І. Обернені та взаємно обернені числа у рівностях та нерівностях

Федак І. В.
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

При розв'язуванні багатьох задач часто доводиться мати справу з оберненими числами.

Нагадаємо, що число a' називається оберненим до числа $a \neq 0$, якщо $aa' = a'a = 1$. Оскільки при цьому $(a')' = a$, то числа a та a' будуть взаємно оберненими. Надалі позначатимемо $a' = \frac{1}{a}$.

Розглянемо деякі цікаві властивості взаємно обернених чисел.

***Приклад* 1.** Довести, що для $a > 0$ виконується нерівність $a + \frac{1}{a} \geq 2$.

Розв'язання. Оскільки при $a > 0$

$$a + \frac{1}{a} - 2 = \frac{a^2 - 2a + 1}{a} = \frac{(a-1)^2}{a} \geq 0,$$

то $a + \frac{1}{a} \geq 2$. При цьому рівність досягається лише для $a = 1$. ■

***Приклад* 2.** Для додатних чисел x_1, x_2, …, x_n довести нерівність

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) \geq n^2.$$

Розв'язання. Справді, за нерівністю Коші маємо

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) \geq n \cdot \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \cdot n \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{x_n}} = n^2.$$

Зауважимо, що рівність тут досягається лише для $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. ■

Доведену у прикладі 1 нерівність можна використати для знаходження найменших значень різних функцій чи виразів. Зокрема, безпосередньо з неї отримуємо

$$\left|x + \frac{9}{x}\right| = 3 \cdot \left|\frac{x}{3} + \frac{3}{x}\right| \geq 3 \cdot 2 = 6, \qquad \left|4x + \frac{1}{x}\right| = 2 \cdot \left|2x + \frac{1}{2x}\right| \geq 2 \cdot 2 = 4.$$

Розглянемо дещо складніший приклад.

***Приклад* 3.** Для додатних чисел a, b, c знайти найменше значення виразу

$$\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}.$$

Розв'язання. Маємо

$$\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} = \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) \geq 2 + 2 + 2 = 6.$$

Крім того,

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \left(\frac{a}{b+c} + 1\right) + \left(\frac{b}{c+a} + 1\right) + \left(\frac{c}{a+b} + 1\right) - 3 =$$

$$= (a+b+c)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right) - 3 = \frac{1}{2}((a+b) + (b+c) + (c+a)) \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right) - 3 \geq \frac{1}{2} \cdot 3^2 - 3 = \frac{3}{2}.$$

У кожній з нерівностей рівність досягається при $a = b = c$, тому найменше значення заданого виразу при додатних a, b, c дорівнює 7,5. ■

Звертаємо увагу, що тут ми скористалися твердженнями прикладів 1, 2.

Зауважимо, що спроба згрупувати доданки заданого виразу у три пари взаємно обернених привела б до неправильного висновку, що найменшим значенням цього виразу є 6.

Проілюструємо на прикладі й ефективність використання обернених чисел для знаходження найбільших та найменших значень виразів, безпосереднє дослідження яких приводить до значних труднощів.

***Приклад* 4.** Знайти найбільше та найменше значення виразу $A = \dfrac{(a+b)(b+c)}{a+2b+c}$, якщо числа a, b, c належать відрізку $[2;3]$.

Розв'язання. Розглянемо вираз

$$\frac{1}{A} = \frac{a+2b+c}{(a+b)(b+c)} = \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c}.$$

Оскільки $\dfrac{1}{3+3} + \dfrac{1}{3+3} \le \dfrac{1}{A} \le \dfrac{1}{2+2} + \dfrac{1}{2+2}$, то $2 \le A \le 3$. Рівності досягаються при $a = b = c = 2$ та $a = b = c = 3$ відповідно. ■

Наведемо також приклад з геометричною інтерпретацією нерівностей, пов'язаних з взаємно оберненими числами.

***Приклад* 5.** Обчислити площу фігури, визначеної системою нерівностей

$$\begin{cases} x^{2015} + \dfrac{1}{x^{2015}} \ge y^{2015} + \dfrac{1}{y^{2015}}, \\ x^2 + y^2 \le 2016. \end{cases}$$

Розв'язання. У кожній парі точок (x, y) та (y, x), де $x \ne y$, рівно одна точка задовольняє першу з нерівностей системи. Тому площа заданої фігури дорівнює половині площі круга $x^2 + y^2 \le 2016$, тобто дорівнює 1008π. ■

Далі перейдемо до нерівностей, пов'язаних з сумами чисел, обернених до натуральних.

***Приклад* 6.** Довести нерівність $\dfrac{77}{60} < \dfrac{1}{404} + \dfrac{1}{405} + \ldots + \dfrac{1}{2015} < \dfrac{25}{12}$.

Розв'язання. Згрупуємо записані доданки у чотири групи по 403 доданки у кожній. У результаті отримаємо такі двосторонні оцінки:

$$\frac{1}{2} = 403 \cdot \frac{1}{806} < \frac{1}{404} + \frac{1}{405} + \ldots + \frac{1}{806} < 403 \cdot \frac{1}{403} = 1.$$

$$\frac{1}{3} = 403 \cdot \frac{1}{1209} < \frac{1}{807} + \frac{1}{808} + \ldots + \frac{1}{1209} < 403 \cdot \frac{1}{806} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{4} = 403 \cdot \frac{1}{1612} < \frac{1}{1210} + \frac{1}{1211} + \ldots + \frac{1}{1612} < 403 \cdot \frac{1}{1209} = \frac{1}{3},$$

$$\frac{1}{5} = 403 \cdot \frac{1}{2015} < \frac{1}{1613} + \frac{1}{1614} + \ldots + \frac{1}{2015} < 403 \cdot \frac{1}{1612} = \frac{1}{4}.$$

Додавши ці нерівності, приходимо до нерівності з умови задачі. ■

Застосовуючи для розв'язування цієї задачі метод групування, ми розглядали групи з однаковими кількостями доданків. Проте іноді доцільно формувати групи, в яких число доданків є різним.

***Приклад* 7.** Довести нерівність $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2016}>6$.

Розв'язання. Зауважимо, що

$$1\ge 1;\ \frac{1}{2}\ge\frac{1}{2};\ \frac{1}{3}+\frac{1}{4}>2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2};\ \frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>4\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{2};\ ...\ ;$$

$$\frac{1}{513}+\frac{1}{514}+...+\frac{1}{1024}>512\cdot\frac{1}{1024}=\frac{1}{2};\ \frac{1}{1025}+\frac{1}{1026}+...+\frac{1}{2016}>0.$$

Додавши записані нерівності, отримаємо нерівність, задану в умові. ■

Зауважимо, що, міркуючи аналогічно, можна довести існування для кожного додатного числа A натурального числа n такого, що $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}>A$. Звідси, зокрема, випливатиме нескінченність суми гармонійного ряду $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+...$.

Природно виникає питання, для яких натуральних n, крім $n=1$, значення суми $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}$ також є натуральним числом. Виявляється, що таких $n>1$ не існує.

Нехай m – найбільше натуральне число, для якого $2^m\le n$. Тоді

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}=\frac{a_1+a_2+a_3+...+a_n}{a\cdot 2^m},$$

де $a\cdot 2^m$ – найменше спільне кратне чисел $1,2,3,...,n$, $a_k=\frac{a\cdot 2^m}{k}$, $k=\overline{1,n}$. Оскільки при цьому число $a_{2^m}=a$ буде непарним, а решта доданків чисельника a_k – парні, то значення отриманого дробу цілим числом бути не може.

Розв'язуючи цю задачу, ми розглянули найбільше (крайнє) число, для якого виконувалася певна умова. Іншими словами – скористалися принципом крайнього. Цікавим є й застосування цього принципу для доведення умовної нерівності для обернених чисел в задачі однієї з Соросівських олімпіад.

***Приклад* 8.** Довести, що для додатних чисел a_1, a_2, … , a_n, $n>1$, таких, що $a_1 a_2 ... a_n=1$, виконується нерівність $\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+...+\frac{1}{1+a_n}\le n-1$.

Розв'язання. Нехай a_k та a_m – два найбільші із заданих чисел. Тоді $a_k a_m\ge 1$, бо у протилежному випадку добуток всіх чисел був би меншим за 1. Оскільки при цьому

$$\frac{1}{1+a_k}+\frac{1}{1+a_m}-1=\frac{1-a_k a_m}{(1+a_k)(1+a_m)}\le 0\Leftrightarrow\frac{1}{1+a_k}+\frac{1}{1+a_m}\le 1,$$

а кожен з решти доданків є меншим за одиницю, то сума всіх n доданків не перевищує $n-1$, причому рівність досягається лише для $n=2$. ■

До обернених чисел приходимо і при розгляді взаємно спряжених виразів $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ та $\sqrt{a}-\sqrt{b}$. У випадку $a-b=1$ такі вирази будуть ще й взаємно оберненими.

Розглянемо приклад нерівності, для доведення якої розгляд пар взаємно спряжених обернених чисел є доволі ефективним.

***Приклад* 9.** Довести нерівність

$$\sqrt{2015}-\sqrt{2014}+\sqrt{2013}-\sqrt{2012}+...-\sqrt{2}+1>\sqrt{504}.$$

Розв'язання. Для всіх натуральних n доведемо загальнішу нерівність

$$a=\sqrt{4n-1}-\sqrt{4n-2}+\sqrt{4n-3}-\sqrt{4n-4}+...-\sqrt{2}+1>\sqrt{n}=b.$$

Маємо

$$2b-a=\sqrt{4n}-\left(\sqrt{4n-1}-\sqrt{4n-2}+\sqrt{4n-3}-\sqrt{4n-4}+...-\sqrt{2}+1\right)=$$

$$=\left(\sqrt{4n}-\sqrt{4n-1}\right)+\left(\sqrt{4n-2}-\sqrt{4n-3}\right)+...+\left(\sqrt{2}-1\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{4n}+\sqrt{4n-1}}+\frac{1}{\sqrt{4n-2}+\sqrt{4n-3}}+...+\frac{1}{\sqrt{2}+1}<$$

$$<\frac{1}{\sqrt{4n-1}+\sqrt{4n-2}}+\frac{1}{\sqrt{4n-3}+\sqrt{4n-4}}+...+\frac{1}{1+0}=$$

$$=\left(\sqrt{4n-1}-\sqrt{4n-2}\right)+\left(\sqrt{4n-3}-\sqrt{4n-4}\right)+...+(1-0)=a.$$

Оскільки $2b-a<a$, то $a>b$, що й треба було довести. ■

Розгляд пар взаємно спряжених обернених чисел приводить до успіху і при розв'язуванні наступної задачі.

***Приклад* 10.** Довести, що у десятковому записі числа $\left(5+\sqrt{26}\right)^{2016}$ перші 2016 цифр після коми є однаковими.

Розв'язання. Розглянемо суму заданого числа і спряженого до нього

$$\left(5+\sqrt{26}\right)^{2016}+\left(5-\sqrt{26}\right)^{2016}.$$

Після піднесення до степеня доданки з радикалами взаємно знищуються, тому така сума є натуральним числом. Крім того,

$$0<(5-\sqrt{26})^{2016}=\frac{1}{(5+\sqrt{26})^{2016}}<\frac{1}{10^{2016}}.$$

Отже, у числі $\left(5+\sqrt{26}\right)^{2016}$ перші 2016 цифр після коми є дев'ятками. ■

На математичних олімпіадах зустрічаються також задачі, в яких фігурують перетворення, пов'язані з оберненими числами чи виразами. Для їх розв'язування доцільно виділити деяку характеристику (інваріант), яка не змінюється у процесі вказаних перетворень.

Розглянемо два приклади такого роду. В одному з них інваріантом є збереження парності при перетвореннях, а в іншому – монотонність сум обернених чисел.

***Приклад* 11.** Для квадратного тричлена $f(x)$ допускаються перетворення вигляду

$$f(x)\to(x-n)^2 f\left(\frac{1}{x-n}\right),$$

де n – довільне ціле число. Чи вдасться, застосувавши кілька перетворень вказаного вигляду, можливо з різними n, із тричлена $x^2-2x+2015$ отримати тричлен $x^2+x-2016$?

Розв'язання. При заданих в умові задачі перетвореннях маємо:

$$ax^2+bx+c\to(x-n)^2\left(\frac{a}{(x-n)^2}+\frac{b}{x-n}+c\right)=cx^2+(b-2cn)x+a+cn^2-bn.$$

Якщо числа a, b, c – цілі, то й коефіцієнти новоутворених квадратних тричленів також будуть цілими. Крім того, при кожному такому перетворенні не змінюється парність коефіцієнта біля x. А оскільки числа –2 та 1 різної парності, то із $x^2-2x+2015$ отримати $x^2+x-2016$ не вдасться. ■

***Приклад* 12.** На дошці виписали 2016 додатних чисел. Дозволяється витирати будь-які два з них a та b, а замість того записати число $\frac{a+b}{4}$. Після 2015 таких ходів залишиться одне число. Довести, що коли спочатку було записано 2016 одиниць, то число, яке залишилось, не менше $\frac{1}{2016}$.

Розв'язання. Додавши $4ab$ до обох частин нерівності $(a-b)^2 \geq 0$, отримаємо $(a+b)^2 \geq 4ab$. Звідси випливає, що $\frac{a+b}{ab} \geq \frac{4}{a+b}$, тобто $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$, для $a>0$, $b>0$. Тому на кожному кроці сума обернених величин усіх записаних чисел не збільшується (властивість-інваріант!). Спочатку ця сума дорівнювала 2016. Отже, для числа *c*, яке залишиться, матимемо $\frac{1}{c} \leq 2016$, тобто $c \geq \frac{1}{2016}$. ■

Задачі для самостійного розв'язування

1. Для $a<0$ довести нерівність $a+\frac{1}{a} \leq -2$. Для яких a у ній досягається рівність?

2. Для додатних чисел a та b знайти найменше значення виразу $\frac{ab}{a^2+b^2}+\frac{a^2+b^2}{ab}$. Чи правда, що воно дорівнює 2 ?

3. Знайти хоч одне натуральне значення n, для якого виконується нерівність

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}>2016.$$

4. Для всіх натуральних n довести нерівність

$$\frac{13}{12}<\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{4n}<\frac{11}{6}.$$

5. Чи можна у виразі $1*\frac{1}{2}*\frac{1}{3}*\ldots*\frac{1}{n}=0$ замість зірочок розставити знаки «+» та «–» так, щоб отримати правильну рівність? Якщо так, то вказати всі варіанти розстановки цих знаків.

6. Для чисел, обернених до квадратів натуральних чисел, довести нерівність

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<2.$$

7. Довести нерівність

$$\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+\ldots+\frac{1}{1+a_n} \geq 1,$$

якщо a_1, a_2, … , a_n, $n>1$, – додатні числа, добуток яких $a_1 a_2 \ldots a_n = 1$.

8. Розв'язати задачу з приклада 11 для допустимих перетворень вигляду $f(x) \to (x-\alpha)^2 f\left(\frac{1}{x-\alpha}\right)$, де α – довільне дійсне число, дослідивши поведінку дискримінанта квадратного тричлена при вказаних перетвореннях.

II. **Обернені та взаємно обернені числа в рівняннях та системах рівнянь**

Федак І. В.
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

Чи не першими практичними задачами, які приводять до розгляду рівнянь з оберненими числами, є задачі на спільну роботу. Як приклад розглянемо задачу ІІІ етапу Всеукраїнської олімпіади з математики 2015 року в Івано-Франківській області для учнів 8 класу.

***Приклад* 1.** Фермер виявив, що його кінь і корова з'їдають стіжок сіна за 9 днів, кінь і коза такий самий стіжок з'їдають за 12 днів, а корова і коза – за 18 днів. За скільки днів з'їли би такий стіжок сіна кінь, корова та коза разом?

Розв'язання. Позначаючи об'єм одного стіжка сіна за одиницю, а через x, y, z – об'єми сіна, які за один день з'їдають кінь, корова та коза відповідно, отримуємо такі три рівняння: $x+y=\frac{1}{9}$, $x+z=\frac{1}{12}$, $y+z=\frac{1}{18}$. Додавши їх, знайдемо $x+y+z=\frac{1}{8}$. Звідси випливає, що кінь, корова та коза разом з'їли би такий стіжок сіна за 8 днів. ■

Наведемо й інший спосіб розв'язування цієї задачі.

Нехай два коні, дві корови та дві кози, розбившись на пари, як в умові задачі, з'їдають по декілька аналогічних стіжків протягом 36 днів. Перша пара за цей час з'їсть 4 стіжки, друга – 3, третя – 2. Разом – 9 стіжків. Таким чином, об'єм сіна в один стіжок вони разом з'їдають за 4 дні. Відповідно, один кінь, одна корова та одна коза разом з'їли би такий стіжок за 8 днів. ■

Відзначимо, що обидва способи розв'язування є досить ефективними, але з естетичних міркувань, мабуть, варто надати перевагу другому з них, в якому обернені числа фігурують неявно у вигляді найменшого спільного кратного їх знаменників.

Розглянемо інший приклад, у якому перехід до обернених чисел уже надає суттєву перевагу при розв'язуванні.

***Приклад* 2.** Розв'язати систему рівнянь: $\frac{xy}{x+y}=\frac{2}{3}$, $\frac{yz}{y+z}=\frac{6}{5}$, $\frac{zx}{z+x}=\frac{3}{4}$.

Розв'язання. Оскільки жодне з чисел $x=0$, $y=0$, $z=0$ не задовольняє задану систему рівнянь, то, замінивши кожен з дробів оберненим, її можна записати у вигляді

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{2}, \quad \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{5}{6}, \quad \frac{1}{z}+\frac{1}{x}=\frac{4}{3}.$$

Додавши ці три рівняння, отримаємо $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{11}{6}$. Віднімаючи тепер по черзі від останнього рівняння кожне з трьох попередніх, знайдемо $\frac{1}{z}=\frac{1}{3}$, $\frac{1}{x}=1$, $\frac{1}{y}=\frac{1}{2}$. Отже, $x=1$, $y=2$, $z=3$. ■

При розв'язуванні наступної задачі використаємо властивості взаємно обернених чисел, пов'язані з нерівностями.

***Приклад* 3.** Розв'язати у додатних числах систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1+x_2+\ldots+x_n=3, \\ \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}=3. \end{cases}$$

Розв'язання. Додавши рівняння системи, отримаємо

$$\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)+\left(x_2+\frac{1}{x_2}\right)+\ldots+\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)=6.$$

Оскільки для додатних чисел x виконується нерівність $x+\frac{1}{x}\geq 2$, рівність в якій досягається лише для $x=1$, то для $n>3$ задана система рівнянь не має розв'язків у додатних числах, а для $n=3$ такий розв'язок єдиний: $x_1=x_2=x_3=1$. Для $n=1$ рівності системи є несумісними, а для $n=2$ з системи рівнянь $x_1+x_2=3$, $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=3$ з врахуванням формул Вієта отримаємо, що x_1, x_2 є парою взаємно обернених чисел – коренів квадратного рівняння $x^2-3x+1=0$. ■

Відзначимо, що нерівності для сум взаємно обернених чисел часто використовують і для розв'язування деяких трансцендентних рівнянь.

Приклад **4.** Розв'язати рівняння $x^2+\frac{1}{4x^2}+\sin y=0$.

Розв'язання. Оскільки $x^2+\frac{1}{4x^2}=\frac{1}{2}\left(2x^2+\frac{1}{2x^2}\right)\geq 1$, а $\sin y\geq -1$, то рівність досягається лише при $2x^2=1$, $\sin y=-1$. Отже, $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, $y=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, де n – довільне ціле число. ■

Розглянемо також приклади, в яких обернені числа фігурують як корені рівнянь.

Приклад **5.** Рівняння $x^3-ax^2+1=0$ має три різні дійсні корені. Довести, що й рівняння $x^3-ax+1=0$ також має три різні дійсні корені.

Розв'язання. Зробивши у другому рівнянні заміну $x=\frac{1}{t}$, зведемо його до рівняння $\frac{1}{t^3}-\frac{a}{t}+1=0 \Leftrightarrow t^3-at^2+1=0$. Звідси випливає, що корені рівняння $x^3-ax+1=0$ – обернені до коренів рівняння $x^3-ax^2+1=0$ і також є різними. ■

Приклад **6.** Розв'язати рівняння $\frac{\left(x^2-x+1\right)^3}{x^2\left(x-1\right)^2}=\frac{\left(a^2-a+1\right)^3}{a^2(a-1)^2}$.

Розв'язання. Записавши ліву частину рівняння у вигляді

$$\frac{\left(x^2-x+1\right)^3}{x^2\left(x-1\right)^2}=\frac{\left(\left(x-0{,}5\right)^2+0{,}75\right)^3}{\left(\left(x-0{,}5\right)^2-0{,}25\right)^2},$$

бачимо, що разом з $x=x_1$ коренем рівняння буде також $x=x_2$, для якого $x_1-0{,}5=0{,}5-x_2$, тобто $x_2=1-x_1$. Крім того, записуючи ліву частину рівняння у вигляді

$$\frac{(x^2-x+1)^3}{x^2(x-1)^2}=\frac{\left(\left(\frac{1}{x}\right)^2-\frac{1}{x}+1\right)^3}{\left(\frac{1}{x}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{x}-1\right)^2},$$

встановлюємо, що разом з $x=x_1$ коренем буде й $x_3=\frac{1}{x_1}$.

Оскільки ж $x=a$ є коренем рівняння, то, враховуючи сказане, послідовно знаходимо:

$$x_1 = a\,;\; x_2 = 1 - x_1 = 1 - a\,;\; x_3 = \frac{1}{x_1} = \frac{1}{a}\,;\; x_4 = \frac{1}{x_2} - = \frac{1}{1-a}\,,\; x_5 = 1 - x_3 = \frac{a-1}{a}\,;\; x_6 = \frac{1}{x_5} = \frac{a}{a-1}\,.$$

Інших коренів немає, бо задане рівняння можна звести до рівняння шостого степеня. ■

Наступний приклад ілюструє рівняння, коренем якого є сума взаємно обернених чисел.

***Приклад* 7.** Розв'язати рівняння $x^3 - 3x = a^3 + \dfrac{1}{a^3}$.

Розв'язання. Оскільки $\left(a + \dfrac{1}{a}\right)^3 - 3\left(a + \dfrac{1}{a}\right) = a^3 + \dfrac{1}{a^3}$, то $x = a + \dfrac{1}{a}$ є коренем даного рівняння. Розглянемо функцію $y(x) = x^3 - 3x - \left(a^3 + \dfrac{1}{a^3}\right)$. Маємо: $y' = 3x^2 - 3$. Отже, $x_1 = -1$ та $x_2 = 1$ – критичні точки даної функції. Легко переконатися, що x_1 – точка максимуму, а x_2 – точка мінімуму, причому $y(-1) = 2 - \left(a^3 + \dfrac{1}{a^3}\right)$, $y(1) = -2 - \left(a^3 + \dfrac{1}{a^3}\right)$. Оскільки $\left|a^3 + \dfrac{1}{a^3}\right| \ge 2$, то $y(-1) \le 0$ при $a > 0$ та $y(1) \ge 0$ при $a < 0$. Тому при $|a| \ne 1$ у кожному з цих випадків рівняння має лише єдиний знайдений нами розв'язок $x = a + \dfrac{1}{a}$. Якщо ж $a = \pm 1$, то, крім коренів $x = \pm 2$, рівняння матиме також кратні корені $x = \mp 1$ відповідно. ■

Наявність обернених виразів в алгебраїчних чи трансцендентних рівняннях також часто дає змогу суттєво спростити розв'язування, звівши їх до квадратних.

***Приклад* 8.** Розв'язати рівняння $\sqrt{1 + \dfrac{9}{x}} + \sqrt{\dfrac{x}{x+9}} = 2{,}5.$

Розв'язання. Позначивши $\sqrt{1 + \dfrac{9}{x}} = y$, отримаємо $y + \dfrac{1}{y} = 2{,}5.$ Звідси маємо $y_1 = 2$, $y_2 = \dfrac{1}{2}$. Тоді з рівнянь $\sqrt{1 + \dfrac{9}{x}} = 2$, $\sqrt{1 + \dfrac{9}{x}} = \dfrac{1}{2}$ відповідно знаходимо $x_1 = 3$, $x_2 = -12$. ■

***Приклад* 9.** Розв'язати рівняння $\left(2 + \sqrt{3}\right)^x + \left(2 - \sqrt{3}\right)^x = a + \dfrac{1}{a}$.

Розв'язання. Позначивши $\left(2 + \sqrt{3}\right)^x = y > 0$, запишемо задане рівняння у вигляді $y + \dfrac{1}{y} = a + \dfrac{1}{a}$ чи $y^2 - \left(a + \dfrac{1}{a}\right)y + 1 = 0$, звідки за формулами Вієта знаходимо $y_1 = a$, $y_2 = \dfrac{1}{a}$. Таким чином, $x_{1,2} = \log_{2\pm\sqrt{3}} a$, $a > 0.$ Якщо ж $a \le 0$, то рівняння розв'язків не має. ■

Цікавими є й наступні звідні до квадратних рівняння з параметрами:

$$\left(\sqrt[n]{a - \sqrt{a^2 - 1}}\right)^x + \left(\sqrt[n]{a + \sqrt{a^2 - 1}}\right)^x = 2a\,, \quad a \ge 1,$$

$$\left(a - \sqrt{a^2 - 1}\right)^x + \left(a + \sqrt{a^2 - 1}\right)^x = 2\left(2a^2 - 1\right),\; a \ge 1,$$

$$\left(\sqrt{a^2 + 1} - a\right)^x + \left(\sqrt{a^2 + 1} + a\right)^x = 2\left(2a^2 + 1\right).$$

Перше з них має корені $x_{1,2} = \pm n$, а для двох інших отримаємо $x_{1,2} = \pm 2$.

Підстановками, пов'язаними з взаємно оберненими виразами, до квадратних рівнянь зводяться і симетричні рівняння четвертого степеня вигляду $Ax^4+Bx^3+Cx^2+Bx+A=0$, де $A\neq 0$. Справді, $x=0$ не є його коренем. Тому таке рівняння може бути записане у вигляді $Ax^2+Bx+C+\frac{B}{x}+\frac{A}{x^2}=0$. Покладаючи $y=x+\frac{1}{x}$ і враховуючи, що $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$, у результаті отримаємо квадратне рівняння $Ay^2+By+C-2A=0$.

Так само симетричні рівняння довільних парних степенів $2n\geq 4$ після ділення на x^n і заміни $y=x+\frac{1}{x}$ зводяться до рівнянь n-го степеня.

***Приклад* 10.** Розв'язати рівняння $x^6-2x^5-2x^4+2x^3-2x^2-2x+1=0$.

Розв'язання. Поділивши обидві частини рівняння на x^3 запишемо його у вигляді

$$\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-2\left(x+\frac{1}{x}\right)+2=0.$$

Тоді заміною $y=x+\frac{1}{x}$ з врахуванням рівностей $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$ та $x^3+\frac{1}{x^3}=y^3-3y$ воно зведеться до рівняння $y^3-2y^2-5y+6=0$, коренями якого є $y_1=1$, $y_2=-2$, $y_3=3$. Отже, залишається розв'язати такі три рівняння: $x+\frac{1}{x}=1$, $x+\frac{1}{x}=-2$, $x+\frac{1}{x}=3$. Перше з них дійсних коренів не має. Друге – має один дійсний корінь $x=-1$. А з третього рівняння, звівши його до квадратного, знаходимо два дійсні корені $x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$. ■

Зауважимо, що симетричні рівняння непарних степенів завжди мають дійсний корінь $x=-1$. Тому вони зводяться до симетричних рівнянь парних степенів. Наприклад, записавши рівняння $x^5+4x^4-x^3-x^2+4x+1=0$ у вигляді $(x+1)\left(x^4+3x^3-4x^2+3x+1\right)=0$, залишиться розв'язати симетричне рівняння четвертого степеня $x^4+3x^3-4x^2+3x+1=0$.

Відзначимо також, що для багатьох несиметричних рівнянь парного степеня корисною буде і підстановка $y=ax+b+\frac{c}{x}$. Зокрема, її можна використати для розв'язування рівнянь вигляду $(ax^2+b_1x+c)(ax^2+b_2x+c)=Ax^2$ чи $p(ax^2+b_1x+c)^2+q(ax^2+b_2x+c)^2=Ax^2$.

Підійде такого роду підстановка і для розв'язування наступного рівняння.

***Приклад* 11.** Розв'язати рівняння $\frac{x^2}{3}+\frac{48}{x^2}=10\left(\frac{x}{3}-\frac{4}{x}\right)$.

Розв'язання. Позначимо $y=\frac{x}{3}-\frac{4}{x}$. Тоді $\frac{x^2}{3}+\frac{48}{x^2}=3\left(\frac{x}{3}-\frac{4}{x}\right)^2+8=3y^2+8$, тому задане рівняння можна записати у вигляді $3y^2-10y+8=0$. Звідси знаходимо $y_1=2$, $y_2=\frac{4}{3}$. Отже, для визначення x отримуємо рівняння $\frac{x}{3}-\frac{4}{x}=2$ та $\frac{x}{3}-\frac{4}{x}=\frac{4}{3}$, з яких відповідно знаходимо $x_{1,2}=3\pm\sqrt{21}$, $x_3=-2$, $x_4=6$. ■

Водночас відзначимо, що можна було також помножити обидві частини заданого рівняння на 3 і записати його у вигляді $\left(x-\frac{12}{x}\right)^2-10\left(x-\frac{12}{x}\right)+25=1$, або $\left(x-\frac{12}{x}-5\right)^2=1$.

Завершити розв'язання останнього рівняння пропонуємо читачам самостійно.

Ми ж розглянемо приклад функціонального рівняння, в якому аргументами шуканої функції служать взаємно обернені вирази.

***Приклад* 12.** Знайти всі функції $f(x)$, які для кожного $x \neq 0$ задовольняють умову

$$2f(x)+xf\left(\frac{1}{x}\right)=2x+1.$$

Розв'язання. Заміною x на $\frac{1}{x}$ отримаємо рівняння $2f\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}f(x)=\frac{2}{x}+1$. Помножимо обидві його частини на x і віднімемо помножене на 2 рівняння з умови задачі. У результаті знаходимо $f(x)=x$. Легко переконатися, що така функція задовольняє задану умову для всіх дійсних $x \neq 0$. ■

Детальніше про рівняння такого роду мова піде у наступній публікації.

Задачі для самостійного розв'язування

1. Випробування нової моделі автомобіля показали, що шини на колесах повністю зношуються через 24, 30, 36 або 40 тис. км залежно від їх розміщення (шини однакові, під час випробувань їх місцями не міняли). Чи можна, маючи чотири нові шини, проїхати відстань 32 тис. км, якщо при цьому дозволяється переставляти місцями будь-які колеса?

2. Прості числа p та q і натуральне число n задовольняють співвідношення $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{pq}=\frac{1}{n}$. Знайти ці числа.

3. Довести, що система рівнянь $x+y+z=9$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$, $xy+yz+zx=27$ має єдиний розв'язок $x=y=z=3$.

4. Знайти найменше значення функції $y=16x^2-10\sin^2 x+\frac{81\pi^4}{x^2}$.

5. Розв'язати рівняння $8x^3-24x-65=0$.

6. Розв'язати рівняння $\left(\sqrt{5}-2\right)^x+\left(\sqrt{5}+2\right)^x=18$.

7. Розв'язати рівняння $x^5+7x^4+13x^3+13x^2+7x+1=0$.

8. Знайти всі функції $f(x)$, які для кожного $x \neq 0$ задовольняють умову

$$2f(x)+x^2 f\left(\frac{1}{x}\right)=4x^2+5.$$

III. **Обернені та взаємно обернені функції та деякі їх властивості**

Федак І. В.
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

Функція $f(x)$ називається оборотною, якщо для кожного y з множини її значень $E(f)$ рівняння $f(x)=y$ має єдиний розв'язок, який належить її області визначення $D(f)$. Функцію $g(y)$, яка кожному $y\in E(f)$ ставить у відповідність цей єдиний розв'язок, називають оберненою до функції $f(x)$. Зрозуміло, що при цьому функція $g(y)$ також є оборотною, а функція $f(x)$ – оберненою до неї. Тому такі функції називають взаємно оберненими.

Відзначимо, що графіки взаємно обернених функцій $y=f(x)$ та $x=g(y)$ співпадають, а графік функції $y=g(x)$ – симетричний до графіка функції $y=f(x)$ відносно прямої $y=x$.

Якщо, крім того, $g(x)\equiv f(x)$, то функцію $f(x)$ називають самооберненою. Такими, зокрема, є функції: $f(x)=x$, $f(x)=-x$, $f(x)=\frac{1}{x}$, $f(x)=-\frac{1}{x}$.

Розглянемо ще декілька прикладів знаходження обернених функцій.

***Приклад* 1.** Довести, що функція, обернена до лінійної функції $f(x)=kx+b,\ \ k\neq 0,$ також є лінійною, та знайти всі самообернені лінійні функції.

Розв'язання. З рівняння $kx+b=y$ знаходимо $x=\frac{1}{k}(y-b)$. Отже, обернена до $f(x)$ функція $g(x)=\frac{1}{k}(x-b)$ є лінійною. Далі, з тотожності $\frac{1}{k}(x-b)\equiv kx+b$ знаходимо $k=1$, $b=0$, або $k=-1$, $b\in \mathrm{R}$. Таким чином, крім самооберненої лінійної функції $f(x)=x$, отримуємо цілий клас таких функцій $f(x)=-x+b$. ■

***Приклад* 2.** Знайти функцію, обернену до дробово-лінійної функції $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$.

Розв'язання. З рівняння $\dfrac{ax+b}{cx+d}=y$ маємо $x=\dfrac{dy-b}{-cy+a}$. Отже, $g(x)=\dfrac{dx-b}{-cx+a}$. Зрозуміло, що при цьому $cx+d\neq 0$, $-cx+a\neq 0$. Таким чином, функція, обернена до дробово-лінійної функції також є дробово-лінійною функцією. ■

Безпосередньо з означення випливають такі властивості взаємно обернених функцій:

1) $D(f)=E(g)$, $E(f)=D(g)$;

2) для будь-якого $x\in D(f)$ з рівності $f(x)=y$ випливає, що $g(y)=x$, тобто $g(f(x))=x$.

***Приклад* 3.** Нехай $f(x)=x^3+6x$, $g(x)$ – обернена до неї функція. Не знаходячи $g(x)$: а) розв'язати рівняння $g(x)=1$; б) обчислити $g(7)$.

Розв'язання. а) Внаслідок властивості 2) отримуємо $x=f(1)=7$; б) з рівняння $f(x)=7$, тобто $x^3+6x=7$, знаходимо єдиний його дійсний корінь $x=1$. Тому $g(7)=1$. ■

Перейдемо до вивчення інших властивостей обернених функцій.

***Приклад* 4.** Довести, що кожна монотонно зростаюча функція є оборотною, а обернена до неї функція також є монотонно зростаючою.

Розв'язання. Справді, якщо $f(x)$ – монотонно зростаюча функція, то різним значенням її аргумента відповідають різні значення цієї функції, причому з нерівності $x_1 < x_2$ випливає, що $y_1 = f(x_1) < y_2 = f(x_2)$. Тому для кожного $y \in E(f)$ рівняння $f(x) = y$ має єдиний розв'язок $x = g(y)$ такий, що з нерівності $y_1 < y_2$ випливає нерівність $x_1 = g(y_1) < x_2 = g(y_2)$. ■

Зауважимо, що аналогічне твердження справедливе і для монотонно спадних функцій. В обох випадках з неперервності функції $f(x)$ випливає й неперервність оберненої функції.

Проте окремі властивості взаємно обернених функцій можуть і суттєво відрізнятися.

***Приклад* 5.** Про функцію $f : Z \to Z$ відомо, що вона є взаємно однозначним відображенням множини цілих чисел на себе, причому $f(n) \to +\infty$, якщо $n \to +\infty$. Нехай f^{-1} позначає функцію, обернену до f. Чи можна стверджувати, що $f^{-1}(n) \to +\infty$, якщо $n \to +\infty$?

Розв'язання. Не можна. Для функцій

$$f(n) = \begin{cases} 2n, & n \in Z_+, \\ -n, & n = -2k+1, k \in N, \\ \dfrac{n}{2}, & n = -2k, k \in N, \end{cases} \qquad f^{-1}(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2}, & n = 2k,\ n \in Z_+, \\ -n, & n = 2k-1, k \in N, \\ 2n, & n = -k, k \in N, \end{cases}$$

$f(n) \to +\infty$ при $n \to +\infty$. Але $f^{-1}(n)$ не прямує до $+\infty$ для непарних $n \to +\infty$. ■

Зауважимо, що покладаючи також $f(x) = x,\ x \notin Z,$ ми отримали би функцію $f : R \to R$ таку, що є взаємно однозначним відображенням множини всіх дійсних чисел на себе, причому $f(x) \to +\infty$, якщо $x \to +\infty$. Але при цьому $f^{-1}(x)$ не прямує до $+\infty$. при $x \to +\infty$.

***Приклад* 6.** Про функцію $F : R \to R$ відомо, що вона є взаємно однозначним відображенням (бієкцією) множини всіх дійсних чисел на себе, і є розривною у кожній точці числової прямої. Чи можна стверджувати, що й обернена до неї функція F^{-1} також є розривною у кожній точці числової прямої?

Розв'язання. Доведемо, що так стверджувати не можна. Для цього виділимо у множині дійсних чисел підмножину X всіх дійсних чисел вигляду $x = \pm a_n a_{n-1} \ldots a_1, b_1 b_2 \ldots b_m$, де $m \in N,\ n \in N,\ a_i, b_j -$ цифри, $b_m \neq 0,\ b_m \neq 5.$

Нехай

$$F(x) = \begin{cases} -x+1, & x \in R \setminus X, \\ x-1, & x \in X \setminus (0,2), \\ g(x), & x \in X \cap (0,2), \end{cases}$$

де $g(x) = 0,5x$, якщо $b_m -$ парна цифра. Якщо ж цифра $b_m = 1$ чи $b_m = 3$, то збільшимо її на 1, а якщо $b_m = 7$ чи $b_m = 9$, то зменшимо її на 1. Замінивши $x \in X \cap (0,2)$ на отриманий таким способом елемент x', покладемо $g(x) = 0,5x' - 1$.

Функція $y = F(x)$ є бієкцією множини всіх дійсних чисел на себе. Справді, функція $y = -x+1,\ x \in R \setminus X,$ взаємно однозначно відображає $R \setminus X$ на $R \setminus X$, а інші дві функції взаємно однозначно відображають X на X. Поза інтервалом $(0,2)$ це здійснює функція $y = x-1,\ x \in X \setminus (0,2)$, а на даному інтервалі – функція $y = g(x)$.

Внаслідок щільності множини X у R в околі кожної точки $x \in R$ знайдуться такі дві точки, в яких різниця значень не менша 1. Тому функція $y = F(x)$ є розривною у кожній точці числової осі. Водночас, обернена до неї функція $x = F^{-1}(y)$ неперервна у точці $y = \frac{1}{3}$. ■

Зупинимося на застосуваннях властивостей обернених функцій. Зокрема, властивість $D(f) = E(g)$, $E(f) = D(g)$ часто використовують для знаходження множини значень функції.

***Приклад* 7.** Знайти множину значень функції $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$.

Розв'язання. Знайдемо область визначення функції, оберненої до $f(x)$. Для цього розглянемо рівняння $\frac{2x}{x^2+1} = y \Leftrightarrow yx^2 - 2x + y = 0$ з параметром y. Якщо $y = 0$, то $x = 0$. А для $y \neq 0$ з останнього квадратного рівняння знайдемо $x_{1,2} = \left(1 \pm \sqrt{1-y^2}\right)/\,y$. Таким чином, областю визначення оберненої функції $g(x) = \left(1 \pm \sqrt{1-x^2}\right)/\,x,\ x \neq 0,\ \ g(0) = 0$ є відрізок $[-1;1]$. Тому $D(f) = [-1;1]$. ■

Зауважимо, що шукати конкретний вираз для оберненої функції $g(x)$ тут не було потреби. Для $y \neq 0$ достатньо було лише вказати ті значення параметра, за яких дискримінант квадратного рівняння $yx^2 - 2x + y = 0$ є невід'ємним.

У загальному випадку такий метод є ефективним для знаходження множин значень довільних функцій вигляду $f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+h}$.

У наступних прикладах скористаємося симетричністю графіків взаємно обернених функцій $y = f(x)$ та $y = g(x)$ відносно прямої $y = x$. У випадку, коли обидві ці функції є зростаючими, отримаємо, що рівняння $f(x) = g(x)$ рівносильне кожному з рівнянь $f(x) = x$ та $g(x) = x$. Наприклад, якщо $f(x) = x^3 + x - 1$, то $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$. Тому функції $y = f(x)$ та $y = g(x)$ будуть зростаючими, і замість рівняння $f(x) = g(x)$ достатньо розв'язати набагато простіше рівняння $x^3 + x - 1 = x$, з якого знаходимо єдиний дійний корінь $x = 1$.

Зауважимо, що умова монотонного зростання функцій $f(x)$ та $g(x)$ є суттєвою. Наприклад, для монотонно спадних взаємно обернених функцій $f(x) = g(x) = -x$ рівняння $f(x) = g(x)$ та $f(x) = x$ не є рівносильними. Перше з них задовольняють всі значення $x \in R$, а друге – лише $x = 0$.

Виділимо декілька класів ірраціональних рівнянь з параметром вигляду $f(x) = g(x)$, для розв'язування яких доцільно скористатися вказаною властивістю.

***Приклад* 8.** Знайти невід'ємні корені рівняння $x^2 - a = \sqrt{x+a}$.

Розв'язання. Функція $f(x)=x^2-a$ для $x\geq 0$ є монотонно зростаючою, а обернена до неї функція $g(x)=\sqrt{x+a}$ визначена і зростаюча для всіх $x\geq -a$. Тому будемо розв'язувати рівняння $x^2-a=x$. Його дискримінант $D=\sqrt{1+4a}$. Отже, дійсні корені $x_1=\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$, $x_2=\dfrac{1-\sqrt{1+4a}}{2}$ отримаємо лише за умови $1+4a\geq 0$. Якщо $a>0$, то корінь $x_2<0$ не задовольняє умову задачі. Якщо $a=0$, то отримуємо два невід'ємні розв'язки: $x_1=1$ та $x_2=0$. А у випадку $a\in[-0,25;0)$ обидва корені є додатними, причому $x_1>x_2>-a>0$. ■

Заміною $\sqrt{x}=t\geq 0$ до прикладу 8 зводиться й рівняння $\sqrt{\sqrt{x}+a}=x-a$.

***Приклад* 9.** Розв'язати рівняння $x^3+a-1=a\sqrt[3]{ax-a+1}$, $a>0$.

Розв'язання. Розглянемо функцію $f(x)=\dfrac{x^3+a-1}{a}$. Оскільки її похідна $f'(x)=\dfrac{3}{a}x^2>0$ для $x\neq 0$, то $f(x)$ та обернена до неї функція $g(x)=\sqrt[3]{ax-a+1}$ є зростаючими. Отже, достатньо розв'язати рівняння

$$\frac{x^3+a-1}{a}=x\Leftrightarrow x^3-ax+a-1=0\Leftrightarrow (x-1)\left(x^2+x+1-a\right)=0.$$

Одним з його коренів є $x_1=1$, а корені $x_{2,3}=\dfrac{-1\pm\sqrt{4a-3}}{2}$ будуть дійсними лише за умови $4a-3\geq 0$. ■

Аналогічно розв'язують й рівняння $x^3-a+1=a\sqrt[3]{ax+a-1}$, $a>0$, одним з коренів якого є $x_1=-1$, а два інші дійсні корені існують лише за умови $4a-3\geq 0$.

З оборотними та оберненими функціями зустрічаємося і при розв'язуванні деяких функціональних рівнянь.

Нехай $F(x)$ – задана, а $\varphi(x)$ – відома оборотна функція. Рівняння $f\left(\varphi(x)\right)=F(x)$ називають найпростішим функціональним рівнянням. Для його розв'язування позначимо $\varphi(x)=t$ і визначимо обернену до $\varphi(x)$ функцію $x=\psi(t)$. У результаті отримаємо $f(t)=F\left(\psi(t)\right)$. Відповідно, шуканий розв'язок найпростішого функціонального рівняння матиме вигляд $f(x)=F\left(\psi(x)\right)$. Зокрема, для $\varphi(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ отримаємо $f(x)=F\left(\dfrac{dx-b}{-cx+a}\right)$.

Цікаві й функціональні рівняння, в яких аргументами є взаємно обернені функції. У загальному випадку зупинимося на рівняннях вигляду $F\left(x, f(x), f\left(\varphi(x)\right)\right)=0$. Якщо $\varphi\left(\varphi(x)\right)=x$, то, замінивши x на $\varphi(x)$, отримаємо рівняння $F\left(\varphi(x), f\left(\varphi(x)\right), f(x)\right)=0$, яке можна розглядати у системі з початковим рівнянням.

Зокрема, для $\varphi(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ маємо $\varphi\left(\varphi(x)\right)=\dfrac{\left(a^2+bc\right)x+b(a+d)}{c(a+d)x+\left(bc+d^2\right)}\equiv x$ за виконання умов: $a^2+bc=bc+d^2$, $b(a+d)=c(a+d)=0$.

Їх, наприклад, задовольняють дробово-лінійні функції вигляду $\varphi(x)=\dfrac{ax+b}{cx-a}$.

***Приклад* 10.** Розв'язати рівняння $3f\left(x\right)+f\left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)=1,\ x\neq 0,5$.

Розв'язання. Замінивши x на $\dfrac{x+1}{2x-1}$, отримаємо $3f\left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)+f\left(x\right)=1$. Віднімаючи тепер помножене на 3 рівняння з умови задачі, знайдемо $f\left(x\right)\equiv 0,25,\ x\neq 0,5$. ■

Вкажемо також на деякі геометричні ідеї для розв'язування задач з використанням властивостей чи значень обернених функцій.

***Приклад* 11.** Обчислити суму

$$arctg1+arctg2+arctg3.$$

Розв'язання. Розглянемо прямокутник $ABHK$ (див. рис. 1). Нехай $KC=3,\ AD=2,\ KD=CH=1.$ Тоді з рівності прямокутних трикутників DKC та CHB отримуємо, що навколо чотирикутника $ABCD$ можна описати коло. Оскільки $\angle CAB=arctg1,\ \angle ABC=arctg3,$ $\angle ACB=\angle ADB=arctg2,$ то шукана сума дорівнює сумі кутів трикутника $ABC,$ тобто дорівнює $\pi.$ ■

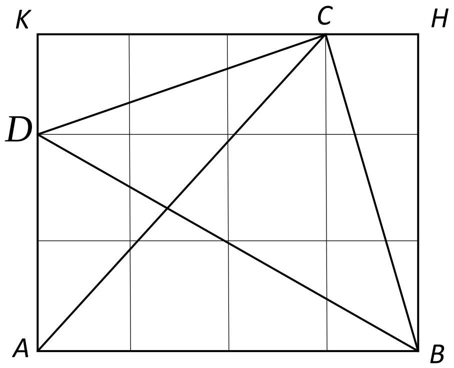

Рис. 1

***Приклад* 12.** Скориставшись геометричними властивостями взаємно ооернених функцій довести нерівність Гельдера

$$\sum_{k=1}^{n}\left|a_kb_k\right|\leq\left(\sum_{k=1}^{n}\left|a_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}\left|b_k\right|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

де числа $p>1$ та $q>1$ пов'язані умовою $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$.

Доведення. Враховуючи, що така нерівність є однорідною відносно кожного з наборів $\left(a_1,a_2,...,a_n\right)$ та $\left(b_1,b_2,...,b_n\right)$, достатньо довести нерівність $\sum\limits_{k=1}^{n}\left|a_kb_k\right|\leq 1$ для випадку, коли $\sum\limits_{k=1}^{n}\left|a_k\right|^p=\sum\limits_{k=1}^{n}\left|b_k\right|^q=1$.

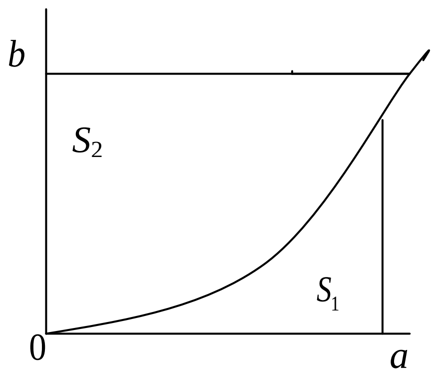

Рис. 2

Розглянемо для $x\geq 0$ графік функції $y=x^{p-1}$, або, що те саме, оберненої до неї функції $x=y^{q-1}$ (див. рис. 2). З рисунка видно, що $S_1+S_2\geq ab$. Обчислимо площі S_1 та S_2:

$$S_1=\int_0^a x^{p-1}dx=\frac{a^p}{p},\quad S_2=\int_0^b y^{q-1}dy=\frac{b^q}{q}.$$

Отже, справедлива нерівність $ab\leq\dfrac{a^p}{p}+\dfrac{b^q}{q}$. Замінивши тут a на $\left|a_k\right|$ та b на $\left|b_k\right|$, і підсумовуючи по k від 1 до n, з врахуванням умови $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ та рівностей $\sum\limits_{k=1}^{n}\left|a_k\right|^p=\sum\limits_{k=1}^{n}\left|b_k\right|^q=1$ отримаємо нерівність $\sum\limits_{k=1}^{n}\left|a_kb_k\right|\leq 1$, яку й слід було довести. ■

Задачі для самостійного розв'язування

1. Довести, що кожна монотонно спадна функція є оборотною, а обернена до неї функція також є монотонно спадною.

2. Довести, що функція $f\left(x\right)=x^3-6x^2+15x-8$ є оборотною і знайти значення оберненої до неї функції $g\left(x\right)$ у точці $x=2$.

3. Знайти множину значень функції $f\left(x\right)=\dfrac{x^2+x-2}{x^2-x+2}$.

4. Розв'язати рівняння $\sqrt{\sqrt{x}+1}=x-1$.

5. Розв'язати рівняння з параметром a:

$$x^3-a+1=a\sqrt[3]{ax+a-1},\ a>0.$$

6. Знайти всі функції $f\left(x\right)$, які для кожного $x\neq 2$ задовольняють умову

$$f\left(x\right)+\left(x-2\right)f\left(\frac{2x+1}{x-2}\right)=3x+1.$$

7. Обчислити $\sqrt{5}\cos\left(arctg2\right)$, використавши відношення між сторонами прямокутного трикутника.

8. Довести, що для довільної неперервної монотонно зростаючої функції $f(x)$ такої, що $f(0)=f^{-1}(0)$, де $f^{-1}(x)$ – обернена до неї функція, при додатних a та b виконується нерівність $ab\leq\int\limits_0^a f(x)dx+\int\limits_0^b f^{-1}(x)dx$ (нерівність Юнга).