Гой Т.П., к.ф.-м.н., доцент
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
(Україна, м. Івано-Франківськ)

ІНТЕГРАЛИ ВІД НЕЕЛЕМЕНТАРНИХ ФУНКЦІЙ, ПОБУДОВАНИХ ЗА ДОПОМОГОЮ ЦЕНТРАЛЬНИХ ФАКТОРІАЛЬНИХ СТЕПЕНІВ

1. Вступ. У теорії дифракції хвиль, теорії поперечних коливань стрижня, при проектуванні шосе і залізних доріг, у багатьох інших розділах фізики і техніки виникають інтеграли Френеля $\int_0^x \sin t^2 dt$, $\int_0^x \cos t^2 dt$ та їхні різноманітні узагальнення (див., наприклад, [4] і бібліографію там).

У цій статті досліджуємо дві неелементарні функції $S^*(x)$, $C^*(x)$ дійсної змінної, отримані заміною у інтегралах Френеля тригонометричних функцій на функції $\tilde{S}(x)$, $\tilde{C}(x)$. Останні функції означені в [2, 3] за допомогою рядів, утворених заміною спадних факторіальних степенів (звичайних факторіалів) на центральні факторіальні степені у степеневих рядах функцій $\sin x$, $\cos x$ відповідно.

2. Допоміжні поняття та твердження. Для довільних $x \in \mathbf{R}$ і $m \in \mathbf{N}$ центральним факторіальним степенем m з кроком $k > 0$ називають вираз

$$x^{m[k]} = x\left(x + mk/2 - k\right)\left(x + mk/2 - 2k\right)\cdot \ldots \cdot\left(x + mk/2 + k\right).$$

Вважають, що $x^{m[0]} \equiv 1$.

Центральний факторіальний степінь m з кроком 1 позначатимемо через $x^{[m]}$, наприклад,

$$x^{[5]} = \left(x - 3/2\right)\left(x - 1/2\right)x\left(x + 1/2\right)\left(x + 3/2\right),$$

$$x^{[6]} = \left(x - 2\right)\left(x - 1\right)x^2\left(x + 1\right)\left(x + 2\right).$$

За аналогією з відомими степеневими розвиненнями

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n},$$

які можна розглядати як ряди, побудовані за спадними факторіальними степенями ($n! = n^{\underline{n}}$, де $n^{\underline{n}}$ – спадний факторіальний степінь), у [2, 3] означені неелементарні функції дійсної змінної $\tilde{S}(x)$, $\tilde{C}(x)$, побудовані при допомозі центральних факторіальних степенів за формулами

$$\tilde{S}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{[2n+1]}} x^{2n+1}, \quad \tilde{C}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)^{[2n]}} x^{2n}.$$

Легко показати, що

$$\tilde{S}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 16^n (2n)!(3n)!}{n!(6n+1)!} x^{2n+1}, \quad \tilde{C}(x) = 1 + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n-1)!}{(3n-1)!} x^{2n}, \qquad (1)$$

причому обидва ряди в (1) є абсолютно збіжними на всій числовій осі.

Позначимо через ${}_pF_q\left(a_1,...,a_p;b_1,...,b_q;z\right)$ узагальнену гіпергеометричну функцію, визначену при допомозі узагальненого гіпергеометричного ряду [1]

$${}_pF_q\left(a_1,...,a_p;b_1,...,b_q;z\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_1^{\overline{n}}\cdot...\cdot a_p^{\overline{n}}}{b_1^{\overline{n}}\cdot...\cdot b_q^{\overline{n}}}\cdot\frac{z^n}{n!},$$

де $p^{\overline{n}}$ – зростаючий факторіальний степінь, тобто $p^{\overline{n}}=p\left(p+1\right)\cdot\ldots\cdot\left(p+n-1\right)$.

Теорема 1. Для $x\in\left(-\infty,+\infty\right)$ справджуються тотожності [2]

$$\tilde{S}\left(x\right)=x\cdot{}_1F_2\left(1;\frac{5}{6},\frac{7}{6};-\frac{x^2}{27}\right),\qquad \tilde{C}\left(x\right)=1-\frac{x^2}{4}\cdot{}_1F_2\left(1;\frac{4}{3},\frac{5}{3};-\frac{x^2}{27}\right).$$

3. Інтегральні функції $S^*\left(x\right)$, $C^*\left(x\right)$. Позначимо через $S^*\left(x\right)$, $C^*\left(x\right)$ функції, визначені формулами

$$S^*\left(x\right)=\int_0^x\tilde{S}\left(t^2\right)dt,\qquad C^*\left(x\right)=\int_0^x\tilde{C}\left(t^2\right)dt. \tag{2}$$

З (2), використовуючи (1), одержуємо зображення функцій $S^*\left(x\right)$, $C^*\left(x\right)$ у вигляді абсолютно збіжних на всій числовій осі степеневих рядів

$$S^*\left(x\right)=\frac{1}{16}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n-1}16^n\left(2n-2\right)!\left(3n-3\right)!}{\left(4n-1\right)\left(n-1\right)!\left(6n-5\right)!}x^{4n-1},$$

$$C^*\left(x\right)=x+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n\left(n-1\right)!}{\left(4n+1\right)\left(3n-1\right)!}x^{4n+1}.$$

Графіки функцій $y=S^*\left(x\right)$, $y=C^*\left(x\right)$ зображені на рис 1 і 2.

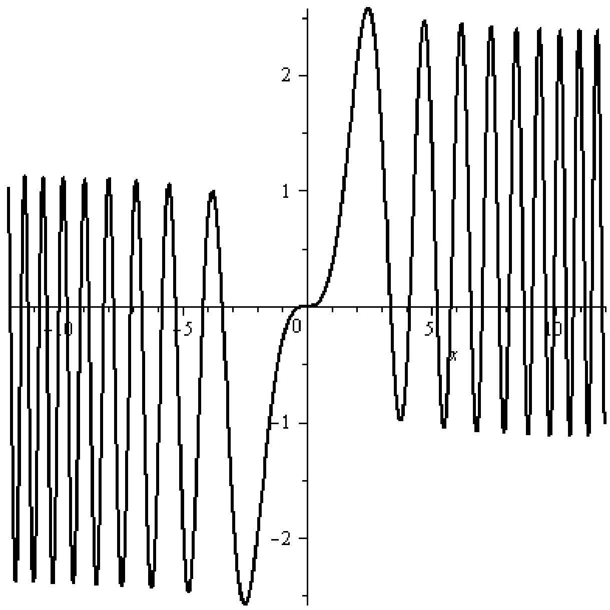

Рис. 1 – Графік функції $y=S^*\left(x\right)$.

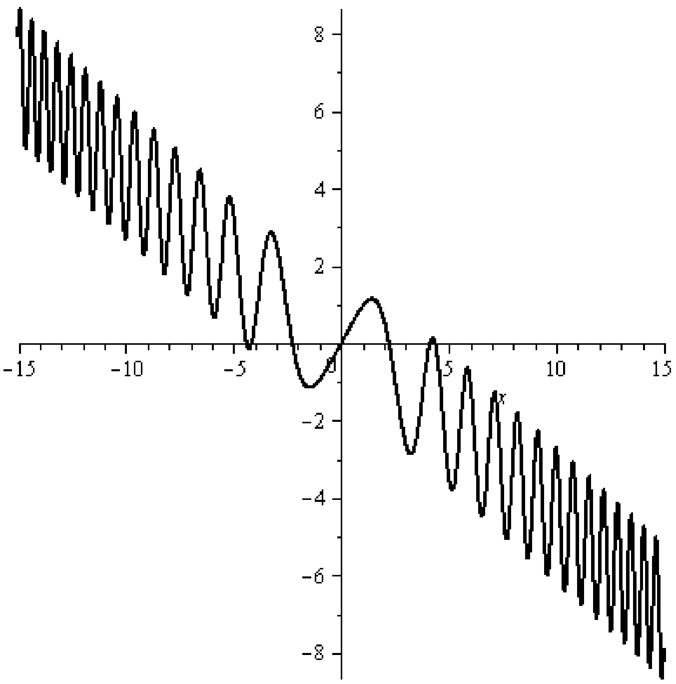

Рис. 2 – Графік функції $y = C^*(x)$.

Наступне твердження встановлює зв'язок функцій $S^*(x)$, $C^*(x)$ з узагальненою гіпергеометричною функцією ${}_2F_3(a_1, a_2; b_1, b_2, b_3; z)$.

Теорема 2. Для $x \in (-\infty, +\infty)$ справджуються тотожності

$$S^*(x) = \frac{x^3}{3} \cdot {}_2F_3\left(\frac{3}{4}, 1; \frac{5}{6}, \frac{7}{6}, \frac{7}{4}; -\frac{x^4}{27}\right),$$

$$C^*(x) = x - \frac{x^5}{20} \cdot {}_2F_3\left(1, \frac{5}{4}; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{9}{4}; -\frac{x^4}{27}\right).$$

Література

1. Бейтмен Г. Высшие трансцендентные функции. Том 1. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М.: Наука, 1973. – 294 с.
2. Гой Т.П. Про диференціальні рівняння функцій, породжених центральними факторіальними степенями / Т.П. Гой // Кримська міжнар. матем. конф., 22 верес. – 4 жовтня 2013 р.: тези допов. – Том 2. – Сімферополь, 2013. – С. 4-5.
3. Гой Т.П. Функції, породжені центральними факторіальними степенями, та їхні властивості / Т.П. Гой, О.В. Шевчук // Інформатика та системні науки (ІСН-2014): V Всеукр. наук.-практ. конф., 13-15 березня 2014 р. – Полтава, 2014. – С. 67-70.
4. Goy T.P. New integral functions generated by rising factorial powers / T.P. Goy, R.A. Zatorsky // Carpathian Mathematical Publications. – 2013. – V. 5, № 2. – P. 217-224.