УДК 517.589

ПРО ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ НЕЕЛЕМЕНТАРНИХ ФУНКЦІЙ, ПОРОДЖЕНИХ ЗРОСТАЮЧИМИ ФАКТОРІАЛЬНИМИ СТЕПЕНЯМИ

Т. П. Гой, *к. ф.-м. н., доцент*
О. В. Шевчук, *студент*
ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника"
tarasgoy@yahoo.com

Математичні моделі багатьох природних і технічних процесів приводять до задач, точні розв'язки яких класичними методами отримати неможливо. Розширення "бібліотеки" неелементарних функцій приводить до розширення кола задач, які можуть бути розв'язані у замкненому вигляді. Запровадження нових функцій зумовлює подальший розвиток наближених методів і теорії функцій.

Позначимо через $x^{\overline{m}}$ і $x^{\underline{m}}$ ($x\in\mathbb{R}, m\in\mathbb{N}$) зростаючі та спадні факторіальні степені з кроком 1, (-1) відповідно:

$$x^{\overline{m}} = x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+m-1), \qquad x^{\underline{m}} = x(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-m+1).$$

Очевидно, що $m! = m^{\underline{m}} = 1^{\overline{m}}$.

За аналогією з відомими степеневими розвиненнями

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^{\underline{2n+1}}}x^{2n+1}, \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)^{\underline{2n}}}x^{2n},$$

у [1] досліджені деякі властивості неелементарних функцій $\mathrm{Sin}(x)$, $\mathrm{Cos}(x)$, побудованих при допомозі зростаючих факторіальних степенів за формулами

$$\mathrm{Sin}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^{\overline{2n+1}}}x^{2n+1}, \qquad \mathrm{Cos}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)^{\overline{2n}}}x^{2n}.$$

Зокрема, доведено, що

$$\mathrm{Sin}(x) = 2\sqrt{x}\left(\cos\frac{x}{4}\cdot C\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right) + \sin\frac{x}{4}\cdot S\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)\right),$$

$$\operatorname{Cos}(x)=1+2\sqrt{x}\left(\cos\frac{x}{4}\cdot S\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)-\sin\frac{x}{4}\cdot C\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)\right),$$

де $S(p)=\int\limits_0^p \sin t^2 dt,\ \ C(p)=\int\limits_0^p \cos t^2 dt$ – інтеграли Френеля [2].

Очевидно, що функція $\operatorname{Sin}(x)$ є непарною, а функція $\operatorname{Cos}(x)$ — парною.

Позначимо через $s_{01}, s_{02}, s_{03}, \ldots$ і $c_{01}, c_{02}, c_{03}, \ldots$ впорядковані додатні нулі, а через $s_{11}, s_{12}, s_{13}, \ldots$ і $c_{11}, c_{12}, c_{13}, \ldots$– впорядковані додатні критичні точки функцій $\operatorname{Sin}(x)$, $\operatorname{Cos}(x)$ відповідно.

Твердження 1.

$$\lim_{n\to\infty}\left(s_{0,n+1}-s_{0n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(c_{0,n+1}-c_{0n}\right)=4\pi.$$

Твердження 2.

$$\operatorname{Sin}(s_{1j})\approx\sqrt{\pi s_{1j}},\qquad \operatorname{Cos}(c_{1j})\approx\sqrt{\pi c_{1j}}-1.$$

Графіки функцій $y=\operatorname{Sin}(x)$, $y=\operatorname{Cos}(x)$ наведені на рис. 1, 2 (на рис. 1 пунктиром проведені параболи $y^2=\pm\pi x$, на рис. 2 – параболи $(y+1)^2=\pm\pi x$).

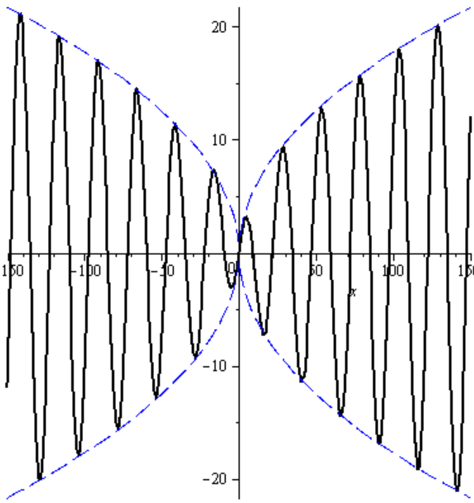

Рис. 1. Графік функції $y=\operatorname{Sin}(x)$

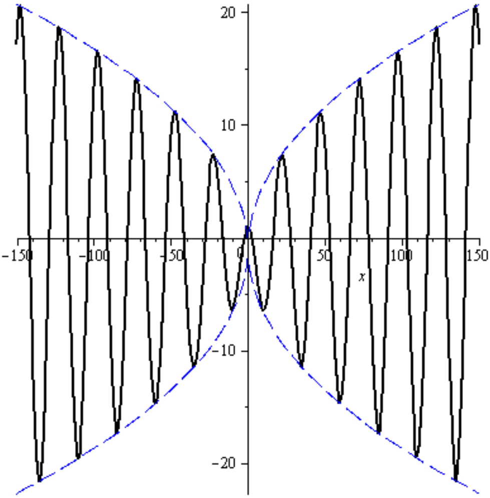

Рис. 2. Графік функції $y = \mathrm{Cos}(x)$

Для наближеного розв'язування відповідних рівнянь і побудови графіків функцій використовувалась система комп'ютерної алгебри Maple.

Висновки. У доповіді проаналізовані деякі властивості неелементарних функцій $\mathrm{Sin}(x)$, $\mathrm{Cos}(x)$, побудованих шляхом заміни у степеневих розвиненнях функцій $\sin x$, $\cos x$ спадних факторіальних степенів (звичайних факторіалів) на відповідні зростаючі факторіальні степені. Зокрема, встановлено, що послідовність різниць двох сусідніх нулів кожної з цих функцій прямує до числа 4π. Наведені також наближені формули для обчислення функцій $\mathrm{Sin}(x)$, $\mathrm{Cos}(x)$ у критичних точках.

Література

1. Гой Т. П. Нові функції, породжені зростаючими факторіалами, та їх властивості / Т. П. Гой, Р. А. Заторський // Буковинський математичний журнал. – 2013. – Т. 1, № 1–2. – С. 28–33.
2. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. – М. : Наука, 1979. – 832 с.