УДК 004.942

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭПИДЕМИОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ С ПОМОЩЬЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

MATHEMATICAL MODELING OF EPIDEMIOLOGICAL PROCESSES USING DELAY DIFFERENTIAL EQUATIONS

**Олейник Е.А.,** студент,
**Гой Т.П.,** к. ф.-м. н.
Прикарпатский национальный университет имени Василия Стефаника
г. Ивано-Франковск, Украина
tarasgoy@yahoo.com

**DOI: 10.12737/14475**

**Аннотация:** Используя математический аппарат обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздыванием, в статье изучаются некоторые математические модели распространения эпидемий с учетом предыстории их развития.

**Summary:** Using the apparatus of delay ordinary differential equations, in the article we study some of the mathematical model the spread of epidemics.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, эпидемиологический процесс, обыкновенное дифференциальное уравнение с запаздыванием, метод Рунге – Кутты.

**Keywords:** mathematical modeling, epidemiology process, delay ordinary differential equation, Runge – Kutta methods.

Обыкновенные дифференциальные уравнения с запаздыванием и модели эпидемии инфекционной болезни. Обыкновенные дифференциальные уравнения с запаздыванием

$$y'(t) = f\left(t, y(t), y(t-\tau)\right), \quad \tau > 0, \tag{1}$$

встречаются во многих моделях прикладной математики. Системы вида (1) используются, например, для описания процессов биологии, иммунологии, физиологии [1, 2, 4, 7, 8].

Введение запаздывания в дифференциальные уравнения, описывающие определенный биологический процесс, является известным математическим приемом. Во многих задачах запаздывание имеет конкретный смысл. Например, в задачах о совместном существовании двух популяций типа «хищник»-

«жертва», такой прием может учитывать возраст части популяции, другие характеристики их развития, рождаемости или вымирания [3, 7, 8].

Если предположить, что скорость роста численности популяции зависит от численности предыдущего поколения, то для оценки численности популяции получаем задачу Коши

$$x'(t) = \left(a - x(t - t_0)\right) x(t), \qquad x(0) = x_0. \tag{2}$$

Модель эпидемии инфекционной болезни позволяет оценить динамику изменения количества здорового, инфицированного и имеющего иммунитет к данной инфекции населения, и может быть записана с помощью системы обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздыванием [1]:

$$\begin{cases} x_1'(t) = -x_1(t)x_2(t-\tau_1) + x_2(t-\tau_2), \\ x_2'(t) = x_1(t)x_2(t-\tau_1) + x_2(t), \\ x_3'(t) = x_2(t) - x_2(t-\tau_2), \end{cases} \tag{3}$$

где $x_1$ – количество здорового населения; $x_2$ – количество инфицированного населения; $x_3$ – количество населения, имеющего иммунитет к данному типу инфекции; $\tau_1$ – время инкубационного периода болезни; $\tau_2$ – время, в течении которого приобретенный организмом иммунитет к болезни теряется.

Однако система (3) не учитывает смертность, вызванную эпидемией. Введем переменную $x_4$ – количество населения, умершего в результате инфекции. Теперь получаем систему

$$\begin{cases} x_1'(t) = -x_1(t)x_2(t-\tau_1) + x_2(t-\tau_2), \\ x_2'(t) = x_1(t)x_2(t-\tau_1) + x_2(t), \\ x_3'(t) = x_2(t) - x_2(t-\tau_2), \\ x_4'(t) = kx_2(t), \end{cases} \tag{4}$$

где $k$ – коэффициент смертности в результате инфекции.

Для систем (3) и (4) необходимо поставить начальные условия, например, для системы (4) эти условия могут быть следующими:

$$x_1(0) = N_0, \quad x_2(0) = x_3(0) = x_4(0) = 0. \tag{5}$$

Если в систему (4) ввести дополнительные весовые коэффициенты $a_1, a_2, a_3$, то сможем исследовать влияние на развитие эпидемии инкубационного периода и времени потери иммунитета:

$$\begin{cases} x_1'(t) = -a_1 x_1(t) x_2(t-\tau_1) + a_2 x_2(t-\tau_2), \\ x_2'(t) = a_1 x_1(t) x_2(t-\tau_1) + a_3 x_2(t), \\ x_3'(t) = a_3 x_2(t) - a_2 x_2(t-\tau_2), \\ x_4'(t) = k x_2(t) \end{cases} \qquad (6)$$

с начальными условиями (5).

Для численного решения задачи Коши (6), (5) использовалась схема Рунге – Кутты четвертого порядка, при этом задавались начальные условия для функций $x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)$, которые считаются неизменными на всем отрезке запаздывания. Если отрезок запаздывания заканчивается, то используются значения величин элементов массива на соответствующем шаге задержки.

**Анализ результатов расчетов.** На рис. 1 представлено распределение категорий людей при эпидемии, при условии, что в начальный момент времени количество здоровых людей, восприимчивых к инфекции, составляет 5,0 усл. ед., инфицированных людей – 0,1 усл. ед., людей, приобретших иммунитет, – 1,0 усл. ед.

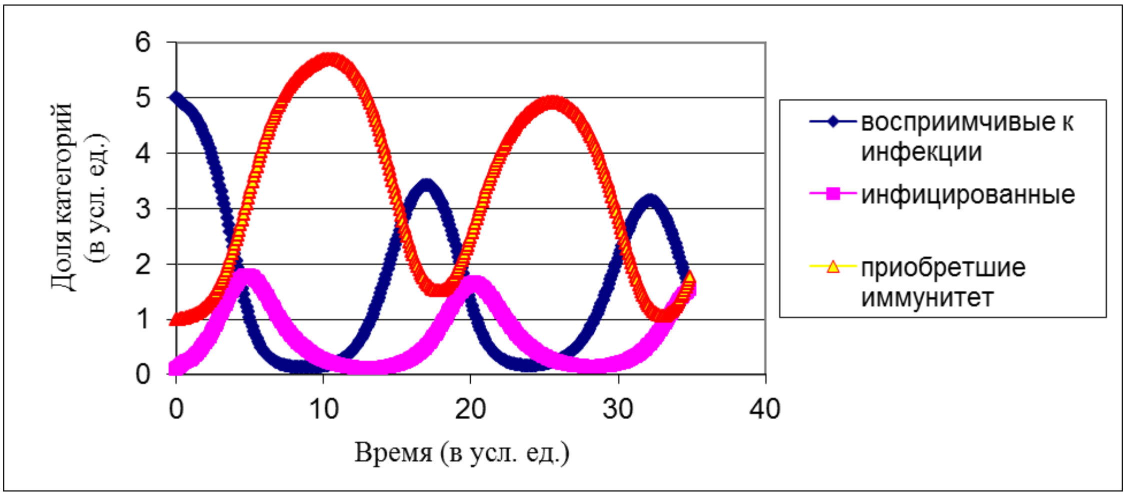


Рис. 1. *Распределение категорий людей при эпидемии*

Видим, что эпидемия имеет периодический характер, причем со временем максимальные значения количества людей, восприимчивых к инфекции, и количества людей, имеющих к ней иммунитет, совпадают.

На рис. 2 представлены результаты моделирования популяционной динамики за уравнением (2).

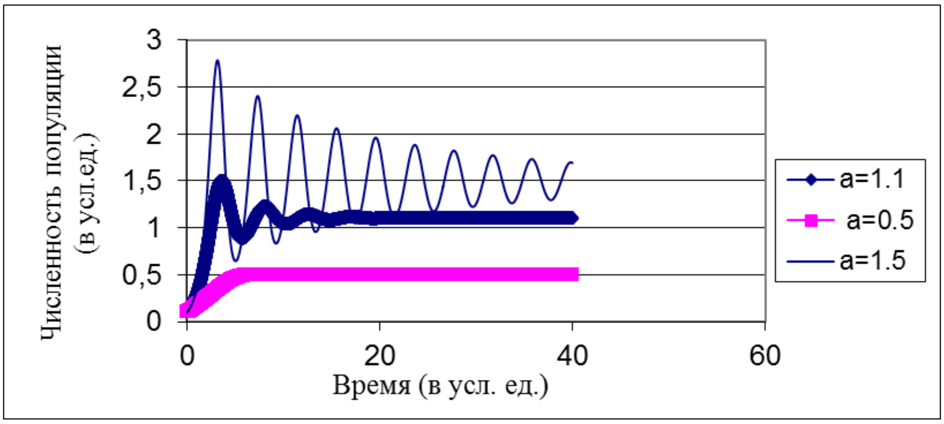


Рис. 2. *Решение задачи популяционной динамики для различных значений параметра а*

Можем сделать вывод о том, что решения могут иметь как монотонный ($a \le 1{,}5$), так и колебательный характер ($0{,}5 \le a \le 1{,}5$). Для значений $a \ge 1{,}5$ решение является неустойчивым: колебательный процесс характеризуется стремительным увеличением амплитуды.

**Выводы.** В работе исследуются математические модели процессов, которые встречаются в медицине и биологии – модели развития популяций с учетом предыстории их развития и модели распространения эпидемий. Разработаны различные варианты указанных моделей, рассматриваются некоторые аналитические и численные методы их реализации, проведен сравнительный анализ методов по критерию точности. Создан программный комплекс для реализации указанных моделей на языке *C*++, проведен большой спектр тестовых расчетов, которые показали хорошее согласование полученных результатов с расчетами других авторов.

## Список литературы

1. Бабский, В.Г. Математические модели в биологии, связанные с учетом последействия / В.Г. Бабский, А.Д. Мышкис. – М.: Мир, 1983. – 383 с.

2. Беляков, В.Д. Состояние и перспектива математического моделирования в эпидемиологии // В.Д. Беляков, Ю.В. Кравцов, Л.Н. Герасимов / Журнал микробиологии, эпидемиологии и иммунобиологии, 1990. – № 6. – С. 109–113.

3. Вольтерра, В. Математическая теория борьбы за существование / В. Вольтерра. – М.: Наука, 1976. – 286 с.

4. Романюха, А.А. Математические модели в иммунологии и эпидемиологии инфекционных заболеваний / А.А. Романюха. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2012. – 293 с.

5. Baker, C.T.H. A report on the use of delay differential equations in

numerical modelling in the biosciences / C.T.H. Baker, G.A. Bocharov, F.A. Rihan. – Manchester, MCCM Technical Report, 1999. – Vol. 343. – P. 200–236.

6. Bocharov, G. Numerical modelling in biosciences using delay differential equations / G. Bocharov, F. A. Rihan // J. Comput. Appl. Math. – 2000. – Vol. 125. – P. 183–199.

7. Brauer, F. Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology / F. Brauer, C. Castillo-Chavez. – N.Y.: Spinger, 2012. – 508 p.

8. Murray, J.D. Mathematical Biology. I. An Introduction / J.D. Murray. – N.Y.: Spinger, 2002. – 576 p.

УДК 519

# МЕХАНИЗМ СМЕШАННОГО ФИНАНСИРОВАНИЯ В СОЦИОПРИРОДОХОЗЯЙСТВЕННОЙ СИСТЕМЕ «ВОЛЖСКАЯ ГЭС – ВОЛГО-АХТУБИНСКАЯ ПОЙМА»

MECHANISM OF MIXED FINANCIAL OF SOCIAL NATURAL MANAGEMENT OF SYSTEM "VOLGA HPP - VOLGA-AKHTUBA FLOODPLAIN"

**Радченко Ю.Е.**

ФГБОУ ВПО «Волгоградский государственный университет»,

г. Волгоград, Россия

podschipkova1993@mail.ru

**DOI: 10.12737/14476**

**Аннотация:** В данной работе рассматривается задача управления социоприродохозяйственной системой «Волжская ГЭС - Волго-Ахтубинская пойма», построенная на основе гидродинамического и геоинформационного моделирования. Описан механизм смешанного финансирования эколого-экономического управления системой «Волжская ГЭС - Волго-Ахтубинская пойма».