УДК 517.589, 517.926.4

О НОВЫХ ФУНКЦИЯХ ТИПА ИНТЕГРАЛОВ ФРЕНЕЛЯ

Гой Тарас Петрович
Прикарпатский национальный университет имени Василия Стефаника,
г. Ивано-Франковск, Украина

Для произвольных чисел $x\in\mathbf{R}$ и $m\in\mathbf{N}$ факториальной степенью m с шагом $k\in\mathbf{R}$ называют выражение $x^{m\{k\}}=x(x+k)(x+2k)\cdot\ldots\cdot\left(x+(m-1)k\right)$. Факториальную степень называют возрастающей, если $k>0$, и убывающей, если $k<0$.

Для произвольных $x\in\mathbf{R}$ и $m\in\mathbf{N}$ центральной факториальной степенью m с шагом $k>0$ называют выражение

$$x^{m[k]}=x\left(x+mk/2-k\right)\left(x+mk/2-2k\right)\cdot\ldots\cdot\left(x-mk/2+k\right).$$

Обозначим $x^{\overline{m}}\equiv x^{m\{1\}}, x^{\underline{m}}\equiv x^{m\{-1\}}, x^{[m]}\equiv x^{m[1]}$.

Тригонометрические функции $\sin x$, $\cos x$ задаются через известные степенные ряды, построенные с помощью убывающих факториальных степеней ($n!=n^{\underline{n}}$). Заменив в этих рядах убывающие факториальные степени соответствующими центральными факториальными степенями, в [1] получены новые неэлементарные функции действительной переменной

$$\operatorname{Sinc} x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)^{[2n+1]}},\qquad \operatorname{Cosc} x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)^{[2n]}}.$$

Обозначим через $S(x), C(x)$ функции, определенные формулами

$$S(x)=\int_0^x \operatorname{Sinc} t^2 dt,\qquad C(x)=\int_0^x \operatorname{Cosc} t^2 dt.$$

Теорема. *Для всех* $x\in\mathbf{R}$ *имеют место равенства*

$$S(x)=\frac{x^3}{3}F\left(\frac{3}{4},1;\frac{5}{6},\frac{7}{6},\frac{7}{4};-\frac{x^4}{27}\right),\qquad C(x)=x-\frac{x^5}{20}F\left(1,\frac{5}{4};\frac{4}{3},\frac{5}{3},\frac{9}{4};-\frac{x^4}{27}\right),$$

где $F\left(a_1,a_2;b_1,b_2,b_3;z\right)$ *– обобщенная гипергеометрическая функция, т.е.*

$$F\left(a_1,a_2;b_1,b_2,b_3;z\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_1^{\overline{n}}a_2^{\overline{n}}}{b_1^{\overline{n}}b_2^{\overline{n}}b_3^{\overline{n}}}\frac{z^n}{n!}.$$

Литература

[1] Гой Т. П. О дифференциальных уравнениях функций, порожденных центральными факториальными степенями / Тезисы Крымской междунар. матем. конф. Том 2. – Симферополь: Изд-во КНЦ НАНУ, 2013. – 4-5 с.