УДК 336.71

Буртняк Іван Володимирович,

Малицька Ганна Петрівна

Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника

ЗАСТОСУВАННЯ ШЛЯХОЗАЛЕЖНОЇ МОДЕЛІ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ВОЛАТИЛЬНОСТІ ІНДЕКСУ ПФТС

У теорії ціноутворення опціонів Блека-Мертона-Шоулза, базовий актив моделюється як геометричний броунівський рух, динаміка якого задається як

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t. \tag{1}$$

де r – локальна безризикова відсоткова ставка, а σ – волатильність, якщо параметри є константами, то модель (1) дає формули для простих опціонів.

У моделі місцевої змінної змінна є детермінованою функцією часу та поточної ціни базового активу. Для броунівського руху W позначимо через S_t біржову ціну, а через M_t і D_t відповідно тенденції і відхилення процесів

$$M_t = \lambda e^{-\lambda t} \int_{-\infty}^{t} e^{\lambda s} Z_S ds, \quad \lambda > 0, \quad D_t = Z_t - M_t, \tag{2}$$

де $Z_t = \log\left(e^{-rt} S_t\right)$ є логарифмом дисконтної ціни процесу. Функції $e^{\lambda s}$ в (2) є ваги, а параметр λ описує ставку, за якою знижуються ціни. Припустимо що S_t є процесом Іто, розв'язком стохастичного диференціального рівняння

$$dS_t = \mu\left(D_t\right) S_t dt + \sigma\left(D_t\right) S_t dW_t, \tag{3}$$

де μ і $\sigma > 0$ є обмеженими функціями, які задовольняють сформульовані гіпотези, з тим щоб гарантувати, що система (2)–(3) має розв'язок. Особливістю моделі є те, що процес $\left(S_t, D_t\right)$ марковський. Ціна U опціону з терміном погашення T, має вигляд

$$U\left(S_t, t\right) = e^{-r(T-t)} K u\left(r\left(T-t\right) + \log\left(S_t / K\right),\ M_t - \log K, T - t\right),$$

де K – початкова ціна опціону, $u = u\left(x, y, t\right)$ є розв'язком задачі Коші

$$\frac{\sigma^2(x-y)}{2}(\partial_{xx}u-\partial_x u)+(x-y)\lambda\partial_y u-\partial_t u, \quad \text{в } R^2\times[0,T], \tag{4}$$

$$u(x,y,0)=(e^x-1)^+ \quad \text{при } (x,y)\in R^2. \tag{5}$$

Введемо до розгляду модель для цін активів зі змінною залежною від минулого. Розглянемо середню вагу φ, яка є невід'ємною, кусково-неперервною і інтегровною функцією на $(-\infty,T]$ і строго додатною на $[0,T]$

$$\Phi(t)=\int_{-\infty}^{t}\varphi(s)ds, \tag{6}$$

якщо φ має компактний носій, то в цьому випадку область інтегрування в (6) обмежена. Позначимо через r безризикову ставку. Визначимо процес

$$M_t=\frac{1}{\Phi(t)}\int_{-\infty}^{t}\varphi(s)Z_s ds, \text{ або еквівалентно } dM_t=\frac{\varphi(t)}{\Phi(t)}(Z_t-M_t)dt, \tag{7}$$

де Z_t є розв'язком диференціального рівняння

$$dZ_t=\mu(Z_t-M_t)dt+\sigma(Z_t-M_t)dW_t, \tag{8}$$

а μ і σ обмежені неперервні за Гельдером функції та $\sigma>0$.

На рис. 1 наведено величину імплікованої волатильності для індексу ПФТС. Досліджувані змінні згруповані по областях значень відхилення D_t. Проаналізувавши рис. 1, можемо зробити висновок, що значення імплікованої волатильності зростає при зменшенні D_t. Це означає, що існує тісний взаємозв'язок між змінною та ринковими цінами.

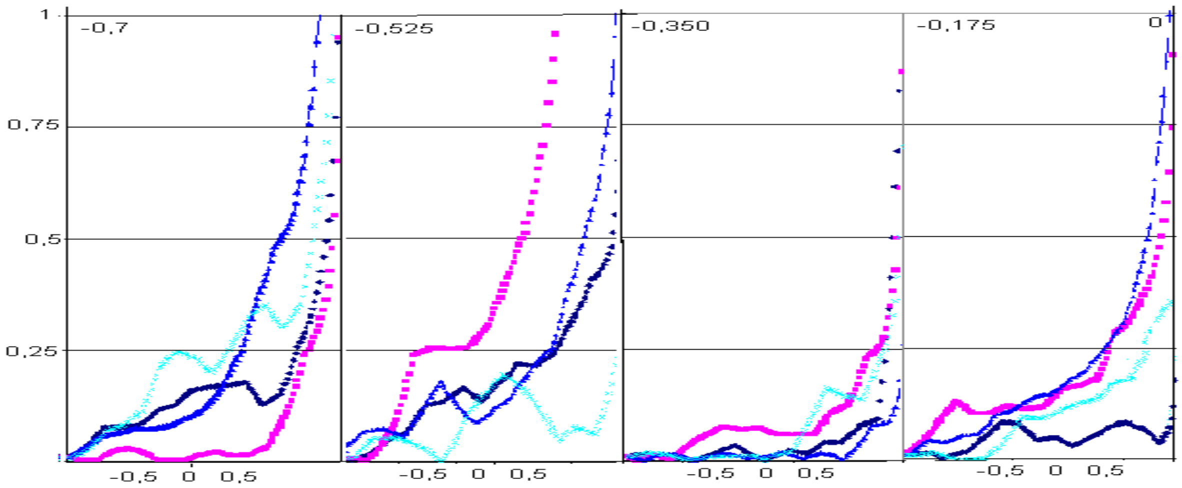

Рис.1. Імплікована волатильність за згрупованими значеннями тренду відхилення D_t для індексу ПФТС в 2011 році.

Використовуючи модель шляхозалежної волатильності, побудовано тренд D_t і за допомогою методу найменших квадратів (МНК), знайдено волатильність індексу ПФТС, за допомогою моделі $\sigma = a + bD_t + cD_t^2$, результати розрахунку наведено на рис. 2., оцінки одержані з точністю до 0,95.

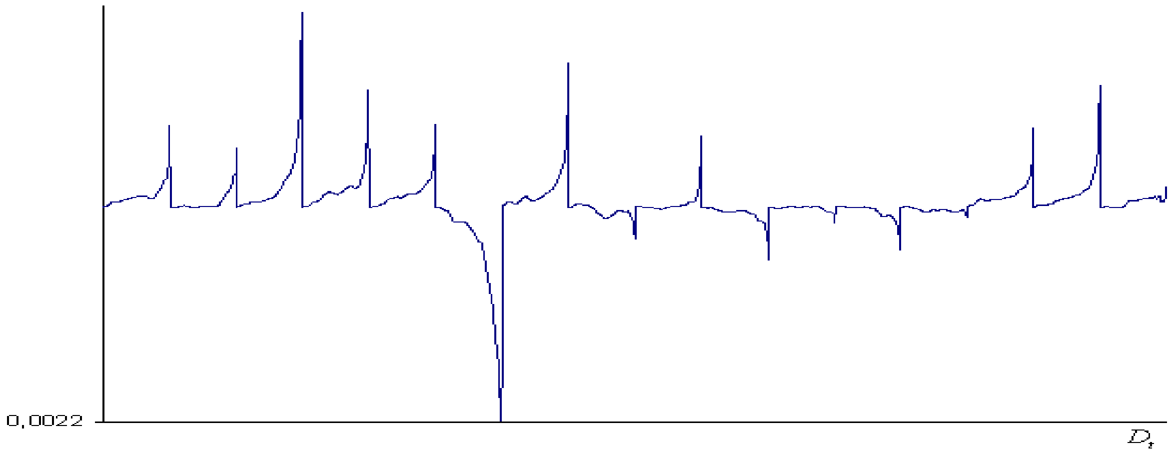

Рис. 2. Тренд волатильності індексу ПФТС знайдений за МНК.

Зауважимо також, що шляхозалежність волатильності включає інформацію про минуле, і потім, коли все налаштоване на ринку, модель відображає позитивні або негативні тенденції активу. Завдяки цьому, модель користується великою популярністю серед вчених і практиків.

Література

1. Буртняк І.В., Малицька Г.П. Дослідження волатильності за допомогою модифікації моделі Блека–Шоулза // Бизнес Информ.–2011.–№(5)1.–С.72–75.