НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Осипчук Михайло Михайлович

УДК 519.21

Симетричні стійкі випадкові процеси та їх перетворення

01.01.05 — теорія ймовірностей та математична статистика,
111 — математика
(11 — математика та статистика)

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Київ – 2019

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Державному вищому навчальному закладі "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника" (Івано-Франківськ).

Науковий консультант:

доктор фізико-математичних наук, професор,
член-кореспондент НАН України
Портенко Микола Іванович,
Інститут математики НАН України, провідний науковий співробітник відділу теорії випадкових процесів.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор
Копитко Богдан Іванович,
Ченстоховський політехнічний університет (Республіка Польща), професор інституту математики;

доктор фізико-математичних наук, професор
Радченко Вадим Миколайович,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, професор кафедри математичного аналізу;

доктор фізико-математичних наук, професор
Літовченко Владислав Антонович,
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, професор кафедри диференціальних рівнянь.

Захист відбудеться 04 червня 2019 року о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.02 Інституту математики НАН України за адресою: 01004, м. Київ-4, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий 02 травня 2019 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Пелюх Г.П.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. У дисертаційній роботі розроблено теорію потенціалів простого шару для псевдодиференціальних рівнянь параболічного типу асоційованих із симетричними стійкими випадковими процесами. Симетричні стійкі випадкові процеси в теорії псевдодиференціальних рівнянь параболічного типу відіграють ту ж роль, що вінерів процес чи процес броунівського руху в класичній теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними параболічного типу та теорії потенціалів для таких рівнянь. У зв'язку з цим вивчення симетричних стійких випадкових процесів є досить важливою задачею.

В теорії дифузійних процесів перетворення вінерового процесу (чи більш загального процесу) з допомогою, в першу чергу, збурень його оператором градієнта домноженого на деяке векторне поле дозволяє будувати моделі процесів, що перебувають під впливом таких полів. Тому збурення симетричного стійкого процесу оператором, який відіграє роль градієнта в класичній теорії, відкриває нові можливості для застосування відповідних результатів до побудови роз'язків псевдодиференціальних рівнянь параболічного типу. Дослідження результатів таких збурень з огляду на їх відмінність від класичних випадкових процесів є актуальним завданням.

Не дивлячись на досить довгу історію досліджень стійких випадкових процесів залишається ще багато питань стосовно їх властивостей, особливо, їх відмінність від вінерового процесу, що є симетричним стійким процесом з гранично можливим значенням показника такого процесу.

Всі ці питання тією чи іншою мірою розглянуті в дисертації.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дослідження, що складають основу дисертації, проводились на кафедрах статистики і вищої математики та математичного і функціонального аналізу ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника" в рамках науково-дослідних тем "Ймовірнісні та статистичні методи досліджень" (номер державної реєстрації 0109U008940), "Аналітичні та статистичні методи в моделюванні процесів і систем" (номер державної реєстрації 0115U007236).

Мета і завдання дослідження. *Метою* дисертаційної роботи є дослідження симетричних стійких випадкових процесів у їх зв'язку з псевдодиференціальними рівняннями параболічного типу та властивостей перетворень таких процесів.

Об'єктом дослідження є симетричні стійкі випадкові процеси та псевдодиференціальні рівняння параболічного типу.

Предметом дослідження є властивості симетричних стійких випадкових процесів та їх перетворень, методи розв'язання початково-крайових задач для псевдодиференціальних рівнянь параболічного типу.

Завдання дослідження полягають у розвиненні теорії потенціалів для псевдодиференціальних рівнянь параболічного типу, асоційованих із симетричними стійкими випадковими процесами, побудові перетворень симетричних стійких випадкових процесів пов'язаних із збуренням їх інфінітезимальних операторів, вивченні властивостей симетричних стійких випадкових процесів.

Методи дослідження. Для розв'язання поставлених задач в дисертації використовуються методи теорії ймовірностей, теорії випадкових процесів, теорії диференціальних рівнянь, математичного і функціонального аналізу, теорії міри.

Наукова новизна одержаних результатів. Усі результати дисертації, які виносяться на захист, є новими. У роботі вперше отримано наступні результати:

- побудовано теорію потенціалів простого шару для псевдодиференціальних рівнянь параболічного типу, пов'язаних із симетричними α-стійкими $(1 < \alpha < 2)$ випадковими процесами, зокрема, досліджено властивості потенціалу простого шару, центральною з яких є теорема про стрибок його конормальної похідної порядку $\alpha - 1$ за просторовою змінною в точках поверхні-носія потенціалу;

- побудовані фундаментальні розв'язки другої та третьої початково-крайових задач для псевдодиференціального рівняння параболічного типу, пов'язаного із симетричним α-стійким випадковим процесом;

- побудовано адитивні збурення генератора симетричного α-стійкого процесу з допомогою оператора градієнта порядку $\alpha - 1$ з множником, що є векторним полем, яке задається функцією чи обмеженою, чи інтегровною в деякому степені, чи узагальненою типу дельта-функції, та досліджено властивості відповідних напівгруп лінійних обмежених операторів на просторі неперервних обмежених функцій;

- досліджено властивості моменту першого потрапляння в початок координат одновимірним α-стійким випадковим процесом та виходу зі стартової півосі, а також досліджено процес, який при $\alpha = 2$ збігається із симетричним α-стійким процесом, обірваним у ці моменти часу;

- доведено граничні теореми для розподілів локальних часів в нулі та кількості перетинів довільного рівня деякою слабко збіжною послідовностю дифузійних процесів;

- розв'язані задачі максимізації локального часу в нулі та мінімізації часу потрапляння в нуль вінерового процесу з переносом.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертаційної роботи мають здебільшого теоретичний характер. Вони можуть бути використані у теорії випадкових процесів, теорії псевдодиференціальних рівнянь, в дослідженнях стохастичних моделей природничих та соціально-економічних явищ, а також в педагогічній практиці при підготовці фахівців за спеціальностями галузі знань математика та статистика.

Особистий внесок здобувача. Всі результати дисертації, які виносяться на захист, одержані автором самостійно. З результатів робіт, що виконані у співавторстві, на захист виносяться лише положення, що одержані автором дисертації.

В роботах [1,5,6,8,11,12,15–17] М.І. Портенку належить постановка деяких проблем та частковий аналіз одержаних результатів. В роботі [2] М.І. Портенку належить ідея застосування формули Рогозіна-Спіцера. В роботі [10] Г.С. Бігун побудувала графіки щільності, що відповідає збуреній напівгрупі операторів. Вклад співавторів в решти спільних з автором дисертації роботах приблизно рівнозначний. Результати та основні положення дисертаційної роботи в опублікованих роботах викладені в повному обсязі.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідались та обговорювались на:

- наукових конференціях:
  Всеукраїнська наукова конференція “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу” (Ворохта, 2010 — 2018); Засідання відділення математики НАН України (Івано-Франківськ, 2011); Всеукраїнська наукова конференція ”Прикладні задачі математики”(Яремче, 2011); Всеукраїнська наукова конференція “Алгебра, топологія, аналіз, стохастика”(Івано-Франківськ, 2012); Наукова конференція присвячена 100-річчю від дня народження К. М. Фішмана та М. К. Фаге (Чернівці, 2015); Stochastic Processes in Abstract Spaces International Conference (Kyiv, 2015); International V. Skorobohatko mathematical conference (Drogobych, 2015); International Conference on Differential Equations, Mathematical Physics and Applications (Cherkasy, 2017); Modern Stochastics: Theory and Applications. IV (Kyiv, 2018); International Conference «Stochastic Equations, Limit Theorems and Statistics of Stochastic Processes», dedicated to the 100th anniversary of I.I.Gikhman (Kyiv, 2018); VI Всеукраїнська наукова конференція імені Б.В. Василишина “Нелінійні проблеми аналізу” (Івано-Франківськ — Микуличин, 2018); Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях: Математична міжнародна наукова конференція,

присвячена 50-річчю факультету математики та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича (Чернівці, 2018); звітні конференції Прикарпатського національного університету (2006 — 2018);

- наукових семінарах:
"Числення Маллявена" (Інститут математики НАН України, відділ теорії випадкових процесів, керівник Дороговцев А.А.) 5 червня 2018, 4 вересня 2018; "Теорія ймовірностей та математична статистика" (Київський національний університет імені Тараса Шевченка, кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, керівник Мішура Ю.С.) 24 вересня 2018; міжкафедральному семінарі факультету математики та інформатики (Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, керівник Загороднюк А.В.) 23 травня 2018.

Публікації. Результати дисертації висвітлені в 21 статті, опублікованих в наукових періодичних виданнях, з яких :

- зарубіжні (міжнародні) видання, внесені до наукометричних баз Scopus і Web of Science — 2 статті [1, 2];
- зарубіжні (міжнародні) видання, внесені до наукометричної бази Scopus — 2 статті [6, 15];
- видання України, внесені до наукометричних баз Scopus і Web of Science — 4 статті [5, 8, 18, 20];
- видання України, внесені до наукометричної бази Scopus — 3 статті [7, 11, 12];
- видання України, внесені до наукометричної бази Web of Science — 1 стаття [3];
- інші фахові видання України — 9 статей [4, 9, 10, 13, 14, 16, 17, 19, 21];

а також в 21 тезах доповідей на наукових конференціях та семінарах [22–42].

Структура та обсяг роботи. Дисертація складається з анотації, вступу, п'яти розділів, розбитих на підрозділи, пункти та підпункти, висновків, списку використаних джерел, який містить 107 найменувань. Повний обсяг роботи — 329 сторінок, в тому числі 286 сторінок основного тексту.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** висвітлено актуальність дослідження, зв'язок дисертаційної роботи з науково-дослідними темами, сформульовано мету і завдання дослідження, відзначено наукову новизну одержаних у дисертації результатів, виокремлено особистий внесок здобувача та вказано установи й організації, де доповідались та обговорювались результати дисертації.

У **першому розділі** дисертації подано короткий огляд відомих результатів, що стосуються тематики роботи. Він дозволить дати уявлення про сучасний стан досліджень з даної тематики та про місце результатів дисертаційної роботи у розв'язанні поставленої проблеми. Крім того, тут введено необхідні терміни, сформульовано попередні відомості та результати, доведено деякі допоміжні твердження, які потрібні для розуміння роботи, зроблено короткий огляд дисертації.

Другий розділ дисертації присвячений побудові теорії потенціалу простого шару для псевдодиференціальних рівнянь параболічного типу, пов'язаних із симетричними стійкими випадковими процесами в $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$. Як і в класичній теорії потенціалу для параболічних рівнянь другого порядку, згадані потенціали використані для побудови фундаментальних розв'язків другої (типу Неймана) та третьої (змішаної) початково-крайових задач, а також для побудови розв'язків деяких інших задач для псевдодиференціального рівняння параболічного типу.

У *першому підрозділі* введено поняття потенціалу простого шару для псевдодиференціального рівняння параболічного типу виду

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \mathbf{A}u(t,\cdot)(x), \tag{1}$$

де $\mathbf{A}$ — псевдодиференціальний оператор, символ якого задається функцією $(-c|\xi|^\alpha)_{\xi\in\mathbb{R}^d}$ з деякими сталими $c>0$ та $\alpha\in(1,2)$. Цей оператор є інфінітезимальним оператором стандартного процесу Маркова $(x(t),\mathcal{M}_t,\mathbb{P}_x)$, $t\geq 0$, $x\in\mathbb{R}^d$, що зветься симетричним α-стійким випадковим процесом.

Нехай S — деяка двостороння вимірна поверхня. Потенціалом простого шару з густиною $(\psi(t,x))_{t>0,x\in S}$ на поверхні S називатимемо функцію

$$v(t,x) = \int_0^t d\tau \int_S g(t-\tau,x,y)\psi(\tau,y)\,d\sigma_y, \quad t>0,\ x\in\mathbb{R}^d,$$

де функція $(g(t,x,y))_{t>0,x\in\mathbb{R}^d,x\in\mathbb{R}^d}$ — щільність ймовірності переходу процесу $(x(t))_{t\geq 0}$, а внутрішній інтеграл є поверхневим інтегралом першого роду.

В дисертаційній роботі розглядаються дві основні ситуації: перша, коли $d\geq 2$ і поверхня S є обмеженою замкненою поверхнею класу $H^{1+\gamma}$ з деяким

$\gamma \in (0,1)$; друга, коли носій потенціалу — гіперплощина (включно з точкою у випадку $d=1$).

Існування потенціалу простого шару забезпечує виконання щодо його густини умови $|\psi(t,x)| \le C\,t^{-\beta}$ з деякими сталими $C>0$ та $\beta<1$.

Доведені наступні властивості такого потенціалу. Функція v є неперервною на $(t,x) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}^d$; в області $(t,x)\in(0,\infty)\times(\mathbb{R}^d\setminus S)$ ця функція задовольняє рівняння (1). Центральним місцем в теорії потенціалу простого шару є, так звана, теорема про стрибок його конормальної похідної (в нашому випадку порядку $\alpha-1$) в точках поверхні S.

Позначимо через $(g^{\nu}(t,x,y))_{t>0,x\in\mathbb{R}^d,y\in\mathbb{R}^d}$ результат дії на функцію $g(t,x,y)$ за аргументом x оператора $\mathbf{B}_{\nu}$, що задається символом $(i|\xi|^{\alpha-2}(\xi,2c\nu))_{\xi\in\mathbb{R}^d}$. Цей оператор є аналогом конормальної похідної в класичній теорії (при $\alpha=2$). Так ми його і будемо називати.

Теорема 2.2. *Якщо S — замкнена обмежена поверхня в $\mathbb{R}^d$ класу $H^{1+\gamma}$, що розділяє множину $\mathbb{R}^d\setminus S$ на дві відкриті підмножини D і $\mathbb{R}^d\setminus\bar{D}$, а $(\psi(t,x))_{t>0,x\in S}$ — неперервна функція з дійсними значеннями, що задовольняє умову $|\psi(t,x)|\le C\,t^{-\beta}$ з деякими сталими $C>0$ та $\beta<1$, то при фіксованих $t>0$ та $x_0\in S$ справджується співвідношення*

$$\lim_{x\to x_0\pm}\int_0^t d\tau\int_S g^{\nu(x_0)}(t-\tau,x,y)\psi(\tau,y)\,d\sigma_y = \\ = \mp\,\psi(t,x_0)+\int_0^t d\tau\int_S g^{\nu(x_0)}(t-\tau,x_0,y)\psi(\tau,y)\,d\sigma_y, \tag{2}$$

де $\nu(x_0)$ — одиничний вектор зовнішньої нормалі до поверхні S в точці x_0, а $x\to x_0+$ (відповідно x_0-) означає, що x наближається до x_0 вздовж довільної кривої, розташованої в деякому замкненому обмеженому конусі $\mathcal{K}$ в $\mathbb{R}^d$ з вершиною в точці x_0, такому, що $\mathcal{K}\subset(\mathbb{R}^d\setminus\bar{D})\cup\{x_0\}$ (відповідно $\mathcal{K}\subset D\cup\{x_0\}$).

Інтеграл в правій частині формули (2) зветься прямим значенням результату дії оператора $\mathbf{B}_{\nu(x_0)}$ на потенціал простого шару в точці $x_0\in S$. Аналог цієї теореми для гіперплощини формулюється так.

Теорема 2.3. *Нехай $S=\{x\in\mathbb{R}^d:(x,\nu)=0\}$ з деяким одиничним вектором $\nu\in\mathbb{R}^d$, а $(\psi(t,x))_{t>0,x\in S}$ — неперервна функція з дійсними значеннями, що задовольняє умову $|\psi(t,x)|\le C\,t^{-\beta}$ з деякими сталими $C>0$ та $\beta<1$.*

Тоді справджується співвідношення

$$\lim_{z\to x\pm}\int_0^t d\tau\int_S g^{\nu}(t-\tau,z,y)\psi(\tau,y)\,d\sigma_y=\mp\psi(t,x) \tag{3}$$

для всіх $t > 0$ та $x \in S$, де $z \to x+$ (відповідно, $z \to x-$) означає, що z наближається до x вздовж довільної кривої, що лежить в скінченному замкненому конусі $\mathcal{K}$ в $\mathbb{R}^d$ з вершиною в точці x такому, що $\mathcal{K} \subset \{z \in \mathbb{R}^d : (z, \nu) > 0\} \cup \{x\}$ (відповідно, $\mathcal{K} \subset \{z \in \mathbb{R}^d : (z, \nu) < 0\} \cup \{x\}$).

Відсутність в правій частині рівності (3) прямого значення результату дії оператора $\mathbf{B}_\nu$ на потенціал простого шару в точці $x \in S$ є наслідком рівності

$$g^\nu(t, x, y) = \frac{2}{\alpha} \frac{(y - x, \nu)}{t} g(t, x, y),$$

яка справджується при всіх $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d$.

В *другому підрозділі* розглянуті початково-крайові задачі для псевдодиференціального рівняння (1) та ймовірнісні представлення їх розв'язків.

Нехай S — деяка гладка поверхня в $\mathbb{R}^d$, яка ділить множину $\mathbb{R}^d$ на дві частини D_+ та D_- так, що $\mathbb{R}^d = D_+ \cup S \cup D_-$, а $\nu(x)$ — орт нормалі до S в точці $x \in S$ направленої в сторону D_+. Розглядаємо дві ситуації: перша, коли S є обмеженою замкненою поверхнею класу $H^{1+\gamma}$ з деяким $\gamma \in (0, 1)$, а друга, коли S — гіперплощина, яка проходить через початок координат (що несуттєво) ортогонально до деякого фіксованого одиничного вектора ν (тоді $\nu(x) = \nu$ при всіх $x \in S$).

Задавши на S деякі неперервні дійснозначні функції $(q(x))_{x \in S}$ та $(r(x))_{x \in S}$ ($r(x) \geq 0$, $x \in S$), а також, зафіксувавши деяку функцію $\varphi \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$ (так позначаємо множину обмежених неперервних дійснозначних функцій на $\mathbb{R}^d$), розглянемо задачу побудови неперервної функції $(u(t, x, \varphi))_{t>0, x \in \mathbb{R}^d}$, яка задовольняє:

(i) псевдодиференціальне рівняння:

$$\frac{\partial u(t, x, \varphi)}{\partial t} = \mathbf{A} u(t, \cdot, \varphi)(x), \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d \setminus S;$$

(ii) початкову умову: $u(0+, x, \varphi) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^d$;

(iii) граничну умову: при $t > 0$, $x \in S$

$$\frac{1 + q(x)}{2} \mathbf{B}_{\nu(x)} u(t, \cdot, \varphi)(x+) - \frac{1 - q(x)}{2} \mathbf{B}_{\nu(x)} u(t, \cdot, \varphi)(x-) = r(x) u(t, x, \varphi).$$

Як і вище, в умові (iii) під записом $f(x+)$ (відповідно $f(x-)$) розуміємо границю функції $(f(y))_{y \in \mathbb{R}^d}$ в точці $x \in S$, якщо y наближається до x вздовж довільної кривої, розташованої в деякому замкненому обмеженому конусі $\mathcal{K}$ в $\mathbb{R}^d$ з вершиною в точці x такому, що $\mathcal{K} \subset D_+ \cup \{x\}$ (відповідно $\mathcal{K} \subset D_- \cup \{x\}$).

Таку задачу ми називаємо третьою початково-крайовою задачею для псевдодиференціального рівняння (1). При $r(x) \equiv 0$ вона стає другою початково-крайовою задачею.

Сформульовану задачу розв'язуємо з використанням потенціалу простого шару та теореми про стрибок конормальної похідної порядку $\alpha - 1$ останнього. При цьому розглядається окремо випадок $q(x) \equiv 0$, це — так звана симетрична початково-крайова задача, та випадок $r(x) \equiv 0$ — друга початково-крайова задача. Кожного разу нас цікавитиме питання про ймовірнісні сенс та представлення відповідних розв'язків.

В першому пункті цього підрозділу розв'язується друга початково-крайова задача. Гранична умова в ній виглядає так

(iv) $(1 + q(x))\mathbf{B}_{\nu(x)}u(t,\cdot)(x+) - (1 - q(x))\mathbf{B}_{\nu(x)}u(t,\cdot)(x-) = 0$
при всіх $t > 0$, $x \in S$.

Розв'язок цієї задачі шукаємо у вигляді

$$\tilde{u}(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} g(t,x,y)\varphi(y)\,dy + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_S g(t-\tau,x,y)q(y)\psi(\tau,y)\,d\sigma_y, \qquad (4)$$

де функція $(\psi(t,x))_{t>0,x\in\mathbb{R}^d}$ потребує визначення. Використовуючи властивості потенціалу простого шару (в тому числі і теорему про стрибок), приходимо до висновку, що функція $(\psi(t,x))_{t>0,x\in\mathbb{R}^d}$ задовольняє інтегральне рівняння

$$\psi(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} g^{\nu(x)}(t,x,y)\varphi(y)\,dy + \\ + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_S g^{\nu(x)}(t-\tau,x,y)q(y)\psi(\tau,y)\,d\sigma_y, \quad t>0,\ x\in S,$$

яке розв'язується методом послідовних наближень. Нехай

$$\psi_0(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} g^{\nu(x)}(t,x,y)\varphi(y)\,dy, \quad t>0,\ x\in S, \qquad (5)$$

а для $n \geq 1$

$$\psi_n(t,x) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_S g^{\nu(x)}(t-\tau,x,y)q(y)\psi_{n-1}(\tau,y)\,d\sigma_y, \quad t>0,\ x\in S. \qquad (6)$$

Теорема 2.6. *Якщо S — поверхня в $\mathbb{R}^d$, що задовольняє умови Теореми 2.2, $(q(x))_{x\in S}$ — неперервна функція з дійсними значеннями, а $\varphi \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$, то початково-крайова задача (i), (ii), (iv) має такий розв'язок, який зображається формулою* (4) *з функцією ψ, визначеною з допомогою ряду $\psi(t,x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \psi_n(t,x)$, члени якого задовольняють співвідношення* (5), (6).

Аналогічно, в другому пункті побудовано фундаментальний розв'язок задачі (i), (ii), (iv).

Теорема 2.7. *Функція $(\tilde{g}(t,x,y))_{t>0, x\in\mathbb{R}^d, y\in\mathbb{R}^d}$, задана рівністю*

$$\tilde{g}(t,x,y) = g(t,x,y) + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_S g(t-\tau,x,z)w(\tau,z,y)q(z)\,d\sigma_z,$$

де $(w(t,x,y))_{t>0, x\in S, y\in\mathbb{R}^d}$ задовольняє рівняння ($t>0$, $x\in S$, $y\in\mathbb{R}^d$)

$$w(t,x,y) = g^{\nu(x)}(t,x,y) + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_S g^{\nu(x)}(t-\tau,x,z)w(\tau,z,y)q(z)\,d\sigma_z,$$

є фундаментальним розв'язком задачі (i), (ii), (iv).

Зауважимо, що функція $\tilde{g}$ задовольняє рівняння Колмогорова-Чепмена

$$\tilde{g}(s+t,x,y) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \tilde{g}(s,x,z)\tilde{g}(t,z,y)\,dz$$

для всіх $s>0$, $t>0$, $x\in\mathbb{R}^d$ та $y\in\mathbb{R}^d$, і, крім того, справджується тотожність $\int\limits_{\mathbb{R}^d} \tilde{g}(t,x,y)\,dy \equiv 1$. Але крім додатніх значень вона може приймати і від'ємні. Таким чином, стверджувати про існування такого процесу Маркова, для якого побудований в Теоремі 2.7 фундаментальний розв'язок був би щільністю ймовірності переходу, ми не можемо. Тут можна говорити тільки про "псевдопроцес".

Для другої початково-крайової задачі у випадку граничної умови на гіперплощині маємо такі ж результати.

В третьому пункті розглядається симетрична третя початково-крайова задача з обмеженою замкненою поверхнею класу $H^{1+\gamma}$, $\gamma\in(0,1)$ в якості границі. Гранична умова в цій задачі має вигляд

(v) $\frac{1}{2}\mathbf{B}_{\nu(x)}u(t,\cdot,\varphi)(x+) - \frac{1}{2}\mathbf{B}_{\nu(x)}u(t,\cdot,\varphi)(x-) = r(x)u(t,x,\varphi)$,
при $t>0$, $x\in S$.

Збурюючи інфінітезимальний оператор симетричного α-стійкого випадкового процесу оператором множення на функцію $r(\cdot)\delta_S$, в якій δ_S є узагальненою функцію — дельта-функцією на поверхні S, одержуємо процес Маркова $(\hat{x}(t))_{t\geq 0}$, утворений з $(x(t))_{t\geq 0}$ убиванням з інтенсивністю $(r(x))_{x\in S}$ останнього на поверхні S. Щільність ймовірності переходу $(\hat{g}(t,x,y))_{t>0,x\in\mathbb{R}^d,y\in\mathbb{R}^d}$ такого процесу задовольняє інтегральне рівняння (рівняння збурення)

$$\hat{g}(t,x,y) = g(t,x,y) - \int\limits_0^t d\tau \int\limits_S g(t-\tau,x,z)\hat{g}(\tau,z,y)r(z)\,d\sigma_z. \tag{7}$$

Розв'язок рівняння (7) будується методом послідовних наближень. Крім того, для кожної неперервної обмеженої функції $(\varphi(x))_{x\in\mathbb{R}^d}$ при всіх $t>0$, $x\in\mathbb{R}^d$ виконується рівність

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \hat{g}(t,x,y)\varphi(y)\,dy = \mathbb{E}_x\varphi(x(t))e^{-\eta_t(r)}, \tag{8}$$

де $(\eta_t(r))_{t\geq 0}$ — W-функціонал з характеристикою

$$f_t(x) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_S g(\tau,x,y)r(y)\,d\sigma_y.$$

Це наслідок формули Фейнмана-Каца та доведеної наступної апроксимаційної леми. Для вимірної комплекснозначної функції $(\psi(t,x))_{t\geq 0,x\in\mathbb{R}^d}$ такої, що при кожному $T>0$ виконується $\sup\limits_{0\leq t\leq T,x\in\mathbb{R}^d}|\psi(t,x)|<\infty$, розглянемо її перетворення

$$\psi_h(t,x) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^d} g(t-\tau,x,y)\psi(\tau,y)v_h(y)\,dy, \quad t>0,\ x\in\mathbb{R}^d,\ h>0, \tag{9}$$

в якому $v_h(x) = \int\limits_S g(h,x,y)r(y)\,d\sigma_y$.

Лема 2.8. *Для даних чисел $\varepsilon>0$, $L>0$ та $T>0$ існує таке число $\delta>0$, що нерівність $|\psi_h(t',x')-\psi_h(t,x)|<\varepsilon$ виконується при всіх $h>0$, $t'\in(0,T]$, $t\in(0,T]$, $x'\in\mathbb{R}^d$, $x\in\mathbb{R}^d$ і для кожної функції $(\psi(t,x))_{t\geq 0,x\in\mathbb{R}^d}$ з властивістю $\sup\limits_{0\leq t\leq T,x\in\mathbb{R}^d}|\psi(t,x)|<L$, якщо тільки $|t'-t|+|x'-x|<\delta$.*

Теорема 2.9. *Побудована вище функція $(\hat{g}(t,x,y))_{t>0,x\in\mathbb{R}^d,y\in\mathbb{R}^d}$ є фундаментальним розв'язком задачі* (i), (ii), (v).

Симетрична третя початково-крайова задача з граничною умовою на гіперплощині розглядається в четвертому пункті цього підрозділу. Єдина відмінність цієї ситуації від попередньої полягає в тому, що відповідна апроксимаційна лема у випадку $d \geq 2$ стверджує тільки локальну по просторовій змінній компактність перетворення типу (9).

Позначимо $B_R = \{y \in \mathbb{R}^d : |y| \leq R\}$ для $R > 0$ та $B_R^C = \mathbb{R}^d \setminus B_R$.

Лема 2.11. *Якщо $d \geq 2$, то для заданих чисел $\varepsilon > 0$, $L > 0$, $T > 0$ та $R > 0$ існує число $\delta > 0$ таке, що нерівність $|\psi_h(t', x') - \psi_h(t, x)| < \varepsilon$ справджується при всіх $h > 0$, $t \in [0, T]$, $t' \in [0, T]$, $x \in B_R$, $x' \in B_R$ та всіх вимірних функціях $(\psi(t, x))_{t \geq 0, x \in \mathbb{R}^d}$, що володіють властивістю*

$$\sup_{(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d} |\psi(t, x)| \leq L,$$

якщо тільки виконується нерівність $|t' - t| + |x' - x| < \delta$.

П'ятий пункт присвячений загальній третій початково-крайовій задачі (i) — (iii) з граничною умовою на обмеженій замкненій поверхні класу $H^{1+\gamma}$, $\gamma \in (0, 1)$.

Фундаментальний розв'язок цієї задачі будується як спільний розв'язок пари рівнянь ($t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d$)

$$g^*(t, x, y) = \tilde{g}(t, x, y) - \int_0^t d\tau \int_S \tilde{g}(t - \tau, x, z) g^*(\tau, z, y) r(z)\, d\sigma_z, \tag{10}$$

$$g^*(t, x, y) = \tilde{g}(t, x, y) - \int_0^t d\tau \int_S g^*(t - \tau, x, z) \tilde{g}(\tau, z, y) r(z)\, d\sigma_z, \tag{11}$$

в яких функція $(\tilde{g}(t, x, y))_{t>0, x \in \mathbb{R}^d, y \in \mathbb{R}^d}$ — та ж, що її визначено вище (фундаментальний розв'язок другої початково-крайової задачі).

Спільний розв'язок рівнянь (10), (11) шукаємо у вигляді суми ряду

$$g^*(t, x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k g_k^*(t, x, y), \tag{12}$$

де $g_0^*(t, x, y) = \tilde{g}(t, x, y)$, а при $k \geq 1$

$$g_k^*(t, x, y) = \int_0^t d\tau \int_S \tilde{g}(t - \tau, x, z) g_{k-1}^*(\tau, z, y) r(z)\, d\sigma_z =$$

$$= \int_0^t d\tau \int_S g_{k-1}^*(t - \tau, x, z) \tilde{g}(\tau, z, y) r(z)\, d\sigma_z.$$

Теорема 2.15. *Функція* $(g^*(t,x,y))_{t>0,x\in\mathbb{R}^d,y\in\mathbb{R}^d}$, *задана рівністю* (12), *є фундаментальним розв'язком задачі* (i) — (iii).

Як уже зазначалось, функція $\tilde{g}$ не може бути щільністю ймовірності переходу жодного процесу Маркова. Але її можна розглядати такою для псевдопроцесу $(y(t))_{t\geq 0}$ і, тому, функція g^* повинна бути пов'язана з цим псевдопроцесом за аналогією з (8) так, що

$$\int_{\mathbb{R}^d} g^*(t,x,y)\varphi(y)\,dy = \mathbb{E}^*_x\varphi(y(t))e^{-\eta^*_t(r)}, \quad t>0,\ x\in\mathbb{R}^d,$$

де $\mathbb{E}^*_x$ позначає "математичне сподівання" відносно псевдопроцесу $(y(t))_{t\geq 0}$ а $(\eta^*_t(r))_{t\geq 0}$ — деякий "адитивний функціонал від нього".

Ситуація у випадку гіперплощини нічим не відрізняється від цієї, як видно з шостого пункту.

В *третьому підрозділі* розглядається задача побудови липучої мембрани для симетричного α-стійкого випадкового процесу $(x(t),\mathcal{M}_t,\mathbb{P}_x)$, $t\geq 0$, $x\in\mathbb{R}^d$, як на гіперплощині, так і на кривій поверхні. Тут з допомогою випадкової заміни часу побудовано випадковий процес $(\hat{x}(t),\hat{\mathcal{M}}_t,\mathbb{P}_x)$, $t\geq 0$, $x\in\mathbb{R}^d$, результат дії резольвентного оператора якого $\hat{U}(\lambda,x,\varphi)=\hat{\mathbf{R}}_\lambda\varphi(x)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\mathbb{E}_x\varphi(\hat{x}(t))\,dt$ на кожну обмежену гельдерову функцію $(\varphi(x))_{x\in\mathbb{R}^d}$, задовольняє рівняння

(I) $\lambda\hat{U}(\lambda,x,\varphi)-\varphi(x)=\mathbf{A}\hat{U}(\lambda,\cdot,\varphi)(x)$ при всіх $\lambda>0$, $x\in\mathbb{R}^d\setminus S$;

(II) $\lambda\hat{U}(\lambda,x,\varphi)-\varphi(x)=\dfrac{1}{2p(x)}\Big[\mathbf{B}_{\nu(x)}\hat{U}(\lambda,\cdot,\varphi)(x+)-\mathbf{B}_{\nu(x)}\hat{U}(\lambda,\cdot,\varphi)(x-)\Big]$ при всіх $\lambda>0$, $x\in S$,

де $(p(x))_{x\in S}$ — деяка додатна функція.

Цей факт можна розуміти, як те, що процес $(\hat{x}(t))_{t\geq 0}$ проводить на поверхні S ненульовий час.

В першому пункті цього підрозділу розглядаються перетворення Лапласа потенціалу простого шару

$$V(\lambda,x,\psi)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}v(t,x,\psi)\,dt=\int_S G(\lambda,x,y)\Psi(\lambda,y)\,d\sigma_y,$$

де $G(\lambda,x,y)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}g(t,x,t)\,dt$, $\Psi(\lambda,x)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\psi(t,x)\,dt$, та його властивості. Зокрема, функція $(V(\lambda,x,\psi))_{\lambda>0,x\in\mathbb{R}^d}$ неперервна та задовольняє рівняння $\mathbf{A}V(\lambda,\cdot,\psi)(x)=\lambda V(\lambda,x,\psi)$, $\quad\lambda>0,\ x\in\mathbb{R}^d\setminus S$. Відповідник теореми про стрибок для обмеженої замкненої поверхні класу $H^{1+\gamma}$ з деяким $\gamma \in (0,1)$ формулюється наступним чином.

Теорема 2.17. *Нехай обмежена замкнена поверхня S належить до класу $H^{1+\gamma}$ з деяким $\gamma \in (0,1)$, а функція $(\psi(t,x))_{t\geq 0, x\in S}$ — обмежена і неперервна на всій області визначення. Тоді для кожного $x \in S$ справджуються співвідношення*

$$\mathbf{B}_{\nu(x)} V(\lambda, \cdot, \psi)(x\pm) = \int\limits_S G^{\nu(x)}(\lambda, x, y)\Psi(\lambda, y)\, d\sigma_y \mp \Psi(\lambda, x),$$

при всіх $\lambda > 0$.

Якщо S — гіперплощина, то при $d \geq 2$ маємо наступне твердження

Теорема 2.18. *Якщо функція $(\psi(t,x))_{t\geq 0, x\in S}$ — обмежена і неперервна на всій області визначення. Тоді для кожного $x \in S$ справджуються співвідношення $\mathbf{B}_\nu V(\lambda, \cdot, \psi)(x\pm) = \mp\Psi(\lambda, x)$, при всіх $\lambda > 0$.*

По суті те ж саме твердження маємо і для $d = 1$. В цьому випадку $S = \{0\}$ і потенціал простого шару задається рівністю

$$v(t, x, \psi) = \int\limits_0^t g(t-\tau, x, 0)\psi(\tau)\, d\tau, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R},$$

в якій $(\psi(t))_{t>0}$ — неперервна функція, що задовольняє нерівність $|\psi(t)| \leq Ct^{-\beta}$ з деякими сталими $C > 0$, $\beta < 1$.

Теорема 2.19. *Якщо функція $(\psi(t))_{t\geq 0}$ обмежена і неперервна на $[0, \infty)$, то справджуються співвідношення*

$$\lim_{x\to 0\pm} 2c \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\mathbf{B} v(t, \cdot, \psi)(x)\, dt = \mp \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\psi(t)\, dt.$$

при кожному $\lambda > 0$.

Останні два пункти цього підрозділу присвячені вивченню W-функціоналу $(\eta_t(p))_{t\geq 0}$ з характеристикою $f_t(x) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_S g(\tau, x, y)p(y)\, d\sigma_y$, $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, де $(p(x))_{x\in S}$ — деяка додатна неперервна функція (додатково обмежена у випадку гіперплощини), та побудові процесу $(\hat{x}(t), \hat{\mathcal{M}}_t, \mathbb{P}_x)$, де $\hat{x}(t) = x(\zeta_t)$, $\hat{\mathcal{M}}_t = \mathcal{M}_{\zeta_t}$, а $\zeta_t = \inf\{s \geq 0 : s + \eta_s(p) \geq t\}$.

Теорема 2.21. *У випадку $d \geq 2$ для кожної обмеженої гельдерової функції $(\varphi(x))_{x\in\mathbb{R}^d}$ функція $\hat{U}(\lambda, x, \varphi) = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\mathbb{E}_x\varphi(\hat{x}(t))\,dt, \quad \lambda > 0,\ x \in \mathbb{R}^d$, є розв'язком задачі (I), (II).*

Якщо $d = 1$, то маємо $S = \{0\}$, $p(x) \equiv p \in (0, \infty)$ і

$$f_t(x) = p\int\limits_0^t g(\tau, x, 0)\,d\tau, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}.$$

Тоді функціонал $(\eta_t(p))_{t\geq 0}$ є домноженим на p локальним часом процесу $(x(t))_{t\geq 0}$ в нулі (початку координат). Твердження останньої теореми залишається без змін.

У **третьому розділі** розглядаються адитивні збурення інфінітезимального оператора симетричного α-стійкого випадкового процесу з допомогою оператора $(a(\cdot), \mathbf{B})$, де векторний оператор $\mathbf{B}$ визначається своїм символом $(i|\xi|^{\alpha-2}\xi)_{\xi\in\mathbb{R}^d}$ та $(a(x))_{x\in\mathbb{R}^d}$ — деяка $\mathbb{R}^d$-значна функція.

З точки зору теорії диференціальних рівнянь потрібно розглянути задачу Коші для рівняння

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \mathbf{A}u(t,\cdot)(x) + (a(x), \mathbf{B}u(t,\cdot)(x)) \tag{13}$$

в області $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$.

Фундаментальний розв'язок такої задачі шукається як спільний розв'язок наступної пари рівнянь (рівняння збурення)

$$\begin{aligned}\hat{g}(t,x,y) &= g(t,x,y) + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^d} g(t-\tau,x,z)(a(z), \mathbf{B}\hat{g}(\tau,\cdot,y)(z))\,dz,\\ \hat{g}(t,x,y) &= g(t,x,y) + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^d} \hat{g}(t-\tau,x,z)(a(z), \mathbf{B}g(\tau,\cdot,y)(z))\,dz.\end{aligned} \tag{14}$$

В *першому підрозділі* побудовано збурення з коефіцієнтом $(a(x))_{x\in\mathbb{R}^d}$ — функцією з $L_p(\mathbb{R}^d)$.

Теорема 3.1. *Нехай функція $(a(x))_{x\in\mathbb{R}^d}$ задовольняє умову: $a \in L_p(\mathbb{R}^d)$ з деяким $p > d + \alpha$ (можливо, $p = \infty$).*

Збурення $(\hat{g}(t,x,y))_{t>0, x\in\mathbb{R}^d, y\in\mathbb{R}^d}$ існує та має наступні властивості:

- *задовольняє рівняння Колмогорова-Чепмена*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \hat{g}(t,x,z)\hat{g}(s,z,y)\,dz = \hat{g}(t+s,x,y), \quad t>0,\ s>0,\ x\in\mathbb{R}^d,\ y\in\mathbb{R}^d;$$

- *як функція третього аргумента (при фіксованих перших двох) є абсолютно інтегровним і* $\int\limits_{\mathbb{R}^d} \hat{g}(t,x,y)\,dy \equiv 1.$

Наступне твердження дозволяє сконструювати узагальнений розв'язок згаданої вище задачі Коші.

Теорема 3.3. *Нехай задані функції $\hat{a}$ та $\tilde{a}$, що задовольняють умови Теореми 3.1. Позначимо через $\hat{g}$ та $\tilde{g}$ розв'язки рівнянь типу* (14)*, в яких функція a замінена на $\hat{a}$ та $\tilde{a}$, відповідно. Тоді справджується нерівність*

$$|\hat{g}(t,x,y) - \tilde{g}(t,x,y)| \le H_T\|\hat{a}-\tilde{a}\|_p \frac{t^{1-\frac{d}{\alpha p}}}{(t^{\frac{1}{\alpha}} + |y-x|)^{d+\alpha-1}},$$

якщо $p > d+\alpha$ скінченне, чи

$$|\hat{g}(t,x,y) - \tilde{g}(t,x,y)| \le H_T\|\hat{a}-\tilde{a}\|_\infty \frac{t}{(t^{\frac{1}{\alpha}} + |y-x|)^{d+\alpha-1}},$$

якщо $p=\infty$, на множині $(0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$ для кожного $T>0$, де додатна стала H_T залежить тільки від c, α, $\|\hat{a}\|_p$, $\|\tilde{a}\|_p$, T.

Наслідок 3.3.1. *Нехай $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^d)$ та $\hat{g}$, $\tilde{g}$ такі ж, як в Теоремі 3.1. Покладемо $\hat{u}(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \hat{g}(t,x,y)\varphi(y)\,dy$, $\tilde{u}(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \tilde{g}(t,x,y)\varphi(y)\,dy$. Тоді справджується наступна нерівність (включно з $p=\infty$)*

$$|\hat{u}(t,x) - \tilde{u}(t,x)| \le L_T \sup_{y\in\mathbb{R}^d} |\varphi(y)| \|\hat{a}-\tilde{a}\|_p$$

при $x\in\mathbb{R}^d$, $0<t\le T$ для кожного $T>0$. Тут L_T — деяка додатна стала, що можливо залежить від T.

Нехай $\mathbb{R}^d$-значна функція $(a(x))_{\mathbb{R}^d}$ задовольняє умову $\|a\|_p < \infty$ для деякого $p > d+\alpha$. Тоді існує послідовність функцій $a_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ така, що $\|a_n - a\|_p \to 0$, якщо $n\to\infty$. Відповідно до твердження Наслідку 3.3.1 можемо визначити функцію $\hat{u}(t,x)$ рівністю $\hat{u}(t,x) = \lim\limits_{n\to\infty} \hat{u}_n(t,x)$, де $\hat{u}_n(t,x)$ є розв'язком ссформульованої вище задачі Коші з функцією a_n в коефіцієнті. Твердження Теореми 3.3 означає, що

$$\hat{u}(t,x) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{g}(t,x,y)\varphi(y)\,dy,$$

де $\hat{g}(t,x,y)$ є збуренням (з функцією a) щільності ймовірності переходу симетричного α-стійкого випадкового процесу. Саме в цьому сенсі ми говоримо, що функція $\hat{u}(t,x)$ є узагальненим розв'язком сформульованої вище задачі Коші.

В *другому підрозділі* будується збурення зі сталим коефіцієнтом $a(x) \equiv a$.

Теорема 3.6. *Фундаментальний розв'язок рівняння* (13) *зі сталою функцією* $a(x) = a \in \mathbb{R}^d$ *задається формулою*

$$\hat{g}(t,x,y) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \exp\left\{ i(|\lambda|^{\alpha-2} t\, a + x - y, \lambda) - c\, t|\lambda|^{\alpha} \right\} \, d\lambda,$$

при $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d$.

Третій підрозділ цього розділу присвячено побудові збурення з коефіцієнтом типу дельта-функції на поверхні.

Нехай в просторі $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 2$) задана деяка обмежена замкнена поверхня S класу $H^{1+\gamma}$ з деяким $\gamma \in (0,1)$. Позначимо через $\nu(x)$ одиничний вектор зовнішньої нормалі до поверхні S в її точці x. Нехай $(q(x))_{x\in S}$ — деяка неперервна дійснозначна функція.

Задавши функцію $(\hat{g}(t,x,y))_{t>0, x\in\mathbb{R}^d, y\in\mathbb{R}^d}$ рівністю

$$\hat{g}(t,x,y) = g(t,x,y) + \int_0^t d\tau \int_S g(t-\tau,x,z) w(\tau,z,y) q(z)\, d\sigma_z,$$

де функція $(w(t,x,y))_{t>0, x\in\mathbb{R}^d, y\in\mathbb{R}^d}$ є розв'язком рівняння

$$w(t,x,y) = g^{\nu(x)}(t,x,y) + \int_0^t d\tau \int_S g^{\nu(x)}(t-\tau,x,z) w(\tau,z,y) q(z)\, d\sigma_z,$$

в якому $g^{\nu(x)}(t,x,y) = \mathbf{B}_{\nu(x)} g(t,\cdot,y)(x) = \dfrac{(y-x,\nu(x))}{c\alpha t} g(t,x,y)$, визначимо сім'ю операторів $(\hat{T}_t)_{t>0}$ заданих на обмежених неперервних дійснозначних функціях φ на $\mathbb{R}^d$ рівністю

$$\hat{T}_t\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{g}(t,x,y)\varphi(y)\,dy, \quad t>0,\ x\in\mathbb{R}^d. \tag{15}$$

Теорема 3.7. *Для кожного $t > 0$, оператор $\hat{T}_t$ визначений формулою (15) є лінійним обмеженим оператором на $\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$ та їх сукупність $(\hat{T}_t)_{t>0}$ утворює напівгрупу.*

Нехай δ_S — дельта-функція зосереджена на поверхні S. Причому вважатимемо, що узагальнена функція δ_S симетрична в тому сенсі, що її дія поширюється на функцію з компактним носієм $(\psi(x))_{x\in\mathbb{R}^d}$, яка має розриви типу стрибків на поверхні S, за правилом

$$\langle \delta_S, \psi \rangle = \frac{1}{2} \int\limits_S (\psi(x+) + \psi(x-))\, d\sigma.$$

Теорема 3.9. *Оператор $\mathbf{A} + q(\cdot)\delta_S \mathbf{B}_{\nu(\cdot)}$ є слабким генератором напівгрупи $(\hat{T}_t)_{t>0}$.*

Ситуація з гіперплощиною, як носієм дельта-функції, нічим не відрізняється від описаної, звичайно, крім деяких моментів в доведеннях відповідних тверджень.

Четвертий розділ дисертаційної роботи містить результати досліджень одновимірних симетричних α-стійких випадкових процесів.

В *першому підрозділі* формуються основні об'єкти дослідження пов'язані з розглядуваним процесом.

Як і вище, позначимо через $(x(t), \mathcal{M}_t, \mathbb{P}_x)$ симетричний α-стійкий випадковий процес з показником α. Розглянемо наступні моменти зупинки цього випадкового процесу:

$$\tau^0 = \inf\{s \geq 0 : x(s) = 0\} \text{ — момент першого потрапляння в 0 },$$
$$\sigma = \inf\{s \geq 0 : x(s) \cdot x(0) \leq 0\} \text{ — момент першого виходу з півосі }.$$

Одночасно розглянемо функцію $g^*(t, x, y) = g(t, x, y) - g(t, -|x|, |y|)$, задану при $t > 0$, $x \neq 0$ та $y \neq 0$. Це щільність ймовірності переходу процесу Маркова $(x^*(t), \mathcal{M}_t^*, \tau^*, \mathbb{P}_x^*)$ у фазовому просторі $\mathbb{R}_0 = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$ із σ-алгеброю $\mathcal{B}(\mathbb{R}_0)$ всіх борелевих підмножин $\mathbb{R}_0$. Тут τ^* є часом існування випадкового процесу $(x^*(t))_{t\geq 0}$ або моментом часу, коли цей процес зникає з простору $\mathbb{R}_0$.

Добре відомо, що у випадку $\alpha = 2$ справджується рівність $\tau^0 = \sigma$ $\mathbb{P}_x$-м.н. для кожного $x \in \mathbb{R}$, та справджуються співвідношення

$$\mathbb{P}_x\left(\{x(t) \in \Gamma\} \cap \{\sigma > t\}\right) = \mathbb{P}_x\left(\{x(t) \in \Gamma\} \cap \{\tau^0 > t\}\right) = \\ = \int\limits_\Gamma g^*(t, x, y)\, dy \qquad (16)$$

для всіх $t > 0$, $x \in \mathbb{R}_0$ та $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_0)$. Якщо $\alpha < 2$, то τ^0 та σ стають різними, а функція g^* не пов'язана співвідношеннями (16) ні з τ^0, ні з σ.

В *другому підрозділі* обговорюються питання пов'язані з локальним часом в нулі одновимірного симетричного α-стійкого випадкового процесу. Позначимо його через $(\eta_t)_{t\geq 0}$.

Нехай функція $(g^{(\mu)}(t,x,y))_{t>0,x\in\mathbb{R},y\in\mathbb{R}}$ для кожного $\mu>0$ така, що для кожної неперервної обмеженої функції $(\varphi(x))_{x\in\mathbb{R}}$ виконується

$$\int\limits_{\mathbb{R}} g^{(\mu)}(t,x,y)\varphi(y)\,dy = \mathbb{E}_x\varphi(x(t))e^{-\mu\eta_t}, \quad t>0,\ x\in\mathbb{R}.$$

Покладемо при всіх $\lambda>0$, $x\in\mathbb{R}$ та $y\in\mathbb{R}$

$$G(\lambda,x,y)=\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}g(t,x,y)\,dt, \quad G^{(\mu)}(\lambda,x,y)=\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}g^{(\mu)}(t,x,y)\,dt.$$

Встановлена наступна рівність,

$$G^{(\mu)}(\lambda,x,y)=G(\lambda,x,y)-\frac{\mu}{1+\mu G(\lambda,0,0)}G(\lambda,x,0)G(\lambda,0,y),$$

яка виявилась корисною в доведенні багатьох тверджень цього розділу.

В *третьому підрозділі* наведені загальні властивості симетричного α-стійкого випадкового процесу в одновимірному випадку, зокрема, асимптотична формула для щільності ймовірності переходу цього процесу та формула Рогозіна-Спіцера.

Четвертий підрозділ присвячений вивченню моменту першого потрапляння симетричного α-стійкого випадкового процесу в початок координат.

Теорема 4.1. *При всіх $\lambda>0$ та $x\in\mathbb{R}$ справджується рівність*

$$\mathbb{E}_x e^{-\lambda\tau^0}=\varkappa\lambda^{1-1/\alpha}G(\lambda,x,0),$$

в якій $\varkappa=c^{1/\alpha}\alpha\sin\dfrac{\pi}{\alpha}$.

Наслідок 4.1.1. *Для кожного $x\in\mathbb{R}_0$ розподіл випадкової величини τ^0 має щільність відносно міри Лебега $f^0(t,x)=\varkappa\mathbf{D}_t^{1-1/\alpha}g(t,x,0)$.*

Позначимо ймовірність переходу процесу $(x^0(t))_{t\geq 0}$ через $P^0(t,x,\Gamma)$ для $t>0$, $x\in\mathbb{R}_0$ та $\Gamma\in\mathcal{B}(\mathbb{R}_0)$.

Теорема 4.2. *Рівність* $P^0(t,x,\Gamma)=\int\limits_\Gamma g_0(t,x,y)\,dy$ *справджується для* $t>$

0, $x \in \mathbb{R}_0$ *та* $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_0)$, *де* g_0 *задається співвідношеннями*

$$g_0(t,x,y) = g(t,x,y) - \int\limits_0^t f^0(s,x) g(t-s,0,y)\, ds =$$

$$= g(t,x,y) - \int\limits_0^t g(s,x,0) f^0(t-s,y)\, ds$$

для $t > 0$, $x \in \mathbb{R}_0$ *та* $y \in \mathbb{R}_0$.

Теорема 4.3. *Справджується наступна формула для ядра потенціалу процесу* $(x^0(t))_{t \ge 0}$

$$\int\limits_0^\infty g_0(t,x,y)\, dt = \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\pi c(\alpha-1)} \sin\frac{\pi\alpha}{2} \left(|x|^{\alpha-1} + |y|^{\alpha-1} - |y-x|^{\alpha-1}\right)$$

при $x \in \mathbb{R}_0$ *та* $y \in \mathbb{R}_0$.

Покладемо $\beta_t = \max\{s \ge 0 : \eta_s = t\}$, $t \ge 0$.

Теорема 4.4. *Для* $\lambda > 0$, $t > 0$ *та* $x \in \mathbb{R}$ *справджується рівність*

$$\mathbb{E}_x e^{-\lambda\beta_t} = \varkappa\lambda^{1-1/\alpha} G(\lambda,x,0) \exp\left\{-\varkappa\lambda^{1-1/\alpha} t\right\}.$$

Зокрема, $\mathbb{E}_0 e^{-\lambda\beta_t} = \exp\left\{-\varkappa\lambda^{1-1/\alpha} t\right\}$, $\lambda > 0$, $t > 0$. *Іншими словами,* $(\beta_t)_{t \ge 0}$ *є одновимірним стійким процесом з показником* $1 - \dfrac{1}{\alpha}$ *за умови, що* $x(0) = 0$.

В *п'ятому підрозділі* розглядається випадковий процес $(x^*(t))_{t \ge 0}$. Розподіл часу існування цього процесу задається рівністю з наступного твердження.

Теорема 4.5. *Для* $t > 0$ *та* $x \in \mathbb{R}_0$ *маємо* $\mathbb{P}_x^*(\tau^* \le t) = \displaystyle\int\limits_0^t \frac{2|x|}{\alpha s} g(s,x,0)\, ds.$

Далі обґрунтовується відмінність розподілів випадкових величин σ та τ^* у випадку $1 < \alpha < 2$.

Теорема 4.6. *Функції розподілу випадкових величин* σ *та* τ^* *різні, якщо* $1 < \alpha < 2$.

Нехай $(f^*(t,x))_{t>0}$ при кожному фіксованому $x \in \mathbb{R}_0$ означає щільність розподілу відносно міри $\mathbb{P}_x^*$ випадкової величини τ^*. Наступні два твердження показують принципову відмінність випадків $1 < \alpha < 2$ та $\alpha = 2$.

Теорема 4.7. *Якщо $1 < \alpha < 2$, то представлення*

$$f^*(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}_0} g^*(t,x,y)v(y)\,dy, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}_0, \tag{17}$$

справджується з функцією $v(x) = \dfrac{2c}{\pi}\Gamma(\alpha)\sin\dfrac{\pi\alpha}{2}|x|^{-\alpha}$, $x \in \mathbb{R}_0$.

Теорема 4.8. *Якщо $\alpha = 2$, то функція v в (17) є узагальненою функцією, чия дія на основну функцію $(\varphi(x))_{x\in\mathbb{R}_0}$, яка є достатньо гладкою, такою, що задовольняє умови $\varphi(0-) = \varphi(0+) = 0$ та границі $\varphi'(0-)$ і $\varphi'(0+)$ існують, відповідно до наступного правила $\langle v, \varphi\rangle = c\left(\varphi'(0+) - \varphi'(0-)\right)$.*

Розглянемо тепер функцію

$$F_t^*(x) = \int\limits_0^t f^*(s,x)\,ds, \quad t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}_0. \tag{18}$$

Ця функція є W-функцією для процесу $(x^*(t))_{t\geq 0}$ при кожному $\alpha \in (1,2]$. Але $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}_0} F_t^*(x) = 1$, $t > 0$.

При $1 < \alpha < 2$ маємо

$$\mathbb{E}_x^* \int\limits_0^t v(x^*(s))\,ds = \int\limits_0^t f^*(s,x)\,ds = F_t^*(x), \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}_0,$$

і, отже, в цьому випадку існує W-функціонал $(\zeta_t)_{t\geq 0}$ від процесу $(x^*(t))_{t\geq 0}$ з характеристикою (18).

Теорема 4.10. *У випадку $\alpha = 2$ не існує W-функціонала $(\zeta_t)_{t\geq 0}$ від процесу $(x^*(t))_{t\geq 0}$ такого, що*

$$\mathbb{E}_x^*\zeta_t = F_t^*(x) = \int\limits_0^t \frac{|x|}{2\sqrt{c\pi s^3}} e^{-x^2/4cs}\,ds, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}_0.$$

Як показує наступне твердження, у випадку $\alpha = 2$ функція g та g^* пов'язані між собою перетворенням Фейнмана-Каца з узагальненою функцією $(v(x))_{x\in\mathbb{R}_0}$ визначеною в Теоремі 4.8, хоча в строгому сенсі це не так, як випливає з попереднього.

Теорема 4.11. *У випадку $\alpha = 2$ функції g та g^* пов'язані співвідношеннями*

$$g^*(t,x,y) = g(t,x,y) - \int\limits_0^t ds \int\limits_{\mathbb{R}_0} g(s,x,z)g^*(t-s,z,y)v(z)\,dz,$$

$$g^*(t,x,y) = g(t,x,y) - \int\limits_0^t ds \int\limits_{\mathbb{R}_0} g^*(s,x,z)g(t-s,z,y)v(z)\,dz$$

з узагальненою функцією $(v(x))_{x\in\mathbb{R}_0}$ визначеною в Теоремі 4.8.

Покладемо $m(t) = \mathbb{1}_{\{\tau^*\le t\}} - \zeta_t$ для $t \ge 0$, де $\zeta_t = \int\limits_0^t v(x^*(s))\,ds$.

Теорема 4.12. *Якщо $1 < \alpha < 2$, то процес $(m(t))_{t\ge 0}$ є $(\mathcal{M}_t^*, \mathbb{P}_x^*)$-мартингалом для кожного $x \in \mathbb{R}_0$.*

Іншими словами, W-функціонал $(\zeta_t)_{t\ge0}$ слугує компенсатором для точкового процесу $(\mathbb{1}_{\{\tau^*\le t\}})_{t\ge0}$.

У випадку $1 < \alpha < 2$ функції g та g^* не пов'язані між собою перетворенням Фейнмана-Каца. Як показує наступне твердження, зв'язок тут набагато складніший. Позначимо через $\Pi(dx)$ міру Леві процесу $(x(t))_{t\ge0}$. Добре відомо, що $\Pi(dx) = \dfrac{c}{\pi}\Gamma(\alpha+1)\sin\dfrac{\pi\alpha}{2}|x|^{-\alpha-1}\,dx$.

Нехай $\mathcal{L}$ означає оператор, що діє на функцію $\varphi \in \mathbb{C}_b^2(\mathbb{R})$ (двічі неперервно диференційовну та обмежену разом зі своїми похідними) відповідно до формули

$$\mathcal{L}\varphi(x) = v(x)\varphi(x) + \\ + \int\limits_{\mathbb{R}} \left[\varphi(x+y) - \varphi(x) - y\varphi'(x) - \varphi(y - |x|\operatorname{sign} y)\,\mathbb{1}_{\{|y|>|x|\}}\right]\Pi(dy),$$

де $(v(x))_{x\in\mathbb{R}_0}$ визначена в Теоремі 4.7.

Теорема 4.13. *Для кожних $\varphi \in \mathbb{C}_b^2(\mathbb{R})$ та $x \in \mathbb{R}_0$ процес*

$$\varphi(x^*(t)) - \varphi(x^*(0)) - \int\limits_0^t \mathcal{L}\varphi(x^*(s))\,ds, \quad t \ge 0,$$

є $(\mathcal{M}_t^*, \mathbb{P}_x^*)$-мартингалом.

Завершує цей підрозділ формула, яка представляє ядро потенціалу для процесу $(x^*(t))_{t\geq 0}$:

$$\int\limits_0^\infty g^*(t,x,y)\,dt = \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\pi c(\alpha-1)}\sin\frac{\pi\alpha}{2}\,\mathbb{1}_{\{x\cdot y>0\}}\left(|x+y|^{\alpha-1}-|x-y|^{\alpha-1}\right).$$

П'ятий розділ дисертації за своєю тематикою знаходиться дещо осторонь основної її лінії. В цьому розділі розглядається одновимірний вінерів процес, що є симетричним α-стійким випадковим процесом порядку $\alpha = 2$. Вінерів процес є джерелом багатьох дифузійних процесів.

В *першому підрозділі* п'ятого розділу розглядаються деякі граничні теореми для однієї слабко збіжної послідовності дифузійних процесів. Нехай задані обмежені дійснозначні функції $(a(x))_{x\in\mathbb{R}}$ і $(b(x))_{x\in\mathbb{R}}$, які задовольняють наступні умови:

1. $|a(x)-a(y)|+|b(x)-b(y)| \leq L|x-y|^\gamma$ для всіх $x,y\in\mathbb{R}$ з деякими сталими $L>0$, $0<\gamma<1$;

2. $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}} b(x) > 0$;

3. функція $A(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{a(y)}{b(y)}dy,\quad x\in\mathbb{R}$, обмежена на всій області визначення.

Разом з функцією $(A(x))_{x\in\mathbb{R}}$ розглянемо такі визначені на $\mathbb{R}$ функції:

$$F(x)=\int_0^x e^{-2A(y)}dy,\quad H(x)=\int_0^x e^{2A(y)}\frac{dy}{b(y)}.$$

Позначимо через $(x_n(t))_{t\geq 0}$, $n\in\mathbb{N}$ послідовність дифузійних процесів з коефіцієнтами переносу $a_n(x)=na(nx)$, $x\in\mathbb{R}$ та дифузії $b_n(x)=b(nx)$, $x\in\mathbb{R}$, відповідно.

Щільність ймовірності переходу $(g(t,x,y))_{t>0,x\in\mathbb{R},y\in\mathbb{R}}$ дифузійного процесу $(x_1(t))_{t\geq 0}$ задовольняє нерівності

$$\left|\frac{\partial^j}{\partial t^j}\frac{\partial^k}{\partial x^k}g(t,x,y)\right| \leq Kt^{-\frac{k+1}{2}-j}\exp\left\{-\mu\frac{(y-x)^2}{t}\right\}, \tag{19}$$

що мають місце при $k=0,1$ та $j=0,1$ для всіх $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$ та $t\in(0;T]$, яким би не було $T>0$, з деякою сталою $\mu>0$ та сталою $K>0$, яка може залежати від T.

Основним результатом другого пункту цього підрозділу є твердження про граничний розподіл послідовності локальних часів в нулі дифузійних процесів $(x_n(t))_{t\geq 0}$, $n\in\mathbb{N}$.

Теорема 5.3. *Нехай функції* $(a(x))_{x\in\mathbb{R}}$ *та* $(b(x))_{x\in\mathbb{R}}$ *зі значеннями в* $\mathbb{R}$ *та* $\mathbb{R}^+$*, відповідно, обмежені гельдерові та* $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}} b(x) > 0$*. Припустимо, що функція* $A(x) = \int\limits_0^x \frac{a(y)}{b(y)}dy$ *обмежена на* $\mathbb{R}$ *та існують границі*

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x}\int\limits_0^x e^{-2A(y)}dy = \varkappa_F^{\pm}, \quad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x}\int\limits_0^x e^{2A(y)}\frac{dy}{b(y)} = \varkappa_H^{\pm}.$$

Крім того, нехай функції $(a(x))_{x\in\mathbb{R}}$ *та* $(b(x))_{x\in\mathbb{R}}$ *настільки гладкі, що нерівності (19) справджуються при всіх* $t>0$, $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$ *з* $k+j\le 1$.

Тоді послідовність локальних часів в нулі до моменту часу t *дифузійних процесів на* $\mathbb{R}$ *з коефіцієнтами переносу* $na(nx)$ *та дифузії* $b(nx)$*, які стартують в точці* x*, збігається за розподілом при* $n\to\infty$*, для кожних* $t>0$ *та* $x\in\mathbb{R}$*, до випадкової величини, розподіл якої задається функцією*

$$F_{t,x}(y) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(y)\frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \int\limits_0^{\frac{y}{\beta}b(0)+|x|\sqrt{\varkappa(x)}} e^{-\frac{z^2}{2t}}dz,$$

де $\beta = \dfrac{2\sqrt{\varkappa_F^-\varkappa_F^+}}{\sqrt{\varkappa_F^-\varkappa_H^+}+\sqrt{\varkappa_F^+\varkappa_H^-}}$*, а* $\varkappa(x) = \varkappa_F^-\varkappa_H^- + \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)(\varkappa_F^+\varkappa_H^+ - \varkappa_F^-\varkappa_H^-)$.

Розглянуто також деякі часткові випадки.

В третьому пункті *першого підрозділу* розглядається задача про граничний розподіл кількості перетинів фіксованого рівня послідовністю дифузійних процесів $(x_n(t))_{t\ge 0}$, $n\in\mathbb{N}$ з періодичними коефіцієнтами. Додатково до сформульованих умов, які задовольняють функції $(a(x))_{x\in\mathbb{R}}$ та $(b(x))_{x\in\mathbb{R}}$, припустимо, що ці функції періодичні зі спільним періодом $l>0$.

Тоді справджується наступне: $\frac{1}{x}F(x)\to\varkappa_F$, $\frac{1}{x}H(x)\to\varkappa_H$, коли $x\to\pm\infty$, де $\varkappa_F = \frac{1}{l}\int\limits_0^l e^{-2A(y)}\,dy$, $\varkappa_H = \frac{1}{l}\int\limits_0^l e^{2A(y)}\,\frac{dy}{b(y)}$. Очевидно, $\varkappa_F>0$ та $\varkappa_H>0$. Позначатимемо їх добуток через $\varkappa$.

Фіксуємо тепер деяке $r\in\mathbb{R}$ і позначимо через $\xi_k^{(n,m)}$ для натуральних k, m та n випадкову величину, яка приймає значення 1 у разі, якщо випадкові величини $x_n\left(\frac{k-1}{m}\right)$ та $x_n\left(\frac{k}{m}\right)$ приймають значення по різні боки від точки r на дійсній осі, і значення 0 в протилежному випадку:

$$\xi_k^{(n,m)} = \begin{cases} 1, \text{ якщо } \left(x_n\left(\frac{k-1}{m}-r\right)\right)\left(x_n\left(\frac{k}{m}-r\right)\right) < 0; \\ 0, \text{ якщо } \left(x_n\left(\frac{k-1}{m}-r\right)\right)\left(x_n\left(\frac{k}{m}-r\right)\right) \ge 0. \end{cases}$$

Тоді випадкова величина $\nu_N^{(n,m)} = \sum_{k=1}^{N} \xi_k^{(n,m)}$ при натуральних N визначає кількість перетинів рівня r послідовністю випадкових величин $x_n(0)$, $x_n\left(\frac{1}{m}\right)$, $\ldots$, $x_n\left(\frac{N}{m}\right)$.

Виявилось, що слід розрізняти два випадки:

а) існують такі цілі числа p та q (їх можна вважати взаємно простими, причому $q > 0$), що $r = \frac{p}{q}l$;

б) число $\frac{r}{l}$ є ірраціональним.

У першому випадку множина натуральних чисел розбивається на q підпослідовностей $(n_k^{(i)})_{k\geq 1}$, $i = 0, 1, ..., q-1$, таких, що для кожного такого i маємо $rn_k^{(i)} = \left(\frac{i}{q} + m^{(i,k)}\right) l$, де $m^{(i,k)}$ — ціле число. По кожній з таких підпослідовностей величини $\nu_N^{(n,m)}$ (N та m пов'язані з n) з певним нормуючим множником мають граничні розподіли. Всі ці розподіли — одного типу, але мають параметри, що відрізняються в різних розподілів. У випадку б) для кожного $\beta \in [0; l)$ існує підпослідовність $(n_k(\beta))_{k\geq 1}$ послідовності натуральних чисел, для якої $\{\frac{r}{l} n_k(\beta)\} l \to \beta$ при $k \to \infty$, де $\{x\}$ означає дробову частину числа $x \in \mathbb{R}$. І знову кожна така підпослідовність визначає граничний розподіл, подібний до тих, що згадано вище.

Теорема 5.8. *Припустимо що підпослідовності $(n_k)_{k\geq 1}$ та $(m_k)_{k\geq 1}$ послідовності натуральних чисел вибрані так, що $\frac{n_k^2}{m_k} \to \tau$, а $\beta_{n_k} = \left\{\frac{r}{l} n_k\right\} l \to \beta$ при $k \to \infty$ для деяких $\tau \in (0; \infty)$ та $\beta \in [0; l)$. Тоді при всіх $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$ та $y \in \mathbb{R}$ справджується співвідношення*

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{P}_x \left(n_k^{-1} \nu_{[m_k t]}^{(n_k, m_k)} < y \right) = \mathbb{1}_{(0,\infty)}(y) \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \int\limits_0^{y\gamma^{-1} + d(x)} e^{-\frac{z^2}{2t}} \, dz,$$

де покладено $\gamma = \dfrac{\delta(\beta, \tau)}{\tau} \sqrt{\dfrac{\varkappa_F}{\varkappa_H}}$, $d(x) = |x - r|\sqrt{\varkappa}$,

$$\delta(\beta, \tau) = \int\limits_{-\infty}^{\beta} \left(\int\limits_{\beta}^{\infty} g(\tau, y, z) \, dz \right) dH(y) + \int\limits_{\beta}^{\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{\beta} g(\tau, y, z) \, dz \right) dH(y).$$

В *другому підрозділі* п'ятого розділу розглядаються деякі екстремальні задачі для одновимірного вінерового процесу.

Задавши на деякому ймовірнісному просторі одновимірний вінерів процес $(w(t), \mathcal{M}_t, \mathbb{P}_x)$, $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, розглянемо множину всіх ймовірнісних мір на тому ж просторі, кожна з яких є результатом перетворення Гірсанова початкової міри.

В першому пункті будуємо одну з таких мір, яка максимізує відповідним чином нормований локальний час процесу в нулі до деякого фіксованого моменту часу $t > 0$.

Прогресивно вимірний процес $(\omega(s))_{s\in[0,t]}$ (відносно фільтрації $(\mathcal{M}_s)_{s\in[0,t]}$) називатиметься допустимою стратегією, якщо $\mathbb{P}\left(\int\limits_0^t \omega^2(s)ds < \infty\right) = 1$ і $\mathbb{E}\mathcal{E}_t^0(\omega) = 1$, $\mathbb{E}[\mathcal{E}_t^0(\omega)]^2 < \infty$, де

$$\mathcal{E}_s^0(\omega) = \exp\left\{\int\limits_0^s \omega(\tau)dw(\tau) - \frac{1}{2}\int\limits_0^s \omega^2(\tau)d\tau\right\}$$

для $s \in [0,t]$ (тут перший інтеграл є інтегралом Іто).

Нехай $(\eta_t)_{t\geq 0}$ — локальний час в нулі вінерового процесу. Визначимо цільову функцію рівністю $\Phi_t(\omega) = \dfrac{\mathbb{E}\left[\mathcal{E}_t^0(\omega)\eta_t\right]}{(\mathbb{E}[\mathcal{E}_t^0(\omega)]^2)^{1/2}}$ для деякої допустимої стратегії ω. Задача полягає у побудові такої допустимої стратегії, яка б максимізувала значення функції Φ_t.

Теорема 5.11. *Допустима стратегія $(\omega_*^{(t)}(s))_{s\in[0,t]}$ задана рівністю*

$$\omega_*^{(t)}(s) = h'_x(t-s, w(s))\left[\sqrt{\frac{2t}{\pi}} + \int\limits_0^s h'_x(t-\tau, w(\tau))dw(\tau)\right]^{-1},$$

де $h(t,x) = \int\limits_0^t \exp\left\{-\dfrac{x^2}{2s}\right\}\dfrac{ds}{\sqrt{2\pi s}}$, $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, *максимізує цільову функцію*

$$\Phi_t(\omega) = \frac{\mathbb{E}[\eta_t\mathcal{E}_t^0(\omega)]}{(\mathbb{E}[\mathcal{E}_t^0(\omega)]^2)^{1/2}}.$$

Зауважимо, що побудована в Теоремі 5.11 оптимальна стратегія не є марківською. Прикладами марківських стратегій досить близьких до оптимальної є процеси виду $\omega_\rho(s) = -\rho w(s)$ чи $\omega_\rho(s) = -\rho \operatorname{sign} w(s)$ з деякими $\rho > 0$.

Другий пункт цього підрозділу присвячений задачі знаходження коефіцієнту переносу, який забезпечив би, в певному розумінні, мінімальне значення моменту часу $\tau = \inf\{s \geq 0 : w(s) = 0\}$ першого досягнення вінеровим процесом початку координат. Коефіцієнт переносу вибиратимемо на множині V прогресивно вимірних процесів $(\omega(t), \mathcal{M}_t)_{t\geq 0}$ в $\mathbb{R}$, для яких

$\mathbb{P}_x\left(\int\limits_0^\tau \omega^2(s)\,ds<\infty\right)=1$ та справджуються наступні умови $\mathbb{E}_x\mathcal{E}^0_\tau(\omega)=1$, $\mathbb{E}_x[\mathcal{E}^0_\tau(\omega)]^2<\infty$, де $\mathcal{E}^0_\tau(\omega)=\exp\left\{\int\limits_0^\tau \omega(s)\,dw(s)-\frac{1}{2}\int\limits_0^\tau \omega^2(s)\,ds\right\}$. Елементи множини V називатимемо допустимими стратегіями.

Нехай функція $(f(t))_{t\ge 0}$ додатна неперервна монотонно зростаюча та обмежена. Цільовою функцією будемо називати функціонал

$$\Phi(\omega)=\mathbb{E}_x f(\tau)\mathcal{E}^0_\tau(\omega) \tag{20}$$

заданий на множині V допустимих стратегій.

Теорема 5.12. *Нехай додатна неперервна строго монотонно зростаюча та обмежена функція $(f(t))_{t\ge 0}$ така, що існують сталі $u>0$ та $r\in\left(\frac{1}{2},1\right]$ і функція $(\rho(t))_{t>0}$, для яких при всіх $0<t<u$, $s>0$ виконується $f(s+t)-f(s)\le\rho(s)t^r$, причому функція ρ квадратично інтегровна в деякому околі нуля та обмежена поза ним.*

Тоді існує допустима стратегія $\omega_*(t)=\dfrac{h'_x(t,w(t))}{h(t,w(t))}$, на якій функціонал Φ досягає свого мінімуму на множині $W=\{\omega\in V:\mathbb{E}_x(\mathcal{E}^0_\tau(\omega))^2<K\}$. Тут $K=\dfrac{\mathbb{D}_x f(\tau)}{(C-\mathbb{E}_x f(\tau))^2}+1$, $h(t,x)=C-\mathbb{E}_x f(t+\tau)$, $t\ge 0$, $x\in\mathbb{R}$, а $C=\sup\limits_{t\ge 0} f(t)$.

Цікавим є наступний приклад, в якому вдається знайти в явному вигляді оптимальну стратегію з Теореми 5.12. Розглянемо функціонал (20) з функцією $f(t)=1-e^{-mt}$, де $m>0$ — деяка стала. Оскільки при всіх $s>0$, $t>0$ справджується нерівність $e^{-ms}(1-e^{-mt})\le me^{-ms}t$, то умови Теореми 5.12 виконані і, отже, існує допустима стратегія, яка мінімізує функціонал (20) на множині W. Множина допустимих стратегій задається нерівністю $\mathbb{E}_x[\mathcal{E}^0_\tau(\omega)]^2\le e^{2(\sqrt{2}-1)\sqrt{m}|x|}$. Оптимальна стратегія має вигляд $\omega_*(t)=-\sqrt{2m}\,\mathrm{sign}(w(t))$.

Поставимо питання про існування оптимальної стратегії, в сенсі мінімізації значення функціоналу Φ, на всій множині допустимих стратегій V. Показано, що можна одержати як завгодно мале додатне значення функціоналу Φ на V.

Множину $V_\varepsilon\subset V$, $\varepsilon>0$ назвемо ε-оптимальною стратегією для задачі мінімізації невід'ємного функціоналу Φ на множині допустимих стратегій V, якщо існує така допустима стратегія $\omega_*\in V_\varepsilon$, що $\Phi(\omega_*)\le\inf\limits_{\omega\in V}\Phi(\omega)+\varepsilon$.

Теорема 5.13. *Нехай функція $(f(t))_{t\ge 0}$ зі значенням $f(0)=0$ неперервна та невід'ємна. Нехай існує скінченне $\mathbb{E}_x f(\tau)$, де τ — момент першого дося-*

гнення вінеровим процесом $(w(t))_{t\geq 0}$ початку координат. Тоді для задачі мінімізації функціоналу Φ, що задається рівністю (20), існує ε-оптимальна стратегія. Елементи цієї стратегії утворюють однопараметричну множину (при $\lambda > 0$) і задаються рівностями $\omega_\lambda(t) = -\sqrt{2\lambda}\,\mathrm{sign}(w(t))$, $t > 0$.

Подяки. Автор дисертації висловлює щиру подяку своєму науковому консультанту, Вчителю в науці та житті, доктору фізико-математичних наук, професору Портенку Миколі Івановичу за постійну підтримку та увагу.

Крім того, автор вдячний компанії Letzgro Inc. за розуміння значимості фундаментальних досліджень та їх фінансову підтримку.

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена дослідженню властивостей симетричних α-стійких випадкових процесів при $1 < \alpha \leq 2$, їх перетворень та застосувань до теорії псевдодиференціальних рівнянь параболічного типу.

Завданням першого розділу дисертації було закцентувати увагу на відомих результатах досліджень з даної тематики, та описати місце дисертаційної роботи у розв'язанні названих проблем.

Другий розділ дисертації присвячений побудові теорії потенціалу простого шару для псевдодиференціальних рівнянь параболічного типу, пов'язаних із симетричними α-стійкими $(1 < \alpha < 2)$ випадковими процесами в $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$. Як і в класичній теорії потенціалу для параболічних рівнянь другого порядку, згадані потенціали використані для побудови фундаментальних розв'язків другої (типу Неймана) та третьої (змішаної) початково-крайових задач, а також для побудови розв'язків деяких інших задач для псевдодиференціальних рівнянь параболічного типу.

Тут введено поняття потенціалу простого шару, вивчено його властивості та продемонстровано способи застосувань до розв'язання початково-крайових задач для псевдодиференціального рівняння параболічного типу. Оператор за просторовою змінною (позначений в роботі через $\mathbf{A}$) в такому рівнянні є інфінітезимальним оператором симетричного α-стійкого випадкового процесу. В якості носія потенціалу простого шару виступає або гіперплощина, або досить гладка обмежена замкнена поверхня. Центральним місцем розвинутої теорії потенціалу простого шару є терема про стрибок результату дії деякого оператора $\mathbf{B}$ такого, що $\mathbf{A} = c\,\mathbf{div}\mathbf{B}$, $c > 0$, (назвемо його тут псевдоградієнтом) в напрямі нормалі до поверхні на потенціал простого шару в точках цієї поверхні.

Значну частину другого розділу займає розгляд другої та третьої початково-крайових задач для псевдодиференціального рівняння параболічного типу, пов'язаного із симетричним α-стійким випадковим процесом. В роботі поширено на випадок псевдодиференціальних рівнянь класичний метод розв'язання згаданих задач, який використовує потенціали простого шару та їх властивості, в першу чершу, теорему про стрибок. Розглянуто загальну третю початково-крайову задачу в багатовимірному просторі і, як часткові випадки, другу та симетричну третю задачу з гіперплощиною чи досить гладкою обмеженою замкненою поверхнею, на якій задається гранична умова. У випадку з гіперплощиною результати поширюються і на одновимірной випадок. З точки зору теорії випадкових процесів фундаментальні розв'язки таких задач будуються з використанням формули Фейнмана-Каца з W-функціоналом типу локального часу на поверхні від симетричного стійкого випадкового процесу, збуренням такого процесу оператором псевдоградієнта з множником типу дельта-функції на поверхні та їх комбінації.

З допомогою випадкової заміни часу в симетричному α-стійкому випадковому процесі побудовано стандартний процес Маркова, який описує поведінку першого в просторі з липучою мембраною. Одержані рівняння для резольвенти такого процесу як на поверхні, так і поза нею.

Третій розділ містить результати побудови та досліджень властивостей адитивних збурень інфінітезимального оператора симетричного α-стійкого випадкового процесу оператором $(a(\cdot), \mathbf{B})$, в якому векторнозначна функція $(a(x))_{x\in\mathbb{R}^d}$ обмежена, чи інтегровна в деякому степені, чи узагальнена типу дельта-функції на поверхні. Як виявилось, результуюча напівгрупа лінійних обмежених операторів на просторі неперервних обмежених функцій не задає жодного випадкового процесу, оскільки не залишає інваріантним конус невід'ємних функцій. Такі об'єкти прийнято називати псевдопроцесами. Для них можна розглядати поняття пов'язані тільки зі скінченновимірними розподілами (зарядами).

В четвертому розділі досліджено деякі моменти зупинки для одновимірного симетричного α-стійкого випадкового процесу та процеси утворені з нього обривом в ці моменти. Мова йде про моменти першого потрапляння в початок координат та першого виходу з півосі. В граничному випадку $\alpha = 2$ (вінерів процес) ці моменти, як і процеси, однакові і відома їх щільність ймовірності переходу. Ця щільність породжує деякий процес Маркова і в загальному випадку, але він не є стохастично еквівалентним жодному з названих процесів, як і ці процеси виявились різними.

Завершальний (п'ятий) розділ дисертації присвячений деяким задачам для вінерового процесу (чи пов'язаних з ним працесів), що є симетричним α-стійким випадковим процесом порядку $\alpha = 2$. Знайдені граничні розподіли таких функціоналів, як локальний час в нулі та кількість перетинів певного рівня, від послідовності дифузійних процесів з коефіцієнтами переносу $na(nx)$ та коефіцієнтами дифузії $b(nx)$ з деякими функціями a і b. Така послідовність при певних умовах слабко збігається до граничного дифузійного процесу, причому дифузійні коефіцієнти граничного процесу не є границями відповідних коефіцієнтів допграничних процесів. Крім того, не виконується принцип інваріантності. Далі побудовані оптимальні стратегії — коефіцієнти переносу, які максимізують локальний час в нулі та мінімізують час першого попадання в нуль (в певних розуміннях) вінерового процесу з переносом.

Отримані результати дисертації можуть бути використані у теорії випадкових процесів, теорії псевдодиференціальних рівнянь, в дослідженнях стохастичних моделей природничих та соціально-економічних явищ.

Основні результати дисертації опубліковано у фахових наукових журналах і апробовано у провідних математичних центрах.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ ТА ВІДОМОСТІ ПРО АПРОБАЦІЮ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЇ

Список праць, де опубліковані основні наукові результати дисертації

[1] *Osypchuk M.M.* On the third initial-boundary value problem for some class of pseudo-differential equations related to a symmetric α-stable process/ M.M. Osypchuk, M.I. Portenko// J. Pseudo-Differ. Oper. Appl. -2018. -V. 9, No. 4, -P. 811-835.

[2] *Osypchuk M.M.* On some Markov processes related to a symmetric α-stable process / M. M. Osypchuk, M. I. Portenko // Stochastics. -2018. -V. 90, № 7. -P. 972-991.

[3] *Osypchuk M.M.* On the crossings number of a hyperplane by a stable random process/M.M. Osypchuk// Carpathian Math. Publ. -2018. -V. 10, № 2, -P. 346-351.

[4] *Osypchuk M.M.* On the distribution of a rotationally invariant α-stable process at the moment when it is hitting a given hyperplane/ M.M. Osypchuk, M.I. Portenko// Dopov. Nac. akad. nauk Ukr. -2018. №12, -P. 14-20.

[5] *Осипчук М.М.* Симетричний α-стійкий випадковий процес та третя початково-крайова задача для відповідного псевдодиференціального рівняння/ М.М. Осипчук, М.І. Портенко// Укр. мат. журн. -2017. -Т. 69, № 10. -С. 1406-1421.

[6] *Osypchuk M.M.* On constructing some membranes for a symmetric α-stable process/ M.M. Osypchuk, M.I. Portenko// Communications on Stochastic Analysis. -2017. -V. 11, № 1. -P. 11-20.

[7] *Osypchuk M.M.* On some perturbations of a symmetric stable process and the corresponding Cauchy problems/ M.M. Osypchuk// Theory Stoch. Process. -2016. -V. 21, № 1. -P. 64-72.

[8] *Осипчук М.М.* Про потенціали простого шару для одного класу псевдодиференціальних рівнянь/ М.М. Осипчук, М.І. Портенко// Укр. мат. журн. -2015. -Т. 67, № 11. -С. 1512-1524.

[9] *Osypchuk M.M.* On some perturbations of a stable process and solutions to the Cauchy problem for a class of pseudo-differential equations/ M.M. Osypchuk// Carpathian Math. Publ. -2015. -V. 7, № 1. -P. 101–107.

[10] *Бігун Г.С.* Явний вигляд фундаментального розв'язку одного псевдодиференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами/ М.М. Осипчук, Г.С. Бігун// Прикарпатський вісник НТШ (серія: Число). -2015. № 1(29). -С. 123-131.

[11] *Osypchuk M.M.* On Ornshtein-Uhlenbeck's measure of a Hilbert ball in the space of continuous functions/ M.M. Osypchuk, M.I. Portenko// Theory Stoch. Process. -2014. -V. 19(35), № 1. -P. 46-51.

[12] *Osypchuk M.M.* One type of singular perturbations of a multidimensional stable process/ M.M. Osypchuk, M.I. Portenko// Theory Stoch. Process. -2014. -V. 19(35), № 2. -P. 42-51.

[13] *Бігун Г.С.* Дифузії, породжені вінеровим процесом/ Г.С. Бігун, М.М. Осипчук// Карпатські матем. публ. -2013. -Т. 5, № 2. -С. 180-186.

[14] *Осипчук М. М.* Про одну задачу оптимального управління вінеровим процесом/ М.М. Осипчук// Прикарпатський вісник НТШ (серія: Число). -2012. № 1(17). -С. 21-27.

[15] *Osypchuk M.M.* An extremum problem for some class of Brownian motions with drifts/ M.M. Osypchuk, M.I. Portenko// Journal of Mathematical Sciences. -2011. -V. 179, № 1. -P. 164-173.

[16] *Осипчук М. М.* Граничний розподіл локальних часів в нулі деякої послідовності дифузійних процесів/ М.М. Осипчук, М.І. Портенко// Математичний вісник НТШ. -2011. -Т. 8. -С. 168-185.

[17] *Осипчук М.М.* Про кількість перетинів довільного рівня послідовністю дифузійних процесів з періодичними коефіцієнтами/ М.М. Осипчук, М.І. Портенко// Математичні студії. -2010. -Т. 33, № 2. -С. 199-211.

[18] *Осипчук М.М.* Щільність ймовірності переходу одного класу узагальнених дифузійних процесів/ М.М. Осипчук// Укр. мат. журн. -1998. -Т. 50, № 10. -С. 1433-1437.

[19] *Осипчук М.М.* Дифузія з нерегулярним переносом/ М.М. Осипчук// Теорія ймовірностей та математична статистика. -1996. -Т. 54. -С. 122-128.

[20] *Осипчук М.М.* Дифузія з нерегулярним переносом в гільбертовому просторі/ М.М. Осипчук// Укр. мат. журн. -1995. -Т. 47, №9. -С. 1224-1230.

[21] *Осипчук М.М.* Узагальнений дифузійний процес в гільбертовому просторі/ М.М. Осипчук// Асимптотичний аналіз випадкових еволюцій. Зб. наук. пр. АН України. Ін-т математики. -1994. -С. 210-221.

Список праць, що засвідчують апробацію матеріалів дисертації

[22] *Осипчук М.М.* Про кількість перетинів певних рівнів деякою послідовністю одновимірних дифузійних процесів/ М.М. Осипчук// Всеукр. семінар "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 22-28.03.2010). -Івано-Франківськ:ПрНУ. -2010. -С. 9.

[23] *Осипчук М.М.* Про перетворення Лапласа міри Орнштейна-Уленбека гільбертової кулі/ М.М. Осипчук, М.І. Портенко// Всеук. наук. конф. "Прикладні задачі математики" (Яремче, 13-15.10.2011). -Івано-Франківськ: ІФНТУНГ. -2011. -С. 82, 83.

[24] *Осипчук М.М.* Про граничний розподіл локальних часів деякої послідовності дифузійних процесів/ М.М. Осипчук// Всеукр. наук. конф. "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 22-25.02.2011). -Івано-Франківськ: ПрНУ. -2011. -с. 16

[25] *Осипчук М.М.* Граничні теореми для однієї послідовності дифузійних процесів/ М.М. Осипчук// Всеукр. наук. конф. "Алгебра, топологія, аналіз, стохастика" (Микуличин, 20-23.09.2012). -Івано-Франківськ: ПрНУ. -2012. -С. 32

[26] *Осипчук М.М.* Оптимальне керування вінеровим процесом/ М.М. Осипчук// Всеукр. наук. конф. "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 23-26.02.2012). -Івано-Франківськ: ПрНУ. -2012. -С. 23.

[27] *Осипчук М.М.* Дифузії породжені вінеровим процесом/ Г.С. Бігун, М.М. Осипчук// Всеукр. наук. конф. "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 24-27.02.2013). -Івано-Франківськ: ПрНУ. -2013. -С. 4.

[28] *Осипчук М.М.* Про щільність спільного розподілу значення процесу Маркова і його локального часу/ М.М. Осипчук, М.І. Портенко// Всеукр. наук. конф. "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 24-27.02.2013). -Івано-Франківськ: ПрНУ. -2013. -С. 26.

[29] *Осипчук М.М.* Породження вінеровим процесом багатовимірних дифузій/ Г.С. Бігун М.М. Осипчук// Всеукр. наук. конф. "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу"(Ворохта, 24.02-02.03.2014). -Івано-Франківськ: ПрНУ. -2014. -С. 8.

[30] *Осипчук М.М.* Про деякі методи оцінювання розв'язків параболічних рівнянь/ М.М. Осипчук, М.І. Портенко// Всеукр. наук. конф. "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу"(Ворохта, 24.02-02.03.2014). -Івано-Франківськ: ПрНУ. -2014. -С. 5.

[31] *Osypchuk M.M.* On some perturbations of a stable process and solution of pseudo-differential equations / M.M. Osypchuk// Stochastic Processes in Abstract Spaces Intern. Conf. (Kyiv, 14-16.10.2015). -Kyiv:NTUU. -2015. -P. 42.

[32] *Osypchuk M.M.* On the solution of the Cauchy problem for one class of pseudo-differential equations/ M.M. Osypchuk// Intern. V. Skorobohatko mathematical conf. (Drogobych, 25-28.08.2015). -Lviv: LNU. -2015. -P. 121.

[33] *Осипчук М.М.* Фундаментальний розв'язок одного псевдодиференціального рівняння параболічного типу зі сталими коефіцієнтами/ Г.С. Бігун, М.М. Осипчук// Наук. конф. присв. 100-річчю від дня нар. К. М. Фішмана та М. К. Фаге (Чернівці, 1-4.07.2015). -Чернівці: ЧНУ. -2015. -С. 20, 21.

[34] *Осипчук М.М.* Збурення стійких процесів та псевдодиференціальні рівняння/ М.М. Осипчук, М.І. Портенко// Всеукр. наук. конф. "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 25.02-01.03.2015). -Івано-Франківськ: ПрНУ. -2015. -С. 52, 53.

[35] *Осипчук М.М.* Симетричний стійкий процес та задача про склеювання/ М.М. Осипчук// Всеукр. наук. конф. "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 24-27.02.2016). -Івано-Франківськ: ПрНУ. -2016. -С. 43, 44.

[36] *Osypchuk M., Portenko M.* On some Markov processes related to a symmetric stable process/ M. Osypchuk, M. Portenko// "Limit theorems in probability theory, number theory and mathematical statistics"international workshop in honour of Prof. V.V. Buldygin (Kyiv, 10-12.10.2016). -Kyiv: NTUU. -2016. -P. 41, 42.

[37] *Осипчук М.М.* Третя початково-крайова задача для псевдодиференціального рівняння пов'язаного із симетричним стійким випадковим процесом/ М.М. Осипчук, М.І. Портенко// Всеукр. наук. конф. "Сучасні

проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 22-25.02.2017). -Івано-Франківськ: ПрНУ. -2017. -С. 43, 44.

[38] *Osypchuk M.M.* Jump theorem and its applications/ M.M. Osypchuk, M.I. Portenko// Intern. Conf. on Differential Equations, Mathematical Physics and Applications (Cherkasy, 17-19.10.2017). -Vinnytsia: DonNU. -2017. -P. 97, 98.

[39] *Osypchuk M.M.* On crossings numbers of a fixed hyperplane by some processes related to the rotationally invariant α-stable random process/M.M. Osypchuk// Intern. conf. Modern Stochastics: Theory and Applications. IV (Kyiv, 24-26.05.2018). -Kyiv: KNU. -2018. -P. 48.

[40] *Osypchuk M.M.* On some initial-boundary value problems for pseudo-differential equations related to a rotationally invariant α-stable stochastic process/ M.M. Osypchuk, M.I. Portenko// Intern. Conf. "Stochastic Equations, Limit Theorems and Statistics of Stochastic Processes dedicated to the 100th anniversary of I.I.Gikhman (Kyiv, 17-22.09.2018). -Kyiv: NTUU. -P. 69, 70.

[41] *Осипчук М.М.* Ймовірнісні представлення розв'язків деяких початково-крайових задач дл одного виду псевдодиференціальних рівнянь параболічного типу/ М.М. Осипчук// VI Всеукр. наук. конф. імені Б.В. Василишина "Нелінійні проблеми аналізу" (Івано-Франківськ, Микуличин, 26-28.09.2018). -Івано-Франківськ: ПрНУ. -2018. С. 42, 43.

[42] *Осипчук М.М.* Стійкі випадкові процеси та деякі початково-крайові задачі для псевдодиференціальних рівнянь/ М.М. Осипчук// Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях: Мат. міжнар. наук. конф., присвяченої 50-річчю факультету математики та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, (Чернівці, 17-19.09.2018). -Чернівці: ЧНУ. -2018. -С. 88.

АНОТАЦІЇ

Осипчук М.М. Симетричні стійкі випадкові процеси та їх перетворення. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.05 – "Теорія ймовірностей та математична статистика", 111 – "Математика". – Інститут математики НАН України, Київ, 2019.

Дисертацію присвячено дослідженню симетричних α-стійких випадкових процесів в евклідовому просторі, пов'язаних з деяким класом псевдодиференціальних рівнянь параболічного типу.

Для цих рівнянь побудовано деяку версію теорії потенціалу простого шару. Центральною точкою цієї теорії є аналог класичної теореми про стрибок конормальної похідної потенціалу простого шару. Використовуючи цей результат, будуються фундаментальні розв'язки другої та третьої початково-крайових задач для згаданих рівнянь. Описані результати викладені в другому розділі дисертації.

У третьому розділі генератор α-стійкого процесу адитивно збурюється дробовим градієнтом, помноженим на задане векторне поле, що визначається обмеженою або локально необмеженою чи навіть узагальненою функцією. Побудовано відповідні напівгрупи операторів.

Четвертий розділ присвячений дослідженню деяких одновимірних процесів Маркова, пов'язаних із симетричним α-стійким процесом. Ці процеси у випадку $1 < \alpha < 2$ виявляються різними, тоді як у випадку $\alpha = 2$ вони збігаються один з одним.

Останній, п'ятий, розділ присвячений певним задачам для вінерового процесу (випадок $\alpha = 2$) або більш загальних дифузійних процесів. Зокрема, розв'язані деякі екстремальні задачі для вінерового процесу з переносом та задачі, які полягають у дослідженні граничної поведінки певних функціоналів від дифузійних процесів на дійсній осі.

Результати дисертаційної роботи мають теоретичний характер. Вони можуть бути використані в теорії випадкових процесів, в теорії псевдодиференціальних рівнянь, в дослідженнях стохастичних моделей природничих та соціально-економічних явищ.

Ключові слова: симетричний α-стійкий випадковий процес, вінерів процес, дифузійний процес, інфінітезимальний оператор, резольвента, локальний час, формула Фейнмана-Каца, рівняння збурення, випадкова заміна часу, псевдопроцес, псевдодиференціальний оператор, псевдодиференціальне рівняння параболічного типу, потенціал простого шару, задача Коші, початково-крайова задача.

Осипчук М.М. Симметричные устойчивые случайные процессы и их преобразования. – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.05 – "Теория вероятностей и математическая статистика", 111 –"Математика". – Институт математики НАН Украины, Киев, 2019.

Диссертация посвящена исследованию симметричных α-устойчивых случайных процессов в евклидовом пространстве, связанных с некоторым классом псевдодиференциальних уравнений параболического типа.

Для этих уравнений построено некоторою версию теории потенциала простого слоя. Центральной точкой этой теории является аналог классической теоремы о скачке конормальной производной потенциала простого слоя. Используя этот результат, строятся фундаментальные решения второй и третьей начально-краевых задач для упомянутых уравнений. Описанные результаты изложены во второй главе диссертации.

В третьей главе генератор α-устойчивого процесса аддитивно возмущается дробным градиентом, умноженным на заданное векторное поле, определяющееся ограниченной или локально неограниченной или даже обобщенной функцией. Построены соответствующие полугруппы операторов.

Четвертая глава посвящена исследованию некоторых одномерных процессов Маркова, связанных с симметричным α-устойчивым процессом. Эти процессы в случае $1 < \alpha < 2$ оказываются разными, тогда как в случае $\alpha = 2$ они совпадают друг с другом.

Последняя, пятая, глава посвящена некоторым задачам для винеровского процесса (случай $\alpha = 2$) или более общих диффузионных процессов. В частности, решены некоторые экстремальные задачи для винеровского процесса с переносом и задачи, которые заключаются в исследовании предельного поведения некоторых функционалов от диффузионных процессов на действительной оси.

Результаты диссертационной работы имеют теоретический характер. Они могут быть использованы в теории случайных процессов, в теории псевдодифференциальных уравнений, в исследованиях стохастических моделей естественных и социально-экономических явлений.

Ключевые слова: симметричный α-устойчивый случайный процесс, винеровский процесс, диффузионный процесс, инфинитезимальный оператор, резольвента, локальное время, формула Фейнмана-Каца, уравнение возмущения, случайная замена времени, псевдопроцесс, псевдодифференциальный оператор, псевдодифференциальное уравнение параболического типа, потенциал простого слоя, задача Коши, начально-краевая задача.

Osypchuk M.M. Symmetric stable stochastic processes and their transformations. – Manuscript.

Thesis for a Doctor Degree in Physical and Mathematical Sciences on Speciality 01.01.05 – “Probability theory and mathematical statistics”, 111 – “Mathematics”. – Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2019.

The thesis is devoted to investigating symmetric α-stable stochastic processes in Euclidean space associated with some class of pseudo-differential equations of parabolic type.

A version of the theory of single-layer potential is constructed for those equations. The central point of that theory is the result being an analogy to the classical theorem on the jump of the conormal derivative of a single-layer potential. Making use of this result, we construct fundamental solutions for the second and the third initial boundary-value problems for the equations under consideration. It turns out that in some cases those fundamental solutions are non-negative and they determine some Markov processes being certain transformations of a starting α-stable process. For example, a stochastic process in Euclidean space is constructed such that it describes an α-stable motion in that space with the sticky membrane located on a given surface. In others situations the constructed fundamental solutions do not determine any stochastic process but only “pseudo-process”. The results just described are expanded in the second chapter on the thesis.

In the third chapter, the generator of an α-stable process is perturbed additively with a fractional gradient multiplied by a given vector field determined by bounded or locally unbounded and even generalized functions. The corresponding semigroups of operators are constructed and they turn out to be non-Markovian. It should be remarked than in the limit case of $\alpha = 2$, some of those transformations lead us to Markov processes, for example, a skew Brownian motion on a real line and some multidimensional analogues of it.

The forth chapter is devoted to investigating some one-dimensional Markov processes related to a symmetric α-stable process. Those processes in the case of $1 < \alpha < 2$ turn out to be different, while they coincide each of the other one in the case of $\alpha = 2$.

The last, fifth, chapter is devoted to some problems for Brownian motion (the case of $\alpha = 2$) or more general diffusion processes. In particular, an extremum problems consist in constructing drifts for a given Brownian motion that maximize the local time at the origin, minimize the time of the first hit in the origin have been solved. Other problems considered in Chapter 5 consist in investigating the limit behavior of the crossings number of a fixed level by a sequence of diffusion processes on a real line and of the local time at the origin of those processes. The local characteristics of the processes form this sequence do not converge to the corresponding ones of the limit processes in the case under consideration.

The results of the thesis possess the theoretical sense. They can be used in the theory of stochastic processes, in the theory of pseudo-differential equations, the stochastic models studying of natural and socioeconomic phenomena.

Keywords: symmetric α-stable stochastic process, Wiener process, diffusion process, generator, resolvent, local time, Feynman-Kac formula, perturbation equations, random change of time, pseudo-process, pseudo-differential operator, pseudo-differential parabolic type equation, simple-layer potential, Cauchy problem, initial-boundary value problem.