Доклады Национальной академии наук Беларуси

2011 **май–июнь** **Том 55 № 3**

УДК 517.927.6

Р. М. ТАЦИЙ[1], *В. В. МАЗУРЕНКО*[2]

УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ МНОГОТОЧЕЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБОБЩЕННОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

(Представлено членом-корреспондентом Я. В. Радыно)

[1]*Политехника Люблинская, Люблин, Польша,*
[2]*Прикарпатский национальный университет им. В. Стефаныка, Ивано-Франковск, Украина*

Поступило 15.12.2010

В сообщении рассматривается обобщенная дифференциальная система

$$\overline{Y}' = C'(x)\overline{Y} + \overline{F}'(x), \quad x \in (a, b), \tag{1}$$

где $\overline{Y}(x)$ – n-мерная вектор-функция, элементы $(n\times n)$-матрицы $C(x)$ и компоненты n-мерного вектора $\overline{F}(x)$ суть непрерывные справа функции ограниченной на $[a, b]$ вариации $(C, \overline{F} \in BV^+[a,b])$, так что дифференцирование и равенство в (1) понимаются в обобщенном смысле. В дальнейшем предполагаем выполнение условий корректности [1]

$$[\Delta C(x)] = 0, \quad \Delta C(x)\Delta\overline{F}(x) = 0, \quad \forall x \in [a, b], \tag{2}$$

позволяющих гарантировать, что при исследовании системы (1) не будет возникать проблема умножения распределений (Шварца). Интерес к системам вида (1) в значительной степени объясняется тем, что в их рамках представляется возможным с единой точки зрения исследовать как линейные обыкновенные дифференциальные системы, так и линейные импульсные и разностные системы.

Пусть $(m\times n)$-матрица $\Omega \in BV^+[a,b]$ и удовлетворяет условиям

$$\Delta\Omega(x)\Delta C(x) = 0, \quad \Delta\Omega(x)\Delta\overline{F}(x) = 0, \quad \forall x \in [a, b]. \tag{3}$$

Рассмотрим интегральный оператор $L : BV^+[a,b] \to \mathbb{C}^n$ вида

$$L\overline{Y} = \int_a^b d\Omega(x)\overline{Y}(x).$$

Оператор L заведомо определен на решениях системы (1), поскольку в силу условий (2), (3) соответственно $\overline{Y}(x) \in BV^+[a,b]$ и интеграл в (4) является классическим интегралом Римана–Стилтьеса. В настоящем сообщении получены условия разрешимости граничной задачи

$$\overline{Y}' = C'(x)\overline{Y} + \overline{F}'(x), \quad L\overline{Y} = \overline{Q}, \quad \overline{Q} \in \mathbb{C}^m. \tag{4}$$

Обозначая посредством $a = x_1 < x_2 < \ldots < x_s = b$ точки разрыва матричной функции $\Omega(x)$, оператор L перепишем в форме

$$L\overline{Y} = \sum_{i=1}^{s} M_i\overline{Y}(x_i) + \int_{x_1}^{x_s} d\Phi(x)\overline{Y}(x), \tag{5}$$

где M_i – скачки матрицы $\Omega(x)$ в точках x_i (здесь не исключается случай бесконечного s при условии абсолютной сходимости соответствующего ряда [2]), а $\Phi(x)$ – непрерывная функция ограниченной на $[a, b]$ вариации $(\Phi \in BV^c[a,b])$.

Для обыкновенных дифференциальных систем, когда $C(x)$ и $\overline{F}(x)$ – абсолютно непрерывные на $[a, b]$ матричные функции, задача (4) и ее частные случаи в самых разных аспектах исследовались многими авторами (см. [3–6]). Для обобщенных дифференциальных систем достаточно изученными можно считать лишь начальные и краевые задачи, что отображено в [7]. Что же касается задачи (4), то близкие по постановке проблемы изучались в [8], где $C(x)$ имеет m непрерывных производных на $[a, b]$, а $\overline{F}(x)$ – распределение на $[a, b]$ порядка не выше $m + 1$, в [9] – для линейной системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием, в [10] – с условиями типа Коши–Николетти $y_i(x_i) = l_i(y_1, \ldots, y_n) + c_i \ (i = \overline{1, n})$, где $y_i(x)$ – координаты вектора $\overline{Y}(x)$, $x_i \in [a, b]$, $l_i : BV([a, b], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ – линейные ограниченные функционалы, $c_i \in \mathbb{R}$.

Общее решение системы (1), как известно [1], имеет вид

$$\overline{Y}(x) = B(x, x_1)\overline{C} + \overline{Y}^*(x), \tag{6}$$

где $B(x, s)$ – фундаментальная матрица однородной системы; $\overline{C}$ – произвольный постоянный вектор; $\overline{Y}^*(x) = \int\limits_{x_1}^{x} B(x, s) d\overline{F}(s)$. Положим $L_B = \sum\limits_{i=1}^{s} M_i B(x_i, x_1) + \int\limits_{x_1}^{x_i} d\Phi(x) B(x, x_1)$. Очевидно, L_B – матрица размера $m \times n$. Пусть L_B^+ – псевдообратная матрица для L_B [11, с. 34], т. е.

$$L_B L_B^+ L_B = L_B. \tag{7}$$

Если $m = n$ и $\det L_B \neq 0$, то псевдообратная матрица $L_B^+ = L_B^{-1}$.

Т е о р е м а 1. *Решение задачи (4) существует тогда и только тогда, когда*

$$(E_m - L_B L_B^+)(\overline{Q} - L\overline{Y}^*) = 0. \tag{8}$$

Если это условие выполняется, то для единственности решения необходимо и достаточно, чтобы

$$L_B^+ L_B = E_n. \tag{9}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для решений $Y(x)$ системы (1) условие $L\overline{Y} = \overline{Q}$ в силу (6) и очевидного равенства $L[B(x, x_1)\overline{C}] = L_B \overline{C}$ можно переписать в виде

$$L_B \overline{C} = \overline{Q} - L\overline{Y}^*, \tag{10}$$

где $\overline{C}$ – произвольный постоянный вектор. Далее

$$L_B L_B^+ L_B \overline{C} = L_B L_B^+ (\overline{Q} - L\overline{Y}^*). \tag{11}$$

Ввиду (7) и (10) имеем $\overline{Q} - L\overline{Y}^* = L_B L_B^+ (\overline{Q} - L\overline{Y}^*)$, откуда и следует условие (8).

Наоборот, пусть выполняется условие (8). Покажем, что вектор-функция

$$\overline{Y}(x) = B(x, x_1)[(E_n - L_B^+ L_B)\overline{C}_0 + L_B^+(\overline{Q} - L\overline{Y}^*)] + \overline{Y}^*(x) \tag{12}$$

для всякого постоянного n-мерного вектора $\overline{C}_0$ является решением задачи (4). Поскольку в выражении (12) $(E_n - L_B^+ L_B)\overline{C}_0 + L_B^+(\overline{Q} - L\overline{Y}^*) = \overline{C}$, то $\overline{Y}(x)$ имеет вид (6) и, следовательно, удовлетворяет системе (1). Остается показать, что $\overline{Y}(x)$ удовлетворяет условию $L\overline{Y} = \overline{Q}$. Действительно, в силу условий (7) и (8) имеем

$$L\overline{Y} = L_B[(E_n - L_B^+ L_B)\overline{C}_0 + L_B^+(\overline{Q} - L\overline{Y}^*)] + L\overline{Y}^* = \overline{Q} - L\overline{Y}^* + L\overline{Y}^* = \overline{Q}.$$

Понятно, что решение (12) единственно, если и только если имеет место условие (9).

С л е д с т в и е. *Если размерности дифференциальной системы (1) и граничного оператора L совпадают (m = n), то для однозначной разрешимости задачи (4) необходимо и достаточно выполнения условия* $\det L_B \neq 0$.

Далее для неоднородного квазидифференциального уравнения (КДУ)

$$L_{pq}[y] \equiv \sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{q}(-1)^{q-j}\left(a_{ij}(x)y^{(p-i)}\right)^{(q-j)} = f(x), \tag{13}$$

рассмотрим постановки задач, вписывающиеся в схему (4). КДУ вида (13) с достаточно гладкими, а также суммируемыми по Лебегу на $[a, b]$ коэффициентами $a_{ij}(x)$ и правой частью $f(x)$ посвящено много работ (см. [12]). Мы же ослабляем требования, предполагая что:

I) $a_{00}^{-1}(x)$ – ограниченная и измеримая на сегменте $[a, b]$ функция;

II) $a_{i0}(x), a_{0j}(x) \in L_2[a,b]$, $i=\overline{1, p}$, $j=\overline{1, q}$;

III) $a_{ij}(x)=b'_{ij}(x)$, $b_{ij}\in BV^+[a,b]$, $i=\overline{1, p}$, $j=\overline{1, q}$;

IV) $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{q-1}(-1)^{k+1} f_k^{(k+1)}(x)$, где $f_k \in BV^+[a,b]$.

Из этих условий видно, что выполнять операцию $(q – j)$-кратного дифференцирования в выражении $L_{pq}[y]$ нельзя из-за недостаточной гладкости его коэфициентов. Если попытаться все же продифференцировать это выражение в обобщенном смысле, то от решения $y(x)$ уравнения (13) мы вынуждены будем требовать достаточной степени гладкости для того, чтобы операции умножения в левой части были законными (а не только формальными) с точки зрения теории распределений. Всех этих трудностей можно избежать, встав на путь концепции квазипроизводных [7]. Попутно удается рационально определить решение уравнения (13). Таким образом, постановки задач для уравнения (13), в отличие от классических [13], есть смысл осуществлять в терминах квазипроизводных:

$$y^{[0]} \overset{def}{=} y, \quad y^{[i]} = y^{(i)}, \quad i=\overline{1, p-1}; \quad y^{[p]} = \sum_{i=0}^{p} a_{i0}(x) y^{(p-i)};$$

$$y^{[p+j]} = -\left(y^{[p+j-1]}\right)' + \sum_{i=0}^{p} a_{ij}(x) y^{(p-i)} + f'_{q-j}(x), \quad j=\overline{1, q}.$$

С их помощью КДУ (13) сводится к дифференциальной системе (1), где

$$\overline{Y} = (y, y^{[1]}, \ldots, y^{[p+q-1]})^T, \ \overline{F}'(x) = (0, 0, \ldots, 0, f'_{q-1}(x), f'_{q-2}(x), \ldots, f'_0(x))^T,$$

$$C'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -a_{00}^{-1}a_{p0} & -a_{00}^{-1}a_{p-1,0} & \ldots & -a_{00}^{-1}a_{10} & -a_{00}^{-1} & 0 & \ldots & 0 \\ \tilde{a}_{p1} & \tilde{a}_{p-1,1} & \ldots & \tilde{a}_{11} & a_{01}a_{00}^{-1} & -1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{p,q-1} & \tilde{a}_{p-1,q-1} & \ldots & \tilde{a}_{1,q-1} & a_{0,q-1}a_{00}^{-1} & 0 & \ldots & -1 \\ \tilde{a}_{pq} & \tilde{a}_{p-1,q} & \ldots & \tilde{a}_{1q} & a_{0q}a_{00}^{-1} & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

(здесь для удобства записи приняты обозначения $\tilde{a}_{ij} = a_{ij} - a_{0j}a_{00}^{-1}a_{i0}$, $\forall i=\overline{1, p}$, $j=\overline{1, q}$). При этом ввиду предположений I)–IV) нетрудно убедиться, что выполняются условия корректности (2).

Под решением КДУ (13) понимаем первую координату $y(x)$ вектора $\overline{Y}(x)$ дифференциальной системы (1), удовлетворяющую ему в обобщенном смысле, т. е. когда дифференцирование и равенство понимаются в смысле теории обобщенных функций.

Требуется найти решения КДУ (13), удовлетворяющие некоторым дополнительным условиям:
а) начальные условия $y^{[\nu]}(x_1) = y_1^\nu$ $(\nu = \overline{0,\, p+q-1};\; y_1^\nu \in \mathbb{R})$;

б) краевые условия $\sum\limits_{\nu=0}^{p+q-1} [\alpha_k^\nu y^{[\nu]}(a) + \beta_k^\nu y^{[\nu]}(b)] = \gamma_k$ $(k = \overline{1, m};\; \alpha_k^\nu, \beta_k^\nu, \gamma_k \in \mathbb{R})$;

в) условия типа Коши–Николетти $y(x_i) = y_i$ $(i = \overline{1,\, p+q},\; p+q > 2;\; y_i \in \mathbb{R})$;

г) условия типа Валле–Пуссена

$$y^{[\nu]}(x_i) = y_i^\nu \quad (\nu = \overline{0, k_i - 1},\; i = \overline{1, s},\; \sum_{i=1}^{s} k_i \geq p+q,\; s > 2;\; y_i^\nu \in \mathbb{R});$$

д) многоточечные условия

$$\sum_{i=1}^{s} \sum_{\nu=0}^{p+q-1} \alpha_{ki}^\nu y^{[\nu]}(x_i) = \gamma_k \quad (s > 2,\; k = \overline{1, m};\; \alpha_{ki}^\nu, \gamma_k \in \mathbb{R});$$

е) интегральные условия

$$\sum_{\nu=0}^{p+q-1} \int_a^b \psi_k^\nu(x) y^{[\nu]}(x)dx = \gamma_k \quad (k = \overline{1, m};\; \psi_k^\nu \in L[a, b],\; \gamma_k \in \mathbb{R});$$

ж) смешанные условия. Комбинация условий б) или д) с условиями е);

з) общие дополнительные условия

$$\sum_{\nu=0}^{p+q-1} (\sum_{i=1}^{s} \alpha_{ki}^\nu y^{[\nu]}(x_i) + \int_a^b y^{[\nu]}(x)d\varphi_k^\nu(x)) = \gamma_k \quad (k = \overline{1, m};\; \alpha_{ki}^\nu, \gamma_k \in \mathbb{R},\; \varphi_k^\nu \in BV^c[a, b]).$$

Каждую из этих задач получается привести к виду (4), если положить:

(а) $s = 1,\; M_1 = E_{p+q},\; \Phi(x) = \text{const},\; \overline{Q} = (y_1^0, y_1^1, \ldots, y_1^{p+q-1})^T$;

(б) $s = 2,\; M_1 = (\alpha_\nu^k)_{k=\overline{1,m}}^{\nu=\overline{0,p+q-1}},\; M_2 = (\beta_k^\nu)_{k=\overline{1,m}}^{\nu=\overline{0,p+q-1}},\; \Phi(x) = \text{const},\; \overline{Q} = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m)^T$;

(в) $s = p+q,\; \Phi(x) = \text{const},\; \overline{Q} = (y_1, y_2, \ldots, y_{p+q})^T$;

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \ldots, M_{p+q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix};$$

(г) $\Phi(x) = \text{const},\; \overline{Q} = (y_1^0, y_1^1, \ldots, y_1^{k_1 - 1}, y_2^0, y_2^1, \ldots, y_2^{k_2 - 1}, \ldots, y_s^0, y_s^1, \ldots, y_s^{k_s - 1})^T$;

$$M_1 = \begin{pmatrix} E_{k_1} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & 0 & \ldots \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} \ldots & \ldots & 0 & \ldots \\ E_{k_2} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & 0 & \ldots \end{pmatrix}, \ldots, M_s = \begin{pmatrix} \ldots & \ldots & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & 0 & \ldots \\ E_{k_s} & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix};$$

(д) $M_i = (\alpha_{ki}^\nu)_{k=\overline{1,m}}^{\nu=\overline{0,p+q-1}},\; \Phi(x) = \text{const},\; \overline{Q} = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m)^T$;

(е) $s = 2,\; M_1 = M_2 = 0,\; \overline{Q} = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m)^T,\; \Phi(x) = \left(\int\limits_{x_1}^{x} \psi_k^\nu(x)dx \right)_{k=\overline{1,m}}^{\nu=\overline{0,p+q-1}}$;

(з) $M_i = (\alpha_{ki}^\nu)_{k=\overline{1,m}}^{\nu=\overline{0,p+q-1}},\; \overline{Q} = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m)^T,\; \Phi(x) = (\varphi_k^\nu(x))_{k=\overline{1,m}}^{\nu=\overline{0,p+q-1}}$.

Литература

1. С т а с ю к М., Т а ц і й Р. // Вісн. НУ «Львів. політехніка». 2006. № 566. С. 33–40.
2. T a m a r k i n J. // Mathematische Zeitschrift. 1928. Bd. 27, № 1. P. 1–54.
3. C o l e R. // Trans. Amer. Math. Soc. 1964. Vol. 111. P. 521–550.
4. C o n t i R. // Boll. UMI. 1967. Vol. 22, № 3. P. 135–178.

5. K r a l l A. // J. Differ. Equations. 1968. Vol. 4. P. 327–336.
6. S t a l l a r d F. // Oak Ridge Nat. Lab. Dept. ORNL-1876. 1955. P. 1–71.
7. Т а ц і й Р., С т а с ю к М., М а з у р е н к о В. // Фіз.-мат. модел. та інформ. технол. 2009. № 10. С. 7–37.
8. Х а л а н а й А., В е к с л е р Д. Качественная теория импульсных систем. М, 1971.
9. K a r a n d j u l o v L. // Ukr. Math. J. 1995. Vol. 47, № 6. P. 770–774.
10. А ш о р д и я М. // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43, № 10. С. 1299–1310.
11. Г а н т м а х е р Ф. Теория матриц. М., 1967.
12. Н а й м а р к М. А. Линейные дифференциальные операторы. М., 1969.
13. К а м к е Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 1971.

R. M. TATSIY, V. V. MAZURENKO

mazvic@ukr.net

CONDITIONS OF SOLVABILITY OF A MULTI-POINT PROBLEM FOR THE GENERALIZED DIFFERENTIAL SYSTEM

Summary

By using the concept of a pseudo-inverse matrix, the conditions of existence and uniqueness for solutions of a multi-point problem for the generalized differential system are obtained. Statements of equivalent to it problems for the quasi-differential equation with distributions as coefficients, including the case when the order of the equation and the number of additional conditions do not coincide, are considered.