УДК 517.98

# АЛГЕБРАЇЧНІ СТРУКТУРИ У ПРОСТОРІ ЛІПШИЦЕВИХ ФУНКЦІЙ.

**М.В. Марцінків, І-А. В. Самілів**
*Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника;*
*76018, Івано-Франківськ, вул. Шевченка, 57;*
*e-mail:* mariadubey@gmail.com, ilona.samiliv2312@gmail.com

*У статті досліджено алгебри ліпшицевих функцій метричного простору та їх скалярні гомоморфізми, використовуючи вільні банахові простори.*

***Ключові слова:*** *алгебри ліпшицевих функцій, вільні банахові простори.*

## 1. Попередні відомості

Розглянемо метричний простір $X$ з додатною дійснозначною функцією $\alpha(x)$ такою, що $|\alpha(x_1)-\alpha(x_2)|\le\rho(x_1,x_2)\le\alpha(x_1)+\alpha(x_2),$ для довільних елементів $x_1,x_2\in X$. Функцію $\alpha(x)$ називають нормою метричного простору, а метричний простір з заданою нормою – нормованою множиною.

Відомо, що довільний метричний простір $X$ є нормованим відносно норми $\alpha(x)=\rho(\theta,x),$ де $\theta$ – довільна фіксована точка простору $X$. Такий простір $(X,\alpha)$ називається простором з відміченою точкою. Позначимо $\mathrm{Lip}_0(X,E)$ підмножину всіх ліпшицевих відображень $F(x)$ з метричного простору $(X,\alpha)$ з відміченою точкою $\theta$ у нормований лінійний простір $E,$ таких, що

$$\| F(x)\|\le L_F\alpha(x),$$

де $L_F$ – ліпшицева стала, тобто найменша константа, при якій виконується нерівність

$$\rho_E(F(x_1),F(x_2))\le L_F\rho_X(x_1,x_2).$$

Легко бачити, що ліпшицеве відображення на довільному просторі з відміченою точкою належить класу $\mathrm{Lip}_0(X,E)$ тоді і тільки тоді, коли $F(\theta)=0$. Простір $\mathrm{Lip}_0(X,E)$ є банаховим простором з нормою $\| F\|=L_F$. Множину всіх ліпшицевих відображень, які діють з метричного простору $X$ з відміченою точкою $\theta$ та нормою $\alpha(x)$ у поле дійсних або комплексних чисел позначатимемо $\mathrm{Lip}_0(X)$.

Нехай $X,Y$ – метричні простори з відміченими точками $\theta_X$ і $\theta_Y$ відповідно. Множину ліпшицевих відображень $F:X\to Y$ таких, що $F(\theta_X)=\theta_Y$ будемо позначати $\mathrm{Lip}_0(X,Y)$.

Відомою є наступна теорема:

**Теорема 1.** *Нехай $X$ – нормована множина. Існує єдиний, з точністю до ізометричного ізоморфізму банахів простір $B(X)$ над полем $K$, а також ізометричне вкладення $\nu : X \to B(X)$ такі, що*

1) *Вектори $\nu(x)$ є лінійно незалежними у $B(X)$ для $\alpha(x) > 0$ і лінійна оболонка елементів $\nu(x)$ є щільною в $B(X)$.*
2) *Довільне відображення $F$ з $\mathrm{Lip}_0(X, E)$ може бути продовжене до лінійного неперервного оператора $\tilde{F} : B(X) \to E$, причому $\|\tilde{F}\| = L_F$ для довільного нормованого простору $E$.*
3) *Якщо $K = \mathbb{R}$ або $K = \mathbb{C}$ тоді для довільної замкненої підмножини $X_0 \subset X$ з фіксованою точкою $\theta \in X_0$ вкладення $X_0 \to X$ продовжується до ізометричного (у випадку $K = \mathbb{R}$) та ізоморфного (у випадку $K = \mathbb{C}$) вкладення банахових просторів $B(X_0) \to B(X)$. Для комплексного випадку норма оператора вкладення $B(X_0) \to B(X)$ не перевищує $\sqrt{2}$.*

Твердження теореми 1 були незалежно доведені Ж. Флудом [2], В. Пестовим [4] і Н. Вівером [5]. Таким чином, простір $\mathrm{Lip}_0(X, E)$ ізометричний до простору $\mathcal{L}(B(X), E)$ всіх неперервних лінійних операторів з $B(X)$ в $E$, а простір ліпшицевих функцій $\mathrm{Lip}_0(X)$ можна ототототожнити з простором лінійних неперервних функціоналів на $B(X)$, тобто $(B(X))' = \mathrm{Lip}_0(X)$. Простір $B(X)$ називається вільним банаховим простором над метричним простором $X$. Деякі властивості вільних банахових просторів описані у [1], [3].

Нормована множина $X$ з фіксованою точкою $\theta$ називається нормалізованою, якщо $\alpha(x) = 1$, для довільних $x \in X$, $x \neq \theta$. Нехай $Y$ – метричний простір такий, що $\mathrm{diam}\, Y \leq 2$. Тоді ми можемо додати фіксовану точку $\theta$ і покласти $\rho(x, \theta) = 1$ для довільних $x \in Y$. Позначимо нормовану множину $Y \cup \theta$ через $Y^+$. Тоді $Y^+$ є нормалізованою множиною і $\mathrm{Lip}(Y) = \mathrm{Lip}_0(Y^+)$.

Позначимо через $\mathcal{N}$ множину всіх повних нормалізованих множин. Нехай $X$ є нормованою множиною і $\mathrm{diam}\, X < \infty$. Тоді $\mathrm{Lip}(X)$ є банаховою алгеброю, яка є підалгеброю алгебри всіх обмежених неперервних функцій на $X$. Якщо $X \in \mathcal{N}$, тоді $\mathrm{Lip}(X)$ є унітальною банаховою алгеброю. Наступна теорема доведена у $[5]$.

**Теорема 2.** *Нехай $X$ є обмеженою повною нормованою множиною, тоді множина $*$-слабко неперервних скалярних гомоморфізмів простору $\mathrm{Lip}(X)$ є ізометричною до $X$. Метрика узгоджена із $*$-слабкою топологією на $X$.*

Відмітимо, що в цьому випадку, $B(X)' = \mathrm{Lip}_0 X$ є підалгеброю (без одиниці) простору $\mathrm{Lip}\, X$.

**Наслідок 1.** *Нехай* $X, Y \in \mathcal{N}$ *і оператор* $T : B(Y) \to B(X)$ *є лінійним оператором, таким що* $T^* : B(X)' \to B(Y)'$ *є ізоморфізмом алгебр. Тоді* $T(Y) = X$, *а тому* $X$ *та* $Y$ *є ліпшицево еквівалентними.*

*Доведення.* Другий спряжений оператор $T^{**}$ є відображенням між скалярнозначними гомоморфізмами з $\mathrm{Lip}(Y) = B(Y)' \oplus \mathbb{C}$ у скалярнозначні гомоморфізми з $\mathrm{Lip}(X) = B(X)' \oplus \mathbb{C}$. Дійсно, якщо $\varphi$ є скалярнозначним гомоморфізмом з $\mathrm{Lip}(X)$ і $u, v \in \mathrm{Lip}\, X$, тоді

$$\varphi(T^*(uv)) = (\varphi, T^*(uv)) = (\varphi, T^*(u)T^*(v)) = (\varphi, T^*(u))(\varphi, T^*(v)) =$$
$$(T^{**}(\varphi), u)(T^{**}(\varphi), v) = (T^{**}(\varphi), uv).$$

Оскільки кожен спряжений оператор є $*$-слабко неперервним, $T^{**}$ відображає $*$-слабко неперервні гомоморфізми у $*$-слабко неперервні. Тому, звуження оператора $T$ на $Y$ відображає $Y$ у $X$. Це вірно і для $T^{-1}$.

Відмітимо, що з теореми 2 випливає, що якщо $T^*$ є ізометричним ізоморфізмом алгебр, тоді $X$ та $Y$ є ізометричними.

**Теорема 3.** *Нехай* $X$ *– повна нормована множина, така що* $\alpha(x) \geq 1$ *для довільних* $x \in X$, $x \neq \theta$. *Тоді існує замкнена підмножина* $X^\eta$ *одиничної сфери* $B(X) \cup \theta$ *така, що* $X^\eta \in \mathcal{N}$ *і* $B(X)$ *є ізометрично ізоморфним до* $B(X^\eta)$.

*Доведення.* Для довільної точки $x \in X$, $x \neq \theta$ покладемо $\eta(x) = x / \| x \|$ і $\eta(\theta) = 0$. Нехай $X^\eta$ – замикання множини $\{\eta(x) : x \in X, x \neq \theta\} \cup 0$. Ясно, що $\mathrm{span}\, X = \mathrm{span}\, X^\eta$. Якщо $f \in \mathrm{Lip}_0(X)$, тоді звуження $f_0$ лінійного функціоналу $\tilde{f}$ на $X^\eta$ є ліпшицевим відображенням і $L_{f_0} \leq L_f$. Відображення $f \mapsto f_0$ є ін'єктивним, оскільки якщо $f(x) \neq 0$, тоді $\tilde{f}(x / \| x \|) \neq 0$. З іншого боку $X \subset \mathrm{span}\, X^\eta$ і звуження $f'$ відображення $\tilde{f}_0$ на $X$ є ліпшицевим відображенням і, отже, $f = f'$. Крім того,

$$\| \tilde{f}_0 \| = L_{f_0} \geq L_{f'} = L_f .$$

Таким чином, $L_{f_0} = L_f$. Отже, для довільного $z \in \mathrm{span}\, X = \mathrm{span}\, X^\eta$,

$$\| z \|_{B(X)} = \sup_{L_f \leq 1,\, f \in Lip_0(X)} | \tilde{f}(z) | = \| z \|_{B(X^\eta)} .$$

Таким чином $B(X)$ є ізометрично ізоморфним до $B(X^\eta)$.

Нехай $(X, \rho)$ – метричний простір і $x_0 \in X$. Ми можемо додати фіксовану точку $\theta$ поклавши $\rho(\theta, x_0) = 1$ і $\rho(\theta, x) = 1 + \rho(x, x_0) = \alpha(x)$ для довільних $x \in X$. Тоді $(X, \rho, \alpha)$ є нормованою множиною, такою що $\alpha(x) \geq 1$ для довільних $x \in (X, \rho, \alpha)$, $x \neq \theta$. Якщо $X$ є банаховим простором, позначимо $X^+ = (X, \rho, \alpha)$ для $x_0 = 0$.

**Наслідок 1.** *Нехай $X$ – банахів простір ізометричний до його гіперплощини. Тоді існує замкнена підмножина $M_X$ одиничної сфери $S_X$ простору $X$ така що*

1) *Простір $B(X^+)$ ізоморфний до $B(M_X \cup 0)$.*
2) *Звуження ліпшицевого відображення з $\mathrm{Lip}(X)$ на $M_X$ є банаховою алгеброю, ізоморфною (як банахів простір) до* $\mathrm{Lip}(X)$.
3) *Множина $M_X$ може бути ототожнена з множиною $*$-слабко неперервних скалярних гомоморфізмів цієї алгебри.*

*Доведення.* Нехай $y_0 \in S_x$ і $\phi_0$ є лінійним функціоналом на $X$ таким, що $\|\phi_0\| = 1 = \phi_0(y_0)$. Позначимо через $X_0$ афінний підпростір простору $X$, $X_0 = y_0 + \ker \phi_0$. Множина $X_0 \cup 0$ задовольняє умови теореми 3. Позначимо через $M_X$ замикання множини $\eta(X_0 \cup 0)$. За теоремою 3, $B(M_X)$ є ізометрично ізоморфним до простору $B(X_0 \cup 0)$, який ізоморфний до $B(X^+)$. Тому $M_X \cup 0 \in \mathcal{N}$, $\mathrm{Lip}(M_X \cup 0)$ є банаховою алгеброю і за теоремою 2, $M_X$ може бути ототожнена з множиною $*$-*слабко* неперервних скалярнозначних гомоморфізмів. Крім того, $\mathrm{Lip}(M_X) = B(M_X \cup 0)' = B(X^+)' = \mathrm{Lip}(X)$.

***Література***

1. Dubei M. Free Banach Spaces and Extension of Lipschitz Maps / M. Dubei, E. D. Tymchatyn, A. Zagorodnyuk // Topology, Elsevier. – 2009. – V. 48, № 2. – P. 203-213.

2. Flood J. Free topological vector spaces / J. Flood. – Candberra: Australian National University, 1975. – 109 p. ( Ph.D. thesis).

3. Godefroy G. Free Banach spaces and the approximation properties / G. Godefroy, N. Ozawa // Proc. Amer. Math. Soc. – 2014. – V. 142, № 5. – P. 1681-1687.

4. Pestov V. Douady's conjecture on Banach analytic spaces / V. Pestov // C.R. Acad. Sci. Paris – 1994. – V. 319, séries I. – P. 1043-1048.

5. Weaver N. Lipschitz Algebras / N. Weaver. – Singapore, New Jersey, London, Hong Kong: World Scientific, 1999. – 323 p.

## ALGEBRAIC STRUCTURES IN THE SPACES OF LIPSCHITZ FUNCTIONS

**M.V. Martsinkiv, I-A. V. Samiliv**

*Vasyl Stefanyk Precarpathian National University;*

*76018, Ivano-Frankivsk, Shevchenko str., 57;*

*e-mail: mariadubey@gmail.com, ilona.samiliv2312@gmail.com*

*The algebra of Lipschitz functions of the metric space and their scalar homomorphisms are studied in this paper, using free Banach spaces.*
***Key words:*** *algebras of Lipschitz functions, free Banach spaces.*