Гой Т.П., Чаплинська І.Я.

НЕЛОКАЛЬНА КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ СЛАБКОНЕЛІНІЙНИХ ГІПЕРБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Досліджена задача з нелокальними двоточковими умовами за часовою координатою та локальними крайовими умовами за просторовою змінною x для слабконелінійних гіперболічних рівнянь високого порядку зі змінними за x коефіцієнтами у прямокутній області. Для майже всіх (відносно міри Лебега) параметрів задачі встановлені умови існування єдиного класичного розв'язку задачі.

Інтерес до задач з нелокальними крайовими умовами для диференціальних рівнянь з частинними похідними зумовлений як потребами загальної теорії крайових задач, так і запитами практики (див., наприклад [1-5] та бібліографію в них). Такі задачі є, взагалі, некоректними, а їх розв'язність у багатьох випадках пов'язана з проблемою малих знаменників.

Дослідження задач з періодичними крайовими умовами за часовою змінною для нелінійних гіперболічних рівнянь започатковані у роботі [6]. Задачі з нелокальними крайовими умовами, що узагальнюють умови періодичності, для нелінійних гіперболічних рівнянь і систем першого та другого порядків вивчались, зокрема, у [7-13].

У даній статті, яка є розвитком робіт [14-16], встановлені умови класичної коректності у прямокутній області задачі з двоточковими нелокальними умовами за часовою змінною для слабконелінійних гіперболічних рівнянь зі змінними за x коефіцієнтами у лінійній частині оператора.

1. Розглянемо в області $Q=\{(t,x):t\in(0,T),\, x\in(0,b)\}$ задачу

$$P(u)\equiv\sum_{s=0}^{n}a_s\,\frac{\partial^{2s}}{\partial t^{2s}}L^{n-s}u(t,x)=\varepsilon f\big(t,x,u(t,x)\big), \qquad (1)$$

$$\left.\frac{\partial^j u(t,x)}{\partial t^j}\right|_{t=0}=\mu\left.\frac{\partial^j u(t,x)}{\partial t^j}\right|_{t=T}, \quad j=0,1,\ldots,2n-1, \qquad (2)$$

$$L^r u(t,0)=L^r u(t,b)=0, \quad r=0,1,\ldots,n-1, \qquad (3)$$

де $a_s\in\mathbf{R},\ s=0,1,\ldots,n,\ a_n=1, a_0\neq0, \varepsilon,\mu\in\mathbf{C}\setminus\{0\}$; оператор $P(u)$ – строго гіперболічний за Петровським;

$$L \equiv -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right) + q(x) \, -$$

самоспряжений диференціальний оператор з коефіцієнтами $p(x) \geq p_0 > 0$, $q(x) > 0$, $p \in C^{2n-1}([0,b])$, $q \in C^{2n-2}([0,b])$. Припустимо, що функція $f(t,x,z)$ визначена і неперервна за t та достатньо гладка за x, z в області $D = \{(t,x,z) : (t,x) \in Q, |z| \leq r < \infty\}$. Інші умови на функцію $f(t,x,z)$ будуть з'ясовані пізніше.

Позначимо через $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ та $\Omega = \{X_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ відповідно множину власних чисел та множину власних функцій задачі Штурма-Ліувілля

$$LX(x) = \lambda X(x), \quad X(0) = X(b) = 0. \tag{4}$$

Відомо [17], що множина Ω є повною та ортогональною в $L_2([0,b])$, а всі власні значення задачі (4) є додатними та різними. Крім цього $X_k(x) \in C^{2n}([0,b]), k \in \mathbf{N}$, і справджуються такі асимптотичні оцінки:

$$c_0 k^2 \leq \lambda_k \leq c_1 k^2, \quad 0 < c_0 \leq c_1. \tag{5}$$

$$\max_{x\in[0,b]}\left|\frac{d^j X_k(x)}{dx^j}\right| \leq c_2 \lambda_k^{j/2}, \; c_2 = c_2(j), \, j = 0,1,\ldots,2n, \; k \in \mathbf{N}. \tag{6}$$

2. Розв’язок задачі (1)-(3) шукаємо у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) X_k(x). \tag{7}$$

Якщо ряд (7) і ряди, отримані з нього почленним диференціюванням за змінною x до порядку $2n$ включно, рівномірно збігаються в області $\overline{G}$, то функція $u(t,x)$, визначена формулою (7), очевидно, задовольняє умови (3).

Підставивши ряд (7) у рівняння (1) та умови (2), для визначення кожної з функцій $u_k(t), k \in \mathbf{N}$, одержимо таку крайову задачу для нескінченної системи звичайних диференціальних рівнянь:

$$\sum_{s=0}^{n} a_s \lambda_k^{n-s} u_k^{(2s)}(t) = \varepsilon f_k(t, \{u_m(t)\}), \quad \lambda_k \in \Lambda, m \in \mathbf{Z}, \tag{8}$$

$$u_k^{(j)}(0) = \mu u_k^{(j)}(T), \; j = 0,1,\ldots,2n-1, \tag{9}$$

де

$$f_k(t, \{u_m(t)\}) = \int_0^b f\left(t, x, \sum\nolimits_{m=1}^{\infty} u_m(t) X_m(x)\right) X_k(x) dx, \; k \in \mathbf{N}, \; - \tag{10}$$

коефіцієнти розвинення функції $f\left(t,x,\sum_{k=1}^{\infty}u_k(t)X_k(x)\right)$ у ряд за ортогональною системою Ω.

Покажемо, що задача (1)-(3) зводиться до еквівалентного їй нелінійного інтегрального рівняння.

Для кожного $k\in\mathbf{N}$ розглянемо задачу з умовами (9) для лінійного рівняння

$$\sum_{s=0}^{n}a_s\lambda_k^{n-s}u_k^{(2s)}(t)=0. \qquad (11)$$

Згідно з припущенням про строгу гіперболічність оператора *P*, корені характеристичного рівняння

$$\sum_{s=0}^{n}a_s\eta^{2s}=0 \qquad (12)$$

є дійсними та простими (випадок кратних коренів призводить лише до більш громіздких викладок).

Тому рівняння (11) має таку фундаментальну систему розв'язків:

$$u_{kj}(t)=\exp\left(i\eta_j\sqrt{\lambda_k}\,t\right),\quad u_{k,n+j}(t)=\exp\left(-i\eta_j\sqrt{\lambda_k}\,t\right),\quad j=1,\ldots,n,$$

де η_j, $j=1,\ldots,n,$– додатні корені рівняння (12), а характеристичний визначник $\Delta(\lambda_k)$ задачі (11),(9) обчислюється за формулою

$$\Delta(\lambda_k)=i^{3n^2}2^n\lambda_k^{n(2n-1)/2}\prod_{1\le p<q\le n}\left(\eta_q^2-\eta_p^2\right)^2\times$$

$$\times\prod_{j=1}^{n}\eta_j\left(1-\mu\exp\left(i\sqrt{\lambda_k}\,\eta_jT\right)\right)\left(1-\mu\exp\left(-i\sqrt{\lambda_k}\,\eta_jT\right)\right). \qquad (13)$$

Зауважимо, що якщо виконується хоча б одна з наступних умов:

1) $|\mu|\ne1$; 2) $(\forall\lambda_k\in\Lambda)\ \arg\mu\pm\sqrt{\lambda_k}\,\eta_jT\ne2\pi m,\ j=1,\ldots,n,\ m\in\mathbf{Z}$,

то визначник $\Delta(\lambda_k)$ тотожно відмінний від нуля для всіх $\lambda_k\in\Lambda$.

Надалі вважатимемо, що для всіх $\lambda_k\in\Lambda$ $\Delta(\lambda_k)\ne0$. Тоді розв'язок лінійної задачі (1)-(3) (коли $\varepsilon=0$) буде єдиним і для кожного $k\in\mathbf{N}$ існує єдина функція Ґріна $G_k(t,\tau)$ задачі (11),(9).

У квадраті $K_T=\{(t,\tau):\ 0\le t,\tau\le T\}$, за винятком сторін $\tau=0$ і $\tau=T$, функції $G_k(t,\tau)$, $k\in\mathbf{N}$, визначаються формулами

$$G_k(t,\tau)=\frac{1}{4}\left(i\sqrt{\lambda_k}\right)^{1-2n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{p=0}^{1}(-1)^p\eta_j^{-1}\prod_{\substack{s=1\\ s\ne j}}^{n}\left(\eta_j^2-\eta_s^2\right)^{-1}\times$$

$$\times \exp\left((-1)^p i\sqrt{\lambda_k}\eta_j(t-\tau)\right)\left(\operatorname{sgn}(t-\tau)+\frac{1+\mu\exp\left((-1)^p i\sqrt{\lambda_k}\eta_j T\right)}{1-\mu\exp\left((-1)^p i\sqrt{\lambda_k}\eta_j T\right)}\right). \quad (14)$$

На стороні $\tau=0$ ($\tau=T$) квадрата K_T кожну з функцій $G_k(t,\tau)$, $k\in\mathbf{N}$, доозначимо за неперервністю справа (зліва).

За допомогою системи функцій $\{G_k(t,\tau), k\in\mathbf{N}\}$ задачу (8), (9) зводимо до еквівалентної нескінченної системи нелінійних інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду

$$u_k(t)=\varepsilon\int_0^T G_k(t,\tau)f_k(\tau,\{u_m(\tau)\})d\tau, \quad k,m\in\mathbf{N}. \quad (15)$$

Припустимо, що ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}G_k(t,\tau)X_k(x)X_k(\xi) \quad (16)$$

рівномірно збігається в області $\overline{Q}\times\overline{Q}$ до функції $K(t,x,\tau,\xi)$. Тоді задача (1),(2) еквівалентна інтегральному рівнянню

$$u(t,x)=\varepsilon\int_G K(t,x,\tau,\xi)f(\tau,\xi,u(\tau,\xi))d\tau d\xi. \quad (17)$$

Збіжність рядів (7) і (16) у загальному випадку пов'язана з проблемою малих знаменників, бо відмінні від нуля вирази

$$1-\mu\exp\left(\pm i\sqrt{\lambda_k}\eta_j T\right), \; j=1,\ldots,n, \quad (18)$$

що входять знаменниками у формули (14) можуть бути як завгодно малими за модулем для нескінченної кількості $\lambda_k\in\Lambda$.

Але, якщо $|\mu|\neq 1$, то вирази (18) не є малими знаменниками, бо

$$\left|1-\mu\exp\left(\pm i\sqrt{\lambda_k}\eta_j T\right)\right|=\left|1-|\mu|\exp\left(i\left(\pm\sqrt{\lambda_k}\eta_j T+\arg\mu\right)\right)\right|=$$

$$=\sqrt{1-2|\mu|\cos\left(\pm\sqrt{\lambda_k}\eta_j T+\arg\mu\right)+|\mu|^2}\geq\left|1-|\mu|\right|, \quad j=1,\ldots,n. \quad (19)$$

З формул (14) та оцінок (19) випливає, що в кожному з трикутників $0\leq t<\tau\leq T$ та $0\leq\tau<t\leq T$

$$\max_{0\leq t\leq T}\left|\frac{\partial^s}{\partial t^s}\int_0^T G_k(t,\tau)d\tau\right|\leq$$

$$\leq\begin{cases} c_3 k^{1-2n+s}\sum_{j=1}^{n}\left|1-\mu\exp\left(i\sqrt{\lambda_k}\eta_j T\right)\right|^{-1}\left|1-\mu\exp\left(-i\sqrt{\lambda_k}\eta_j T\right)\right|^{-1}, & |\mu|=1,\\ c_4 k^{1-2n+s}, & |\mu|\neq 1,\end{cases} \quad (20)$$

де $s=0,1,\ldots,2n$, $c_3=Tc_1(1+|\mu|)^2 B\eta^*$, $c_4=Tc_1(1+|\mu|)\left|1-|\mu|\right|^{-1}Bn\eta^*$,

$\bar{\eta} = \min\limits_{j=1,\dots,n} |\eta_j|$, $B = \max\limits_{j=1,\dots,n} \prod\limits_{\substack{s=1 \\ s\neq j}}^{n} \left|\eta_j^2 - \eta_s^2\right|^{-1}$, c_1 – стала з нерівності (5).

Якщо $|\mu|=1$, то ряд (16) є, взагалі, розбіжним, однак малі знаменники (18) лише незначною мірою погіршують його збіжність, що випливає з наступного твердження.

Лема. Для майже всіх (відносно міри Лебега в **R**) чисел $a_j T$, $j = 1,\dots,n$, ряди

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n-1} \, |1 - \mu \exp(\pm i \sqrt{\lambda_k} \eta_j T)|}, \; j = 1,\dots,n,$$

де $|\mu|=1$, збігаються, якщо $n \ge 2$.

Доведення леми проводиться за схемою доведення леми з [14].

З цієї леми та оцінок (20) випливає, що для майже кожного (відносно міри Лебега в **R**) числа $a_j T$, $j = 1,\dots,n$, при $n \ge 2$ ряд (16) рівномірно збігається в області $\bar{Q} \times \bar{Q}$.

3. Розглянемо питання про існування розв’язку інтегрального рівняння (17) з простору $C^{2n}(\bar{Q})$.

Теорема. Нехай $n \ge 2$, функція $f(t,x,z)$ неперервна за t і має в області D обмежені похідні за змінними x, z до п'ятого порядку включно, причому для довільних $t \in [0,T]$ і $u \in \bar{S}(r)$ справджуються умови

$$L^q f(t,0,u) = L^q f(t,b,u), \;\; q = 0;1. \tag{21}$$

Тоді, якщо $|\mu|=1$, то для майже всіх (відносно міри Лебега в **R**) чисел $a_j T$, $j = 1,\dots,n$, для всіх ε, $|\varepsilon| < \varepsilon_1$, а якщо $|\mu| \neq 1$, то для довільних фіксованих a_j, $j = 1,\dots,n$, $T > 0$, і для всіх ε, $|\varepsilon| < \varepsilon_2$, існує єдиний розв’язок інтегрального рівняння (17), який належить замкненій кулі $\bar{S}(r)$, де

$$\bar{S}(r) = \left\{ u(t,x) \in C^{2n}(\bar{Q}) : \| u \|_{C^{2n}(\bar{Q})} \le r < \infty \right\}$$

$$\varepsilon_1 = \min\left(\frac{r}{\Phi_1(1+r)}, \frac{1}{\Phi_1(2+r)} \right),$$

$$\varepsilon_2 = \min\left(\frac{r}{\Phi_2(1+r)}, \frac{1}{\Phi_2(2+r)} \right),$$

$$\Phi_1(1+r)=c_2^2c_3c_5T\tilde{f}(1+r)^3\max\left(1,c_1^{n-3/2}\right)\sum_{j=1}^{n}S_j\,,$$

$$\Phi_2(1+r)=c_2^2c_3c_5T\tilde{f}(1+r)^3\max\left(1,c_1^{n-3/2}\right),$$

$$S_j=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^{-2}}{|1-\mu\exp(i\sqrt{\lambda_k}\eta_jT)||1-\mu\exp(-i\sqrt{\lambda_k}\eta_jT)|},$$

$$\tilde{f}=\max_{0\le s_1+s_2\le 4}\max_{\bar{D}}\left|\frac{\partial^{s_1+s_2}f(t,x,z)}{\partial x^{s_1}\partial z^{s_2}}\right|.$$

Доведення теореми проведемо для випадку $|\mu|=1$. Рівняння (16) запишемо у вигляді

$$u(t,x)=Au(t,x), \tag{22}$$

де A – нелінійний інтегральний оператор

$$Au(t,x)\equiv\varepsilon\int_Q K(t,x,\tau,\xi)f(\tau,\xi,u(\tau,\xi))d\tau d\xi, \tag{23}$$

визначений у кулі $\bar{S}(r)$, та покажемо, що для майже всіх (відносно міри Лебега) чисел $a_jT,\ j=1,\dots,n,$ оператор A переводить кулю $\bar{S}(r)$ у себе, тобто що $\|Au\|_{C^{2n}(\bar{Q})}\le r$.

Якщо функція $u(t,x)$ вигляду (5) належить кулі $\bar{S}(r)$ і виконуються умови (23), то з (10) одержуємо оцінки

$$\max_{0\le t\le T}\left|f_k\left(t,\{u_m(t)\}\right)\right|\le c_5\lambda_k^{-q/2}\max_{(t,x)\in\bar{Q}}\left|\frac{\partial^q f\left(t,x,u(t,x)\right)}{\partial x^q}\right|,\quad q=0,1,\dots,4. \tag{24}$$

Користуючись правилом диференціювання складної функції, знаходимо

$$\max_{(t,x)\in\bar{Q}}\left|\frac{\partial^p f\left(t,x,u(t,x)\right)}{\partial x^p}\right|\le\tilde{f}\left(1+\|u\|_{C^{2n}(\bar{Q})}\right)^p\le\tilde{f}\left(1+r\right)^p,\ p=0,1,\dots,3. \tag{25}$$

Тепер з формули (23), враховуючи оцінки (20),(24) та (25), одержуємо

$$\|Au(t,x)\|_{C^n(\bar{B})}\le$$

$$\le|\varepsilon|\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j+s\le n}\max_{(t,x)\in\bar{Q}}\left|\frac{\partial^{j+s}}{\partial t^j\partial x^s}\int_0^T G_k(t,\tau)\int_0^b f\left(\tau,\xi,u(\tau,\xi)\right)X_k(x)X(\xi)\,d\tau d\xi\right|\le$$

$$\le|\varepsilon|\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j+s\le n}\max_{(t,x)\in\bar{Q}}\left|\frac{\partial^{j+s}}{\partial t^j\partial x^s}\int_0^T G_k(t,\tau)f_k\left(\tau,\{u_m(\tau)\}\right)d\tau\,X_k(x)\right|\le$$

Покажемо тепер, що оператор A для майже всіх (відносно міри Лебега) чисел $a_j T,\ j = 1,\ldots,n$, є оператором стиску. Нехай $u_1, u_2 \in \overline{S}(r)$.

Із формули (23), враховуючи лему, оцінки (20),(24), (25) та формулу Лагранжа про скінченні прирости, одержуємо, що для майже кожного числа $a_j T,\ j = 1,\ldots,n$, справджується оцінка

$$\|Au_1 - Au_2\|_{C^{2n}(\overline{Q})} \leq |\varepsilon| \times$$

$$\times \left\| \int_Q \sum_{k=1}^{\infty} G_k(t,\tau)\big(f(\tau,\xi,u_1(\tau,\xi)) - f(\tau,\xi,u_2(\tau,\xi))\big) X_k(x) X_k(\xi)) d\tau d\xi \right\|_{C^{2n}(\overline{Q})} \leq$$

$$\leq |\varepsilon|\, \widetilde{f} \|u_2 - u_1\|_{C^{2n}(\overline{Q})} \times$$

Отже, якщо $|\varepsilon| \Phi_1(2 + \mathrm{r}) < 1$, то оператор A, визначений формулою (23), є оператором стиску для майже всіх (відносно міри Лебега) чисел $a_j T,\ j = 1,\ldots,n.$

Неперервність оператора A з

Таким чином, інтегральне рівняння (17), а отже, і задача (1)-(3) має єдиний розв’язок. У випадку $|\mu| \neq 1$ доведення теореми проводиться за тією ж схемою. Теорему доведено.

Зауваження. Розв’язок задачі (1)-(3) можна шукати як границю послідовності $\{u_s(t,x)\}$, де u_0 – довільна функція з кулі $\overline{S}(r)$, $u_{s+1}(t,x) = Au_s(t,x),\ s \in \mathbf{N}$.

[1]. Пташник Б.И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наук. думка, 1984.- 264 с.

[2]. Дезин А.А. Общие вопросы теории граничных задач. – М.: Наука, 1980. – 208 с.

[3]. Мамян А.Х. Общие граничные задачи в слое//Докл. АН СССР.– 1982. – Т. 267, № 2. – С. 292-296.

[4]. Романко В.К. Нелокальные граничные задачи для некоторых систем уравнений//Мат. заметки. – 1985. – Т. 37, № 5. – С. 727-733.

[5]. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. – М.: Высш. шк., 1995. – 301 с.

[6]. Артемьев Н.А. Периодические решения одного класса уравнений в частных производных//Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1937. –№1. – С.15-50.

[7]. Vejvoda O., Harrmann L., Lovicar V. et al. Partial differential equations: Time-periodic solutions. – Alphen aan den Rijn. Sijthoff: Noordhoff, 1981. – 358+XIIIp.

[8]. Sinestrari Eugenio, Webb G.F. Nonlinear hyperbolic systems with nonlocal boundary conditions//J. Math. Anal. and Appl. – 1987. –V.121, №2. – P.449-464.
[9]. Плотников П.И., Юнгерман Л.Н. Периодические решения слабонелинейного волнового уравнения с иррациональным отношением периода к длине интервала//Дифференц. уравнения. – 1988. –Т.24, №9. – С.1599-1607.
[10]. Митропольский Ю.А., Урманчева Л.Б. О двухточечной задаче для систем гиперболических уравнений//Укр. мат. журн. – 1990. –Т.42, №2. – С.1657-1663.
[11]. Byszewski L. Existence and uniqueness of solutions of nonlocal problems for hyperbolic equation $u_{xt}=F(x,t,u,u_x)$//J. Appl. Math. and Stochastic Anal. – 1990. – V.3, №3. – P.163-168.
[12]. Кміть І.Я. Про одну нелокальну задачу для квазілінійної гіперболічної системи першого порядку з двома незалежними змінними//Укр. мат. журн. – 1993. – Т.45, №9. – С.1307-1313.
[13]. Kiguradze Tariel. Some boundary value problems for systems of linear partial differential equations of hyperbolic type. – Tbilisi: A. Razmadze Math. Inst. of the Georg. Acad. of Science. – 1994. – 144 p.
[14]. Гой Т.П., Пташник Б.Й. Задача з нелокальними умовами для слабконелінійних гіперболічних рівнянь//Укр. мат. журн. – 1997. –Т.49, №2. – С.186-195.
[15]. Goy T.P., Ptashnyk B. Yo. Nonlocal boundary value problems for quasilinear hyperbolic equations//Nonlinear boundary value problems. – Donetsk: Institute of Applied Mathematics and Mechanics.–1998. – Issue 8 – С.114-120.
[16]. Гой Т.П. Нелокальна крайова задача для гіперболічного факторизованого оператора зі сталими коефіцієнтами, збуреного нелінійним доданком//Вісник Прикарпатського університету. Математика. Фізика. Хімія. – 1999. – Вип. 2. – С. 16-23.
[17]. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. – М.: Физматгиз, 1961. – 364 с.
[18]. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. – 742 с.

Goy T.P., Chaplyns'ka I.Ya.

NON-LOCAL BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR WEAKLY NONLINEAR HYPERBOLIC EQUATIONS WITH VARIABLE COEFFICIENTS

Досліджена задача з нелокальними двоточковими умовами за часовою координатою та локальними крайовими умовами за просторовою змінною x для слабконелінійних гіперболічних рівнянь високого порядку зі змінними за x коефіцієнтами у прямокутній області. Для майже всіх (відносно міри Лебега) параметрів задачі встановлені умови існування єдиного класичного розв'язку задачі.

We study problem with non-local two-point conditions in time variable and local boundary conditions in a space variable x for weakly nonlinear hyperbolic high-order equations with variable coefficients in rectangular domain. For almost all *(with respect to Lebesque measure) parameters of the problem we establish conditions for the existence of a unique classical solution of the problem.*