Про задачу з нелокальними за часом умовами для рівняння коливань однорідної балки

Гой Т.П.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

tarasgoy@yahoo.com

Негрич М.П.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

negrychmariya@gmail.com

Савка І.Я.

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України

s-i@ukr.net

У прямокутнику $D = \{(t,x) : t \in [0,T], x \in [0,L]\}$ досліджуються умови класичної коректності задачі

$$u_{tt}(t,x) + a^2 u_{xxxx}(t,x) + b u_{xx}(t,x) + c u(t,x) = 0, \tag{1}$$

$$u(t,0) = u_x(t,0) = u_{xx}(t,L) = u_{xxx}(t,L) = 0, \tag{2}$$

$$u(0,x) + u(T,x) = \varphi(x), \quad u_t(0,x) + u_t(T,x) = \psi(x), \tag{3}$$

де $a, b, c \in \mathbb{R}$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – задані функції зі шкали просторів $\{\mathbf{H}_q[0,L]\}_{q\in\mathbb{R}}$, $\mathbf{H}_q[0,L]$ – простір усіх тригонометричних рядів вигляду $\omega(x) = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \omega_k Y_k(x)$ зі скінченною нормою $\|\omega\|_{\mathbf{H}_q[0,L]} = \left(\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} (1+k)^{2q} |\omega_k|^2\right)^{1/2}$, $q \in \mathbb{R}$, $Y_k(x)$ – повна ортонормована система з простору $L_2[0,L]$.

Розв'язок $u(t,x)$ задачі (1)–(3) шукаємо у просторі $\mathbf{C}^2([0,T]; \mathbf{H}_q[0,L])$.

Коректна розв'язність задачі (1)–(3) залежить від діофантових властивостей послідовності $\{1 - \cos\beta_k T\}_{k\in\mathbb{N}}$, де $\beta_k = \sqrt{a^2 r_k^4 - b r_k^2 + c}$, $r_k \approx \frac{\pi}{L}(2k-1)$ – наближений корінь рівняння $\operatorname{ch} rL \cdot \cos rL = 1$. Якщо ця послідовність не містить нульових членів, тобто для довільних $(k,m) \in \mathbb{N}^2$

$$\beta_k \neq 2\pi m/T,$$

то задача (1)–(3) має єдиний розв'язок

$$u(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2t+T)\beta_k}{2}\cos\frac{\beta_k T}{2}\cdot\psi_k-\sin\frac{(2t-T)\beta_k}{2}\sin\frac{\beta_k T}{2}\cdot\beta_k\varphi_k}{2\beta_k\sin^2\frac{\beta_k T}{2}}\cdot Y_k(x),$$

де φ_k і ψ_k – коефіцієнти Фур'є функцій φ і ψ відповідно,

$$X_k(x)=\frac{\sin r_kL-\operatorname{sh} r_kL}{\cos r_kL-\operatorname{ch} r_kL}(\operatorname{ch} r_kx-\cos r_kx)+\operatorname{sh} r_kx-\sin r_kx,$$

$$\|X_k(x)\|=\int_0^L\left(\frac{\sin r_kL-\operatorname{sh} r_kL}{\cos r_kL-\operatorname{ch} r_kL}(\operatorname{ch} r_kx-\cos r_kx)+\operatorname{sh} r_kx-\sin r_kx\right)^2dx=C,$$

де C – деяка стала, $Y_k(x)=\frac{X_k(x)}{\|X_k(x)\|}$.

За допомогою метричного підходу [1] отримано такі твердження.

Теорема 1. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $a\in[a_1,a_2]$ нерівність*

$$|1-\cos\beta_kT|\geq 2k^{-\gamma}$$

виконується для всіх (крім скінченної кількості) значень $k\in\mathbb{N}$ і $\gamma>0$.

Теорема 2. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $T>0$ нерівність*

$$|1-\cos\beta_kT|\geq T^2k^{-\gamma}$$

виконується для всіх (крім скінченної кількості) значень $k\in\mathbb{N}$ при $\gamma>2$.

Теорема 3. *Нехай для довільних $(k,m)\in\mathbb{N}^2$ $\beta_k\neq 2\pi m/T$ та існують числа $C_1>0$ і $\gamma\in\mathbb{R}$ такі, що нерівність*

$$|1-\cos\beta_kT|\geq C_1k^{-\gamma}$$

виконується для всіх (крім скінченної кількості) натуральних k. Тоді, якщо $\varphi\in\mathbf{H}_{q+\gamma+4}[0,L]$ і $\psi\in\mathbf{H}_{q+\gamma+2}[0,L]$, де $\gamma>2$, то існує єдиний розв'язок задачі (1)–(3), що неперервно залежить від правих частин умов (3), тобто

$$\|u\|^2_{\mathbf{C}^2([0,T];\mathbf{H}_q[0,L])}\leq C_2\Big(\|\varphi\|^2_{\mathbf{H}_{q+\gamma+4}[0,L]}+\|\psi\|^2_{\mathbf{H}_{q+\gamma+2}[0,L]}\Big),$$

де C_2 – незалежна від k стала.

Література

[1] Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М., *Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними*, К. : Наук. думка (2002), 416 с.