ЖУРНАЛ ФІЗИЧНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ
т. 18, № 1 (2014) 1002(10 с.)

JOURNAL OF PHYSICAL STUDIES
v. 18, No. 1 (2014) 1002(10 p.)

КВАЗІТОЧНО РОЗВ'ЯЗУВАНІ ПЕРІОДИЧНІ ПОТЕНЦІАЛИ ДЛЯ СИСТЕМ З МАСОЮ, ЩО Є ПЕРІОДИЧНОЮ ФУНКЦІЄЮ ВІД КООРДИНАТ

О. Возняк
Львівський національний університет імені Івана Франка, кафедра теоретичної фізики
вул. Драгоманова, 12, Львів, 79005, Україна

(Отримано 28 лютого 2014 р.; в остаточному вигляді — 18 березня 2014 р.)

Метод суперсиметричної квантової механіки застосовано до відшукання квазіточно розв'язуваних (КТР) періодичних потенціалів із двома відомими енерґетичними рівнями для систем із масою, що є також періодичною функцією від координат. Досліджено умови, за яких суперпотенціал чи ґенеруюча функція, маючи синґулярну поведінку, приводить до несинґулярної потенціальної енерґії. Розглянуто приклади як синґулярних, так і несинґулярних суперпотенціалів та ґенеруючих функцій, які приводять до несинґулярної потенціальної енерґії, та знайдено хвильові функції стану, що відповідають двом енерґетичним рівням.

Ключові слова: суперсиметрія, квазіточно розв'язувані періодичні потенціали, маса, залежна від координат.

PACS number(s): 03.65.Ge, 11.30.Pb

I. ВСТУП

Залежність маси від координат виявляється в багатьох квантовомеханічних задачах і, зокрема, у ядерній фізиці [1], теорії квантових рідин [2] та металічних кластерів [3], у фізиці неоднорідно леґованих напівпровідників, різних гетеросистем [4, 5]. Завдяки розвиткові технологій мікроелектроніки стали доступними періодичні наногетеросистеми, такі, як надґратки, системи квантових ям та ін. Елементарні квантові моделі таких систем у яких потенціал й ефективна маса є кусково-неперервними функціями, розглянуто в роботах [6, 7].

З іншого боку, завжди існував інтерес до знаходження точних розв'язків квантовомеханічних задач, зважаючи на їх важливість як із загальнотеоретичних міркувань, так і з погляду реалізації алґоритмів пошуку наближених розв'язків. Тому проблемі одержання точних розв'язків для систем із масою, що залежить від координат, присвячено низку праць [8–16] (див. також підручник з квантової механіки [17]). До знаходження точних розв'язків застосовано також і метод суперсиметричної квантової механіки [14, 16]. Однак кількість точно розв'язуваних задач обмежена. Тому цікавою й важливою все ще є задача пошуку квазіточно розв'язуваних (КТР) потенціалів, для яких можна знайти точно кілька енерґетичних рівнів і відповідних хвильових функцій [18–23]. Серед них квазіточно розв'язувані потенціали з масою, залежною від координат [18, 20], періодичні потенціали [19, 21]. Зазначимо, що хоча досліджують КТР-потенціали досить давно, ще й досі ця тематика актуальна (див., наприклад, роботи [22, 23] та посилання в них).

У праці [24] методику суперсиметричної квантової механіки розширено для ґенерування КТР-потенціалів. У наших попередніх роботах ми використали цей підхід до періодичних систем [25] і систем із координатнозалежною масою [26]. У цій статті ми застосовуємо її до відшукання одного і двох точних розв'язків періодичних систем, маса яких також є періодичною функцією від координат, шляхом ґенерування відповідних КТР-потенціалів.

Для періодичних систем характерними є періодичність потенціальної енерґії

$$V_{\pm}(x+L) = V_{\pm}(x) \tag{1}$$

та блохівський вигляд хвильової функції

$$\psi(x+L) = e^{ikL}\psi(x), \tag{2}$$

де k — квазіімпульс частинки.

Згідно з осциляційною теоремою, енерґетичний спектр періодичного потенціалу має зонну структуру і власні значення належать до дозволених енерґетичних зон $[E_0, E_1], [E_{1'}, E_2], \ldots$. Границі зон відповідають умові $kL = 0, \pi$, а їх хвильові функції задовольняють умову $\psi(x+L) = \pm\psi(x)$. Осциляційна теорема стверджує, що для періодичного потенціалу з періодом L хвильові функції, що відповідають границям зон розміщаються в порядку зростання енерґії $E_0 \leq E_1 \leq E_{1'} \leq E_2 \leq E_{2'} \leq E_3 \ldots$ і мають період $L, 2L, 2L, L, L, 2L, 2L, \ldots$, а кількість вузлів для них на інтервалі L становить $0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, \ldots$.

Можна показати, зробивши заміну змінних у рівнянні Шредінґера за допомогою функції, яка описує залежність маси від координат, що для систем із координатнозалежною масою основні висновки осциляційної теореми також чинні.

II. ГАМІЛЬТОНІАН ЧАСТИНКИ З МАСОЮ, ЩО ЗАЛЕЖИТЬ ВІД КООРДИНАТ

При вивченні систем із координатнозалежною масою, виникають важливі загальнофізичні проблеми, пов'язані з упорядкуванням некомутативних операторів координати та імпульсу в операторі кінетичної енергії [27, 28]. Запропоновано декілька схем упорядкування операторів. Ми базуватимемося на двопараметричній формі оператора кінетичної енергії Росса [29]. Гамільтоніан системи з координатнозалежною масою при

$$m(x) = m_0 M(x),$$
$$M(x) = \frac{1}{f^2(x)}, \tag{3}$$

можна подати так:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m_0}\sqrt{f(x)}\nabla f(x)\nabla\sqrt{f(x)} + V_{\text{eff}}(x), \tag{4}$$

де $V_{\text{eff}}(x)$ — деякий ефективний потенціал, вигляд якого залежить від способу впорядкування операторів у кінетичній енерґії гамільтоніана. Перехід до іншого способу впорядкування приводить до зміни $V_{\text{eff}}(x)$, тому говорити про спосіб упорядкування має сенс лише разом із $V_{\text{eff}}(x)$.

Увівши деформований оператор імпульсу, визначений як

$$P = \sqrt{f(x)}p\sqrt{f(x)}, \tag{5}$$

гамільтоніан зводиться до

$$H = \frac{P^2}{2m_0} + V_{\text{eff}}(x). \tag{6}$$

При цьому оператор P повинен задовольняти вимогу ермітовості, забезпечення якої вимагає виконання умови [16]

$$\lim_{x\to\pm\infty}|\psi(x)|^2 f(x) = 0. \tag{7}$$

III. СУПЕРСИМЕТРИЧНА КВАНТОВА МЕХАНІКА ДЛЯ ЧАСТИНКИ З МАСОЮ, ЩО ЗАЛЕЖИТЬ ВІД КООРДИНАТ

Для дослідження енерґетичного спектра систем запишімо гамільтоніан (6) у факторизованому вигляді

$$H = B^+B^- + \epsilon_0, \tag{8}$$

де ϵ_0 — енерґія основного стану. Без утрати загальності надалі покладімо $\epsilon_0 = 0$. Цього можна досягнути, вибравши відповідно початок відліку енерґії системи. Пов'яжімо з гамільтоніаном системи H один із суперсиметричних (SUSY)-партнерів $H_\pm$, а саме, $H_- = B^+B^-$. Гамільтоніани суперсиметричних партнерів мають вигляд

$$H_\pm = B^\mp B^\pm = \frac{1}{2}\Big(P^2 + V_\pm(x)\Big), \tag{9}$$

де

$$V_\pm = W^2(x) \pm f(x)W'(x), \tag{10}$$

$W(x)$ — суперпотенціал, $W'(x) = \frac{dW(x)}{dx}$ — похідна від суперпотенціалу за координатою. Сталу Планка тут і надалі покладаємо $\hbar = 1$.
Оскільки $H = H_-$, то

$$V_{\text{eff}}(x) = V_-(x) = W^2(x) - f(x)W'(x). \tag{11}$$

Рівняння для енерґетичного спектра суперсиметричних партнерів запишемо як

$$H_\pm\psi_n^\pm(x) = E_n^\pm\psi_n^\pm(x),\ n = 0, 1, 2\ \dots\ . \tag{12}$$

При цьому спектри суперсиметричних партнерів H_+ і H_- збігаються, крім, можливо, лише стану з нульовою енерґією. Якщо стан із нульовою енерґією належить операторові H_-, то хвильова функція цього стану, внаслідок того, що гамільтоніан H_- представлено у факторизованому вигляді, задовольнятиме рівняння $B^-\psi_0^-(x) = 0$ та матиме вигляд

$$\psi_0^-(x) = \frac{C_0^-}{\sqrt{f(x)}}\exp\left(-\int\frac{W(x)}{f(x)}\,dx\right), \tag{13}$$

де C_0^- — константа нормування.

Для періодичних систем хвильові функції є також періодичними функціями. Як показано в роботах [30, 31], умова періодичності хвильової функції за постійної маси вимагає накладання на періодичний суперпотенціал $W(x+L) = W(x)$ такої умови,

$$\int_0^L W(x)dx = 0, \tag{14}$$

яка забезпечує обмеженість хвильової функції на всій числовій осі і яку можна узагальнити для систем із координатнозалежною масою

$$\int_0^L \frac{W(x)}{f(x)}dx = 0, \tag{15}$$

де $f(x)$ є також періодичною функцією з періодом L або кратним до L. У найпростіший спосіб цього можна досягнути, вибравши $W(x)$) непарною функцією відносно середньої точки інтервалу періодичності, а $f(x)$) — парною.

IV. КТР ПОТЕНЦІАЛИ З ОДНИМ РІВНЕМ

Методику суперсиметричної квантової механіки ми спочатку застосуємо для ґенерування КТР періодичних потенціалів, у полі яких рухаються частинки, маса яких також є періодичною функцією від координат. Як видно з (13), вибираючи різні суперпотенціали $W(x)$ та функції $f(x)$, можна знайти розв'язок для основного стану системи. У цій статті ми розглянемо несинґулярні періодичні потенціали, які у найпростішому випадку можна одержати, використовуючи несинґулярний суперпотенціал $W(x)$. Як показано в роботах [25, 26, 32], несинґулярний потенціал можна також отримати, використовуючи синґулярний суперпотенціал. Зокрема, якщо $W(x)$ має прості полюси в точках x_k^p з такою поведінкою в їх околі

$$W(x) = \frac{A_{-1}}{x - x_k^p} + A_0 + A_1(x - x_k^p) + O((x - x_k^p)^2), \quad (16)$$

то в околі тієї ж точки x_k^p

$$W'(x) = -\frac{A_{-1}}{(x - x_k^p)^2} + A_1 + O((x - x_k^p)), \quad (17)$$

а розклавши в околі тієї самої точки x_k^p функцію $f(x)$ в ряд із точністю до квадратичних внесків і підставивши ці вирази в потенціал $V_-(x)$, одержимо

$$V_-(x) = \frac{A_{-1}^2 + f(x_k^p)A_{-1}}{(x - x_k^p)^2} + \frac{2A_0A_{-1} - f'(x_k^p)A_{-1}}{x - x_k^p} \quad (18)$$
$$+A_0^2 + 2A_1A_{-1} - f(x_k^p)A_1 - \frac{1}{2}A_{-1}f''(x_k^p) + O(x - x_k^p).$$

Потенціал $V_-(x)$ буде несинґулярним у двох випадках:

a) якщо

$$A_{-1} = 0, \quad (19)$$

у цьому разі несинґулярним буде як потенціал $V_-(x)$, так і суперпотенціал $W(x)$

$$\begin{aligned} V_-(x) &= A_0^2 - A_1f(x_k^p) + 2A_{-1}A_1 + \frac{1}{2}A_{-1}f''(x_k^p) \\ &\quad + O(x - x_k^p), \\ W(x) &= A_0 + A_1(x - x_k^p) + O((x - x_k^p)^2); \end{aligned} \quad (20)$$

b) якщо ж

$$A_{-1} = -f(x_k^p), \quad (21)$$

$$A_0 = \frac{1}{2}f'(x_k^p), \quad (22)$$

то $V_-(x)$ набуває скінченного в точках синґулярності $W(x)$ значення, а саме

$$\begin{aligned} V_-(x) &= \frac{1}{4}\Big(f'(x_k^p)\Big)^2 - 3A_1f(x_k^p) + \frac{1}{2}f(x_k^p)f''(x_k^p) \\ &\quad + O(x - x_k^p), \\ W(x) &= -\frac{f(x_k^p)}{(x - x_k^p)} + \frac{1}{2}f'(x_k^p) + A_1(x - x_k^p) \\ &\quad + O((x - x_k^p)^2). \end{aligned} \quad (23)$$

Зазначимо, що потенціальна енерґія суперсиметричного партнера в цьому випадку буде синґулярною.

Підставляючи знайдені суперпотенціали у (13), знайдемо, що у випадку (a) хвильова функція є аналітичною функцією і у околі точки x_k^p матиме таку поведінку:

$$\psi_0(x) \sim (x - x_k^p), \quad (24)$$

де x_k^p є нулями хвильової функції.

Якщо (b) при $A_{-1} = -f(x_k^p)$ і $A_0 = \frac{1}{2}f'(x_k^p)$, то поведінка хвильової функції у околі особливих точок буде такою:

$$\psi_0(x) \sim |x - x_k^p| \left(1 - \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{A_1}{f(x_k^p)} - \frac{1}{2}\left(\frac{f'(x_k^p)}{f(x_k^p)}\right)^2}(x - x_k^p) - C\right)^2\right), \quad (25)$$

де стала C дорівнює

$$C = \frac{3}{4}\frac{f'(x_k^p)}{\sqrt{A_1f(x_k^p) - \frac{1}{2}(f'(x_k^p))^2}}. \quad (26)$$

Щоб одержати хвильову функцію, похідна від якої буде неперервною функцією, врахуємо, що якщо на деякому проміжку хвильова функція $\psi_0(x)$ задовольняє рівняння Шредінґера, то і хвильова функція $-\psi_0(x)$ на цьому ж проміжку задовольняє те саме рівняння. Завдяки цьому можна змінити знак функції в деяких областях так, щоб і сама хвильова функція, і її похідна були неперервними функціями. Для цього слід зробити заміну $|x - x_k^p| \to (x - x_k^p)$. Тоді поведінка хвильової функції буде такою:

$$\psi_0(x) \sim (x - x_k^p) \left(1 - \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{A_1}{f(x_k^p)} - \frac{1}{2}\left(\frac{f'(x_k^p)}{f(x_k^p)}\right)^2}(x - x_k^p) - C\right)^2\right), \quad (27)$$

де x_k^p є нулями хвильової функції.

Приклад 1. *Маса та суперпотенціал — періодичні функції, що не мають особливостей.*

При розгляді основного стану насамперед розглянемо випадок, коли і суперпотенціал $W(x)$ і функція, що описує залежність маси від координат $f(x)$, є періодичними функціями, які не мають особливостей.

Нехай

$$W(x) = A\sin(x), \tag{28}$$

а

$$f(x) = 1/(a + b\sin^2(x)), \tag{29}$$

де $A, b, c > 0$ і $b > c$. Функція $W(x)$ має нулі в точках $x_k^0 = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$.

У цьому випадку потенціал $V_-(x)$ має вигляд

$$V_-(x) = A^2\sin^2(x) - A\frac{\cos(x)}{a + b\sin^2(x)}, \tag{30}$$

а точний розв'язок для стану з нульовою енерґією є таким:

$$\psi_0(x) \sim \sqrt{a + b\sin^2(x)} \times \exp\left(A(a+b)\cos(x) - \frac{Ab}{3}\cos^3(x)\right). \tag{31}$$

Одержаний потенціал є періодичною функцією з періодом 2π. Хвильова функція ψ_0^- має такий самий період та не має вузлів, а тому за осциляційною теоремою вона належить до дна першої зони.

Обернена до вибраної в попередньому випадку функція

$$f(x) = a + b\sin^2(x) \tag{32}$$

також приводить до несинґулярного потенціалу $V_-(x)$:

$$V_-(x) = A^2\sin^2(x) - A(a+b)\cos(x) + Ab\cos^3(x), \tag{33}$$

а точною хвильовою функцією стану з нульовою енерґією є такою:

$$\psi_0(x) \sim \frac{1}{\sqrt{a + b\sin^2(x)}}\left(\frac{\sqrt{\frac{a+b}{b}} + \cos(x)}{\sqrt{\frac{a+b}{b}} - \cos(x)}\right)^{\frac{A}{2\sqrt{b(a+b}}}. \tag{34}$$

Період цієї хвильової функції складає 2π, вона не має вузлів і тому також належить до дна першої зони.

Приклад 2. *Періодичні маса та синґулярний суперпотенціал.*

Тепер розглянемо випадок синґулярного суперпотенціалу

$$W(x) = A\tan(x). \tag{35}$$

Ця функція має нулі у точках $\beta x_k^0 = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$ та полюси у точках $\beta x_k^p = \frac{\pi}{2} + n\pi$, де $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Виразивши потенціал через суперпотенціал $W(x)$ і функцію $f(x)$, одержимо

$$V_-(x) = A^2\tan^2(x) - \frac{Af(x)}{\cos^2(x)} = A\frac{A - f(x)}{\cos^2(x)} - A^2. \tag{36}$$

Наведений потенціал має особливості у точках $x_k^p = \frac{\pi}{2} + n\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$. Для їх усунення функцію $f(x)$ слід вибрати згідно з умовою (22) такою, що задовольняє рівняння

$$f(x_k^p) = A, f'(x_k^p) = 0. \tag{37}$$

Якщо залежність маси від координат описується функцією

$$f(x) = \frac{1}{a + b\sin^2(x)}, \tag{38}$$

то несинґулярний потенціал $V_-(x)$ набуває вигляду

$$V_-(x) = -\frac{1}{(a+b)^2}\left(1 + \frac{b}{a + b\sin^2(x)}\right), \tag{39}$$

а точна хвильова функція стану з нульовою енерґією має вигляд

$$\psi_0(x) \sim \sqrt{a + b\sin^2(x)}\cos(x) \times \exp\left(-\frac{b}{2(a+b)}\cos^2(x)\right). \tag{40}$$

Знайдений потенціал є періодичною функцією з періодом π. Період хвильової функції 2π, вона має один вузол і тому відноситься до дна третьої зони.

Якщо ж

$$f(x) = a + b\sin^2(x), \tag{41}$$

то потенціал $V_-(x)$ є сталим і при $A = a + b$ дорівнює

$$V_-(x) = -a(a+b), \tag{42}$$

а точні роз'язки для делокалізованого стану з нульовою енерґією пов'язані виключно із залежністю маси від координат

$$\psi_0(x) \sim \frac{\cos(x)}{(a + b\sin^2(x))}. \tag{43}$$

V. КВАЗІТОЧНО РОЗВ'ЯЗУВАНІ ЗАДАЧІ ІЗ ДВОМА РІВНЯМИ

Для одержання ще одного власного стану оператора H_- врахуємо, що власні значення та власні функції гамільтоніанів H_+ і H_- пов'язані суперсиметричними перетвореннями

$$E_{n+1}^- = E_n^+,\ E_0^- = 0, \tag{44}$$

$$\psi^{-}_{n+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{E^{+}_{n}}} B^{+} \psi^{+}_{n}(x), \tag{45}$$

$$\psi^{+}_{n}(x) = \frac{1}{\sqrt{E^{-}_{n+1}}} B^{-} \psi^{-}_{n+1}(x). \tag{46}$$

Розглянувши гамільтоніан H_+, який є суперсиметричним партнером оператора H_-, та знайшовши його основний стан, ми тим самим одержимо перший збуджений стан оператора H_-. Використовуючи суперсиметричні перетворення (44), запишімо H_+ у такому вигляді:

$$H_+ = H^{1}_{-} + \epsilon = B^{+}_{1} B^{-}_{1} + \epsilon,\ \epsilon > 0, \tag{47}$$

що приводить до співвідношення між потенціалами суперсиметричних партнерів

$$V_+(x) = V^{(1)}_{-}(x) + \epsilon, \tag{48}$$

де $B^{\pm}_{1}$ та $V^{(1)}_{-}(x)$ задані виразами (9) та (10) з новим суперпотенціалом $W_1(x)$, а ϵ є енерґією основного стану гамільтоніана H_+, тоді як енерґія основного стану H_- нульова.

Суперпотенціали $W(x)$ та $W_1(x)$ задовольняють рівняння

$$W^2_0(x) + f(x)\ W'_0(x) = W^2_1(x) - f(x)\ W'_1(x) + 2\varepsilon. \tag{49}$$

Хвильова функція оператора H_+ із енерґією $E = \epsilon$ задовольняє рівняння $B^{-}_{1}(x)\psi^{+}_{1}(x) = 0$, розв’язком якого є

$$\psi^{+}_{1}(x) = \frac{C^{+}_{1}}{\sqrt{f(x)}} \exp\left(-\int \frac{W_1(x)}{f(x)} dx \right). \tag{50}$$

Застосовуючи суперсиметричні перетворення (45) до $\psi^{+}_{1}(x)$, одержимо хвильову функцію збудженого стану з енерґією $E = \epsilon$ гамільтоніана H_-

$$\psi^{-}_{1}(x) = \frac{C^{-}_{1}}{\sqrt{f(x)}}\ W_+(x) \exp\left(-\int \frac{W_1(x)}{f(x)} dx \right), \tag{51}$$

де $W_+(x) = W_1(x) + W(x)$.

Із рівняння (49) не вдається знайти ні $W(x)$, ані $W_1(x)$, але можна знайти таку пару величин $W(x)$ і $W_1(x)$, які задовольнятимуть це рівняння. Для цього введемо дві нові величини

$$\begin{aligned} W_+(x) &= W_1(x) + W(x), \\ W_-(x) &= W_1(x) - W(x), \end{aligned} \tag{52}$$

за допомогою яких рівняння (49) записуємо як

$$f(x)\ W'_+(x) = W_+(x)\ W_-(x) + 2\epsilon. \tag{53}$$

Це нове рівняння можна розв’язати як стосовно $W_-(x)$ для заданого $W_+(x)$, так і навпаки. Ми виразимо розв’язок через $W_+(x)$. Тоді

$$W_-(x) = \frac{f(x)\ W'_+(x) - 2\epsilon}{W_+(x)}, \tag{54}$$

а

$$\begin{aligned} W(x) &= \frac{1}{2}\left(W_+(x) - \frac{f(x)\ W'_+(x) - 2\epsilon}{W_+(x)} \right), \\ W_1(x) &= \frac{1}{2}\left(W_+(x) + \frac{f(x)\ W'_+(x) - 2\epsilon}{W_+(x)} \right). \end{aligned} \tag{55}$$

Тут, як і раніше, розглядатимемо несинґулярні потенціали $V_-(x)$. Вимога несинґулярності потенціалу накладає обмеження на ґенеруючу функцію $W_+(x)$. Розгляньмо випадок, коли $W_+(x)$ має прості нулі в точках x^0_k, тобто в околі нулів поведінка $W_+(x)$ є такою:

$$\begin{aligned} W_+(x) = W'_+(x^0_k)\ (x - x^0_k) + \frac{1}{2} W''_+(x^0_k)\ (x - x^0_k)^2 \\ + O((x - x^p_k)^3). \end{aligned} \tag{56}$$

Нулі функції $W_+(x)$ спричиняють синґулярності суперпотенціалу $W(x)$. Розклавши в околі точок x^0_k функцію, що описує залежність маси від координат, у ряд Тейлора з точністю до $(x - x^0_k)^2$ і підставивши ці розклади у вираз для $W_+(x)$ та обмежившись лінійними внесками, одержимо

$$\begin{aligned} W(x) = &-\Big(\frac{f(x^0_k)}{2} - \frac{\varepsilon}{W'_+(x^0_k)} \Big) \frac{1}{(x - x^0_k)} - \frac{W''_+(x^0_k)}{2W'_+(x^0_k)} \Big(\frac{f(x^0_k)}{2} + \frac{\varepsilon}{W'_+(x^0_k)} \Big) - \frac{f'(x^0_k)}{2} \\ &+ \frac{1}{2} \Big(\frac{W''_+(x^0_k) f'(x^o_k)}{W'_+(x^0_k)} + f''(x^0_k) \Big) (x - x^0_k) + O((x - x^0_k)^2). \end{aligned} \tag{57}$$

Цей суперпотенціал спричиняє таку поведінку в околі точки x^0_k потенціалу $V_-(x)$:

$$\begin{aligned} V_-(x) = &\Big(\Big(\frac{\varepsilon}{W'_-(x^0_k)} \Big)^2 - \Big(\frac{f(x^0_k)}{2} \Big)^2 \Big) \Big(\frac{1}{(x - x^0_k)^2} - \frac{W''_+(x^0_k)}{W'_+(x^0_k)} \frac{1}{(x - x^0_k)} \Big) + \Big(\frac{W''_+(x^0_k}{2W'_+(x^0_k)} \Big(\frac{f(x^0_k)}{2} + \frac{\varepsilon}{W'_+(x^0_k)} \Big) - \frac{f'(x^0_k)}{2} \Big)^2 \\ &+ \frac{1}{2} \Big(\frac{f(x^0_k)}{2} + \frac{\varepsilon}{W'_+(x^0_k)} \Big) \Big(\frac{W''_+(x^0_k) f'(x^0_k)}{W'_+(x^0_k)} + f''(x^0_k) \Big) + O(x - x^0_k). \end{aligned} \tag{58}$$

Неважко бачити, що при

$$f(x_k^0)W_+'(x_k^0) = \pm 2\varepsilon \tag{59}$$

потенціальна енерґія $V_-(x)$ буде несинґулярною.

Якщо $W_+(x_k^0)$ в деяких точках періоду L має додатні значення, а в інших — від'ємні, то зручно розбити множину точок, у яких потенціал синґулярний, на дві підмножини — першу x_k^+, у яких $f(x_k^+)W_+{}'(x_k^+) > 0$, і другу x_k^-, у яких $f(x_k^-)W_+'(x_k^-) < 0$. Тоді при $\varepsilon > 0$

$$f(x_k^+)\ W_+'(x_k^+) = 2\varepsilon, \tag{60}$$

а

$$f(x_k^-)\ W_+'(x_k^-) = -2\varepsilon. \tag{61}$$

Тепер, наприклад, при $f(x_k^+)\ W_+'(x_k^+) = 2\varepsilon$ синґулярності при x_k^+ зникають і $W(x)$ та $W_1(x)$ матимуть синґулярності лише в точках x_k^-, в околі яких їх поведінка є такою:

$$W(x) = -\frac{f(x_k^-)}{x - x_k^-} + O(x - x_k^-), \tag{62}$$

$$W_1(x) = \frac{f(x_k^-)}{x - x_k^-} + O(x - x_k^-). \tag{63}$$

Використавши знайдений суперпотенціал $W(x)$ для одержання хвильової функції з нульовою енерґією, знайдемо, що в околі точок x_k^- вона проявляється як

$$\psi_0^-(x) \sim (x - x_k^-). \tag{64}$$

Тепер розгляньмо випадок, коли функція $W_+(x)$ має в точках x_k^p також і прості полюси, в околі яких вона веде себе як

$$W_+(x) = \frac{G_{-1}}{x - x_k^p} + G_0 + G_1(x - x_k^p) + O(x - x_k^p)^2. \tag{65}$$

Тоді в околі точок x_k^p

$$W_+'(x) = -\frac{G_{-1}}{(x - x_k^p)^2} + G_1 + O(x - x_k^p), \tag{66}$$

а розклавши $f(x)$ з точністю до $(x - x_k^p)^2$, для суперпотенціалів одержуємо

$$\begin{aligned} W(x) = {} & \frac{1}{2}\frac{G_{-1} + f(x_k^p)}{x - x_k^p} + \frac{1}{2}\Big(G_0 - \frac{G_0}{G_{-1}} f(x_k^p) + f'(x_k^p)\Big) \\ & + \frac{1}{2}\Big(G_1 - \frac{2G_1}{G_{-1}} f(x_k^p) + \frac{2\varepsilon}{G_{-1}} - \frac{1}{2} f''(x_k^p) + \frac{G_0}{G_{-1}} f'(x_k^p)\Big)(x - x_k^p) + O((x - x_k^p)^2), \end{aligned} \tag{67}$$

$$\begin{aligned} W_1(x) = {} & \frac{1}{2}\frac{G_{-1} - f(x_k^p)}{x - x_k^p} + \frac{1}{2}\Big(G_0 + \frac{G_0}{G_{-1}} f(x_k^p) - f'(x_k^p)\Big) \\ & + \frac{1}{2}\Big(G_1 + \frac{2G_1}{G_{-1}} f(x_k^p) - \frac{2\varepsilon}{G_{-1}} + \frac{1}{2} f''(x_k^p) - \frac{G_0}{G_{-1}} f'(x_k^p)\Big)(x - x_k^p) + O(x - x_k^p)^2. \end{aligned} \tag{68}$$

В околі особливих точок x_k^p такий суперпотенціал приводить до потенціалу $V_-(x)$ з такою поведінкою:

$$V_-(x) = \frac{1}{4}\frac{(G_{-1} + f(x_k^p))(G_{-1} + 3f(x_k^p))}{(x - x_k^p)^2} + \frac{1}{2}\frac{G_{-1} + f(x_k^p)}{x - x_k^p}\Big(G_0 + \frac{G_0 f(x_k^p)}{G_{-1}} + 2f'(x_k^p)\Big) + O(\mathrm{const}). \tag{69}$$

Як видно із потенціалу, він буде несинґулярним у двох випадках:

a) коли

$$G_{-1} = -f(x_k^p), \tag{70}$$

або

b) коли

$$G_{-1} = -3f(x_k^p), \qquad G_0 = -3f'(x_k^p). \tag{71}$$

У випадку a, коли $G_{-1} = -f(x_k^p)$, приходимо до таких суперпотенціалів:

$$\begin{aligned} W(x) &= G_0 + \frac{1}{2} f'(x_k^p) + \Big(\frac{3}{2} G_1 + G_0 \frac{f'(x_k^p)}{f(x_k^p)} + \frac{1}{4} f''(x_k^p) - \frac{\varepsilon}{f(x_k^p)}\Big)(x - x_k^p) + O((x - x_k^p)^2), \\ W_1(x) &= -\frac{f(x_k^p)}{x - x_k^p} - \frac{f'(x_k^p)}{2} - \Big(\frac{G_1}{2} - \frac{\varepsilon}{f(x_k^p)} + G_0 \frac{f'(x_k^p)}{f(x_k^p)} + \frac{1}{4} f'(x_k^p)\Big)(x - x_k^p) + O((x - x_k^p)^2). \end{aligned} \tag{72}$$

У випадку b, коли $G_{-1} = -3f(x_k^p)$ і $G_0 = 0$, тоді

$$W(x) = -\frac{f'(x_k^p)}{x - x_k^p} + f'(x_k^p) + \Big(\frac{5G_1}{6} - \frac{2\varepsilon}{3f(x_k^p)} + \frac{1}{4}f''(x_k^p)\Big)(x - x_k^p)) + O((x - x_k^p)^2),$$
$$W_1(x) = -2\frac{f(x_k^p)}{x - x_k^p} - \frac{f'(x_k^p)}{2} + \Big(\frac{G_1}{6} + \frac{2\varepsilon}{3f(x_k^p)} - \frac{1}{4}f''(x_k^p)\Big)(x - x_k^p)) + O((x - x_k^p)^2). \quad (73)$$

Розгляньмо приклади несинґулярних потенціалів, для яких можна точно знайти основний та перший збуджений стани для деяких ґенеруючих функцій та функцій, що описують залежність маси від координат.

Приклад 3. Розгляньмо спершу випадок, коли $W_+(x)$ має лише нулі, а саме, виберімо $W_+(x)$ такою:

$$W_+(x) = A\sin(x). \quad (74)$$

Ця функція має нулі в точках $x_k^0 = 0, \pm\pi, \pm2\pi, \ldots$. Функцію $f(x)$, що описує залежність маси від координат, виберімо такою:

$$f(x) = \frac{1}{a + b\sin^2(x)}. \quad (75)$$

Цей вибір забезпечує виконання умови (59).

Для цього випадку $f(x_k^0) = 1/a$, а $\varepsilon = A/2a$, що приводить до таких суперпотенціалів:

$$W(x) = \frac{1}{2}\Big(A\sin(x) + \frac{\tan(\frac{x}{2})}{a + b\sin^2(x)} + \frac{b}{a}\frac{\sin(x)}{a + b\sin^2(x)}\Big). \quad (76)$$

$$W_1(x) = \frac{1}{2}\Big(A\sin(x) - \frac{\tan(\frac{x}{2})}{a + b\sin^2(x)} - \frac{b}{a}\frac{\sin(x)}{a + b\sin^2(x)}\Big). \quad (77)$$

Зазначимо, що при $a = 1$ і $b = 0$, приходимо до одержаного у [25] суперпотенціалу

$$W(x) = \frac{1}{2}\Big(A\sin(x) + 2\tan(\frac{x}{2})\Big). \quad (78)$$

Отриманий суперпотенціал із вибраною функцією $f(x)$ приводить до такого несинґулярного потенціалу:

$$V_-(x) = \frac{A^2}{4}\sin^2(x) - \frac{1}{4(a + b\sin^2(x))} + \Big(1 + \frac{Ab}{2a}\Big)\frac{\sin^2(x)}{a + b\sin^2(x)} + \Big(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{2b}{a}\Big)\frac{\sin^2(x)}{(a + b\sin^2(x))^2}$$
$$+ \Big(\frac{b^2}{a} - 2b\Big)\frac{\sin^2(x)\cos(x)}{(a + b\sin^2(x))^2} + \Big(\frac{b}{2a} - \frac{A}{2}\Big)\frac{\cos(x)}{(a + b\sin^2(x))^2}, \quad (79)$$

який також при $a = 1$ і $b = 0$ переходить в одержаний у [25] несинґулярний потенціал

$$V_-(x) = \frac{A^2}{4} + \frac{A}{2} - \frac{1}{4} - \frac{A^2}{4}\cos^2(x) - A\cos(x). \quad (80)$$

За умови $A > 0$ і $a > b > 0$ делокалізовані стани з нульовою енерґією описуються хвильовою функцією

$$\psi_0^-(x) = C_0\sqrt{a + b\sin^2(x)}\cos\left(\frac{x}{2}\right) \times \exp\left(\frac{1}{2}(Aa + Ab + \frac{b}{a})\cos(x) - \frac{Ab}{6}\cos^3(x)\right), \quad (81)$$

а при умові $a > b$ делокалізовані стани з енерґією $\varepsilon = \frac{A}{2a}$ описуються хвильовою функцією

$$\psi_\varepsilon^-(x) = C_1\sqrt{a + b\sin^2(x)}\sin\left(\frac{x}{2}\right) \times \exp\left(\frac{1}{2}\left(Aa + Ab - \frac{b}{a}\right)\cos(x) - \frac{Ab}{6}\cos^3(x)\right). \quad (82)$$

Знайдений потенціал (79) є періодичною функцією з періодом 2π. Хвильові функції ψ_0^- і ψ_ε^- мають період 4π та по одному вузлу. Згідно з осциляційною теоремою, ψ_0^- належать до верхньої межі першої зони, а ψ_ε^- — до дна другої зони.

Приклад 4. Тепер розгляньмо випадок, коли ґенеруюча функція $W_+(x)$ має як нулі, так і прості полюси.

За таку функцію виберімо

$$W_+(x) = A\tan(\beta x). \tag{83}$$

Ця функція має нулі в точках $\beta x_k^0 = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$. Крім нулів, вона має також полюси в точках $\beta x_k^p = \frac{\pi}{2} + n\pi$, де $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Запишімо вираз для суперпотенціалів, не конкретизуючи вигляду функції $f(x)$, яка описує залежність маси від координат. Енергія ε дорівнюватиме $\varepsilon = \frac{1}{2}W'_+(x_k^0)f(x_k^0)$, а додавши й віднявши доданки, що виражаються через значення функції $f(x)$ в особливих точках ґенеруючої функції, знайдемо, що суперпотенціали можна звести до вигляду

$$\begin{aligned} W(x) = \frac{1}{2}\Big(&\big(A - \beta f(x_k^p)\big)\tan(\beta x) \\ &- \beta\big(f(x) - f(x_k^p)\big)\tan(\beta x) - \beta\frac{f(x) - f(x_k^0)}{\tan(\beta x)}\Big) \end{aligned} \tag{84}$$

$$\begin{aligned} W_1(x) = \frac{1}{2}\Big(&\big(A + \beta f(x_k^p)\big)\tan(\beta x) \\ &+ \beta\big(f(x) - f(x_k^p)\big)\tan(\beta x) + \beta\frac{f(x) - f(x_k^0)}{\tan(\beta x)}\Big). \end{aligned} \tag{85}$$

Порівнюючи коефіцієнти розкладу ґенеруючої функції $W_+(x)$ у ряд в околі точки x_k^p із розкладом (72) знаходимо, що потенціал $V_-(x)$ буде несинґулярним, коли $A = \beta f(x_k^p)$, або порівнюючи розклад ґенеруючої функції з розкладом (73), приходимо до такої умови несинґулярності потенціалу: $A = 3\beta f(x_k^p)$.

Тепер виберімо явний вигляд функції $f(x)$ так, щоби вона у всіх особливих точках набувала однакових значень й одного знака. Зокрема візьмімо її такою:

$$f(x) = \frac{1}{a + b\sin^2(\beta x)}. \tag{86}$$

У цьому випадку $f(x_k^0) = \frac{1}{a+b}$ і суперпотенціали набувають вигляду

$$\begin{aligned} W(x) = \frac{1}{2}\Big(&\big(A - \frac{\beta}{a+b}\big)\tan(\beta x) \\ &- \frac{\beta b^2}{2a(a+b)}\frac{\sin(2\beta x)}{a + b\sin^2(\beta x)}\Big), \end{aligned} \tag{87}$$

$$\begin{aligned} W_1(x) = \frac{1}{2}\Big(&\big(A + \frac{\beta}{a+b}\big)\tan(\beta x) \\ &+ \frac{\beta b^2}{2a(a+b)}\frac{\sin(2\beta x)}{a + b\sin^2(\beta x)}\Big). \end{aligned} \tag{88}$$

При $A = \frac{\beta}{a+b}$, що відповідає випадку (a) (70), суперпотенціал $W(x)$ не має особливостей

$$W(x) = \frac{b^2}{8a(a+b)}\cos(2\beta x), \tag{89}$$

а його партнер $W_1(x)$ синґулярний і має вигляд

$$\begin{aligned} W_1(x) = &\frac{\beta}{a+b}\tan(\beta x) \\ &+ \frac{\beta b^2}{4a(a+b)}\frac{\sin(2\beta x)}{a + b\sin^2(\beta x)}. \end{aligned} \tag{90}$$

Несинґулярний потенціал $V_-(x)$ є таким:

$$\begin{aligned} V_-(x) = &\frac{\beta^2 b}{2a(a+b)}\Big[\frac{b}{8a(a+b)} + \frac{1}{a + b\sin^2(\beta x)}\Big] \\ &\times \frac{\sin^2(2\beta x)}{(a + b\sin^2(\beta x))^2} - \frac{\beta^2 b^2}{2a(a+b)}\frac{\cos(2\beta x)}{(a + b\sin^2(\beta x))^2}. \end{aligned} \tag{91}$$

Хвильові функції стану з нульовою енерґією і стану з енерґією ε мають вигляд

$$\psi_0(x) \sim \sqrt{a + b\sin^2(\beta x)}\exp\Big(-\frac{b^2\cos(2\beta x)}{8a(a+b)}\Big), \tag{92}$$

$$\begin{aligned} \psi_\varepsilon(x) \sim &\sqrt{a + b\sin^2(\beta x)}\sin(\beta x) \\ &\times \exp\Big(-\frac{b(2a-b)\cos(2\beta x)}{4a(a+b)}\Big). \end{aligned} \tag{93}$$

Цей потенціал є періодичною функцією з періодом π/β. Хвильова функція ψ_0^- має період $2\pi/\beta$ та не має вузлів, а ψ_ε^- має період $2\pi/\beta$ та один вузол. Згідно з осциляційною теоремою, ψ_0^- належить до верхньої межі першої зони, а ψ_ε^- — до дна другої зони.

При $A = \frac{3\beta}{a+b}$ співвідношення (71) приводять до $G_0 = -f'(x_k^p) = 0$, суперпотенціали є синґулярними і мають вигляд

$$W(x) = \frac{\beta}{a+b}\tan(\beta x) - \frac{\beta b^2}{4a(a+b)}\frac{\sin(2\beta x)}{a + b\sin^2(\beta x)}, \tag{94}$$

$$W_1(x) = \frac{2\beta}{a+b}\tan(\beta x) + \frac{\beta b^2}{4a(a+b)}\frac{\sin(2\beta x)}{a + b\sin^2(\beta x)}, \tag{95}$$

а хвильові функції стану з нульовою енерґією та енерґією ε такі:

$$\psi_0(x) \sim \sqrt{a + b\sin^2(\beta x)}\cos(\beta x) \times \exp\left(-\frac{b(2a+b)\cos(2\beta x)}{8a(a+b)}\right) \tag{96}$$

$$\psi_\varepsilon(x) \sim \sqrt{a + b\sin^2(\beta x)}\sin(2\beta x) \times \exp\left(-\frac{b(4a-b)\cos(2\beta x)}{8a(a+b)}\right). \tag{97}$$

Потенціал $V_-(x)$, явний вигляд якого не наведений через його громіздкість, має період $2\pi/\beta$. Хвильова функція ψ_0^- також має період $2\pi/\beta$ та один вузол, а ψ_ε^- — період π/β та два вузли. Згідно з осциляційною теоремою, ψ_0^- належить до дна другої зони, а ψ_ε^- — до верхньої межі другої зони.

Зазначимо, що при виборі функції, яка описує залежність маси від координат у вигляді

$$f(x) = a + b\sin^2(\beta x), \tag{98}$$

приходимо до нульових суперпотенціалу $W(x) = 0$ (84) та потенціалу $V_-(x) = 0$. Суперопотенціал $W_1(x)$ у цьому випадку набуває вигляду

$$W_1(x) = \beta(a+b)\tan(\beta x), \tag{99}$$

а точні розв'язки для станів із нульовою енерґією та енерґією, рівною ε, такі:

$$\psi_0(x) \sim \sqrt{a + b\sin^2(\beta x)}, \tag{100}$$

$$\psi_\varepsilon(x) \sim \frac{1}{\left(\sqrt{a + b\sin^2(\beta x)}\right)^3}\sin(2\beta x). \tag{101}$$

VI. ВИСНОВКИ

У цій роботі ми узагальнили метод побудови КТР періодичних потенціалів, розвинутий у [25] на випадок маси, залежної від координат. Один точний розв'язок і потенціал повністю задаються суперпотенціалом $W(x)$ і функцією $f(x)$, що задає залежність маси від координат. Наведені для цього випадку приклади 1 та 2 .

КТР-потенціали з двома точними станами задаються ґенеруючою функцією $W_+(x)$ і $f(x)$. Одержано умови, за яких періодичний суперпотенціал $W(x)$ приводить до несинґулярної потенціальної енерґії $V_-(x)$. Знайдено обмеження, які слід накласти на несинґулярну періодичну ґенеруючу функцію $W_+(x)$, що має прості нулі та синґулярну періодичну ґенеруючу функцію $W_+(x)$, щоби прийти до несинґулярного потенціалу $V_-(x)$.

Знайдено квазіточно розв'язувані потенціали з точно відомими хвильовими функціями для двох рівнів частинки з масою, залежною від координат. Точніше кажучи, ми знайшли пару, а саме, потенціал і залежну від координат масу, для яких відомі точні хвильові функції для двох станів. Наведено приклади 3 та 4, що відповідають цьому випадку.

Цікавими є приклади 2 та 4, для яких залежні від координат періодичні маса та суперпотенціал $W(x)$ чи ґенеруюча функція $W_+(x)$ приводять до сталого потенціалу. При цьому зазначимо, що рух не вільний, оскільки в операторі кінетичної енерґії залишається залежність маси від координат і зміна способу упорядкування маси й операторів імпульсу приведе до появи ефективної потенціальної енерґії.

Автор висловлює подяку професорові В. М. Ткачукові за постійну увагу до роботи та обговорення її результатів.

[1] P. Ring, P. Schuk, *The nuclear many-body problem* (Springer-Verlag, New York, 1980).
[2] F. Arias de Savedra, J. Boronat, A. Polls, A. Fabrocini. Phys. Rev. B **50**, 4248 (1994).
[3] A. Puente, Ll. Serra, M. Casas, Z. Phys. D **31**, 283 (1994).
[4] L. Serra, E. Lipparini, Europhys. Lett. **40**, 667 (1997).
[5] М. В. Ткач, Я. М. Березовський, Журн. фіз. досл. **7**, 188 (2003).
[6] J. M. Levy-Leblond, Eur. J. Phys. **13**, 215 (1992).
[7] J. M. Lévy-Leblond, Phys. Rev. A **52**, 1845 (1995).
[8] L. Decar, L. Chetouani, T. F. Hamman. J. Math. Phys. **39**, 2551 (1998).
[9] F. R. Plastino *et al.*, Phys. Rev. A **60**, 4318 (1999).
[10] A. de Souza Dutra, C. A. S. Almeida, Phys. Lett. A **275**, 25 (2003).
[11] B. Roy, A. Roy, J. Phys. A **35**, 3961 (2002).
[12] I. O. Vakarchuk, J. Phys. A **38**, 4727 (2005).
[13] I. O. Vakarchuk, J. Phys. A, **38**, 7567 (2005).
[14] C. Quesne, V. M. Tkachuk, J. Phys. A **37**, 4267 (2004).
[15] B. Bagchi *et al.*, Mod. Phys. Lett. A **19**, 2765 (2004).
[16] B. Bagchi *et al.*, J. Phys. A **38**, 2929 (2005).
[17] І. О. Вакарчук, *Квантова механіка* (ЛНУ імені Івана Франка, Львів, 2012).
[18] R. Koç, E. Körcük, M. Koca, J. Phys. A **35**, L1 (2005).
[19] B. Bagchi, A. Ganguly. J. Phys.A **36**, L161 (2003).
[20] B. Bagchi *et al.*, Europhys. Lett. **72**, 155 (2005).
[21] S. Sree Ranjani, A. K. Kapoor, P. K. Panigrahi, Int. J. Theor. Phys. **44**, 1167 (2005).
[22] Qiong-Tao Xie, J. Phys. A **45**, 175302 (2012).
[23] C. Quesne, Int. J. Mod. Phys. A **27**, 12500073 (2012).
[24] V. M. Tkachuk, Phys. Lett. A **245**, 177 (1998).
[25] V. M. Tkachuk, O. Voznyak, J. Phys. Stud. **6**, 40 (2002).
[26] О. Возняк, В. М. Ткачук, Журн. фіз. досл. **16**, 1003 (2012).
[27] Л. Ф. Блажиевский, Теор. мат. физ. **40**, 51 (1979).

[28] F. S. A. Cavalcante *et al.*, Phys. Rev. B **55**, 1326 (1997).
[29] O. von Roos, Phys. Rev. B **27**, 007547 (1983).
[30] G. Dunne, J. Feinberg, Phys. Rev. D **57**, 1271 (1988).
[31] G. Dunne, J. Mannix, Phys. Lett. B **428**, 115 (1988).
[32] V. M. Tkachuk, J. Phys. A **34**, 6339 (2001).

QUASI-EXACTLY SOLVABLE PERIODIC POTENTIALS FOR THE PARTICLE WITH THE PERIODIC POSITION-DEPENDENT MASS

O. Voznyak
Ivan Franko National University of Lviv, Department for Theoretical Physics,
12, Drahomanov St., Lviv, UA–79005, Ukraine

The method of supersymetric quantum mechanics has been applied for constructing of the quasi exactly solvable periodic potentials with two known energy levels for the systems with a periodic position-dependent mass. Studied in the paper are the conditions when the superpotential or a generating function with singular behaviour leads to a non-singular potential energy. The examples of singular and non-singular superpotentials or generating functions which lead to a non-singular potential energy have been considered and wave functions corresponding to the two levels have been found.