктивна відмінність створює ряд потенційних переваг синтезованого перетворення, які потребують подальшого вивчення.

Подальші дослідження полягають у розширеному аналізі ефективності застосування синтезованого перетворення на основі критерію (12) для великих груп тестових сигналів та порівнянні отриманих результатів з більшою кількістю сімейств вейвлетів. Доцільним є аналіз ефективності на основі відмінних від (12) критеріїв. Окреслені дослідження дозволять чітко визначити спектр застосування синтезованого вейвлет-перетворення.

Література References

[1] Э. Айфичер, Б. Джервис. Цифровая обработка сигналов: практический подход, 2-е издание: Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2004. – 992 с.

[2] P.S. Addison, The Illustrated Wavelet Transform Handbook: Introductory Theory and Applications in Science, Engineering, Medicine and Finance (Second Edition) / P.S. Addison, CRC Press, 2016, P. 446.

[3] S. Prasad, Information Fusion in the Redundant-Wavelet-Transform Domain for Noise-Robust Hyperspectral Classification / S. Prasad, W. Li, J.E. Fowler, L.M. Bruce // IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing. – September 2012. – Vol. 50, No. 9. – P. 3474-3486. doi: 10.1109/TGRS.2012.2185053

[4] B. Hayes, Computing science. Third base. A reprint from American Scientist, the magazine of Sigma Xi, the Scientific Research Society, vol. 89, Nr. 6. November–December 2001, pp. 490-494

[5] А.В. Ізмайлов, Аналіз властивостей систем трійкових симетричних функцій та їх застосування для цифрової обробки інформації у комп'ютеризованих системах управління / А.В. Ізмайлов, Л.Б. Петришин // Інформаційні технології: сучасний стан та перспективи : монографія / за заг. ред. В.С. Пономаренка. – Х. : ТОВ «ДІСА ПЛЮС», 2018. – С. 208-222.

[6] A. Izmailov, L. Petryshyn, "Symmetric ternary functions and their application in orthogonal transforms," 2017 IEEE First Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering (UKRCON), Kiev, 2017, P. 836-841. doi: 10.1109/UKRCON.2017.8100364

[7] А.В. Ізмайлов, Трійкові симетричні функції та їх застосування у цифровій обробці інформації / А. В. Ізмайлов, Л. Б. Петришин // Системи обробки інформації. — 2016. — № 4. — С. 41-44.

[8] А.В. Ізмайлов, Застосування ортогонального перетворення на основі трійкових симетричних функцій для цифрової обробки інформації / А.В. Ізмайлов // Методи та засоби кодування, захисту й ущільнення інформації : тези доповідей Шостої Міжнародної науково-практичної конференції, м. Вінниця, 24-25 жовтня 2017 року. – Вінниця: ВНТУ, 2017. – С. 93-96.

[9] И. Добеши, Десять лекций по вейвлетам: Пер. с англ. / И. Добеши. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 464 с.

[10] Д. Сэломон, Сжатие данных, изображений и звука / Д. Сэломон; пер. с англ. В.В. Чепыжова. – М.: Техносфера, 2004. – 368 с.