Возняк О.М.

Теоретична фізика

Класична електродинаміка

Збірник задач

Міністерство науки і культури України

Прикарпатський університет

імені Василя Стефаника

Возняк О.М.

Теоретична фізика

Класична електродинаміка

Збірник задач

Для студентів фізичних спеціальностей

вищих навчальних закладів

Івано-Франківськ

2007

УДК 53.01

ББК 22.31

В 80

Теоретична фізика. Класична електродинаміка. Збірник задач./ Возняк О.М. – Івано-Франківськ. Прикарпатський університет ім. Василя Стефаника: 2007р. – 64с.

В посібнику подано короткі теоретичні відомості, умови ~150 задач і відповіді до них з усіх розділів класичної теорії електромагнітного поля, які стосуються електромагнітних процесів у вакуумі і середовищі та основ релятивістської теорії. Опрацювання матеріалу посібника допоможе засвоїти математичну техніку досліджень, типову для всієї теоретичної фізики.

Бібліографія 12.

Для студентів фізичних спеціальностей вищих навчальних закладів III – IV рівня акредитації

Затверджено Вченою Радою Прикарпатського університету ім. Василя Стефаника (Протокол № від 2004 р.)

Рецензенти: Климишин І.Ф. – д – р фіз.- мат.наук, професор

Рувінський М.А. – д – р фіз.- мат.наук, професор

ISSN 966-640-88-у

ЗМІСТ

ВСТУП

Основним завданням будь-якої гідної системи освіти є досягнення високої якості знань, розвиток навиків до самостійної роботи і вміння застосовувати одержані знання на практиці. Невід’ємною частину повноцінної фізичної освіти є впевнене володіння методами теоретичної фізики. Перед студентами стоїть важке завдання – упродовж короткого проміжку часу оволодіти сучасними . методами розв'язування конкретних задач до того ж із широкого кола проблем. Це завдання, значною мірою, вирішує практикум розв’язування фізичних задач. Скурпульозна добірка широкого спектру задач для нього полегшує досягнення поставленої мети.

Зазначені вимоги враховано авторами у посібнику, підготовленому на основі багаторічного досвіду читання лекцій і проведення практичних занять та семінарів на фізичному факультеті Прикарпатського університету. Задачі підібрано так, що вони сприяють не лише розвитку навиків самостійної роботи, але переважно стають також і джерелом нових знань. В посібнику відображено ті питання, які є обов’язковими для всіх студентів-фізиків незалежно від їх вузької спеціалізації. На думку авторів, саме вони повинні складати основу загальної мови, якою можуть спілкуватися фізики різних спеціалізацій. Матеріал збірника охоплює питання електродинаміки вакууму, електродинаміки суцільних середовищ та основ релятивістської теорії в об’ємі, відповідному до програми фізичних спеціальностей університетів.

У цьому збірнику для зручності на початку кожного розділу подано теоретичний вступ, що містить основні закони і формули, знання яких необхідне для розв’язування задач. Усі формули в теоретичних відомостях, умовах задач та відповідях до них наведено у системі СІ. Для скорочення у формулах замість величини $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9 \, \frac{м}{Ф}$ прийнято позначення $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$.

Посібник складається з шести розділів, які містять близько 150 задач, розміщених в логічній послідовності і в порядку наростання складності. Тому робота над кожною зних готує грунт для розв’язання наступних задач. Як підмогу у здобутті навичок розв’язування задач електродинаміки рекомендуємо посібник [12].

СИСТЕМА РІВНЯНЬ МАКСВЕЛЛА

Найважливіші поняття, закони й формули

Основними величинами, що характеризують електромагнітне поле, є електрична напруженість $\vec{E}$ і магнітна індукція $\vec{B}$. Вихідними для електродинаміки є рівняння Максвелла, які в диференціальній формі мають вигляд

(a) $$div\,\vec{E} = 4\pi k\rho\,,$$

(в) $$rot\,\vec{B} = \frac{4\pi\,k}{c^2}\,j + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial\,t}\,,$$

(c) $$rot\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial\,t}\,,$$

(d) $$div\,\vec{B} = 0\,,$$

де $j(\vec{r},t)$ – густина струму провідності,

$\rho(\vec{r},t)$ – об’ємна густина зарядів,

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,.$$

В інтегральній формі рівняння Максвелла мають вигляд

(a) $$\oint\limits_{(S)} \vec{E}d\vec{S} = 4\pi k \int\limits_{(V)} \rho\,dV\,,$$

(в) $$\oint\limits_{(\Gamma)} \vec{B}d\vec{l} = \frac{1}{c^2}\int\limits_{(S)}\left(4\pi\,k\vec{j} + \frac{\partial\vec{E}}{\partial\,t}\right)d\vec{S}\,,$$

(c) $$\oint\limits_{(\Gamma)} \vec{E}d\vec{l} = -\int\limits_{(S)}\frac{\partial\vec{B}}{\partial\,t}d\vec{S}$$

(d) $$\oint\limits_{(S)} \vec{B}d\vec{S} = 0\,.$$

Основна задача електродинаміки полягає у визначенні векторів електричної напруженості та магнітної індукції за заданими густинами зарядів і струмів та граничними і початковими умовами.

Розв’язування задач електродинаміки значно полегшується, якщо ввести електромагнітні потенціали $\vec{A}$ і φ, які визначаються співвідношеннями

$$\vec{B} = rot\,\vec{A}\,,$$
$$\vec{E} = -grad\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$

Величини $\vec{A}$ і φ визначені неоднозначно. Перехід від електромагнітних потенціалів $\vec{A}$ і φ до нових потенціалів $\vec{A}'$ і φ' за допомогою перетворень калібрування

$$\vec{A}' = \vec{A} + grad\varphi\,,$$
$$\varphi' = \varphi - \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

не змінює $\vec{E}$ і $\vec{B}$, якщо $\psi = \psi(\vec{r}, t)$ – довільна задана функція. Зазвичай її вибирають так, щоб виконувалась умова Лоренца

$$div\,\vec{A} + \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial t} = 0\,.$$

Тоді рівняння для електромагнітних потенціалів набувають вигляду

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -4\pi\, k\rho\,,$$

$$\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{4\pi\, k}{c^2}\,j\,.$$

Ці рівняння називають рівняннями Даламбера для електромагнітних потенціалів. Оскільки як рівняння Максвелла, так і рівняння Даламбера є лінійними, то як для полів $\vec{E}$ і $\vec{B}$, так і для потенціалів $\vec{A}$ і φ має місце принцип суперпозиції, за яким

$$\psi = \sum_i \psi_i\,,$$

де $\psi = \{\vec{E}, \vec{B}, \vec{A}, \varphi\}$, тобто вона є однією з величин $\vec{E}, \vec{B}, \vec{A}, \varphi$.

Задачі для самостійного розв’язування

1. Показати, що розв'язком рівняння поля точкового заряду $div\vec{E} = 4\pi kq\delta(\vec{r})$ є поле $\vec{E} = k\frac{q}{r^3}\vec{r}$.

2. Показати, що напруженість поля заряду, рівномірно розподіленого по об'єму кулі радіусом a, задовольняє рівняння $div\vec{E} = 4\pi k\rho$.

3. Довести, що густина повного струму $\vec{j}_{повн} = \vec{j} + \frac{1}{4\pi k}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ не має джерел.

4. Довести, що з першої групи рівнянь Максвелла-Лоренца безпосередньо випливає закон збереження електричного заряду.

5. Визначити індукцію магнітного поля всередині і зовні нескінченного циліндричного провідника радіусом a, через який протікає струм I, рівномірно розподілений по перерізу провідника.

<u>Відповідь</u>: $B^{(i)} = \frac{k}{c^2}\frac{2Ir}{a^2}$, $B^{(e)} = \frac{k}{c^2}\frac{2I}{r}$.

6. Показати, що при $\rho = 0$ і $j = 0$ для електромагнітних потенціалів можна вибрати умову калібрування $\varphi = 0$, $div\vec{A} = 0$ і одержати хвильові рівняння $\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0$, $\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = 0$.

7. Показати, що поперечність електромагнітних хвиль випливає з умови калібрування.

8. Показати, що умова калібрування Лоренца $\left(div\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0\right)$ задовольняється автоматично, якщо φ і $\vec{A}$ виразити через вектор Герца (поляризаційний потенціал) $\vec{Z}$: $\varphi = div\vec{Z}$, $\vec{A} = rot\vec{Z}$.

ЕЛЕКТРОСТАТИЧНЕ ПОЛЕ

Найважливіші поняття, закони й формули

В електростатиці вивчають групу електромагнітних явищ, в яких всі величини не залежать від часу і, крім того, відсутній рух зарядів. Система рівнянь електростатики в диференціальній формі є такою

$$div\vec{E} = 4\pi k\rho ,$$

$$rot\vec{E} = 0 ,$$

а в інтегральній формі

$$\oint_{(S)} \vec{E}d\vec{S} = 4\pi k \int_{(V)} \rho\, dV ,$$

$$\oint_{(\Gamma)} \vec{E}d\vec{l} = 0 .$$

При переході через заряджену поверхню нормальна складова $E_n = \left(\vec{E},\vec{n}\right)$ електричної напруженості змінюється стрибкоподібно

$$E_{2n} - E_{1n} = 4\pi k\sigma ,$$

а тангенціальна складова неперервна

$$\left[\vec{n},\left(\vec{E}_2 - \vec{E}_1\right)\right] = 0 ,$$

де σ – поверхнева густина заряду зарядженої поверхні.

Поряд із напруженістю $\vec{E}$ стаціонарне електричне поле описується також потенціалом φ, який пов'язаний з напруженістю співвідношенням

$$\vec{E} = -grad\,\varphi .$$

Потенціал задовольняє рівняння Пуассона

$$\Delta\varphi = -4\pi k\rho$$

і граничним умовам на поверхні розділу областей

$$\varphi_1 = \varphi_2 ,$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial\vec{n}} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial\vec{n}} = 4\pi k\sigma .$$

При заданій густині заряду, загальний розв’язок рівняння Пуассона в необмеженому просторі має вигляд

$$\varphi(\vec{r})=k\int\limits_{(V)}\frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dV',$$

а напруженість рівна

$$\vec{E}(\vec{r})=k\int\limits_{(V)}\frac{\rho(\vec{r}\,')(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}dV'.$$

Іноді замість об’ємних зарядів у просторі є заряджені поверхні і лінійні контури. У цьому випадку потенціал можна обчислити за формулою

$$\varphi(\vec{r})=k\int\limits_{(S)}\frac{\sigma(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dS'+k\int\limits_{(S)}\frac{\chi(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dl'.$$

Поле на великих відстанях від системи зарядів можна представити у вигляді нескінченого ряду, що швидко збігається

$$\varphi(\vec{r})=k\frac{q}{r}+k\frac{(\vec{p},\vec{r})}{r^3}+k\frac{Q_{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta}{6r^5}+\ldots,$$

де $q=\int\limits_{(V)}\rho(\vec{r}\,')\,dV'$ – повний заряд системи,

$\vec{p}==\int\limits_{(V)}\vec{r}\,'\rho(\vec{r}\,')\,dV'$ – дипольний момент системи,

$Q_{\alpha\beta}==\int\limits_{(V)}\rho(\vec{r}\,')\left(3x'_\alpha x'_\beta-(\vec{r}\,')^2\delta_{\alpha\beta}\right)dV'$ – тензор квадрупольного моменту системи.

Якщо система складається з точкових зарядів, то для такої системи

$$\rho(\vec{r}\,')=\sum_i q_i\delta(\vec{r}\,'-\vec{r}_i\,'),$$

$$\vec{p}=\sum_i q_i\vec{r}_i\,',$$

$$Q_{\alpha\beta}=\sum_i q_i\left(3x'_\alpha x'_\beta-(\vec{r}\,')^2\delta_{\alpha\beta}\right).$$

Енергія електростатичного поля

$$W_e = \frac{1}{8\pi k} \int_{(V)} E^2 dV .$$

Якщо цей інтеграл збігається в необмеженому просторі, то обчислювати енергію можна за допомогою рівнозначної формули

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{(V)} \rho\varphi \, dV .$$

Електростатична енергія взаємодії двох систем, заряджених з об'ємними густинами $\rho_1(\vec{r})$ і $\rho_2(\vec{r}\,')$ визначають співвідношенням

$$W_e = k \int_{(V)} \frac{\rho_1(\vec{r})\rho_2(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} dV' dV .$$

Задачі для самостійного розв'язування

1. Використовуючи закон Кулона, визначити напруженість електростатичного поля рівномірно зарядженої безмежної площини. Поверхнева густину заряду σ.

Відповідь: для $R = a$, $E_z = 2\pi k\sigma \, (1 - \frac{z}{(a^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}})$;

для $R \to \infty$, $E_z = 2\pi k\sigma$; для $z >> a$, $E_z = k\frac{q}{z^2}$.

2. Визначити потенціал і напруженість поля рівномірно зарядженого круглого диска радіусом a з поверхневою густиною заряду σ: а) у точці, яка лежить на відстані z на перпендикулярі, що проходить через центр диска, б) у центрі диска, в) у точці $z >> a$.

Відповідь: а) $\varphi = 2\pi k\sigma\left(\sqrt{a^2 + z^2} - z\right)$; $E_z = 2\pi k\sigma\left(1 - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}}\right)$,

б) $\varphi = 2\pi k\sigma a$, $E = 2\pi k\sigma$, в) $\varphi = k\frac{q}{z}$, $E = k\frac{q}{z^2}$.

3. Круглий диск радіусом a рівномірно заряджений з поверхневою густиною σ. В якій точці на осі диска напруженість поля дорівнює $\pi k\sigma$?

Відповідь: $z = \pm a \cdot 3^{-\frac{1}{2}}$.

4. Визначити потенціал і напруженість поля рівномірно зарядженого кільця радіусом a: а) у точці, що лежить на відстані z на перпендикулярі, поставленому до площини кільця в його центрі; б) у центрі кільця $(z = 0)$; в) в точці $z >> a$; г) максимальні значення потенціалу і напруженості поля на перпендикулярі.

Відповідь: а) $\varphi = k\dfrac{q}{\left(a^2 + z^2\right)^{\frac{1}{2}}}$, $E = k\dfrac{qz}{\left(a^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$; б) $\varphi = k\dfrac{q}{a}$, $E = 0$;

в) $\varphi \approx k\dfrac{q}{z}$, $E \approx k\dfrac{q}{z^2}$; г) $\varphi_{max} = k\dfrac{q}{a}$, $\varphi = k\dfrac{q}{a^2\sqrt{54}}$.

5. Знайти напруженість поля, утвореного двома рівномірно зарядженими паралельними площинами. Поверхневі густини зарядів σ_1, і σ_2. Розглянути випадок $\sigma_1 = \sigma_2$ (плоский конденсатор).

Відповідь: а) між пластинами $E^{(i)} = 2\pi k(\sigma_1 - \sigma_2)$;

б)поза пластинами $E^{(e)} = 2\pi k(\sigma_1 + \sigma_2)$;

в) для плоского конденсатора $E^{(i)} = 4\pi k\sigma$, $E^{(e)} = 0$.

6. Сферична поверхня заряджена рівномірно. Користуючись законом Кулона, показати, що напруженість поля всередині кулі рівна нулю.

7. Пластинка має форму кільця з внутрішнім радіусом R_1 і зовнішнім радіусом R_2. По пластинці рівномірно розподілений заряд q. Знайти φ і E_z на осі пластинки як функцій від *x*. Дослідити випадок $|x| >> R_2$.

Відповідь: $\varphi = 2kq\dfrac{\sqrt{R_2^2 + x^2} - \sqrt{R_1^2 + x^2}}{R_2^2 - R_1^2}$,

$$E_x = \frac{2kqx}{R_2^2 - R_1^2}\left(\frac{1}{\sqrt{R_1^2 + x^2}} - \frac{1}{\sqrt{R_2^2 + x^2}}\right);$$

при $x >> R_2$, $\varphi = 2k\dfrac{q}{x}$, $\varphi = 2k\dfrac{q}{x^2}$.

8. Визначити напруженість електричного поля в центрі зарядженої півсфери, поверхнева густина заряду якої σ.

Відповідь: $E = \pi k\sigma$.

9. Визначити потенціал поля і його напруженість у центрі кільця із зовнішнім радіусом R_2 і внутрішнім R_1, якщо на ньому рівномірно розподілений заряд q.

Відповідь: $\varphi = 2k\dfrac{q}{R_2 + R_1}$, $E = 0$.

10. Обчислити безпосередньо на основі закону Кулона напруженість поля рівномірно зарядженої сфери радіусом a і зарядом q.

Відповідь: для: $r < a$, $E = 0$; для $r > a$, $E = k\dfrac{q}{r^2}$.

11. Обчислити напруженість електричного поля нескінченно довгої нитки, рівномірно зарядженої з лінійною густиною χ.

Відповідь: $E_z = \dfrac{2k\chi}{y}$.

12. Обчислити напруженість поля, створеного зарядом q, рівномірно розподіленим по об'єму кулі, радіус якої a.

Відповідь: для $r > a$, $E = k\dfrac{q}{r^2}$; для $r < a$, $E = k\dfrac{qr}{a^3}$.

13. Знайти рівняння силових ліній диполя.

Відповідь: $A=\dfrac{\sin\theta}{r}$

14. Знайти рівняння силових ліній поля, що створюється в однорідному середовищі двома точковими зарядами, рівними за величиною і протилежними за знаком, відстань між якими $2a$.

Відповідь: $\dfrac{z-a}{\left[(z+a)^2+R^2\right]^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{z-a}{\left[(z-a)^2+R^2\right]^{\frac{1}{2}}}=C$.

15. Визначити потенціал заряду q, рівномірно розподіленого вздовж відрізка $2l$ із лінійною густиною $\chi=\dfrac{q}{l}$.

Відповідь: $\varphi=k\chi\cdot\ln\dfrac{x+l+\sqrt{(x+l)^2+y^2}}{x-l+\sqrt{(x-l)^2+y^2}}$.

16. Показати (див.задачу 15), що при $l\to 0$ $(q=const)$ потенціал переходить у потенціал точкового заряду, а при $l\to\infty$ в потенціал нескінченної рівномірно зарядженої прямої (з точністю до нескінченої сталої).

17. Визначити поле, створене зарядженою провідною кулею радіусом a. Заряд кулі q.

Відповідь: $r<a$, $E=0$; $r>a$, $E=k\dfrac{q}{r^2}$.

18. Визначити електричне поле нерухомого заряду q, рівномірно розподіленого по поверхні кулі радіусом a.

Відповідь: для $r>a$, $\vec{E}=k\dfrac{q}{r^3}\vec{r}$; для $r<a$, $\vec{E}=0$.

19. Куля радіусом R заряджена сферично-симетрично з об'ємною густиною $\rho=ar^5$, де $a-$ стала величина. Яким є потік Φ напруженості електричного поля через коло радіусом R, площина якого центром дотикається до кулі?

<u>Відповідь</u>: $\Phi = \pi^2 kaR^8 \left(1 - 2^{-\frac{1}{2}} \right)$.

20. Визначити поле, створене рівномірно зарядженою $(\sigma = const)$ поверхнею круглого циліндра радіусом R в однорідному діелектричному середовищі проникністю ε.

<u>Відповідь</u>: $E = 4\pi k \dfrac{\sigma a}{\varepsilon r}$.

21. Два нескінченно довгих коаксіальних циліндри з радіусами R_1 і R_2 заряджені однойменними зарядами, причому густина зарядів на внутрішньому циліндрі σ_1, а на зовнішньому σ_2. Визначити величину напруженості E електричного поля в просторі між циліндрами і поза ними на відстанях l_1 і l_2 від спільної осі циліндрів.

<u>Відповідь</u>: $E_1 = 4\pi k \dfrac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon l_1}$, $E_2 = 4\pi k \dfrac{\sigma_1 R_1 + \sigma_2 R_2}{\varepsilon\, l_2}$.

22. Два тонких довгих провідники, що розміщені паралельно на відстані d один від одного, рівномірно заряджені різнойменними зарядами з лінійною густиною χ і -χ . Визначити напруженість поля: E у точці, що лежить у площині симетрії на відстані l від площини, в якій розміщені провідники.

<u>Відповідь</u>: $E = 4k \dfrac{\chi}{4l^2 + d^2}$.

23. Поле створене зарядом q, координати якого $(-a,0,0)$, і зарядом $-q$, координати якого $(a,0,0)$. Визначити потік вектора напруженості через поверхню круглого диска радіусом a, площина якого перпендикулярна до осі $0x$ і центр якого співпадає з початком координат.

<u>Відповідь:</u> $\Phi = 2\pi q\left(2 - \sqrt{2}\right)$.

24. Тонка необмежена пластинка розділена на дві половини щілиною, яка має ширину a, і заряджена з поверхневою густиною σ. Знайти напруженість E електричного поля на великих відстанях $r >> a$ від щілини, враховуючи внески, порядок яких пропорційний $\frac{1}{r}$.

<u>Відповідь</u>: $E = 2\pi k\left(\sigma \vec{n} + \frac{\sigma a\vec{r}}{r^2}\right)$.

25. Знайти напруженість поля заряду, розподіленого з густиною $\rho = \frac{\rho_0}{r^2}e^{-\alpha r}$.

<u>Відповідь</u>: $E = \frac{4\pi k\rho_0}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha r}\right)$.

26. Заряд e_1, перебуває на осі x у точці $x_1 = l$. Визначити величину заряду e_2, який слід помістити в точку $x_2 = -\sqrt{3}\,l$ осі, щоб потік напруженості електричного поля через коло $x = 0$, $y^2 + z^2 = l^2$ був нульовим.

<u>Відповідь:</u> $e_2 = \frac{\left(2 - \sqrt{2}\right)}{\left(2 - \sqrt{3}\right)}e_1$.

27. В основному стані атома водню заряд електрона $(-e)$ розподілений по об'єму з густиною $\rho = -\frac{e}{\pi a^3}e^{-\frac{2r}{a}}$, де a – борівський радіус, r – відстань до ядра. Обчислити потенціал і напруженість поля всередині атома.

<u>Відповідь</u>: $\varphi = ke\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{a}\right)e^{-\frac{2r}{a}}$, $E = k\frac{e}{r^2}\left(1 + \frac{2r}{a} + \frac{2r^2}{a^2}\right)e^{-\frac{2r}{a}}$.

28. Середня густина заряду електронної хмарки в атомі водню рівна $\rho = -\frac{e}{\pi a^3}e^{-\frac{2r}{a}}$ де a– борівський радіус, а r– відстань до

протона, що має заряд e. Знайти напруженість E електричного поля в атомі водню. Дослідити E на малих $r \ll a$ і великих $r \gg a$ відстанях від протона.

Відповідь: а)$\cdot$ $E = k\dfrac{e}{r^2}\cdot\left(1+\dfrac{2r}{a}(1+2r)\right)e^{-\frac{2r}{a}}$, б) $E = 2k\dfrac{e}{a^2}e^{-\frac{2r}{a}}$.

29. Куля радіусом a рівномірно заряджена в об'ємі з густиною ρ. Знайти за допомогою рівняння Пуассона потенціал і напруженість поля всередині і зовні кулі.

Відповідь: для $r > a$, $\varphi^{(e)} = \dfrac{4\pi}{3}k\dfrac{\rho a^3}{r}$, $E^{(e)} = \dfrac{4}{3}\pi k\dfrac{\rho a^3}{r^2}$;

$$\text{для } r < a,\ \varphi^{(1)} = 2\pi k\rho\left(a^2 - \frac{r^2}{3}\right),\ E^{(i)} = \frac{4}{3}\pi k\rho\, r.$$

30. Нескінченний круглий циліндр радіусом a рівномірно заряджений з об'ємною густиною ρ. Знайти з допомогою рівняння Пуассона потенціал і напруженість поля всередині і зовні циліндра.

Відповідь: для $r > a$, $\varphi^{(e)} = -2\pi k\rho\, a^2 \ln r + C_1$, $E^{(e)} = 2\pi k\dfrac{\rho a^2}{r}$;

$$\text{для } r < a,\ \varphi^{(i)} = -\pi k\rho r^2 + C_2,\ E^{(i)} = 2\pi\rho\ r.$$

31. Знайти розподіл потенціалу і напруженості поля в плоскому конденсаторі, відстань між пластинами якого d, причому одну з них заземлено, а друга перебуває під потенціалом φ_0. Простір між пластинами заповнено зарядами з об'ємною густиною $\rho = const$.

Відповідь: $\varphi^{(e)} = -2\pi k\rho x^2 + \left(\dfrac{\varphi_0}{d} + 2\pi\rho d\right)x$,

$$E = 4\pi k\rho x - \frac{\varphi_0}{d} - 2\pi k\rho\ d.$$

32. Знайти за допомогою рівняння Пуассона потенціал і напруженість поля, що створене нескінченним плоским шаром

товщиною $2a$, рівномірно зарядженим з об'ємною густиною $\rho = const$. Діелектрична проникність $\varepsilon = const$. Навколишнє середовище – вакуум.

Відповідь: а) для $|x| < a$, $\varphi^{(i)} = -2\pi k \frac{\rho x^2}{\varepsilon}$,

$$E_x^{(i)} = -4\pi k \frac{\rho x}{\varepsilon}, \quad E_e^{(i)} = 0, \quad E_z^{(i)} = 0;$$

б) для $|x| > a$, $\varphi_1^{(e)} = -4\pi k\rho a x + 2\pi k\rho a\left(2 - \frac{1}{\varepsilon}\right)$,

$$E_{1x}^{(e)} = -4\pi \rho a;$$

в)для $|x| < a$, $\varphi_1^{(e)} = -4\pi k\rho a x + 2\pi k\rho a\left(2 - \frac{1}{\varepsilon}\right)$.

33. Знайти з допомогою рівняння Лапласа потенціал і напруженість поля, що створюється рівномірно зарядженою $(\sigma = const)$ нескінченої довжини поверхнею циліндра радіусом a.

Відповідь: для $r < a$, $\varphi^{(i)} = 2k\chi \ln a$, $E^{(i)} = 0$;

для $r > a$, $\varphi^{(e)} = 2k\chi \ln r$, $E^{(e)} = 2k\frac{\chi}{r}$.

34. Визначити енергію зарядженої ізольованої провідної кулі радіусом a в однорідному середовищі проникністю ε. Заряд кулі q.

Відповідь: $W = k\frac{q^2}{2\varepsilon a}$.

35. Обчислити наближено енергію двох заряджених металевих куль, що знаходяться на великій відстані одна від одної. Радіуси куль a і b, їх заряди q_1 і q_2. Відстань між їх центрами r $(r >> a, r >> b)$.

Відповідь: $W = k\left(\frac{q^2}{a} + \frac{2q_1q_2}{r} + \frac{q_2}{b}\right)$.

36. Обчислити енергію рівномірно зарядженої по об'єму

діелектричної кулі радіусом a. Діелектрична проникність ε, заряд кулі q.

Відповідь: $W = k\dfrac{q^2}{2a}\left(1 + \dfrac{1}{5\varepsilon}\right)$.

37. Знайти енергію електростатичного поля сфери радіусом R, рівномірно зарядженої з поверхневою густиною σ ·.

Відповідь: для $r < R,\ W^{(i)} = 0$; для $r > R$, $W^{(e)} = 8\pi^2 k\sigma^2 a^3$.

38. Обчислити енергію взаємодії двох електричних диполів у вакуумі. Яку треба виконати роботу, щоб розмістити диполі паралельно?

Відповідь: $W_{12} = k\left(\dfrac{\vec{p}_1\vec{p}_2}{r_{12}^3} - \dfrac{3(\vec{p}_1,\vec{r}_{12})(\vec{p}_2,\vec{r}_{12})}{r_{12}^5}\right)$,

$$A = k\frac{p_1 p_2\left(1 - 3\cos^2\theta\right)}{r_{12}^3}.$$

39. Середня густина заряду електронної хмарки в атомі водню описується функцією $\rho = -\dfrac{e}{\pi a^3}e^{-\frac{2r}{a}}$, де a–борівський радіус, r– відстань до протона. Враховуючи вклади від протона і електронної хмаринки, знайти розподіл потенціалу φ електричного поля всередині атома. Дослідити φ на малих $r \ll a$ і великих $r \gg a$ відстанях від протона. Чому дорівнює електростатична енергія U взаємодії протона з електронною хмаркою, а також власна електростатична енергія W електронної хмарки ?

Відповідь: $\varphi = ke\left(\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{a}e^{-\frac{2r}{a}}\right)$; при $r \ll a$, $\varphi = k\dfrac{q}{r}$; при $r \gg a$,

$$\varphi = k\frac{e}{r}e^{-2r/a};\ U = -k\frac{e^2}{a};\ W = -k\frac{e^2}{8a}.$$

40. У сферичних координатах об'ємна густина заряду електронної хмарки збудженого атома водню описується функцією $\rho = \frac{er^4}{3^8 \pi a^7} e^{-\frac{2r}{3a}} sin^2 \theta \cdot cos^2 \varphi$, де a – борівський радіус, r – відстань до протона із зарядом e. Знайти електростатичну енергію U взаємодії протона з електронною хмаркою.

<u>Відповідь:</u> $U = -k \frac{e^2}{9a}$.

41. Переконатися в тому, що напруженість поля E електричного диполя з моментом p, що перебуває в початку координат, можна представити у вигляді $\vec{E} = k(\vec{p}, grad) grad\left(\frac{1}{r}\right)$.

42. Виразити через δ-функцію розподіл об'ємної густини заряду точкового диполя з моментом p, що розміщений у точці, радіус-вектор якої $\vec{r}_0$.

<u>Відповідь:</u> $\rho(\vec{r}) = -(\vec{p}, \vec{\nabla}) \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$.

43. Використовуючи граничний перехід $\lim\limits_{l \to \infty} el = p$ і вираз для потенціалу зарядів e і $-e$, що знаходиться в точках із радіус-векторами $\vec{r}_+ = \vec{r}_0 + \vec{d}$ і $\vec{r}_- = \vec{r}_0$, визначити потенціал електричного поля точкового диполя із моментом p.

<u>Відповідь:</u> $\varphi = k \frac{\vec{p}(\vec{r} - \vec{r}_0)}{(|\vec{r} - \vec{r}_0|)^3}$.

44. У вершинах квадрата зі стороною $2a$ розміщені точкові заради так, що знак заряду e змінюється на протилежний при переході до сусідньої вершини. Використовуючи загальну формулу $D_{\alpha\beta} = \sum e_m \left(3 X_{m\alpha} X_{m\beta} - r_m^2 \delta_{\alpha\beta}\right)$, знайти тензори квадрупольного момента в декартових системах координат XYZ і $X' Y' Z'$,

повернутих навколо спільної осі $Z = Z'$, визначити матрицю повороту $a_{\alpha\beta}$ і переконатися шляхом безпосереднього обчислення, що знайдені тензори $D_{\alpha\beta}$ і $D'_{\alpha\beta}$, задовольняють співвідношення $D_{\alpha\beta} = a_{\alpha\gamma} a_{\beta\delta} D'_{\gamma\delta}$, де штрихом відмічено компоненти тензора квадрупольного моменту в штрихованій системі координат.

Відповідь: $D_{xx} = D_{yy} = D_{zz} = 0$, $D_{xy} = D_{yx} = 12ea^2$,

$D_{xz} = D_{zx} = D_{yz} = D_{zy} = 0$.

$D'_{xx} = 12ea^2$, $D'_{yy} = 12ea^2$,

$D'_{xy} = D'_{yx} = D'_{xz} = D'_{zx} = D'_{yz} = D'_{zy} = 0$.

45. Знайти квадрупольний момент однорідно зарядженого еліпсоїда відносно його центра.

Відповідь: $D_{xx} = \frac{e}{5}\left(2a^2 - b^2 - c^2\right)$, $D_{yy} = \frac{e}{5}\left(2b^2 - a^2 - c^2\right)$,

$D_{zz} = \frac{e}{5}\left(2c^2 - b^2 - a^2\right)$.

46. Визначити компоненти тензора $D_{\alpha\beta}$ квадрупольного моменту однорідно зарядженого еліпсоїда обертання з півосями a і b. Центр еліпсоїда обертання співпадає з початком декартової системи координат, а піввісь b лежить на осі Z, яка є віссю аксіальної симетрії. Повний заряд Q. Як виглядатиме тензор квадрупольного моменту, якщо еліпсоїд повернути навколо осі Y за годинниковою стрілкою на кут α ?

Відповідь: $D_{\alpha\beta} = 0$ при $\alpha \neq \beta$, $D_{xx} = D_{yy} = \frac{q}{5}\left(a^2 - b^2\right)$,

$D_{zz} = \frac{2q}{5}\left(b^2 - a^2\right)$.

$$D'_{\alpha\beta} = \frac{q\left(b^2 - a^2\right)}{5}\begin{pmatrix} 3\sin^2\alpha - 1 & 0 & 3\sin\alpha\cdot\cos\alpha \\ 0 & -1 & 0 \\ 3\sin\alpha\cdot\cos\alpha & 0 & 3\cos^2\alpha - 1 \end{pmatrix}.$$

47. Центр еліпсоїда з півосями a і b співпадає з початком декартової системи координат. Велика піввісь a зорієнтована вздовж осі X, а мала – вздовж осі Y. Лінійна густина заряду q еліпса – однорідна, приймаючи ексцентриситет еліпса ε малим $(\varepsilon << 1)$, визначити компоненти тензора $D_{\alpha\beta}$ квадрупольного моменту з точністю до членів порядку ε^2.

Відповідь: $D_{\alpha\beta} = 0$ при $\alpha \neq \beta$, $D_{xx} = \pi qa^3\left(1 + \frac{3}{8}\varepsilon^2\right)$,

$$D_{yy} = \pi qa^3\left(1 - \frac{15}{8}\varepsilon^2\right),\ D_{zz} = -2\pi qa^3\left(1 - \frac{3}{4}\varepsilon^2\right).$$

47. У неоднорідному провідному середовищі з провідністю $\sigma = \sigma(x, y, z)$і діелектричною провідністю $\varepsilon = \varepsilon(x, y, z)$ підтримується стаціонарний розподіл струмів $j = j(x, y, z)$. Знайти об'ємний розподіл зарядів у цьому середовищі.

Відповідь: $\rho(r) = \frac{j}{4\pi\sigma^2}(\sigma\cdot grad\varepsilon - \varepsilon\cdot grad\sigma)$.

48. Потенціал поля у вакуумі $\varphi = k\begin{cases} \frac{q}{r}, & якщо\ r > a, \\ \frac{q}{a}, & якщо\ r < a, \end{cases}$ де r – відстань від початку координат, q, a – сталі. Визначити відповідний розподіл зарядів.

Відповідь: $\rho = 0$ для $r < a$ і $r > a$, $\sigma = \frac{q}{4\pi a^3}$.

49. Потенціал електростатичного поля: у вакуумі

$\varphi = 2\pi\, k \begin{cases} -ax, & \text{для } x > 0, \\ ax, & \text{для } x < 0. \end{cases}$. Знайти розподіл зарядів.

Відповідь: $\rho = 0$ для $x \neq 0$, $\sigma = a$ для $x = 0$.

50. Напруженість електричного поля в просторі відома $\vec{E} = k\dfrac{e\vec{r}}{r^3}(1 + br)e^{-br}$ (e і b – сталі, r – відстань від початку координат). Знайти розподіл об'ємної густини зарядів ρ і повний заряд, що створює поле.

Відповідь: $\rho(r) = e\left\{\delta(r) - \dfrac{e^2}{4\pi\, r}e^{-br}\right\}$, $q = 0$.

СТАЦІОНАРНЕ МАГНІТНЕ ПОЛЕ

Найважливіші поняття, закони й формули

Магнітостатичні явища описують системою рівнянь, які у диференціальній формі мають вигляд

$$rot\,\vec{B} = \frac{4\pi k}{c^2}\vec{j}\,,$$

$$div\,\vec{B} = 0$$

або в інтегральній формі

$$\oint_{(\Gamma)} \vec{B}d\vec{l} = \frac{4\pi k}{c^2}\int_{(S)} \vec{j}d\vec{S}\,,$$

$$\oint_{(S)} \vec{B}d\vec{S} = 0\,,$$

з граничними умовами на межі на якій розподілені струми з поверхневою густиною $\vec{i}$

$$B_{2n} = B_{1n}\,,$$

$$\left[\vec{n},\left(\vec{B}_2 - \vec{B}_1\right)\right] = \vec{i}\ .$$

З математичної точки зору зручно перейти від двох рівнянь першого порядку до одного рівняння другого порядку для векторного потенціалу

$$\vec{B} = rot\,\vec{A}\,.$$

В однорідному ізотропному середовищі векторний потенціал $\vec{A}$ задовольняє рівняння

$$\Delta\vec{A} = -\frac{4\pi k}{c^2}\vec{j}\,.$$

Причому на межі поділу двох областей виконуються такі граничні умови

$$\vec{A}_1 = \vec{A}_2\,,$$

$$\frac{\partial \vec{A}_1}{\partial \vec{n}} - \frac{\partial \vec{A}_2}{\partial \vec{n}} = \vec{i} \ .$$

При заданій густині струму $\vec{j}$ розв'язком рівняння для векторного потенціала є

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{k}{c^2} \int\limits_{(V)} \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} dV' .$$

Відповідний вираз для магнітної індукції має вигляд

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{k}{c^2} \int\limits_{(V)} \frac{\left[\vec{j}(\vec{r}\,'), (\vec{r} - \vec{r}\,')\right]}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} dV'$$

і виражає закон Біо-Савара-Лапласа у загальному вигляді.

На великих відстанях від обмеженої системи струмів маємо

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{k}{c^2} \frac{[\vec{m}, \vec{r}]}{r^3},$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{k}{c^2} \frac{3(\vec{m}, \vec{r}) - \vec{m}\, r^2}{r^5},$$

де $\vec{m} = \frac{1}{2} \int\limits_{(V)} [\vec{r}\,', j(\vec{r}\,')]\, dV'$ – магнітний момент системи.

Енергія магнітостатичного поля

$$W_M = \frac{c^2}{8\pi k} \int\limits_{(V)} B^2 dV .$$

У випадку об'ємних струмів, що протікають в обмеженій області простору, магнітну енергію можна обчислювати за допомогою співвідношення

$$W_M = \frac{1}{2} \int\limits_{(V)} \vec{j} \vec{A}\, dV .$$

Магнітна енергія взаємодії струмів, що протікають з об'ємними густинами $\vec{j}_1(\vec{r})$ і $\vec{j}_2(\vec{r}\,')$, визначається так

$$W_M = \frac{k}{c^2} \int\limits_{(V)} \frac{\vec{j}_1(\vec{r})\,\vec{j}_2(\vec{r}')}{\left|\vec{r} - \vec{r}'\right|} dV' .$$

Для системи лінійних провідників енергія магнітного поля визначається виразом

$$W_M = \frac{1}{2} \sum_{i,k} L_{ik} I_i I_k ,$$

де L_{ik} – коефіцієнти індукції провідників.

Задачі для самостійного розв'язування

1. По круговому контуру радіусом a проходить струм I. Знайти напруженість магнітного поля на осі контура.

Відповідь: $B = \frac{2\pi k}{c^2} \cdot \frac{Ia^2}{\left(a^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$.

2. По нескінченно довгій циліндричній поверхні радіусом a проходить струм I, рівномірно розподілений по поверхні циліндра уздовж його твірних. Визначити індукцію магнітного поля, створеного циліндром в однорідному середовищі.

Відповідь: $B = \begin{cases} 0, & r < a, \\ \frac{2k}{c^2} \cdot \frac{I}{r}, & r > a. \end{cases}$

3. Обчислити вектор-потенціал та індукцію магнітного поля, що їх створює в повітрі прямолінійний струм I довжиною $2l$. Розглянути граничний випадок $l \to \infty$.

Відповідь: $A_z = \frac{k}{c^2} I \left(arsh\frac{z+L}{r} - arsh\frac{z-L}{r} \right)$,

при $L \to \infty$, $A_z = const - \frac{2k}{c^2} I \cdot ln\, r$; $B = \frac{2kI}{c^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

4. В нескінченно довгій циліндричній трубі з внутрішнім

радіусом R_1 і зовнішнім радіусом R_2 тече струм I, рівномірно розподілений по перерізу труби уздовж його твірних. Визначити індукцію магнітного поля, створюваного циліндром в однорідному середовищі.

Відповідь: $B^{(i)} = \frac{2k}{c^2} \cdot \frac{I\left(r^2 - R_1^2\right)}{\left(R_2^2 - R_1^2\right)r}$ для $r < a$,

$$B^{(e)} = \frac{2k}{c^2} \cdot \frac{I}{r} \text{ для } r > a.$$

5. Знайти індукцію магнітного поля на осі замкнутого круглого соленоїда довжиною l. Кількість витків соленоїда n, сила струму у ньому I.

Відповідь: $B = \frac{4\pi k}{c^2} \cdot \frac{In}{l}$.

6. Визначити індукцію магнітного поля на осі прямого соленоїда довжиною l, радіус витка якого a, кількість витків n.

Відповідь: $B = \frac{4\pi k}{c^2} \cdot \frac{In}{l}$.

7. Визначити магнітне поле нескінченого прямолінійного струму силою I.

Відповідь: $B_\rho = 0$, $B_\varphi = \frac{2k}{c^2}\frac{I}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $B_z = 0$.

8. 0бчислити векторний потенціал однорідного магнітного поля в: а) декартових; б) циліндричних; в) сферичних координатах.

Відповідь: а) 1) $A_x = -B\,y$, $A_y = 0$, $A_z = 0$,

2) $A_x = 0$, $A_y = B\,x$, $A_z = 0$,

3) $A_x = -\frac{B\,y}{2}$, $A_y = \frac{B\,x}{2}$, $A_z = 0$;

б) $A_r = 0$, $A_\varphi = \dfrac{Br}{2}$, $A_z = 0$;

в) $A_r = 0$, $A_\theta = \dfrac{Br\,sin\theta}{2}$, $A_\varphi = 0$.

9. Показати, що однорідне стаціонарне магнітне поле, індукцією B можна описати векторним потенціалом $\vec{A} = \dfrac{\left[\vec{B},\vec{r}\right]}{2}$.

10. За допомогою рівняння Пуассона для векторного потенціала знайти індукцію магнітного поля всередині і ззовні довгого циліндричного провідника, радіусом a, по якому тече струм із силою I.

<u>Відповідь</u>: $B^{(i)} = \dfrac{2k}{c^2} \cdot \dfrac{Ir}{a^2}$, $B^{(e)} = \dfrac{2k}{c^2} \cdot \dfrac{I}{r}$.

11. Знайти векторний потенціал та індукцію магнітного поля струму, що тече по нескінченно довгій циліндричній трубі в напрямку осі, виходячи з рівняння Пуассона.

<u>Відповідь</u>: $B^{(i)} = \dfrac{2k}{c^2} \cdot \dfrac{I}{a^2 - b^2}\left(r - \dfrac{b^2}{r}\right)$, $B^{(e)} = \dfrac{2k}{c^2} \cdot \dfrac{I}{r}$,

де a і b – внутрішній і зовнішній радіуси труби.

12. Тонкий ізольований провідник утворює тонку спіраль із великою кількістю витків N, які щільно укладені один до одного і по яких тече струм I. Радіус внутрішнього витка a, а зовнішнього витка b. Знайти:

а) магнітну індукцію B в центрі спіралі ;

б) магнітний момент спіралі відносно заданої точки.

<u>Відповідь</u>: $B = \dfrac{2\pi\, k}{c^2} \cdot \dfrac{IN}{b - a} ln\dfrac{b}{a}$, $M = \dfrac{\pi}{3} I\, N\left(a^2 + ab + b^2\right)$.

13. Знайти індукцію магнітного поля площини, по якій тече струм із поверхневою густиною i, однаковою у будь якій точці площини.

Відповідь: $B=\dfrac{2\pi k}{c^2}i$.

14. По двох паралельних площинах течуть поверхневі струми з поверхневою густиною i. Знайти індукцію магнітного поля у двох випадках:

а)напрямки струмів співпадають,

б) струми течуть у різні боки.

Відповідь:

а) $B=0$– між площинами, $B=\dfrac{4\pi k}{c^2}i$– поза площинами;

б) $B=\dfrac{4\pi k}{c^2}i$– між площинами, $B=0$– поза площинами.

15. Уздовж нескінченої прямолінійної смуги шириною a тече струм, що рівномірно розподілений по її ширині, з поверхневою густиною струму i. Знайти індукцію магнітного поля. Розглянути граничний випадок, коли ширина смуги прямує до нескінченості.

Відповідь: $B_x=\dfrac{k}{c^2}i\cdot ln\left(\dfrac{x^2+\left(y-\dfrac{a}{2}\right)^2}{x^2+\left(y+\dfrac{a}{2}\right)^2}\right)$,

$$B_y=-\frac{2k}{c^2}i\left(arctg\frac{\left(y-\dfrac{a}{2}\right)}{x}-arctg\frac{\left(y+\dfrac{a}{2}\right)^2}{x}\right),\ B_z=0;$$

при $a\to\infty, B_x=0$, $B_z=\dfrac{2\pi k}{c^2}i$, $B_z=0$.

16. Знайти векторний потенціал та індукцію магнітного поля, що їх створює струм I, який тече по кільцю радіусом R. Дослідити випадок, коли точка спостереження знаходиться на осі кільця.

Відповідь: $A_\varphi = \frac{4k}{c^2}\frac{IR}{\sqrt{R^2 + r^2 + 2Rr\sin\vartheta}}\left\{\frac{\left(2-k^2\right)K(k) - 2E(k)}{k^2}\right\}$,

де $k = \frac{4Rr\sin\vartheta}{R^2 + r^2 + 2Rr\sin\vartheta}$, $K(k) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}$,

$E(k) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$.

$$B_r = \frac{2kI}{c^2}\frac{r\cdot\cos\theta}{r\cdot\sin\theta\left(R^2 + 2Rr\sin\theta + r^2\right)^{\frac{1}{2}}}\left[-K(k) + \frac{R^2 + r^2}{R^2 - 2Rr\sin\theta + r^2}E(k)\right]$$

$$B_\theta = \frac{2kI}{c^2}\frac{1}{\left(R^2 + 2Rr\sin\theta + r^2\right)^{\frac{1}{2}}}\left[K(k) + \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\sin\theta + r^2}E(k)\right],\ B_\varphi = 0.$$

17. Знайти магнітний момент колового струму.

Відповідь: $M = IS$.

18. Знайти магнітний момент точкового заряду e, який рухається по колу радіусом r_0 із швидкістю V.

Відповідь: $M = \frac{1}{2}\cdot eVr_0$.

19. Знайти магнітний момент зарядженого кільця радіусом a, що обертається зі сталою кутовою швидкістю ω навколо одного зі своїх діаметрів. Заряд кільця q.

Відповідь: $M = \frac{1}{4}\cdot qa^2\omega$.

20. Сфера радіусом R обертається з кутовою швидкістю ω навколо осі OZ. Поверхнева густина заряду σ стала. Знайти магнітний момент кулі.

Відповідь: $M = \frac{1}{3}\cdot qR^2\omega$.

21. Знайти магнітний момент кулі, що рівномірно обертається з

кутовою швидкістю ω. Заряд q рівномірно розподілений по об'єму кулі. Показати також, що гіромагнітне відношення $g = \frac{e}{2m}$.

Відповідь: $M = \frac{1}{5} \cdot qR^2\omega$.

22. Обчислити енергію магнітного поля, зосереджену всередині ділянки одиничної довжини циліндричного провідника, по якому тече струм I.

Відповідь: $M = \frac{k}{c^2}\frac{\mu I}{4}$.

23. Знайти індуктивність L одиниці довжини лінії, що складається з двох коаксіальних циліндрів із радіусами R_1 і R_2 $(R_2 > R_1)$), простір між якими заповнений речовиною з проникністю μ.

Відповідь: $L = \frac{2k}{c^2}\mu\, ln\frac{R^2}{R_1}$.

24. Усередині циліндра радіусом R_2 розміщено провід радіусом R_1, магнітна проникність якого μ_1. Магнітна проникність середовища між проводом і циліндром μ_2. Знайти індуктивність L одиниці довжини кабеля.

Відповідь: $L = \frac{k}{2c^2} \cdot \mu_1 + \frac{2k}{c^2}\mu_2 \cdot ln\frac{R_2}{R_1}$.

25. Визначити магнітну енергію та індуктивність, що припадає на одиницю довжини коаксіального кабеля, заповненого середовищем із магнітною проникністю μ_1. Магнітна проникність провідника μ_2.

Відповідь: $W = \frac{k}{c^2}I^2\left(\mu_1 \cdot ln\frac{R_2}{R_1} + \frac{\mu_2}{\sqrt{R_3^2 + R_2^2}}R_3^4 \cdot ln\frac{R_3}{R_2} - \frac{R_3^2}{2}\left(R_3^2 + R_2^2\right)\right)$.

ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ХВИЛІ. ТЕОРІЯ ВИПРОМІНЮВАННЯ

Найважливіші поняття, закони й формули

Електромагнітні поля, які поширюються у вакуумі при відсутності зарядів, називають електромагнітними хвилями. Їх описують однорідними рівняннями Максвелла, які у вільному просторі зводяться до двох незалежних хвильових рівнянь

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0,$$

$$\Delta\vec{B} - \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = 0.$$

Дослідження електромагнітних хвиль у вакуумі зазвичай здійснюють за допомогою електромагнітних потенціалів, які вибирають так, щоб скалярний потенціал був рівним нулю $\varphi = 0$, а векторний потенціал задовільняв додаткову умову $div\vec{A} = 0$ (хвильове калібрування потенціалів). За цих умов векторний потенціал також задовольняє хвильове рівняння

$$\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = 0.$$

Електрична напруженість $\vec{E}$ і магнітна індукція $\vec{B}$ електромагнітної хвилі пов’язані з векторним потенціалом так

$$\vec{E} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t},$$

$$\vec{B} = rot\,\vec{A}.$$

Електромагнітні хвилі, які описують векторним потенціалом

$$\vec{A} = \vec{A}\left(t - \frac{\vec{n}\vec{r}}{c}\right),$$

$$\left(\vec{n},\vec{A}\right)=0$$

названо плоскими хвилями. Вони поширюються у напрямку одиничного вектора $\vec{n}$.

Електромагнітні хвилі, для яких залежність від часу описується простою періодичною функцією $cos(\omega t+\alpha)$ чи $sin(\omega t+\alpha)$ звуть монохроматичними. Для такої хвилі

$$\vec{E}=\vec{E}_0\, e^{i\left(\vec{k}\vec{r}-\omega t\right)},$$

$$\vec{B}=\vec{B}_0\, e^{i\left(\vec{k}\vec{r}-\omega t\right)},$$

де $\vec{k}\vec{r}-\omega t$ – фаза хвилі,

ω – циклічна частота електромагнітних коливань,

$\vec{k}$ – хвильовий вектор $\left(k=\dfrac{\omega}{c}\right)$.

Задача про випромінювання електромагнітних хвиль зводиться до розв’язку рівнянь Даламбера

$$\Delta\varphi-\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial t}=-4\pi k\rho\,,$$

$$\Delta\vec{A}-\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-\frac{4\pi k}{c^2}\,j\,.$$

Випромінювання електромагнітних хвиль описують розв’язки рівнянь Даламбера у вигляді потенціалів, що запізнюються

$$\varphi\left(\vec{r},t\right)=k\int\limits_{(V)}\frac{\rho\left(\vec{r}\,',t-\dfrac{\left|\vec{r}-r'\right|}{c}\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|}dV'\,,$$

$$\vec{A}\left(\vec{r},t\right)=\frac{k}{c^2}\int\limits_{(V)}\frac{\vec{j}\left(\vec{r}\,',t-\dfrac{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|}{c}\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|}dV'\,.$$

На великих відстанях від системи зарядів, якщо вона до того ж значно переважає довжину електромагнітної хвилі, що випромінюється, маємо

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\frac{k}{c^2 r}\int\limits_{(V)}\vec{j}\left(\vec{r}',t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)dV',$$

$$\vec{E}=\left[\left[\dot{\vec{A}},\vec{n}\right],\vec{n}\right],$$

$$\vec{B}=\left[\dot{\vec{A}},\vec{n}\right].$$

Якщо, крім того, довжина хвилі набагато перевищує розміри системи зарядів, то векторний потенціал можна представити у вигляді збіжного ряду

$$\vec{A}(\vec{r},t)\approx\frac{k}{c^2}\frac{\dot{\vec{p}}}{r}+\frac{k}{c^3}\frac{\left[\dot{\vec{m}},\vec{n}\right]}{r}+\frac{k}{c^4}\frac{\ddot{\vec{Q}}}{6r},$$

де $\vec{p}$ – дипольний момент системи,

$\vec{m}$ – магнітний момент системи,

$Q_\alpha=Q_{\alpha\beta}\,n_\beta$ – компоненти вектора пов'язаного з квадрупольним моментом системи.

Для полів у цьому ж наближенні одержимо

$$\vec{E}=\frac{k}{c^2}\frac{\left[\left[\ddot{\vec{p}},\vec{n}\right],\vec{n}\right]}{r}+\frac{k}{c^3}\frac{\left[\vec{n},\ddot{\vec{m}}\right]}{r}+\frac{k}{c^3}\frac{\left[\left[\dddot{\vec{Q}},\vec{n}\right],\vec{n}\right]}{6r},$$

$$\vec{B}=\frac{k}{c^3}\frac{\left[\ddot{\vec{p}},\vec{n}\right]}{r}+\frac{k}{c^4}\frac{\left[\left[\ddot{\vec{m}},\vec{n}\right],\vec{n}\right]}{r}+\frac{k}{c^4}\frac{\left[\dddot{\vec{Q}},\vec{n}\right]}{6r}.$$

У кожній точці хвильової зони потік електромагнітної енергії визначається вектором Умова-Пойнтінга

$$\vec{S}=\frac{c^2}{4\pi k}\left[\vec{E},\vec{B}\right]=\frac{c^3}{4\pi k}B^2\vec{n}.$$

Інтенсивність випромінювання I, яка рівна енергії, що її випромінює джерело за одиницю часу, рівна

$$I = \frac{c^2}{4\pi k}\int \left[\vec{E},\vec{B}\right] r^2 d\Omega \approx \frac{2}{3}k\frac{\ddot{\vec{p}}^2}{c^3} + \frac{2}{3}k\frac{\ddot{\vec{m}}^2}{c^5} + \frac{k}{180}\frac{\dddot{Q}_{\alpha\beta}}{c^5}.$$

Оскільки сумарна інтенсивність випромінювання є повним потоком електромагнітної енергії через сферу великого радіуса r, то її можна знайти як

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} W dt.$$

Її також можна представити у вигляді суми енергій, випромінюваних на різних частотах

$$W = \int_{0}^{\infty} W(\omega) d\omega,$$

де $W(\omega)$ – спектральна густина випромінювання. Вона характеризує спектральний склад випромінювання. Графік функції $W(\omega)$ називають спектральною лінією випромінювання. Щоб визначити спектральну густину випромінювання даного джерела, слід величини, що входять в інтенсивність випромінювання, зображати за допомогою інтеграла Фур'є.

Сила радіаційного тертя, яка діє на частинку, що випромінює визначається виразом

$$\vec{f}_r = \frac{2}{3}k\frac{e^2}{c^3}\dddot{\vec{r}},$$

де e – заряд частки,

$\vec{r}$ – її радіус-вектор.

Задачі для самостійного розв'язування

1. Довести, що $\vec{E}$ і $\vec{B}$ задовольняють однорідні хвильові рівняння, якщо ці рівняння задовольняють $\vec{A}$ і φ.

2. Визначити положення еліпса поляризації у випадку довільної різниці фаз α.

Відповідь: $\frac{E_y^2}{a_1^2}+\frac{E_z^2}{a_2^2}-\frac{2E_yE_z}{a_1a_2}cos\alpha = sin^2\alpha$.

3. Показати, що для монохроматичної плоскої хвилі $\vec{A}=\vec{A}_0e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}$ справджуються співвідношення $\vec{E}=i(\vec{k},\vec{A})$, $\vec{B}=i[\vec{k},\vec{A}]$.

4. Знайти співвідношення між фазовою й груповою швидкістю.

Відповідь: $v_{гр}=v_{ф}-\lambda\frac{dv_{ф}}{d\lambda}$.

5. Використовуючи граничний перехід $\lambda\to 0$ з хвильового рівняння одержати рівняння ейконалу (основне рівняння геометричної оптики).

6. Вивести рівняння, які задовольняють потенціал φ і сила струму I довгої лінії (перше і друге телеграфні рівняння).

Відповідь: $$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=L_0C_0\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-(L_0G_0+R_0C_0)\frac{\partial\varphi}{\partial t}-R_0G_0\varphi=0,$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2}-L_0C_0\frac{\partial^2 I}{\partial t^2}-(L_0G_0+R_0C_0)\frac{\partial I}{\partial t}-R_0G_0I=0,$$

де C_0 – ємність, L_0 – індуктивність, G_0 – провідність ізоляції одиниці довжини лінії.

7. Довести, що перше і друге телеграфні рівняння мають розв'язком гармонічну хвилю частотою ω, яка поширюється вздовж осі X.

8. Напруженість електричного поля електромагнітної хвилі

задана $\vec{E}=\vec{E}_0\,e^{-\frac{i}{\tau}\left|t-\frac{\vec{n}\,\vec{r}}{c}\right|}$, де $\vec{E}_0,\vec{n}-$ сталі і $\tau>0$. Визначити компоненту Фур'є $\vec{E}\left(\vec{k},\omega\right)$ даної функції.

Відповідь: $\vec{E}=\dfrac{2(2\pi)^3\,\vec{E}_0\tau\,\delta\left(\vec{k}-\dfrac{\omega\,\vec{n}}{c}\right)}{1+\omega^2\tau^2}$.

9. Фур'є компонента напруженості електричного поля має вигляд $\vec{E}\left(\vec{k},\omega\right)=\dfrac{1}{\omega_0}\vec{E}_0(2\pi)^4\,\delta\left(\vec{k}-\dfrac{\omega\,\vec{n}}{c}\right)e^{-\frac{\omega}{\omega_0}}$, де $\vec{E}_0,\vec{n}-$ сталі вектори. Визначити напруженість електричного поля як функцію координат і часу.

Відповідь: $\vec{E}\left(\vec{r},t\right)=\sqrt{\pi}\vec{E}_0 e^{-\left(t-\frac{\vec{n}\,\vec{r}}{c}\right)}$.

10. Електростатичне поле описується сферично-симетричним потенціалом $\varphi\left(\vec{r}\right)=k\dfrac{e}{r}\,e^{-\frac{r}{a}}$, де a – додатна константа. Представити напруженість $\vec{E}$ цього поля у вигляді розкладу $\vec{E}=(2\pi)^{-3}\int\vec{E}_{\vec{k}}\,e^{i\vec{k}\vec{r}}d\vec{k}$ по повздовжніх хвилях $\vec{E}_{\vec{k}}e^{ikx}$, вектори поляризації яких напрямлені вздовж $\vec{k}$.

Відповідь: $E_k=i\dfrac{4\pi\,e}{k^2+\dfrac{1}{a^2}}\vec{k}$.

11. Заряд e рухається в площині XY уздовж прямої $y=z-l$ зі сталою швидкістю $\vec{V}$, віддаляючись від початку координат. В початковий момент часу $t_0=0$ він перебував на осі X. Знайти розподіл об’ємної густини ρ заряду і об’ємної густини j струму.

Відповідь: $\rho=e\,\delta\left(x-l-\dfrac{V}{\sqrt{2}}t\right)\delta\left(y-\dfrac{V}{\sqrt{2}}t\right)\delta(z),\ \vec{j}=\rho\vec{V}$.

12. Заряд e здійснює гармонічні коливання вздовж осі X за законом $x = a \cdot sin\,\omega t$. Написати вираз для об'ємної густини $\vec{j}$ струму. Перевірити справедливість рівняння неперервності для цих величин. Знайти середні в часі за період $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ об'ємні густини заряду ρ і струму $\vec{j}$ і показати, що $\int \rho\, dV = e$.

<u>Відповідь</u>: $\rho = e\delta\left(x - a\,sin\omega t\right)\delta\left(y\right)\delta\left(z\right),$

$$j_x = \rho\, a\omega cos\omega t, j_y = j_z = 0.$$

13. Заряд e рухається по колу радіусом R у площині XY р зі сталою швидкістю ω. В початковий момент часу $t_0 = 0$ він перебував на осі X. Написати вираз для об'ємної густини струму $\vec{j}$ в циліндричних координатах, початок яких співпадає з центром кола. Перевірити справедливість рівняння неперервності для величин e і $\vec{j}$. Довести, що середні в часі за період $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ об'ємні густини заряду $\bar{\rho}$ і струму $\bar{\vec{j}}$ задовольняють співвідношення $\int \bar{\rho}\, dV = e$, $\int\limits_0^{\infty} dr \int\limits_{-\infty}^{\infty} dz \bar{j}_{\psi} = \dfrac{e}{T}$.

<u>Відповідь</u>: $\rho = \dfrac{e}{R}\,\delta\left(r - R\right)\,\delta\left(\varphi - \omega t + 2\pi n\right)\,\delta\left(z\right),$

$$j_r = j_z = 0, j_{\psi} = \rho\,\omega R.$$

14. Рівномірно заряджене з лінійною густиною χ коло радіусом R обертається з кутовою швидкістю ω навколо свого діаметра. Знайти розподіл об'ємної густини ρ заряду і об'ємної густини струму $\vec{j}$ струму в сферичних координатах. Початок координат співпадає з центром кола, а вісь Z напрямлена по осі обертання. Перевірити справедливість рівняння неперервності для знайдених величин.

Відповідь:

$$\rho = \frac{2\pi\chi}{r\,sin\vartheta}\delta(r-R)\{\delta(\varphi-\omega t+2\pi n)-\delta(\varphi-\omega t+2\pi n+\pi)\},$$

$j_z = j_\vartheta = 0$, $j_\varphi = \rho\omega R\,sin\vartheta$.

15. Частинка масою m і зарядом e здійснює еліптичний рух в кулонівському полі $\frac{\alpha}{r}$ $(\alpha < 0)$. Повна енергія частинки E. Знайти середній за період руху дипольний момент p заряду. Виразити його через вектор Рунге-Ленца $\left(\vec{C} = [\vec{V},\vec{M}] + \frac{\alpha\,\vec{r}}{r}\right)$.

Відповідь: $\vec{p} = \frac{3e}{4E}\vec{C}$.

16. Знайти інтенсивність випромінювання частки масою m, що рухається по коловій орбіті з радіусом a під дією кулонівських сил. Відповідь виразити через енергію.

Відповідь: $I = \frac{1}{k}\cdot\frac{32|E|^4}{3m^2c^2e^2}$.

17. Визначити час, протягом якого частинка масою m, що рухається по коловій орбіті, впаде на заряджений центр внаслідок втрати енергії на електромагнітне випромінювання.

Відповідь: $\tau = k\frac{m^2e^2c^3}{32|E_0|^3}$.

18. Показати, що при $\rho = 0$ і $j = 0$ для електромагнітних потенціалів можна вибрати калібрування $\varphi = 0$ і $div\,\vec{A} = 0$ і одержати хвильове рівняння. Показати, що поперечність електромагнітних хвиль випливає з умови калібрування.

19. Одержати вираз для потенціалів заряду, що рівномірно рухається з допомогою релятивістського перетворення статичного

кулонівського поля (потенціали Лієнара-Віхерта).

20. Використовуючи потенціали Лієнара-Віхерта, визначити напруженості електричного і магнітного полів рухомого заряду.

Відповідь: $\vec{E} = ke\dfrac{\left(\vec{R} - R\dfrac{\vec{V}}{c}\right)\left(1 - \dfrac{V^2}{c^2}\right)}{\left(R - \dfrac{\left(\vec{R}\vec{V}\right)}{c}\right)^3} + k\dfrac{e}{c^2}\dfrac{\left[\vec{R}\left[\left(\vec{R} - R\dfrac{\vec{V}}{c}\right),\dot{\vec{v}}\right]\right]}{\left(R - \dfrac{\left(\vec{R}\vec{V}\right)}{c}\right)^2}$,

$$\vec{B} = \frac{\left[\vec{R},\vec{E}\right]}{Rc}.$$

21. Через конденсатор пролетіла частинка масою m і зарядом e. Відстань між обкладками конденсатора рівна l, а напруженість її електричного поля в ньому однорідна і постійна. Кут між векторами $\vec{E}$ і напрямком швидкості $\vec{V}_0$ частки при влітанні дорівнює α. Знаки заряду e і $cos\alpha$ однакові. Знайти енергію E, що її втрачає частинка на дипольне випромінюваний під час прольоту через конденсатор.

Відповідь: $E = \dfrac{2}{3}k\dfrac{EV_0e^3\left(\dfrac{2eEI}{mV_0^2} + cos^2\alpha\right)^{\frac{1}{2}} - cos\alpha}{mc^3}$.

22. Під дією пружної сили частинка, масою m і зарядом e може здійснювати гармонічні коливання з частотою ω_0 (осцилятор). Враховуючи силу радіаційного тертя, визначити середню за період $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ інтенсивність I випромінювання осцилятора, який здійснює вимушені коливання, що встановилися у зовнішньому електричному полі $\vec{E} = \vec{E}_0\, sin\omega t$.

Відповідь: $I = \dfrac{2}{3}\pi k \cdot \dfrac{E_0^2e^4}{m^2c^3} \cdot \dfrac{\omega^4}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \omega^2\Gamma^2}$.

23. Електрон масою m і зарядом e пролітає на великій відстані

від нерухомого ядра із зарядом Ze . В нескінченно віддалений момент часу $t \to \infty$ електрон мав швидкість V_0. Нехтуючи викривленням траєкторії, знайти енергію ε, що її втратив електрон на дипольне випромінювання за весь час польоту.

Відповідь: $\varepsilon = k^2 \dfrac{Z^2 e^6}{12 m^2 c^3 l^3 V_0}$.

24. Атом випромінює електромагнітні хвилі і перебуває у збудженому стані протягом часу τ. Залежність напруженості електричного поля від часу задається формулою $E(t) = E_0\, e^{-\frac{t}{\tau} - i\omega_0 t}$. Визначити ширину лінії випромінювання атома.

Відповідь: $\Delta\omega = \dfrac{2}{\tau}$.

25. Показати, що дипольне випромінювання при зіткненні двох однакових часток відсутнє.

26. Найпростіша лінійна антена являє собою тонкий прямолінійний провідник довжиною l, по якому тече струм $I = I_0 \cos\omega\, t$. Визначити середню інтенсивність I довгохвильового випромінювання системи за період коливання струму.

Відповідь: $I = k \dfrac{I_0 l^2 \omega^2}{3c^3}$.

27. Модель атома водню, запропонована Дж. Дж. Томсоном, являє собою нерухому однорідно заряджену кулю радіусом R із повним додатнім зарядом $|e|$. Всередині кулі рухається точковий електрон масою m і зарядом e. Чому дорівнює частота ω електромагнітної хвилі, яку випромінює система ? Припускаючи, що в початковий момент часу t_0 електрон перебував у стані спокою на відстані R від центра кулі, визначити усереднений за часом від t до

$t+\frac{2\pi}{\omega}$ закон зменшення: повної енергії ε електрона, обумовленого силою променистого тертя. При усередненні повільні функції слід розглядати як сталі величини.

Відповідь: $E=\frac{m^2\omega^2R^2}{2}e^{-\gamma t}$, де $\gamma=k\frac{2}{3}\frac{e^2\omega^2}{c^3}$.

28. Частинка масою m і зарядом e здійснює еліптичний рух в кулонівському потенціальному полі $\frac{\alpha}{r}$ $(\alpha<0)$. Повна енергія і момент частинки E і M. Початок декартової системи координат поміщено в центр силового поля, а вісь X спрямована вздовж великої півосі траєкторії, що лежить в площині XY. Знайти середні за період значення компонент тензора $D_{\alpha\beta}$ квадрупольного моменту рухомого заряду.

Відповідь: $D_{\alpha\beta}=0$ при $\alpha\neq\beta$, $D_{11}=\frac{e\alpha^2}{8E^2}\left(1+9\varepsilon^2\right)$,

$$D_{22}=\frac{e\alpha^2}{8E^2}\left(1+6\varepsilon^2\right),\; D_{33}=-\frac{e\alpha^2}{8E^2}\left(2+3\varepsilon^2\right),$$

де $\varepsilon=\sqrt{1+\frac{2EM^2}{m\alpha^2}}$ – ексцентриситет траєкторії.

29. Найпростіша рамочна антена має форму прямокутної рамки зі сторонами a і b, по якій тече лінійний струм $I=I_0\cos\omega t$. Визначити середню інтенсивність I довгохвильового випромінювання антени за період коливання струму.

Відповідь: $I=k\frac{I_0a^2b^2\omega^4}{3c^5}$.

30. Чи можливе магнітно-дипольне випромінювання в моделях атома водню Е.Резерфорда і Дж. Дж. Томсона?

Відповідь: в системі центра інерції – ні;

в інших системах відліку – так.

31. Замкнута механічна система складається з двох частинок, заряди яких q_1 і q_2, а маси m_1 і m_2 і які рухаються довільно. Довести, що якщо початок координат вибрано в центрі інерції, то магнітний момент μ і механічний момент M системи пропорційні один одному і знайти коефіцієнт пропорційності.

Відповідь: $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}\left(\dfrac{q_1}{m_1} + \dfrac{q_2}{m_2}\right)M$.

33. Довести, що при відсутності зовнішнього поля інтенсивність магнітно-дипольного випромінювання двох заряджених частинок, що взаємодіють між собою, рівна нулю, якщо початок координат вибрати в центрі інерції цих частинок.

34. Замкнута система складається зі скінченої кількості частинок з однаковим відношенням $\dfrac{e}{m}$. Довести, що магнітно-дипольне випромінювання в такій системі відсутнє.

35. Система частинок з однаковим відношенням $\dfrac{e}{m}$ здійснює фінітний рух у зовнішньому центральносиметричному полі, яке створюється нерухомою частинкою. У просторі увімкнуто слабке однорідне постійне магнітне поле індукцією B. Визначити напруженість електричного E_m і магнітного B_m полів магнітно-дипольного випромінювання у хвильовій зоні, а також частоту випромінюваних хвиль.

Відповідь: $E_{магн} = k\dfrac{\left[\vec{n}\left[\vec{\Omega}\left[\vec{\Omega},\vec{m}\right]\right]\right]}{c^3 r}$, $B_{магн} = k\dfrac{\left[\left[\vec{m},\vec{n}\right],\vec{n}\right]}{c^4 r}$, де $\Omega = \dfrac{e}{2mc}B$ - ларморівська частота.

СПЕЦІАЛЬНА ТЕОРІЯ ВІДНОСНОСТІ

Найважливіші поняття, закони й формули

Основні положення спеціальної теорії відносності (постулати):

1). Швидкість світла однакова у всіх інерціальних системах відліку.

2). Фізичні закони однакові у всіх інерціальних системах відліку.

Наслідком цих постулатів є те, що рівняння, які описують закони природи повинні бути інваріантними відносно перетворень Лоренца, які у тривимірних позначеннях мають вигляд

$$x = \frac{x' + V\,t'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},\; y = y',\; z = z',\; t = \frac{t' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Якщо ввести чотиривимірний простір, координатами якого є

$$x_0 = ict,\; x_1 = x,\; x_2 = y,\; x_3 = z,$$

то у цьому випадку перетворення Лоренца можна записати у матричній формі

$$x_i' = \sum_i a_{ik} x_k,$$

де

$$a_{ik} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} & \frac{-i\frac{V}{c}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ \frac{i\frac{V}{c}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} & \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Формули зворотного перетворення можна одержати, якщо у формулах прямого перетворення знак V замінити на протилежний, тобто

$$x_i = a_{ki} x'_k ,$$

оскільки перетворення Лоренца є лінійними ортогональними перетвореннями.

Крім чотиривимірного радіус-вектора

$$\overset{\Rightarrow}{r}\left(x_0, x_1, x_2, x_3\right) = \overset{\Rightarrow}{r}\left(ict, x, y, z\right)$$

ряд інших величин також утворюють чотиривимірні величини. Зокрема, тривимірний релятивістський імпульс і релятивістська енергія

$$\vec{p} = \frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1 - \dfrac{\upsilon^2}{c^2}}},$$

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \dfrac{\upsilon^2}{c^2}}},$$

утворюють 4-вектор $\overset{\Rightarrow}{p}$ енергії-імпульсу

$$\overset{\Rightarrow}{p}\left(i\frac{E}{c}, \vec{p} \right),$$

компоненти якого задовольняють умову

$$p^2 - \frac{E}{c^2} = -m^2 c^2 .$$

Чотиривимірне рівняння руху має вигляд

$$\frac{dp_i}{dt} = f_i ,$$

де

$$\vec{\vec{f}} = \left(\frac{i}{c} \frac{\vec{F}\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}, \frac{\vec{F}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} \right) -$$

чотиривимірна сила, або сила Мінковського.

В релятивістській електродинаміці розглядають також такі 4-вектори:

густини струму $\quad \vec{\vec{j}} = \left(ic\rho, \vec{j} \right)$

і 4-потенціал $\quad \vec{\vec{A}} = \left(i\frac{\varphi}{c}, \vec{A} \right),$

через які у чотиривимірній формі можна записати рівняння неперервності

$$\frac{\partial j_i}{\partial x_i} = 0$$

і рівняння Даламбера

$$\Box A_i = -\frac{4\pi k}{c^2} j_i .$$

Компоненти ж електромагнітного поля утворюють антисиметричний тензор F_{ik}

$$F_{ik} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{i}{c}E_x & \frac{i}{c}E_y & \frac{i}{c}E_z \\ -\frac{i}{c}E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -\frac{i}{c}E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -\frac{i}{c}E_z & B_y & -B_x & 0 \end{vmatrix} .$$

При переході від однієї інерціальної системи відліку до іншої складові тензора перетворюються за законом

$$F'_{ik} = a_{il} a_{km} F_{lm} ,$$

що приводить до такого закону перетворення полів

$$\vec{E}'_{||} = \vec{E}_{||},$$

$$\vec{E}'_{\perp} = \frac{\vec{E}_{\perp} + \left[\vec{\upsilon}, \vec{B}\right]}{\sqrt{1 - \dfrac{\upsilon^2}{c^2}}},$$

$$\vec{B}'_{||} = \vec{B}_{||},$$

$$\vec{B}'_{\perp} = \frac{\vec{B}_{\perp} - \dfrac{\left[\vec{\upsilon}, \vec{E}\right]}{c^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}.$$

Тензор утворюють також релятивістські енергія та імпульс електромагнітного поля

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi k}\left(F_{il}F_{km} - \frac{1}{4}\delta_{ik}F_{km}\right).$$

Задачі для самостійного розв’язування

1. Показати, що два послідовних перетворення Лоренца в одному і тому ж напрямку переставні і еквівалентні одному перетворенню Лоренца.

2. Вважаючи, що при малих швидкостях частинки виконується умова $p^2 << m^2c^2$ де p –імпульс, знайти наближену залежність енергії частинки від імпульсу з точністю до члена порядку $\frac{p^2}{m^2c^2}$.

Відповідь: $E = mc^2 + \frac{p^2}{2m} - \frac{p^4}{8m^3c^2}$.

3. Частинка масою M розпадається на дві з масами m_1 і m_2. Знайти енергію частинок, що розпалися, відносно системи центра інерції.

Відповідь: $E_1 = \dfrac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M} c^2$, $E_2 = \dfrac{M^2 - m_1^2 + m_2^2}{2M} c^2$.

4. Скориставшись результатами попередньої задачі, знайти кінетичну енергію μ-мезона з енергією спокою $105{,}7\ MeB$ і кінетичну енергію нейтрино, що утвориться після розпаду π-мезона, який перебував у стані спокою. Маса спокою π-мезона $139{,}6\ MeB$.

Відповідь: $T_\mu = 4MeB$, $T_\nu = 29{,}8MeB$.

5. Дві частинки з масами спокою m_1 і m_2, енергіями E_1 і E_2 пружно розсіюються одна на одній. Вважаючи, що друга частинка перебуває у стані спокою, знайти зв'язок між кутами розсіювання частинок у лабораторній системі відліку і їх енергіями після зіткнення E_1' і E_2'.

Відповідь:
$$cos\vartheta_1 = \frac{E_1'\left(E_1 - m_1c^2\right) - E_1m_2c^2 - m_1c^2}{p_0p_1c^2},$$
$$cos\vartheta_2 = \frac{\left(E_1 + m_2c^2\right)\left(E_2' - m_2c^2\right)}{p_0p_2c^2},$$
де $p_0 = \dfrac{\sqrt{E_1^2 - m_1c^2}}{c}$.

6. Довести, що якщо напруженості електричного і магнітного полів перпендикулярні в одній системі відліку, то вони перпендикулярні і у всіх інших інерціальних системах відліку.

7. Знайти систему відліку, в якій вектори напруженостей електричного і магнітного полів паралельні.

8. Одержати вираз для потенціалів заряду, що рухається рівномірно шляхом релятивістського перетворення статичного кулонівського поля (потенціали Лієнара-Віхерта).

Відповідь: $\varphi = k\dfrac{e}{R - \dfrac{(\vec{R},\vec{V})}{c}}$, $\vec{A} = \dfrac{k}{c^2}\cdot\dfrac{e\vec{V}}{R - \dfrac{(\vec{R},\vec{V})}{c}}$.

9. Показати, що хвильове рівняння неінваріантне відносно перетворень Галілея та інваріантне відносно перетворень Лоренца.

10. Показати, що якщо магнітний момент μ рухається зі швидкістю V $V << c$, то виникає електричний дипольний момент $p = \dfrac{[\vec{V},\vec{\mu}]}{c^2}$.

ЕЛЕКТРОМАГНІТНЕ ПОЛЕ В РЕЧОВИНІ

Найважливіші поняття, закони й формули

При розгляді електромагнітних полів у середовищах крім двох характеристик, введених раніше, ($\vec{E}$ *і* $\vec{B}$) доцільно ввести ще дві їх характеристики – електричну індукцію

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

і напруженість магнітного поля

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M},$$

де $\vec{P}$ – поляризованість, $\vec{M}$ – намагніченість, ε_0 *і* μ_0 – електрична і магнітна сталі.

Зв’язок між векторами $\vec{P}$ *і* $\vec{E}$ та $\vec{M}$ *і* $\vec{B}$ визначається властивостями середовища. Для анізотропного середовища виконуються співвідношення

$$P_i = \varepsilon_0 \alpha_{ik} E_k,$$

$$M_i = \chi_{ik} H_k,$$

де i і k набувають значень *1, 2, 3* і позначають проекції вектора на осі x, y *і* z, α_{ik} – тензор поляризованості середовища, χ_{ik} – тензор його магнітної сприйнятливості. Тоді компоненти вектора $\vec{D}$ і $\vec{B}$ рівні

$$D_i = \varepsilon_{ik} \varepsilon_0 E_k,$$

$$B_i = \mu_{ik} \mu_0 H_k,$$

де $\varepsilon_{ik} = \delta_{ik} + \alpha_{ik}$ – тензор діелектричної проникності,

$\mu_{ik} = \delta_{ik} + \chi_{ik}$ – тензор магнітної проникності.

В ізотропному середовищі

$$\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E},$$

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}.$$

Рівняння Максвелла у середовищі мають вигляд:

в диференціальній формі

$$\text{(a)} \qquad div\,\vec{D} = \rho_в ,$$

$$\text{(в)} \qquad rot\vec{H} = \vec{j}_{пр} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t},$$

$$\text{(c)} \qquad rot\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

$$\text{(d)} \qquad div\,\vec{B} = 0 ,$$

де $\rho_в$ – густина вільних зарядів, $\vec{j}_{пр}$ – густина струму провідності.

В інтегральній формі

$$\text{(a)} \qquad \oint\limits_{(S)} \vec{D}d\vec{S} = \int\limits_{(V)} \rho_в\, dV ,$$

$$\text{(в)} \qquad \oint\limits_{(Г)} \vec{H}d\vec{l} = \frac{1}{c^2} \int\limits_{(S)} \left(\vec{j}_{пр} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S} ,$$

$$\text{(c)} \qquad \oint\limits_{(Г)} \vec{E}d\vec{l} = -\int\limits_{(S)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}$$

$$\text{(d)} \qquad \oint\limits_{(S)} \vec{B}d\vec{S} = 0 .$$

Граничні умови набувають вигляду

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma , \qquad B_{2n} = B_{1n} ,$$

$$E_{2\tau} = E_{1\tau} , \qquad \left[\vec{n}, \left(\vec{H}_2 - \vec{H}_1 \right) \right] = \vec{i} .$$

Система рівнянь Максвелла для електростатичного поля в середовищі зводиться до вигляду

$$div\,\vec{D} = \rho_в ,$$

$$rot\,\vec{E} = 0 .$$

В однорідному середовищі скалярний потенціал задовольняє рівняння Пуассона

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0},$$

а граничні умови для нього є такими

$$\varphi_1 = \varphi_2,$$

$$\varepsilon_1\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_1 - \varepsilon_2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_2 = \frac{\sigma_{пов}}{\varepsilon_0}.$$

Рівняння Максвелла для магнітостатики в середовищі є такими

$$rot\,\vec{H} = j_{пр},$$

$$div\,\vec{B} = 0,$$

а рівняння Пуассона для векторного потенціалу

$$\Delta\vec{A} = -\mu\mu_0\vec{j}.$$

У випадку полів, що повільно змінюються, якщо виконуються умови

$$\omega << \sigma/\varepsilon, \quad l << \lambda,$$

де σ – провідність середовища, ω і λ – частота і довжина хвилі електромагнітних коливань, l – лінійні розміри системи, система рівнянь Максвелла записується так

(a) $$div\,\vec{D} = \rho_в,$$

(в) $$rot\,\vec{H} = \vec{j}_{пр},$$

(c) $$rot\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},$$

(d) $$div\,\vec{B} = 0.$$

Для цього випадку основне рівняння квазістаціонарних процесів є таким

$$\Delta\vec{E} = \mu\sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t},$$

а для монохроматичних коливань

$$\Delta\vec{E} + i\omega\mu\sigma\vec{E} = 0 .$$

Хвильові рівняння, які описують поширення електромагнітних хвиль у середовищі є такими

$$\Delta\vec{E} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0 ,$$

$$\Delta\vec{H} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} = 0 .$$

При поширенні електромагнітних хвиль у діелектричному середовищі в граничних умовах слід покласти рівними нулю густину вільних зарядів і поверхневих струмів.

Формули Френеля для електричної напруженості відбитої $\vec{E}_1$ і заломленої $\vec{E}_2$ на плоскій межі поділу діелектриків хвилі:

для перпендикулярної до межі поділу складової

$$E_{1\perp} = \frac{\sin(\theta_2 - \theta)}{\sin(\theta_2 + \theta)} E_{\perp} ,$$

$$E_{2\perp} = \frac{2\sin\theta_2 \cos\theta}{\sin(\theta_2 + \theta)} E_{\perp}$$

і для паралельної складової

$$E_{1||} = \frac{tg(\theta - \theta_2)}{tg(\theta_2 + \theta)} E_{||} ,$$

$$E_{2||} = \frac{2\sin\theta_2 \cos\theta}{\sin(\theta_2 + \theta)\cos(\theta - \theta_2)} E_{||} ,$$

де θ – кут падіння, θ_2 – кут заломлення.

Коефіцієнти відбивання R і проходження D визначають як

$$R = \frac{|E_1|^2}{|E|^2} ,$$

$$D = n_{12}\frac{|E_2|^2}{|E|^2},$$

де n_{12} – показник заломлення другого середовища відносно першого.

Рівняння Максвелла для електромагнітних хвиль з частотою ω які поширюються у хвилеводах записуються так:

$$rot\,\vec{H} = -i\omega\varepsilon_0\vec{E},$$

$$rot\,\vec{E} = i\omega\mu_0\vec{H},$$

$$div\,\vec{E} = 0,$$

$$div\,\vec{H} = 0.$$

Граничні умови на межі металевого хвилевода і внутрішньої його області, якщо всередині хвилевода вакуум, зводяться до вигляду

$$\left[\vec{n},\vec{H}\right] = i_{np},$$

$$E_n = 0,$$

$$E_\tau = 0,$$

$$H_n = 0.$$

Якщо вибрати систему координат так, щоб вісь OZ була напрямлена вздовж хвилевода, то залежність всіх величин від координати z виражається множником e^{ikz}. Тоді

$$\vec{E}(\vec{r},\ t) = e^{i(kz-\omega t)}\vec{E}(x,y),$$

$$\vec{H}(\vec{r},\ t) = e^{i(kz-\omega t)}\vec{H}(x,y).$$

Підставляючи ці функції у рівняння Максвелла і використовуючи небхідні граничні умови, можна описати поля в хвилеводі. Причому, оскільки граничні умови для електричної і магнітної складової не можна задовольнити одночасно, то у хвилеводах існують хвилі двох типів: 1) поперечно-магнітні, або TM – хвилі, в яких $H_z = 0$, 2) поперечно-електричні хвилі, або TE – хвилі, в яких $E_z = 0$.

Задачі для самостійного розв'язування

1. Заряд q рівномірно розподілений по поверхні сфери радіусом a. Знайти абсолютну величину сили F, що розриває сферу на дві рівних половини.

<u>Відповідь</u>: $F = k\dfrac{q^2}{4a^2}$.

2. Відстань між обкладками зарядженого плоского конденсатора d, площа обкладок S. Між обкладками щільно вміщено діелектричну пластину. Конденсатор заряджений від джерела напруги до різниці потенціалів $\Delta\varphi$ і відключений від нього. Яку роботу треба виконати, щоб вийняти діелектричну пластину з конденсатора .

<u>Відповідь</u>: $A = \dfrac{1}{2}C_1(\Delta\varphi)^2(\varepsilon - 1)$.

3. Дві вертикальні і паралельні металеві пластинки частково занурені в рідкий діелектрик. Відстань між пластинами d, різниця потенціалів між ними $\Delta\varphi$. На яку висоту h підніметься гас між пластинами. Капілярність не враховувати.

<u>Відповідь</u>: $h = \dfrac{1}{4\pi k}\dfrac{(\varepsilon - 1)(\Delta\varphi)^2}{\rho g d^2}$.

4. Точковий заряд e знаходиться на відстані d від провідної заземленої площини. Визначити φ і E поля такої системи. Знайти σ індукованих зарядів на площині. Показати, що повний індукований заряд $-e$.

<u>Відповідь</u>: $\varphi = k\left(\dfrac{e}{r} - \dfrac{e}{r'}\right)\theta(x)$, $\vec{E} = ke\left(\dfrac{\vec{r}}{(r')^3} - \dfrac{\vec{r}}{r^3}\right)\theta(x)$,

$$\sigma = -\frac{ed}{2\pi\left(d^2 + r^2\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

5. Точковий заряд e знаходиться на відстані d від центра заземленої провідної сфери радіусом R. Знайти потенціал методом відображень.

Відповідь: $\varphi = k\left(\frac{e}{r} - \frac{e'}{r'}\right)$, де e' – електричний заряд відображення, r' – відстань до електричного заряду зображення.

6. Знайти потенціал точкового заряду e біля ізольованої провідної кулі радіусом R.

Відповідь: $\varphi = k\left(\frac{e}{r} - \frac{e'}{r'} + \frac{e'}{r}\right)$.

7. Знайти розподіл електричного і магнітного полів всередині циліндричного провідника, через який протікає періодичний струм з частотою ω. Провідність провідника σ.

Відповідь: $E = aJ_0(kr)e^{-i\omega t}$, $H = -ia\sqrt{\frac{i\sigma}{\omega\mu_0}}\,J_1(kr)e^{-i\omega t}$,

де $k = \frac{1+i}{\sigma^*}$, $\sigma^* = \sqrt{\frac{2}{\sigma\omega\mu_0}}$,

J_0 і J_1 – функції Бесселя.

8. В колі діє стала ерс E_0. В момент часу $t = 0$ ерс вимкнули, але коло залишили замкнутим. Знайти закон зміни струму $I(t)$ у колі.

Відповідь: $I = \frac{E_0}{R}e^{-\frac{R}{L}t}$.

9. Нехай у коло, омічний опір якого R, вмикається стороння ерс E_0. Знайти силу струму в цьому колі.

Відповідь: $I = \frac{E_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$, $I_{max} = I_0 - \frac{E_0}{R}$.

10. Записати рівняння для квазістаціонарних струмів у двох індуктивно зв'язаних контурах.

Відповідь: $$\begin{cases} I_1R_1 + \dfrac{1}{C_1}\int I_1dt + L_{11}\dfrac{dI_1}{dt} + L_{12}\dfrac{dI_2}{dt} = E^1_{стор}, \\ I_2R_2 + \dfrac{1}{C_2}\int I_2dt + L_{21}\dfrac{dI_1}{dt} + L_{22}\dfrac{dI_2}{dt} = E^2_{стор}. \end{cases}$$

11. Визначити стаціонарне електромагнітне поле заряду q, що повільно рухається з сталою швидкістю V_0.

Відповідь: $\vec{E} = k\,q\,\dfrac{\vec{r} - \vec{V}_0\,t}{\left|\vec{r} - \vec{V}_0\,t\right|^3}$, $\vec{B} = \dfrac{\left[\vec{V}_0, \vec{E}\right]}{c^2}$.

12. Визначити коефіцієнт затухання електромагнітних хвиль у середовищі з повним внутрішнім відбиванням.

Відповідь: $\chi = \dfrac{\omega}{\upsilon_2}\sqrt{\dfrac{\sin^2\vartheta_1}{n_{12}^2} - 1}$.

13. Визначити амплітуди хвилі, відбитої від плоскопаралельної пластинки, і хвилі, що пройшла через неї. Товщина пластини d, діелектрична проникність ε. Знайти умови, при яких відбивання електромагнітних хвиль від пластини мінімальне. Падіння перпендикулярне.

Відповідь: $E_1 = E_0e^{ik_0z} + Ae^{-ik_0z}$, $E_3 = De^{ik_0z}$,

де $A = \dfrac{\sqrt{\rho_0}\left(1 - e^{2ik_0d}\right)}{1 - \rho_0e^{2ik_0d}}E_0$, $A = \dfrac{\delta_0\,e^{ik_0d}}{1 - \rho_0\,e^{2ik_0d}}E_0$,

$$\rho_0 = \left(\frac{1-n}{1+n}\right)^2,\ \delta_0 = \frac{4n}{(1+n)^2}.$$

Відбивання мінімальне при $d = \dfrac{m\lambda}{2}$.

14. Знайти напруженість, закон дисперсії і граничну частоту для *TE*– і *TH*–хвиль у прямокутному хвилеводі з ідеально провідними

стінками, що мають розміри a і b.

<u>Відповідь</u>: $H_{z\,mn}(x,y)=H_0\,cos\dfrac{\pi\,n\,x}{a}\cdot cos\dfrac{\pi\,n\,y}{b}$ для *TE* – хвиль,

$E_{z\,mn}(x,y)=E_0\,sin\dfrac{\pi\,n\,x}{a}\cdot sin\dfrac{\pi\,n\,y}{b}$ для *TH* – хвиль.

15. Дослідити поширення електромагнітних хвиль у просторі між провідними площинами, відокремлених діелектриком. Відстань між площинами *d*, діелектрична стала середовища *ε*.

<u>Відповідь</u>: $H_z\,(x)=H_0\,sin\dfrac{\pi\,l\,x}{d}$ для *TE*–хвиль,

$E_z\,(x)=E_0\,cos\dfrac{\pi\,l\,x}{d}$ для *TM*–хвиль.

ЛІТЕРАТУРА

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика, т.III.Теория поля.– М.: Наука, 1988.– 509 с.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика, т.VIII. Электродинамика сплошных сред.– М.: Наука, 1982.– 624 с.
3. Бредов М.М., Румянцев В.В., Топтыгин И.Н. Классическая электродинамика.– М.: Наука, 1985.– 400 с.
4. Джексон Дж. Классическая электродинамика.– М.: Мир, 1965.- 702 с.
5. Сугаков В.Й. Теоретична фізика. Електродинаміка. – К.: Вища школа, 1974.– 271 с.
6. Федорченко А.М. Теоретична фізика, т.1.– К.: Вища школа, 1992,– 535 с.
7. Мултановский В.В., Василевский А.С. Курс теоретической физики. Классическая электродинамика.– М.: Просвещение, 1990.– 270 с.
8. Батыгин В.В., Топтыгин И.Н. Сборник задач по электродинамике.– М.: Наука, 1970.– 503 с.
9. Алексеев А.И. Сборник задач по классической электродинамике .– М.: Наука, 1977.– 318 с.
10. Гречко Л.Г., Сугаков В.Й., Томасевич О.Ф., Федорченко А.М. Сборник задач по теоретической физике.– М.: Высшая школа, 1984.– 319 с.
11. Векштейн Е.Г. Сборник задач по электродинамике.– М.: Высшая школа, 1966.– 288 с.
12. Жирнов Н.И. Задачник-практикум по электродинамике.– М.: Просвещение, 1970.– 350 с.