УДК 517.956.4

ЯВНЫЙ ВИД ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ВЫРОЖДЕННЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Малицкая А.П., Буртняк И.В.

Прикарпатский национальный университет имени В. Стефаника, Ивано-Франковск

E- mail: bvanya@meta.ua

Поступила в редакцию 23.08.2014 г.

Построено фундаментальное решения задачи Коши для одного класса вырождающихся параболических уравнений, обобщающих уравнения диффузии с инерцией, имеющих произвольное количество групп переменных, по которым есть вырождение параболичности.

Ключевые слова: уравнения Колмогорова, фундаментальное решение, вырожденные параболические уравнения

В этой статье мы рассматриваем задачу Коши для уравнения Колмогорова с конечным количеством групп переменных, по которым есть вырождение параболичности.

Колмогоров А.Н., Хермандер Л.В. [1,2] рассматривали уравнение диффузии с инерцией в случае когда вырождение параболичности есть только по одной переменной, Вебер М., Ильин А.М [3,4] и их ученики исследовали такие уравнения в случае когда есть вырождение по одной группой переменных, С. Д. Эйдельман, С. Д. Ивасишен [5,6] и их ученики разрабатывали теорию этих уравнений в случае 2-х групп пространственных переменных вырождения параболичности и с особенностями по временной переменной.

Детальный анализ развития теории вырожденных параболических уравнений произвольного порядка раскрыто в монографии С. Д. Эйдельмана, С. Д. Ивасишена, А. И. Кочубея [7], а также в работе [8]. В работах [9,10] рассмотрено 3 и более групп пространственных переменных, по которых есть вырождение параболичности. Мы рассматриваем уравнение, обобщающее уравнение Колмогорова, имеющее произвольное конечное число групп пространственных переменных, по которым есть вырождение и анализируем структуру фундаментального решения задачи Коши (ФРЗК).

1. Обозначение и постановка задачи.

Пусть $x := \left(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n_1}; x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n_2}; \ldots; x_{k1}, x_{k2}, \ldots, x_{kn_k}; \ldots; x_{p1}, x_{p2}, \ldots, x_{pn_p}; x_{p+11}, \ldots, x_{m1}\right)$,

$n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_p > 1$, $n_k \in N, k = \overline{1, p},\ p \in N, m \geq p,\ \sum_{k=1}^{p} n_k + m - p = n,\ x \in R^n$, $\xi \in R^n$.

Рассмотрим задачу Коши

$$\partial_t u(t,x) - \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{n_k} x_{kj} \partial_{x_{k\,j+1}} u(t,x) = \sum_{\nu=1}^{m} \partial^2_{x^2_{k1}} u(t,x), \tag{1}$$

$$u(t,x)\big|_{t=\tau} = u_0(x),\ 0 \leq \tau < t \leq T < +\infty,\ x \in R^n, \tag{2}$$

где $u_0(x)$ – достаточно гладкая финитная функция. Найдем ФРЗК (1), (2).

2. Построение ФРЗК (1), (2). Решение задачи (1), (2) будем искать в виде обратного преобразования Фурье от неизвестной функции $v(t,\xi)$, поэтому

$$u(t,x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{R^n} \exp\{i(x,\xi)\} v(t,\xi) d\xi. \tag{3}$$

Поскольку $\partial_t u(t,x) = F(\partial_t v(t,\xi)),\ x_{kj} \partial_{x_{kj+1}} u(t,x) = F\left(-\xi_{kj+1} \partial_{\xi_{kj}} v(t,\xi)\right)$, $\partial^2_{x^2_{k1}} u(t,x) = F\left(-\xi^2_{k1} v(t,\xi)\right)$, то задача (1), (2) сводится к задаче:

$$\partial_t v(t,\xi) - \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{n_k} \xi_{kj+1} \partial_{\xi_{k\,j}} v(t,\xi) = \sum_{k=1}^{m} \xi^2_{k1} v(t,\xi), \tag{4}$$

$$v(t,\xi)\big|_{t=\tau} = v_0(\xi),\ 0 \leq \tau < t \leq T < +\infty,\ \xi \in R^n. \tag{5}$$

Уравнению (4) соответствует система

$$dt = \frac{d\xi_{11}}{\xi_{12}} = \frac{d\xi_{12}}{\xi_{13}} = \ldots = \frac{d\xi_{1n_1-1}}{\xi_{1n_1}} = \frac{d\xi_{21}}{\xi_{22}} = \ldots = \frac{d\xi_{2n_2-1}}{\xi_{2n_2}} = \ldots = \frac{d\xi_{k1}}{\xi_{k2}} = \ldots = \frac{d\xi_{kn_k-1}}{\xi_{kn_k}} = \frac{d\xi_{p1}}{\xi_{p2}} = \ldots$$
$$= \frac{d\xi_{pn_p-1}}{\xi_{pn_p}} = \frac{dv}{-\sum_{k=1}^{m} \xi^2_{k1} v}. \tag{6}$$

Найдем $\sum_{k=1}^{m} n_k + 1 - p$ независимых интегралов системы (6). Из $dt = \frac{d\xi_{kn_k-1}}{\xi_{kn_k}},\ k = \overline{1, p},$

$$\xi_{kn_k-1} = t\xi_{kn_k} + c_{kn_k-1}, \tag{7}$$

а с $dt = \frac{d\xi_{kn_k-2}}{\xi_{kn_k-1}}, \ k = \overline{1, p},$ учитывая (7), получим

$$\xi_{kn_k-2} = \frac{t^2}{2!}\xi_{k,n_k} + tc_{kn_k-1} + c_{kn_k-2}\,, \qquad (8)$$

и т.д. с $dt = \frac{d\xi_{kn_k-j}}{\xi_{kn_k-j+1}},$

$$\xi_{kn_k-j} = \frac{t^j}{j!}\xi_{kn_k} + \frac{t^{j-1}}{(j-1)!}c_{kn_k-1} + \ldots + c_{kn_k-2}\,, \qquad (9)$$

продолжая эту процедуру, с $dt = \frac{d\xi_k}{\xi_{k2}}$ учитывая, $\xi_{k2} = \frac{t^{n_k-2}}{(n_k-2)!}\xi_{kn_k} + \frac{t^{n_k-3}}{(n_k-3)!}c_{kn_{k1}} + \ldots + c_{k2}$, имеем

$$\xi_{k1} = \frac{t^{n_k-1}}{(n_k-1)!}\xi_{kn_k} + \frac{t^{n_k-2}}{(n_k-2)!}c_{1n_k-1} + \ldots + c_{k2} + c_{k1}. \qquad (10)$$

Рассмотрев $dt = \frac{dv}{-\left[\sum_{k=1}^{p}\left(\frac{t^{n_k-1}}{(n_k-1)!}\xi_{kn_k} + \frac{t^{n_k-2}}{(n_k-2)!}c_{1n_k-1} + \ldots + c_{k,1}\right)^2 + \sum_{k=p+1}^{m}\xi_{k1}^2\right]v},$ найдем интеграл

$$v = c\exp\left\{-\int_{\tau}^{t}\sum_{k=1}^{p}\left(\frac{\beta^{n_k-1}}{(n_k-1)!}\xi_{kn_k} + \frac{\beta^{n_k-2}}{(n_k-2)!}c_{1n_k-1} + \ldots + c_{k,1}\right)^2 d\beta - \sum_{k=p+1}^{m}\xi_{k1}^2(t-\tau)\right\}, \quad t > \tau, \qquad (11)$$

с начального условия следует

$$\begin{gathered}v_0\left(\frac{\tau^{n_1-1}}{(n_1-1)!}\xi_{1n_1} + \frac{\tau^{n_1-2}}{(n_1-2)!}c_{1n_1-1} + \ldots + \tau c_{12} + c_{11};\ldots;\tau\xi_{1n_1} + c_{1n_1-1}, \xi_{1n_1}; \frac{\tau^{n_2-1}}{(n_2-1)!}\xi_{2n_2} + \right.\\ \frac{\tau^{n_2-2}}{(n_2-2)!}c_{2n_2-1} + \ldots + \tau c_{22} + c_{21};\ldots;\tau\xi_{2n_2} + c_{2n_2},\ldots\xi_{2n_2};\ldots;\frac{\tau^{n_p-1}}{(n_p-1)!}\xi_{p\,n_p} + \frac{\tau^{n_p-2}}{(n_p-2)!}c_{p\,n_p-1} + \ldots \qquad (12)\\ \left. + \tau c_{p2} + c_{p1}; \xi_{p+1\,1}; \xi_{p+2\,1},\ldots,\xi_{m\,1}\right) = c,\end{gathered}$$

тогда

$$
v=\exp\left\{-\sum_{k=1}^{m}\xi_{k1}^{2}(t-\tau)-\sum_{k=1}^{p}\int_{\tau}^{t}\left(\beta^{n_k-1}\xi_{kn_k}^{2}\left((n_k-1)!\right)^{-1}+\beta^{n_k-2}c_{kn_k-1}\left((n_k-2)!\right)^{-1}+\ldots+\beta c_{k2}+c_{k1}\right)^{2}d\beta\right\}
$$

$$
v_0\Big(\xi_{1n_1}\tau^{n_1-1}\left((n_1-1)!\right)^{-1}+\sum_{l=1}^{n_1-1}\left((n_1-1-l)!\right)^{-1}c_{1n_1-l}\tau^{n_1-1-l},\ldots,\tau\xi_{1n_1}+c_{1n_1-1};\xi_{1n_1};\ldots;\xi_{pn_p}\tau^{n_p-1}\left((n_p-1)!\right)^{-1}+ \tag{13}
$$

$$
\sum_{l=1}^{n_p-1}\left((n_p-1-l)!\right)^{-1}c_{pn_p-l}\tau^{n_p-1-l},\ldots,\tau\xi_{pn_p}+c_{pn_p-1};\xi_{pn_p};\xi_{p+11},\ldots,\xi_{m1}\Big).
$$

Заменим $c_{1n_1-1},\ldots,c_{11};c_{2n_2-1},\ldots,c_{21};\ldots;c_{pn_p-1},\ldots,c_{p1}$ их значениями, которые найдем из системы первых интегралов, $k=\overline{1,p}$;

$$
\begin{cases}
\xi_{kn_k-1}=t\xi_{kn_k}+c_{kn_k-1},\\
\xi_{kn_k-2}=\dfrac{t^2}{2!}\xi_{kn_k}+tc_{kn_k-1}+c_{kn_k-2},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\xi_{kn_k-j}=\dfrac{t^j}{j!}\xi_{kn_k}+\dfrac{t^{j-1}}{(j-1)!}c_{kn_k-1}+\ldots+tc_{kn_k-j+1}+c_{kn_k-j},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\xi_{k1}=\dfrac{t^{n_k-1}}{(n_k-1)!}\xi_{kn_k}+\dfrac{t^{n_k-1}}{(n_k-1)!}c_{kn_k-1}+\ldots+tc_{k2}+c_{k1}.
\end{cases}
$$

Отсюда $c_{kn_k-1}=\xi_{kn_k-1}-t\xi_{kn_k}$, $c_{kn_k-2}=\xi_{kn_k-2}-t\xi_{kn_k-1}+\dfrac{t^2}{2!}\xi_{kn_k},\ldots$

Пусть

$$
c_{kn_k-j}=\xi_{kn_k-j}-t\xi_{kn_k-j+1}+\ldots+\frac{(-t)^j}{j!}\xi_{kn_k}, \tag{14}
$$

покажем что

$$
c_{kn_k-(j+1)}=\xi_{kn_k-(j+1)}-t\xi_{kn_k-j}+\ldots+\frac{(-t)^{j+1}}{(j+1)!}\xi_{kn_k}. \tag{15}
$$

Действительно, поскольку

$$c_{kn_k-(j+1)}=\xi_{kn_k-(j+1)}-\frac{t^{j+1}}{(j+1)!}\xi_{kn_k}-\frac{t^j}{j!}c_{kn_k-1}-\ldots-\frac{t^{j-l+1}}{(j-l+1)!}c_{kn_k-l}-tc_{kn_k-j},$$ используя (14)

имеем

$$c_{kn_k-(j+1)}=\xi_{kn_k-(j+1)}-\frac{t^{j+1}}{(j+1)!}\xi_{kn_k}-\frac{t^j}{j!}\left(\xi_{kn_k-1}-t\xi_{kn_k}\right)-\frac{t^{j-l+1}}{(j-l+1)!}\left(\xi_{kn_k-l}-t\xi_{kn_k-l+1}+\frac{t^2}{2!}\xi_{kn_k-l+2}\right.$$

$$\left.+\frac{(-t)^{\mu}}{\mu!}\xi_{kn_k-l+\mu}+\ldots+\frac{(-t)^l}{l!}\xi_{kn_k}\right)-\ldots-t\left(\xi_{kn_k-j}-t\xi_{kn_k-j+1}+\frac{t^2}{2!}\xi_{kn_k-j+2}+\ldots+\frac{(-t)^j}{j!}\xi_{kn_k}\right)=$$

$$\xi_{kn_k-(j+1)}-t\,\xi_{kn_k-j}+\frac{t^2}{2!}\xi_{kn_k-l+2}+\ldots+\frac{(-t)^{j-l+1}}{(j-l+1)!}\xi_{kn_k-l}\Big[(-1)(-1)^{j-l+1}-C^1_{j-l+1}(-1)^{j-l}-C^2_{j-l+1}$$

$$(-1)^{j-l-1}-\ldots-C^{j-l}_{j-l+1}(-1)\Big]+\xi_{kn_k-1}\frac{t^j}{j!}\left[-(-1+1)^j+1\right]+\xi_{kn_k}\frac{(-t)^{j+1}}{(j+1)!}\left[-(-1+1)^j+1\right],$$

где $C^l_j=\dfrac{j!}{(j-l)!\,l!}$, $j\in N\cup\{0\}$.

Мы установили (15), поэтому (14) правильная. Учитывая (14), формула (13) сведется к виду.

$$v(t,\xi)=\exp\left\{-\sum_{k=1}^{m}\xi_{k1}^2(t-\tau)-\int_\tau^t\sum_{k=1}^{p}\left(\xi_{k1}+(\beta-t)\xi_{k2}+\ldots+(\beta-t)^{n_k-1}((n_k-1)!)^{-1}\xi_{kn_k}\right)^2d\beta\right\}$$

$$v_0\Big(\xi_{11}+(\tau-t)\xi_{12}+\ldots+\frac{(\tau-t)^{n_1-1}}{(n_1-1)!}\xi_{1n_1},\xi_{12}+(\tau-t)\xi_{13}+\ldots+\frac{(\tau-t)^{n_1-2}}{(n_1-2)!}\xi_{1n_1},\ldots,\xi_{1n_1-1}+(\tau-t)\xi_{1n_1},$$

$$\xi_{1n_1};\xi_{21}+(\tau-t)\xi_{22}+\ldots+\frac{(\tau-t)^{n_2-1}}{(n_2-1)!}\xi_{2n_2},\ldots,\xi_{2n_2-1}+(\tau-t)\xi_{2n_2},(\tau-t),\ldots,\xi_{p1}+(\tau-t)\xi_{p2}+\ldots$$

$$+\frac{(\tau-t)^{n_p-1}}{(n_p-1)!}\xi_{pn_p},\ldots,\xi_{pn_p-1}+(\tau-t)\xi_{pn_p},\xi_{pn_p};\xi_{p+1\,1},\ldots,\xi_{m\,1}\Big). \tag{16}$$

Имея (16), найдем $u(t,x)$:

$$u(t,x)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{R^n}\exp\left\{i(x,\xi)-\sum_{k=1}^{m}\xi_{k1}^2(t-\tau)-\sum_{k=1}^{p}\int_\tau^t\left((\beta-t)^{n_k-1}\xi_{kn_k}((n_k-1)!)^{-1}+(\beta-t)^{n_k-2}\right.\right.$$

$$\left.\left.\xi_{kn_k-1}((n_k-2)!)^{-1}+\ldots+(\beta-t)\xi_{k2k}+\xi_{k1}\right)^2d\beta\right\}v_0\Big(\xi_{11}+(\tau-t)\xi_{12}+\ldots+\xi_{1n_1}(\tau-t)^{n_1-1}$$

$$((n_1-1)!)^{-1},\ldots\xi_{1n_1-1}+(\tau-t)\xi_{1n_1},\xi_{1n_1},\ldots,\xi_{p1}+(\tau-t)\xi_{p2}+\ldots+(\tau-t)^{n_p-1}((n_p-1)!)^{-1},\ldots,$$

$$\xi_{pn_p-1}+(\tau-t)\xi_{pn_p},\xi_{pn_p},\xi_{p+1\,1},\ldots,\xi_{m\,1}\Big)d\xi. \tag{17}$$

В интеграле (17) сделаем замену переменных

$$\begin{cases} \xi_{k1} + (\tau - t)\xi_{k2} + \ldots + (\tau - t)^{n_k - 1} \xi_{kn_k} \left((n_k - 1)!\right)^{-1} = \alpha_{k1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \xi_{kj} + (\tau - t)\xi_{k\,j+1} + \ldots + (\tau - t)^{n_k - j} \xi_{kn_k} \left((n_k - 1)!\right)^{-1} = \alpha_{kj}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \xi_{k\,n_k - 1} + (\tau - t)\xi_{k\,n_k} = \alpha_{k\,n_k - 1}, \\ \xi_{k\,n_k} = \alpha_{k\,n_k}, \\ \xi_{p+1\,1} = \alpha_{p+1\,1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \xi_{m1} = \alpha_{m1}, \qquad k = \overline{1, p} \end{cases} \tag{18}$$

Из (18) имеем

$$\begin{cases} \xi_{k\,n_k - 1} = \alpha_{k\,n_k - 1} - (\tau - t)\alpha_{k\,n_k}, \\ \xi_{k\,n_k - 2} = \alpha_{k\,n_k - 2} - (\tau - t)\alpha_{k\,n_k - 1} + \dfrac{(t - \tau)^2}{2!}\alpha_{k\,n_k}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \xi_{k\,n_k - j} = \alpha_{k\,n_k - j} - (t - \tau)\alpha_{k\,n_k - j + 1} + \ldots + \dfrac{(t - \tau)^j}{j!}\alpha_{k\,n_k}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \xi_{k1} = \alpha_{k1} - (t - \tau)\alpha_{k2} + \ldots + \dfrac{(t - \tau)^{n_1 - 1}}{(n_1 - 1)!}\alpha_{kn_k}, \quad k = \overline{1, p}. \end{cases} \tag{19}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} u(t, x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{R^n} \exp\Bigg\{ & \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{n_k - 1} i x_{k_1 j} \left(\alpha_{k_1 j} + (t - \tau)\alpha_{k_2 j+1} + \ldots + \frac{(t - \tau)^{n_k - j}}{(n_k - j)!} \xi_{kn_k} \right) + \sum_{k=p+1}^{m} i x_{k1} \alpha_{k1} + \\ & \sum_{k=1}^{p} i x_{kn_k} \xi_{kn_k} - \sum_{k=p+1}^{m} \alpha^2{}_{k1} (t - \tau) - \sum_{k=1}^{p} \int_{\tau}^{t} \Big((\beta - \tau)^{n_k - 1} \alpha_{k, n_k} \left((n_k - 1)!\right)^{-1} + (\beta - \tau)^{n_k - 2} \\ & \alpha_{kn_{k-} - 1} \left((n_k - 2)!\right)^{-1} + \ldots + \alpha_{k,1} \Big)^2 d\beta \Bigg\} v_0(\alpha) d\alpha. \end{aligned} \tag{20}$$

Поскольку $v_0(\alpha) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{R^n} \exp\{-i(y, \alpha)\} u_0(y) dy$, то $u(t, x) = \int_{R^n} G(t - \tau, x, \xi) u_0(\xi) d\xi$, где $G(t - \tau, x, \xi)$ – ФРЗК, то из (20) легко получить формулу $G(t - \tau, x, \xi)$.

3. Фундаментальное решение и его свойства.

С формулы (20) имеем для $t > \tau, x \in R^n, \xi \in R^n$.

$$
\begin{aligned}
G(t-\tau,x,\xi) = (2\pi)^{-n}\int_{R^n}\exp\Bigg\{-\sum_{k=1}^{p} i\Big[\big(x_{k1}-\xi_{k1}\big)\alpha_{k1}+\big(x_{k2}-\xi_{k2}+(t-\tau)x_{k1}\big)\alpha_{k2}+\ldots \\
+\left(x_{kj}-\xi_{kj}+x_{kj-1}(t-\tau)+\ldots+\frac{(t-\tau)^{j-1}}{(j-1)!}x_{k1}\right)\alpha_{kj}+\ldots+\Big(x_{kn_k-1}-\xi_{kn_k-1}+x_{kn_k-2}(t-\tau)+\ldots \\
+\frac{(t-\tau)^{n_k-2}}{(n_k-2)!}x_{n1}\Big)\alpha_{kn_k-1}+\left(x_{kn_k}-\xi_{kn_k}+(t-\tau)x_{kn_k-1}+\ldots+\frac{(t-\tau)^{n_k-1}}{(n_k-1)!}x_{n1}\right)\alpha_{kn_k}\Big]+ \\
\sum_{k=p+1}^{m} i\big(x_{k1}-\xi_{k1}\big)\alpha_{k1}-\sum_{k=p+1}^{m}\alpha_{k1}^2(t-\tau)-\sum_{k=1}^{p}\int_{\tau}^{t}\left(\alpha_{k1}+(\beta-\tau)\alpha_{k2}+\ldots+\frac{(\beta-\tau)^{n_k-1}}{(n_k-1)!}\alpha_{kn_k}\right)^2 d\beta\Bigg\}d\alpha.
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Для того чтобы найти (21), рассмотрим интеграл:

$$
I_k(t-\tau,\alpha) := \int_{\tau}^{t}\left(\alpha_{k1}+(\beta-\tau)\alpha_{k2}+\ldots+\frac{(\beta-\tau)^{n_k-1}}{(n_k-1)!}\alpha_{kn_k}\right)^2 d\beta, \tag{22}
$$

сделав замену переменных интегрирования $\theta=\dfrac{\beta-\tau}{t-\tau}$, получим

$$
I_k(t-\tau,\alpha) = (t-\tau)\int_0^1\left(\alpha_{k1}+\theta(t-\tau)\alpha_{k2}+\ldots+\frac{(\theta(t-\tau))^{n_k-1}}{(n_k-1)!}\alpha_{kn_k}\right)^2 d\theta.
$$

В (21) заменим $\alpha'_{k1}(t-\tau)^{-\frac{1}{2}}=\alpha_{k1},\ldots,\alpha'_{k1}(t-\tau)^{-\frac{2n_k-1}{2}}((n_k-1)!)=\alpha_{kn_k}, k=\overline{1,p}$,

$\alpha'_{k1}(t-\tau)^{-\frac{1}{2}}=\alpha_{k1}, k=\overline{p+1,m}$, и переобозначим α' на α , тогда

$$
\begin{aligned}
G(t-\tau;x;\xi) = (2\pi)^{-n}\int_{R^n}\exp\Bigg\{-\sum_{k=1}^{p} i\Big[\big(x_{k1}-\xi_{k1}\big)\alpha_{k1}(t-\tau)^{-\frac{1}{2}}+\big(x_{k2}-\xi_{k2}+(t-\tau)x_{k1}\big)\alpha_{k2} \\
(t-\tau)^{-\frac{3}{2}}+\ldots+\left(x_{kj}-\xi_{kj}+(t-\tau)x_{kj-1}+\ldots+\frac{(t-\tau)^{j-1}}{(j-1)!}x_{k1}\right)\alpha_{kj}(t-\tau)^{-\frac{2j-1}{2}}(j-1)!+\ldots \\
+\left(x_{kn_k}-\xi_{kn_k}+(t-\tau)x_{kn_k-1}+\ldots+\frac{(t-\tau)^{n_k-1}}{(n_k-1)!}x_{k1}\right)\alpha_{kn_k}(t-\tau)^{-\frac{2n_k-1}{2}}(n_k-1)!\Big]-\sum_{k=p+1}^{m}\big(x_{k1}-\xi_{k1}\big)\alpha_{k1} \\
(t-\tau)^{-\frac{1}{2}}-\sum_{k=p+1}^{m}\alpha_{k1}^2-\sum_{k=1}^{p}\int_0^1\big(\alpha_{k1}+\theta\alpha_{k2}+\ldots+\theta^{n_k-1}\alpha_{kn_k}\big)^2 d\theta\Bigg\}d\alpha(t-\tau)^{-\mu}\prod_{k=1}^{p}\prod_{k=0}^{n_k-1}k!,
\end{aligned}
\tag{23}
$$

где $\mu=\dfrac{m}{2}+\dfrac{\sum_{k=1}^{p}(n_k-1)^2}{2}$.

Вычислим интеграл $I=\int_0^1\big(\alpha_{k1}+\theta\alpha_{k2}+\ldots+\theta^{n_k-1}\alpha_{kn_k}\big)^2 d\theta$:

$$I=\alpha_{k1}^2+\frac{\alpha_{k2}^2}{3}+\frac{\alpha_{k3}^2}{5}+\ldots+\frac{\alpha_{kn_k}^2}{2n_k-1}+\alpha_{k1}\alpha_{k2}+\ldots+2\frac{\alpha_{k1}\alpha_{kj}}{j}+\ldots+2\frac{\alpha_{k1}\alpha_{kn_k}}{n_k}+\ldots$$
$$+2\frac{\alpha_{kj}\alpha_{k(j+\nu)}}{2j+\nu-1}+\ldots+\frac{\alpha_{kn_k-1}\alpha_{kn_k}}{n_k-1}. \tag{24}$$

В (24) выделим полные квадраты

$$I=\left(\sum_{j=1}^{n_k}\frac{\alpha_{kj}}{j}\right)^2+3\left(\sum_{j=2}^{n_k}\frac{\alpha_{kj}(j-1)}{j(j+1)}\right)^2+5\left(\sum_{j=3}^{n_k}\frac{\alpha_{kj}(j-1)(j-2)}{j(j+1)(j+2)}\right)^2+\ldots+$$
$$(2k_0-1)\left(\sum_{j=k_0}^{n_k-1}\frac{\alpha_{kj}(j-1)\ldots(j-k_0+1)}{j(j+1)\ldots(j+k_0-1)}\right)^2+\ldots+(2n_k-1)\left(\frac{\alpha_{kn_k}(n_k-1)!}{n_k\ldots(2n_k-1)}\right)^2. \tag{25}$$

Имея (25), сделаем замену переменных интегрирования в интеграле (23)

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n_k}\frac{\alpha_{kj}}{j}=s_{k1},\\ \sum_{j=2}^{n_k}\frac{\alpha_{kj}(j-1)}{j(j+1)}=s_{k2},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \sum_{j=k_0}^{n_k-1}\frac{\alpha_{kj}(j-1)\ldots(j-k_0+1)}{j(j+1)\ldots(j+k_0-1)}=s_{kj},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \frac{\alpha_{kn_k}(n_k-1)!}{n_k\ldots(2n_k-1)}=s_{kn_k}, \qquad k=\overline{1,p},\\ \alpha_{k1}=s_{k1}, \qquad k=\overline{p+1,m}.\end{cases} \tag{26}$$

Разрешив (26) относительно α, получим

$$\alpha_{k1} = s_{k1} - 3s_{k2} + 5s_{k3} - 7s_{k4} + \ldots + (-1)^{n_k-1}(2n_k - 1)s_{kn_k},$$

$$\frac{\alpha_{k1}}{2\cdot 3} = s_{k2} - 5s_{k3} + \frac{4\cdot 7}{2!}s_{k4} - \frac{4\cdot 5\cdot 9}{3!}s_{k5} + \frac{4\cdot 5\cdot 6\cdot 11}{4!}s_{k6} + \ldots + \frac{(-1)^{n_k-1}}{(n_k-2)}4\cdot 5\cdot\ldots\cdot n_k(2n_k-1)s_{kn_k},$$

……………………………………………………………………………………………

$$\frac{\alpha_{kj}(j-1)!}{j(j+1)\ldots(2j-1)} = s_{kj} - (2j+1)s_{kj+1} + \frac{2j(2j+3)}{2!}s_{kj+2} - \frac{2j(2j+1)(2j+5)}{3!}s_{kj+3} +$$
$$\frac{2j(2j+1)(2j+2)(2j+7)}{4!}s_{kj+4} + \ldots + \frac{(-1)^{\nu-j}2j(2j+1)\ldots(j+\nu-2)(2\nu-1)}{(\nu-j)!}s_{k\nu} + \ldots$$
$$+\frac{(-1)^{n_k-j}2j(2j+1)\ldots(n_k+j-2)(2n_k-1)}{(n_k-j)!}s_{kn_k},\ldots,$$

$$\frac{\alpha_{kn_k-1}(n_k-2)!}{(n_k-1)\ldots(2n_k-3)} = s_{kn_k-1} - (2n_k-1)s_{kn_k},\quad \frac{\alpha_{kn_k-1}(n_k-1)!}{n_k(n_k+1)(2n_k-1)} = s_{kn_k},\ \ k=\overline{1,p},$$
$$s_{k1} = \alpha_{k1},\qquad k = \overline{p+1,m}.$$

Из этой системы найдем $\alpha_{kj}(j-1)!,\ \ j=\overline{1,p}$ и подставим в (23), тогда $G(t-\tau;x;\xi)$ будет иметь вид

$$G(t-\tau;x;\xi) = (2\pi)^{-n}\int_{R^n}\exp\Bigg\{-\sum_{\nu=1}^{p}\Bigg[\sum_{k=1}^{n_\nu}(2k-1)s_{\nu k}^2 - i\Bigg(\sum_{k=1}^{n_\nu}(-1)^{k-1}(2k-1)s_{\nu k}\Bigg)(x_{\nu 1}-\xi_{\nu 1})$$
$$(t-\tau)^{-\frac{1}{2}} - 3!\,i(t-\tau)^{-\frac{3}{2}}(x_{\nu 2}-\xi_{\nu 2}+(t-\tau)x_{\nu 1})\Bigg(s_{\nu 2} - 5s_{\nu 3} + \frac{4\cdot 7}{2!}s_{\nu 4} - \frac{4\cdot 5\cdot 9}{3!}s_{\nu 5} - \ldots$$
$$-\frac{(-1)^{n_\nu-2}}{(n_\nu-2)!}4\cdot 5\ldots n_\nu(2n_\nu-1)s_{\nu n_\nu}\Bigg) - \ldots - k\ldots(2k-1)(t-\tau)^{-\frac{2k-1}{2}}i\big(s_{\nu k} - (2k+1)s_{\nu k+1} +$$
$$+\frac{2k(2k+3)}{2!}s_{\nu k+2} - \frac{2k(2k+1)(2k+5)}{3!}s_{\nu k+3} + \ldots + \frac{2k(2k+1)(2k+2)(2k+7)}{4!}s_{\nu k+4} + \ldots$$
$$+(-1)^{j-k}s_{\nu j}\frac{2k(2k+1)\ldots(j+k-2)(2j-1)}{(j-k)!} + \ldots + \frac{(-1)^{n_\nu-k}2k(2k+1)\ldots(n_\nu+k-2)(2n_\nu-1)}{(n_\nu-k)!}s_{\nu n_\nu}$$
$$\Bigg(\sum_{j=0}^{k-1}x_{\nu k-j}\frac{(t-\tau)^j}{j!} - \xi_{\nu k}\Bigg)\Bigg) + \ldots + n_\nu(n_\nu-1)\ldots(2n_\nu-1)(t-\tau)^{-\frac{(2n_\nu-1)}{2}}is_{\nu n_\nu}\Bigg(\sum_{j=0}^{n_\nu-1}x_{n_\nu-j}\frac{(t-\tau)^j}{j!} - \xi_{\nu n_\nu}\Bigg)$$
$$-\sum_{k=p+1}^{m}s_{k1}^2 + i\sum_{k=p+1}^{m}(x_{k1}-\xi_{k1})s_{k1}(t-\tau)^{-\frac{1}{2}}\Bigg]\Bigg\}ds\,(t-\tau)^{-\mu}\prod_{\nu=1}^{p}\prod_{j=1}^{n_\nu}k(k+1)\ldots(2k-1). \tag{27}$$

В (27) сгруппируем подобные члены относительно $s_{\nu j}$, будем иметь

$$G(t-\tau,x,\xi)=(2\pi)^{-n}\int_{R^n}\exp\left\{-i\sum_{\nu=1}^{p}\left[s_{\nu1}(t-\tau)^{-\frac{1}{2}}(x_{\nu1}-\xi_{\nu1})+s_{\nu2}(t-\tau)^{-\frac{3}{2}}3!(x_{\nu2}-\xi_{\nu2}+\right.\right.$$

$$(x_{\nu1}+\xi_{\nu1})(t-\tau)2^{-1})+s_{\nu3}(t-\tau)^{-\frac{5}{2}}3\cdot4\cdot5(x_{\nu3}-\xi_{\nu3}+(x_{\nu2}+\xi_{\nu2})(t-\tau)2^{-1}+(x_{\nu1}-\xi_{\nu1})$$

$$(t-\tau)^2 12^{-1})+s_{\nu4}(t-\tau)^{-\frac{7}{2}}4\cdot5\cdot6\cdot7(x_{\nu4}-\xi_{\nu4}+(x_{\nu3}+\xi_{\nu3})(t-\tau)2^{-1}+(x_{\nu2}-\xi_{\nu2})$$

$$(t-\tau)^2 10^{-1}+(t-\tau)^2(x_{\nu1}+\xi_{\nu1})120^{-1}\big)+\ldots+n_\nu(n_\nu+1)\ldots(2n_\nu-1)s_{\nu n_\nu}\left(\sum_{j=0}^{n_\nu-1}x_{\nu n_\nu-j}\frac{(t-\tau)^j}{j!}-\xi_{\nu n_\nu}\right.$$

$$-(t-\tau)\left(\sum_{j=0}^{n_\nu-2}\frac{x_{\nu n_\nu-1-j}(t-\tau)^j}{j!}-\xi_{\nu n_\nu-1}\right)2^{-1}+(t-\tau)^2\left(\sum_{j=0}^{n_\nu-3}\frac{x_{n_\nu-2-j}(t-\tau)^j}{j!}-\xi_{\nu n_\nu-2}\right)\frac{(n_\nu-2)}{4(2n_\nu-3)}+\ldots$$

$$+(-1)^{n_\nu-k}(t-\tau)^{n_\nu-k}\big((n_\nu-k)!\big)^{-1}2k(2k+1)\ldots(2k+(n_\nu-k)-2)(2k+2(n_\nu-k)-1)$$

$$\big(n_\nu\ldots(2n_\nu-1)\big)^{-1}\left(\sum_{j=0}^{k-1}\frac{x_{\nu k-1-j}(t-\tau)^j}{j!}-\xi_{\nu k}\right)+\ldots+(-1)^{n_\nu-2}(t-\tau)^{n_\nu-2}(x_{\nu2}-\xi_{\nu2}+(t-\tau)x_{\nu1})$$

$$\big(2(n_\nu+1)\ldots(2n_\nu-3)!\big)^{-1}+(-1)^{n_\nu-1}(t-\tau)^{n_\nu-1}(x_{\nu1}-\xi_{\nu1})\big(n_\nu\ldots(2n_\nu-2)!\big)^{-1}\Big)\Big]-\sum_{\nu=1}^{p}\sum_{k=1}^{n_\nu}(2k-1)s_{\nu k}^2$$

$$\left.-\sum_{\nu=p+1}^{m}\left[s_{\nu1}^2-i(x_{\nu1}-\xi_{\nu1})s_{\nu1}(t-\tau)^{-\frac{1}{2}}\right]\right\}ds(t-\tau)^{-\mu}\prod_{\nu=1}^{p}\prod_{k=1}^{n_\nu}k(k+1)\ldots(2k-1). \tag{28}$$

Анализируя (28), имеем, что $G(t-\tau,x,\xi)$ при $t>\tau, x\in R^n, \xi\in R^n$ является преобразованием Фурье по s функции $(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\exp\left\{-\sum_{\nu=1}^{p}\sum_{k=1}^{n_p}(2k-1)s_{\nu k}^2-\sum_{\nu=p+1}^{m}s_{\nu1}^2\right\}(t-\tau)^{-\mu}\prod_{\nu=1}^{p}\prod_{k=1}^{n_\nu}k(k+1)\ldots(2k-1)$ в соответственно подобранных точках, следовательно

$$G(t-\tau,x,\xi)=(2\sqrt{\pi})^{-n}\exp\left\{-\sum_{\nu=1}^{m}\left|x_{\nu1}-\xi_{\nu1}\right|^2 4^{-1}(t-\tau)^{-1}-\sum_{\nu=1}^{p}3\left[\left|x_{\nu2}-\xi_{\nu2}+(x_{\nu1}+\xi_{\nu1})(t-\tau)2^{-1}\right|^2\right.\right.$$

$$(t-\tau)^{-3}+180\left|x_{\nu3}-\xi_{\nu3}+(x_{\nu2}+\xi_{\nu2})(t-\tau)2^{-1}+(x_{\nu1}-\xi_{\nu1})(t-\tau)^2 12^{-1}\right|^2(t-\tau)^{-5}+2520\left|x_{\nu4}-\right.$$

$$\left.\xi_{\nu4}+(x_{\nu3}+\xi_{\nu3})(t-\tau)2^{-1}+(x_{\nu2}-\xi_{\nu2})(t-\tau)^2 10^{-1}+(x_{\nu1}-\xi_{\nu1})(t-\tau)^3 120^{-1}\right|^2(t-\tau)^{-7}+\ldots+$$

$$(k-1)^2k^2\ldots(2k-3)^2(2k-1)(t-\tau)^{-(2k-1)}\left|\sum_{j=0}^{k-1}\frac{x_{\nu k-j}(t-\tau)^j}{j!}-\xi_{\nu k}-\left(\sum_{j=0}^{k-2}\frac{x_{\nu k-1-j}(t-\tau)^j}{j!}-\xi_{\nu k-1}\right)\right.$$

$$(t-\tau)2^{-1}+\ldots+(-1)^{k-l}\frac{(t-\tau)^{(k-l)}}{(k-l)!}\frac{2l(2l+1)\ldots(2l+(k-l)-2)(2l+2(k-l)-1)}{k\ldots(2k-1)}$$

$$\left(\sum_{j=0}^{l-1}\frac{x_{\nu l-j}(t-\tau)^j}{j!}-\xi_{\nu l}\right)+\ldots+\frac{(-1)^{k-2}(t-\tau)^{(k-2)}(x_{\nu2}-\xi_{\nu2}+(t-\tau)x_{\nu1})}{2(k+1)\ldots(2k-3)}+\frac{(-1)^{k-1}(t-\tau)^{(k-1)}}{k\ldots(2k-2)}$$

$$\left.(x_{\nu1}-\xi_{\nu1})\right|^2+\ldots+(n_\nu-1)^2n_\nu^2(n_\nu+1)^2\ldots(2n_\nu-3)^2(2n_\nu-1)(t-\tau)^{-(2n_\nu-1)}\left|\sum_{j=0}^{n_\nu-1}\frac{x_{\nu n_\nu-j}(t-\tau)^j}{j!}-\right.$$

$$\xi_{\nu n_\nu}-(t-\tau)2^{-1}\left(\sum_{j=0}^{n_\nu-2}\frac{x_{\nu n_\nu-1-j}(t-\tau)^j}{j!}-\xi_{\nu n_\nu-1}\right)+(t-\tau)^2\left(\sum_{j=0}^{n_\nu-3}\frac{x_{\nu n_\nu-2-j}(t-\tau)^j}{j!}-\xi_{\nu n_\nu-2}\right)$$

$$\frac{(n_\nu-2)}{4(2n_\nu-3)}+\ldots+(-1)^{n_\nu-k}\left(\sum_{j=0}^{k-1}\frac{x_{\nu k-j}(t-\tau)^j}{j!}-\xi_{\nu k}\right)\frac{(t-\tau)^{n_\nu-k}}{(n_\nu-k)!}\frac{2k\ldots(n_\nu+k-2)}{n_\nu\ldots(2n_\nu-2)} \tag{29}$$

$$\left(\sum_{j=0}^{k-1}\frac{x_{\nu k-j}(t-\tau)^j}{j!}-\xi_{\nu k}\right)+\ldots+(-1)^{n_\nu-2}\frac{(t-\tau)^{n_\nu-2}(x_{\nu2}-\xi_{\nu2}+(t-\tau)x_{\nu1})}{2(n_\nu+1)\ldots(2n_\nu-3)}+(-1)^{n_\nu-1}(t-\tau)^{n_\nu-1}$$

$$\left.\left.\left.\frac{(x_{\nu1}-\xi_{\nu1})}{n_\nu\ldots(2n_\nu-3)}\right|^2\right]\right\}(t-\tau)^{-\mu}\prod_{\nu=1}^{p}\prod_{k=1}^{n_\nu}k(k+1)\ldots(2k-2)\ldots(2k-1)^{-\frac{1}{2}}.$$

Формула (29) отражает сдвиги по x, если свести подобные члены, то получим.

$$G(t-\tau,x,\xi)=2^{-n}\pi^{-\frac{n}{2}}\prod_{\nu=1}^{p}\prod_{k=1}^{n_\nu}k(k+1)\ldots(2k-2)(2k-1)^{-\frac{1}{2}}(t-\tau)^{-\mu}\exp\left\{-\sum_{\nu=1}^{m}\left|x_{\nu1}-\xi_{\nu1}\right|^2(t-\tau)^{-1}\right.$$

$$4^{-1}-\sum_{\nu=1}^{p}\left[3\left|x_{\nu2}-\xi_{\nu2}+(x_{\nu1}+\xi_{\nu1})(t-\tau)2^{-1}\right|^2(t-\tau)^{-3}+180\left|x_{\nu3}-\xi_{\nu3}+(x_{\nu2}+\xi_{\nu2})(t-\tau)2^{-1}+\right.\right.$$

$$\left.+(x_{\nu1}-\xi_{\nu1})(t-\tau)^2 12^{-1}\right|^2(t-\tau)^{-5}+2520\left|x_{\nu4}-\xi_{\nu4}+(x_{\nu3}+\xi_{\nu3})(t-\tau)2^{-1}+(x_{\nu2}-\xi_{\nu2})(t-\tau)^2\right.$$

$$\left.10^{-1}+(x_{\nu1}-\xi_{\nu1})(t-\tau)^3 120^{-1}\right|^2(t-\tau)^{-7}+\ldots+(k-1)^2k^2\ldots(2k-3)^2(2k-1)(t-\tau)^{-(2k-1)}$$

$$\left|x_{\nu k}-\xi_{\nu k}+(t-\tau)(x_{\nu k-1}-\xi_{\nu k-1})2^{-1}+\ldots+\left(x_{\nu k-j}-(-1)^j\xi_{\nu k-j}\right)(t-\tau)^j(j+1)\ldots(k+j-2)((j-1)!)^{-1}\right.$$

$$\left.((k-1)k\ldots(2k-3))^{-1}+\ldots+\left(x_{\nu1}-(-1)^{k-1}\xi_{\nu1}\right)(t-\tau)^{k-1}(2(k-1)k\ldots(2k-3))^{-1}\right|^2+\ldots+(n_\nu-1)^2$$

$$n_\nu^2\ldots(2n_\nu-3)^2(2n_\nu-1)(t-\tau)^{-(2n_\nu-1)}\left|x_{n_\nu}-\xi_{n_\nu}+(t-\tau)(x_{n_\nu-1}-\xi_{n_\nu-1})2^{-1}+\ldots+\left(x_{\nu1}-(-1)^{n_\nu-1}\xi_{\nu1}\right)\right.$$

$$\left.\left.\left.(t-\tau)^{n_\nu-1}(2(n_\nu-1)\ldots(2n_\nu-3))^{-1}\right|^2\right]\right\},\ t-\tau>0,\ x\in R^n,\ \xi\in R^n. \tag{30}$$

Полученные результаты можно перенести на системы Колмогорова [11,12].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kolmogorov A.N. Zufällige Bewegungen (Zur Theorie der Brownchen Bewegung) // Ann. Math. –1934. –.Vol.35. –P.116-117.
2. Хермандер Л. В. Линейные дифференциальные операторы с частными производными. — М.: Мир, 1965. — 379 с.
3. Weber M. The fundamental solution of degenerate partial differential equation of parabolic type. Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 71, No. 1 (Jul., 1951), pp. 24-37.
4. Ильин А. М. Об одном классе ультрапараболических уравнений, ДАН СССР т.159, №6 (1964), 1214–1217.
5. Малицкая А.П., Эйдельман С.Д. О фундаментальных решениях и стабилизации решения задачи Коши для одного класса вырождающихся параболических уравнений. Дифф. уравн., т.11,№ 7,1975 г., с.1316-1330.
6. Eidelnian S.D., Ivasyshen S. D., Malytska H. P. A modified Levi method: development and application. Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr. Mat. Priridozn. Tekh. Nauki,-1998.- 5, P. 14-19.
7. Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., Kochubei A. N. Analytic methods in the theory of differential and pseudodifferential equations of parabolic type. – Basel: BirkhaËuser, 2004. – 390 p.
8. Івасишен С.Д., Пасічник Г. С. Про задачу Коші для 2b-параболічних систем зі зростаючими коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 2000. – 52, № 11. – С. 1484–1496.
9. Малицька Г. П. Побудова фундаментального розв'язку задачі Коші для рівняння дифузії із змінною інерцією// Мат. мет. та фіз.-мех. поля–1999.– 42. №3 – С.56–60.
10. Малицька Г. П. Про структуру фундаментального розв'язку задачі Коші для еліптико-параболічних рівнянь, що узагальнюють рівняння дифузії з інерцією// Вісн. нац. ун-ту "Львів. політехніка" Сер. Прикл. матем. –2000.–№411. –С.221–228.
11. Малицька Г. П. Системи рівнянь типу Колмогорова// Укр. мат. журн.–2008.– 60. №12 – С.1650–1663.
12. Malyts'ka H.P. Fundamental solution matrix of the Cauchy problem for a class of systems of Kolmogorov type equations// Differential Equations.– 2010.– 46 (5), P.753–757.