ЗАДАЧА З НЕЛОКАЛЬНИМИ УМОВАМИ ДЛЯ КВАЗІЛІНІЙНИХ ГІПЕРБОЛІЧНИХ СИСТЕМ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ В ЛІНІЙНІЙ ЧАСТИНІ ОПЕРАТОРА

Власій О.Д., Гой Т.П.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,
Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України (м. Івано-Франківськ)
vlasij@ukr.net

В області $Q=(0,T)\times\Omega$, де $\Omega=(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$ – p-вимірний тор, досліджуємо нелокальну крайову задачу

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)u\equiv\sum_{|s|=n}A_s\frac{\partial^n u(t,x)}{\partial t^{s_0}\partial x_1^{s_1}\dots\partial x_p^{s_p}}=f(t,x)+\varepsilon F\left(t,x,\bar{u}\right), \qquad (1)$$

$$M_j\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)u\equiv\left(\frac{\partial^j u}{\partial t^j}+\omega\frac{\partial^{j-1}u}{\partial t^{j-1}}\right)\Bigg|_{t=0}-\left(\mu\frac{\partial^j u}{\partial t^j}+\omega\frac{\partial^{j-1}u}{\partial t^{j-1}}\right)\Bigg|_{t=T}=0, \qquad (2)$$

де $j=0,1,\dots,n$; $\mu,\omega\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, u, f, F – m-вимірні вектор-функції, $\bar{u}=\left\{\frac{\partial^{|q|}u}{\partial t^{q_0}\partial x_1^{q_1}\dots\partial x_p^{q_p}},\ |q|\leqslant N_1\right\}$, A_s, $s=(s_0,s_1,\dots,s_p)$ – матриці порядку $m\times m$ зі сталими дійсними елементами. Оператор L гіперболічний за Петровським, тобто для довільного вектора $\eta\in\mathbb{R}^p\setminus\{0\}$ всі корені $\lambda(\eta)$ рівняння $\det\left\|\sum_{|s|=n}A_s\lambda^{s_0}\eta_1^{s_1}\dots\eta_p^{s_p}\right\|=0$ є дійсними і простими; $\det A_{n,0,\dots,0}\neq 0$. Функція $F(t,x,\bar{v})$, де $\bar{v}=\{v_s\in\mathbb{C},\ |s|\leqslant N_2\}$, неперервна за змінною t і досить гладка за $x_1,\dots,x_p$ в області $D=\left\{(t,x)\in\bar{Q},\ \sum_{|s|\leqslant N_2}|v_s|<\infty\right\}$.

Вигляд області Ω накладає умови 2π-періодичності за просторовими змінними $x_1,\dots,x_p$ на всі вектор-функції у системі (1).

Доведено, що задача (1), (2) еквівалентна системі нелінійних інтегральних рівнянь

$$u(t,x)=u_0(t,x)+\varepsilon\int_Q K(t,x,\tau,\xi)F\big(\tau,\xi,\bar{u}(\tau,\xi)\big)d\tau d\xi, \qquad (3)$$

де вектор-функція $u_0(t,x)$ – розв'язок незбуреної задачі (1), (2) ($\varepsilon=0$), $K(t,x,\tau,\xi)=\sum\limits_{|k|\geqslant 0}G_k(t,\tau)\exp(ik,x)\exp(ik,\xi)$, $G_k(t,\tau)$, $k\in\mathbb{Z}^p$, – матриці Ґріна задач $L\left(d/dt,ik\right)w_k(t)=0$, $M_j\left(d/dt,ik\right)w_k(t)=0$, $j=0,1,\dots,n$.

За умов єдиності розв'язку незбуреної задачі (1), (2) доведено існування єдиного в кулі $\|u-u_0\|_{\overline{C}(\bar{Q})}\leqslant R<\infty$ розв'язку системи (3) для майже всіх (відносно міри Лебега) векторів, компоненти яких певним чином виражаються через коефіцієнти системи (1), і для досить малих $|\varepsilon|$, де $\varepsilon=\varepsilon(n,p,T,R,\mu,\omega)$.