УДК 511.176

Т.П. Гой

Прикарпатский национальный университет имени Василия Стефаника,
Украина, г. Ивано-Франковск, *e-mail:* tarasgoy@yahoo.com

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ МАТРИЦ ТЕПЛИЦА-ХЕССЕНБЕРГА И ЧИСЛА ЛЮКА

Выведены формулы для вычисления определителей матриц Теплица-Хессенберга специального вида, элементами которых являются числа Люка.

Ключевые слова: *матрица Теплица-Хессенберга, числа Люка, числа Фибоначчи, определитель.*

T.P. Goy

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University,
Ukraine, Ivano-Frankivsk, *e-mail*: tarasgoy@yahoo.com

ON DETERMINANTS OF TOEPLITZ-HESSENBERG MATRICES AND LUCAS NUMBERS

In this short note, we study three families of Toeplitz-Hessenberg determinants the entries of which are Lucas numbers.

Keywords: *Toeplitz-Hessenberg matrix, Lucas numbers, Fibonacci numbers, determinant.*

1. Введение. Матрицей Теплица-Хессенберга n-го порядка называется матрица вида

$$A_n = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_1 & a_0 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где $a_0 \neq 0$ и $a_k \neq 0$ хотя бы для одного $k \in \{1, 2, ..., n\}$.

Матрицы вида (1) используются во многих разделах математики и техники (см., например, [1, 2, 7] и библиографию там).

Определитель матрицы Теплица-Хессенберга вида (1) можно найти, используя рекуррентную формулу

$$\det A_n = a_1 \det A_{n-1} + \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n+j} a_0^{n-j} a_{n+1-j} \det A_{j-1}, \tag{2}$$

где $\det A_0 \equiv 1$. Формула (2) является следствием более общей формулы, из [16, теорема 4.20].

Следующая формула, которая известна как формула Труди [12], дает возможность найти определитель матрицы (1) через ее элементы:

$$\det A_n =$$

$$= (-a_0)^n \cdot \sum_{s_1+2s_2+\ldots+ns_n=n} (-1)^{s_1+s_2+\ldots+s_n} \frac{(s_1+s_2+\ldots+s_n)!}{s_1!s_2!\ldots s_n!} \cdot \frac{a_1^{s_1}a_2^{s_2}\ldots a_n^{s_n}}{a_0^{s_1+s_2+\ldots+s_n}}. \qquad (3)$$

2. Определители матриц Теплица-Хессенберга, составленных из чисел Люка. Последовательность Люка $\{L_n\}_{n\ge1}$ – это последовательность целых чисел, удовлетворяющая рекуррентному уравнению

$$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$$

с начальными условиями $L_1 = 2, \quad L_2 = 0$ (последовательность A000032 в OEIS – Онлайн-энциклопедии целочисленных последовательностей [13]).

Последовательность $\{L_n\}_{n\ge1}$ начинается так:

2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, … .

Числа Люка также можно выразить также как функцию от номера *n* по формуле

$$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}, \quad n \ge 1, \qquad (4)$$

где $(1+\sqrt{5})/2$ – золотое сечение [10].

Числа Люка нашли широкое использование, в частности, в теории графов, криптографии, физике [3, 6, 10, 14].

Известно, что числа Люка связаны с числами Фибоначчи F_n с помощью формул [10]

$$L_n = F_{n-1} + F_{n+1} = 2F_{n-1} + F_n, \qquad F_n = (L_{n-1} + L_{n+1})/5.$$

Другие интересные формулы, связывающие эти знаменитые числовые последовательности, можно найти в [14, 15].

Рассмотрим последовательность матриц Теплица-Хессенберга $\{M_n\}_{n\ge1}$, элементами которых являются числа Люка:

$$M_n = \begin{pmatrix} L_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ L_2 & L_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ L_{n-1} & L_{n-2} & L_{n-3} & \cdots & L_1 & 1 \\ L_n & L_{n-1} & L_{n-2} & \cdots & L_2 & L_1 \end{pmatrix}, \qquad (5)$$

где $M_0 \equiv 1$.

Теорема 1. *Для определителя матрицы Теплица-Хессенберга* M_n *из* (5) *справедлива формула*

$$\det M_n = \frac{5\cdot 2^{n-1} - (-1)^n}{3}. \qquad (6)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используем метод математической индукции по n. Для $n=1$ $\det M_1 = (5\cdot 2^0 - (-1))/3 = 2$. Предположим, что формула (6) справедлива для всех $k \le n-1$ и докажем ее для $k=n$. Используя формулы (2), (4), имеем:

$$\det M_n = 2\det M_{n-1} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n+k} L_{n+1-k} \det M_{k-1} =$$

$$= 2\cdot \frac{5\cdot 2^{n-2} - (-1)^{n-1}}{3} + (-1)^{n+1} L_n + \sum_{k=2}^{n} (-1)^{n+k} L_{n+1-k} \frac{5\cdot 2^{k-2} - (-1)^{k-1}}{3} =$$

$$= \frac{5\cdot 2^{n-1} + (-1)^n\cdot 2}{3} + (-1)^{n+1}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right) +$$

$$+\sum_{k=2}^{n} (-1)^{n-k}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-k} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-k}\right)\cdot \frac{5\cdot 2^{k-2} - (-1)^{k-1}}{3},$$

откуда, после несложных преобразований, получаем формулу (6). Теорема доказана.

Заметим, что аналогичная к (6) формула для определителя матрицы Теплица-Хессенберга, элементами которого являются числа Фибоначчи, анонсирована в [5].

Пусть $\{D_n\}_{n\ge 1}$ и $\{G_n\}_{n\ge 1}$ – последовательности матриц Теплица-Хессенберга, составленных из чисел Люка с парными и непарными индексами соответственно, т.е.

$$D_n = \begin{pmatrix} L_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ L_4 & L_2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ L_{2n-2} & L_{2n-4} & L_{2n-6} & \cdots & L_2 & 1 \\ L_{2n} & L_{2n-2} & L_{2n-4} & \cdots & L_4 & L_2 \end{pmatrix}, \qquad (7)$$

$$G_n = \begin{pmatrix} L_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ L_3 & L_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ L_{2n-3} & L_{2n-5} & L_{2n-7} & \cdots & L_1 & 1 \\ L_{2n-1} & L_{2n-3} & L_{2n-5} & \cdots & L_3 & L_1 \end{pmatrix}. \qquad (8)$$

Теорема 2. *Для определителей матриц* D_n, G_n *из* (7) *и* (8), *справедливы формулы*

$$\det D_n = \frac{(-1)^{n-1}}{2}\Big((2i+1)(1-i)^{n-1} - (2i-1)(1+i)^{n-1}\Big), \tag{9}$$

$$\det G_n = \frac{5+(-2)^{n-1}}{3}, \tag{10}$$

где $i = \sqrt{-1}$.

Доказательство формул (9) и (10) производится с помощью метода математической индукции, аналогично доказательству теоремы 1.

Замечание. Последовательности определителей $\{M_n\}_{n\geq 1}$, $\{D_n\}_{n\geq 1}$ и $\{G_n\}_{n\geq 1}$ образуют числовые последовательности A048573, A078069 и A140966 соответственно [13]:

$$\{M_n\}_{n\geq 0} = \{2, 3, 7, 13, 27, 53, 107, 213, 427, 853, 1707, 3413, 6827, \ \dots\},$$

$$\{D_n\}_{n\geq 0} = \{1, -3, 4, -2, -4, 12, -16, 8, 16, -48, 64, -32, -64, 192, \ \dots\},$$

$$\{G_n\}_{n\geq 0} = \{2, 1, 3, -1, 7, -9, 23, -41, 87, -169, 343, -681, 1367, \ \dots\}.$$

Другие формулы для определителей, элементами которых являются числа Люка, изучены, в частности, в работах [4, 8, 9, 11].

Основной результат. Используя теперь формулу (3), як следствие формул (6), (9), (10), после несложных преобразований получаем следующие формулы, выражающие суммы произведений чисел Люка с полиномиальными коэффициентами.

Теорема 3. *Для чисел Люка* L_n *справедливы формулы*

$$\sum_{s_1+2s_2+\dots+ns_n=n} (-1)^{s_1+s_2+\dots+s_n} \frac{(s_1+s_2+\dots+s_n)!}{s_1!s_2!\dots s_n!} L_1^{s_1} L_2^{s_2} \dots L_n^{s_n} = \frac{5\cdot(-2)^n - 2}{6},$$

$$\sum_{s_1+2s_2+\dots+ns_n=n} (-1)^{s_1+s_2+\dots+s_n} \frac{(s_1+s_2+\dots+s_n)!}{s_1!s_2!\dots s_n!} L_2^{s_1} L_4^{s_2} \dots L_{2n}^{s_n} = \frac{1}{2}\Big((2i-1)(1+i)^{n-1} - (2i+1)(1-i)^{n-1}\Big),$$

$$\sum_{s_1+2s_2+\dots+ns_n=n} (-1)^{s_1+s_2+\dots+s_n} \frac{(s_1+s_2+\dots+s_n)!}{s_1!s_2!\dots s_n!} L_1^{s_1} L_3^{s_2} \dots L_{2n-1}^{s_n} = \frac{10\cdot(-1)^n - 2^n}{6},$$

где $n \geq 1$, $i = \sqrt{-1}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bogoya J.M.* Asymptotics of individual eigenvalues of a class of large Hessenberg Toeplitz matrices // J.M. Bogoya, A. Bottcher, S.M. Grudsky. Oper. Theory Adv. Appl. 2012. Vol. 220. P. 77-95.
2. *Chang X.-W.* Asymptotic properties of the QR factorization of banded Hessenberg-Toeplitz matrices // X.-W. Chang, M.J. Gander, S. Karaa. Numer. Linear Algebra Appl. 2005. Vol. 12 (7). P. 659-682.
3. *Demirturk B.* Integer solutions of some Diophantine equations via Fibonacci and Lucas numbers / B. Demirturk, R. Keskin // J. Integer Seq. 2009. Vol. 12. Article 09.8.7.
4. *Harne S.* Determinantal identities of Fibonacci, Fibonacci Like and Lucas numbers / S. Harne, V.H. Badshah, S. Sethiya // Turkish J. Analysis Number Theory. 2014. Vol. 2 (4). P. 110-112.
5. *Goy T.* Elementary problems and solutions. Problem B-1192 / T. Goy // Fibonacci Quart. 2016. Vol. 54 (3). P. 272.
6. *Hoggatt V.E., Jr.* Fibonacci and Lucas Numbers / V.E. Hoggatt. Boston: Houghton Mifflin, 1969.
7. *Inselberg A.* On determinants of Toeplitz-Hessenberg matrices arising in power series / A. Inselberg // J. Math. Anal. Appl. 1978. Vol. 63 (2). P. 347-353.
8. *Ipek A.* On the determinants of pentadiagonal matrices with the classical Fibonacci, generalized Fibonacci and Lucas numbers / A. Ipek // Eurasian Math. J. 2011. Vol. 2 (2). P. 60-74.
9. *Jina J.* On determinants of some triadiagonal matrices connected with Fibonacci numbers / J. Jina, P. Trojovsky // Int. J. Pure Appl. Math. 2013. Vol. 88 (4). P. 569-575.
10. *Koshy T.* Fibonacci and Lucas Numbers and Application / T. Koshy. New York: John Wiley & Sons, 2001.
11. *Kwong H.* Two determinants with Fibonacci and Lucas entries / H. Kwong // Appl. Math. Comp. 2007. Vol. 194 (2). P. 568-571.
12. *Merca M.* A note on the determinant of a Toeplitz-Hessenberg matrix / M. Merca // Spec. Matrices. 2013. Vol. 1. P. 10-16.
13. *Sloane N.J.A.* The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, published electronically at https://ocis.org.
14. *Vajda S.* Fibonacci and Lucas Numbers, and the Golden Section: Theory and Application / S. Vajda. Chichester: Ellis Horwood, 1989.
15. *Vitula R.* Bridges between different known integer sequences / R. Vitula, D. Slota, E. Hetmaniok // Ann. Math. Informat. 2013. Vol. 41. P. 255-263.
16. *Vein R.* Determinants and Their Applications in Mathematical Physics / R. Vein, P. Dale. New York: Springer, 1999.