УДК 336.71

ОБЧИСЛЕННЯ ЦІНИ ДВОБАР'ЄРНОГО ОПЦІОНУ З ТРИВИМІРНОЮ СТОХАСТИЧНОЮ ВОЛАТИЛЬНІСТЮ

Буртняк Іван Володимирович,

Малицька Ганна Петрівна,

Спектральна теорія стала важливим інструментом для аналізу дифузії, а саме в дослідженні розвинень за власними функціями лінійних операторів.
Нас цікавлять оцінки похідних, тому ми розглянемо динаміку (X,Y,Z) за оцінкою міри з нейтральним ризиком, яку ми позначимо, як $\widetilde{\mathbb{P}}$

$$\begin{cases} dX_t = \big(b(X_t) - a(X_t)f(Y_t,Z_t)\Omega(Y_t,Z_t)\big)dt + a(X_t)f(Y_t,Z_t)d\widetilde{W}_t^x, \\ dY_t = \left(\frac{1}{\epsilon}\alpha(Y_t) - \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\beta(Y_t)\Lambda(Y_t,Z_t)\right)dt + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\beta(Y_t)d\widetilde{W}_t^y, \\ dZ_t = \left(\delta c(Z_t) - \sqrt{\delta}g(Z_t)\Gamma(Y_t,Z_t)\right)dt + \sqrt{\delta}g(Z_t)d\widetilde{W}_t^z, \\ d\langle\widetilde{W}^x,\widetilde{W}^y\rangle_t = \rho_{xy}dt, \\ d\langle\widetilde{W}^x,\widetilde{W}^z\rangle_t = \rho_{xz}dt, \\ d\langle\widetilde{W}^y,\widetilde{W}^z\rangle_t = \rho_{yz}dt, \\ (X_0,Y_0,Z_0) = (x,y,z) \in E, \end{cases} \tag{1}$$

де $$d\widetilde{W}_t^x := dW_t^x + \left(\frac{v(X_t)-b(X_t)}{a(X_t)f(Y_t,Z_t)} + \Omega(Y_t,Z_t)\right)dt, d\widetilde{W}_t^y := dW_t^y + \Lambda(Y_t,Z_t)dt,$$

$d\widetilde{W}_t^z := dW_t^z + \Gamma(Y_t,Z_t)dt$.

Припустимо, що система рівнянь має єдиний сильний розв'язок, τ – час похідного активу, дефолт може відбутися одним із двох способів: X виходить за інтервал I, або у випадковий час τ_h, яким управляє рівень небезпеки $h(X_t) \geq 0$.

Розглянемо двобар'єрний опціон з тривимірною стохастичною волатильністю, тоді X цінний папір, по якому не виплачуються дивіденди. В нашому випадку X – модель геометричного броунівського руху (ГБР) з багатовимірною стохастичною волатильністю. Зокрема, $\widetilde{\mathbb{P}}$ динаміки в X задані:

$$dX_t = rX_t dt + f(Y_t,Z_t)X_t d\widetilde{W}_t^x \text{ , } h(X_t) = 0,$$

де r – без ризикова відсоткова ставка, а Y, і Z є швидкими і повільними факторами нестабільності та відомі динаміки Y і Z, функції волатильності $f = \sigma \exp(Y_t + Z_t) \exp\left(\frac{\beta^2}{2} - z\right)$, $dY_t = \left(-\frac{1}{\epsilon} Y_t - \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \beta erf(Y_t)\right) dt + \frac{\beta}{\sqrt{\epsilon}} d\widetilde{W}_t^y$,

$$\mathrm{erf}(y) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-t^2} dt$$

$$dZ_t = \left(-\delta Z_t - \sqrt{\delta} g \mathrm{erf}(Z_t)\right) dt + g d\widetilde{W}_t^z.$$

Випишемо пов'язані з (1) оператори

$$\mathfrak{L}_0 = \frac{1}{2} \beta^2(y) \partial_{yy}^2 + \alpha(y) \partial_y, \qquad \mathfrak{L}_1 = \beta(y)(\rho_{xy} a(x) f(y,z) \partial_x - \Lambda(y,z)) \partial_y,$$

$$\mathfrak{L}_2 = \frac{1}{2} \bar{\sigma}^2 a(x) \partial_{xx}^2 + \left(b(x) - a(x) \overline{f\Omega}\, a(x)\right) \partial_x - k(x),$$

де $\bar{\sigma}^2 :=< f^2(\cdot, z) >$, $\overline{f\Omega} :=< f(\cdot, z) \Omega(\cdot, z) >$, $< f(y) >:= \int f(y) \pi(y) dy$, $\pi(y)$– щільність дифузії для Y_t.

Нехай u_{00} розв'язок рівняння $(-\partial_t + \mathfrak{L}_2) u_{00} = 0$, $u_{00}(0, x, z) = H(x)$; u_{10} – розв'язок рівняння $(-\partial_t + \mathfrak{L}_2) u_{10} = -A u_{00}$, $u_{10}(0, x, z) = 0$; u_{01} – розв'язок рівняння $(-\partial_t + \mathfrak{L}_2) u_{01} = \mathrm{B} \partial_z u_{00}$, $u_{01}(0, x, z) = 0$, де $A u_{00} =< \mathfrak{L}_1 \left(\frac{1}{2} a^2(x) \phi \partial_{xx}^2 - \eta \partial_x\right) u_{00} >$, ϕ i η розв'язки рівнянь,

$$\mathfrak{L}_0 \phi = f^2 - \bar{\sigma}^2, \quad \mathfrak{L}_0 \eta = f \Omega - \overline{f\Omega}, \tag{2}$$

$$B := -g \rho_{xy} < f > a(x) \partial_x - g < \Gamma > \partial_z.$$

Ми маємо формули за якими знаходяться u_{00}, u_{01}, u_{10}, а ϕ i η знаходимо, розв'язавши (2).

Наближена ціна опціону для розглянутої моделі дорівнює

$u(t, x, y, z) \approx u_{00} + \sqrt{\epsilon}\, u_{01} + \sqrt{\delta} u_{10}$.

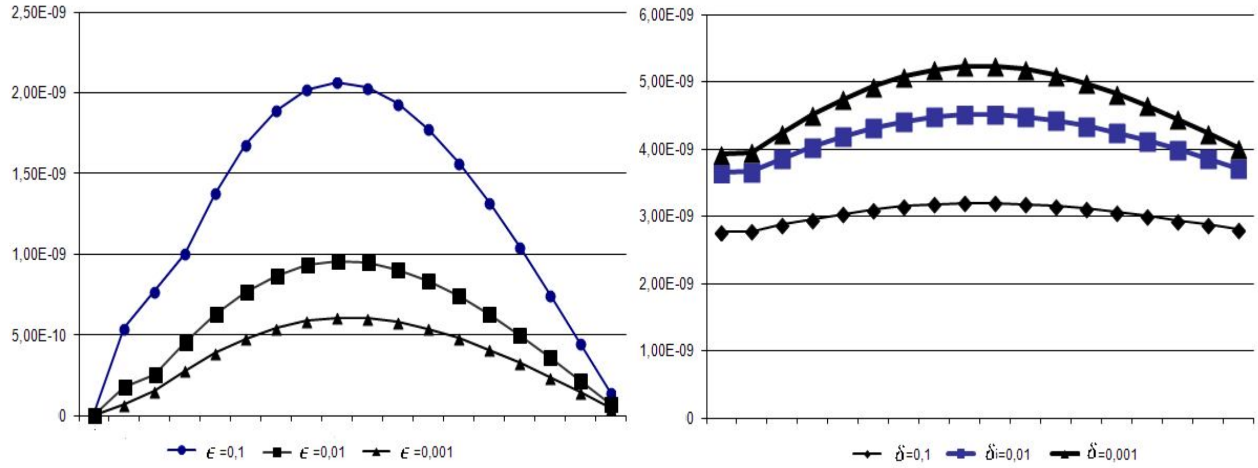

Рис. 1. Ціна опціону з подвійним бар'єром, $L = 300,\ K = 350,\ R = 400,$ $y = 0, z = 2, \beta = 1, \sigma = 0{,}34, r = 0{,}05,\ g = 2, \rho_{xy} = 0{,}5,\ \rho_{xz} = 0{,}18, \rho_{xy} = 0{,}18.$

На лівій частині рисунку 1 зображена наближена ціна $u_{0,0} + \sqrt{\epsilon}u_{1,0}$ з подвійним бар'єром опціону, для моделі яка має тільки швидко змінні чинники волатильності. Права частина рисунку 1 репрезентує наближену ціну $u_{0,0} + \sqrt{\delta}u_{0,1}$ з подвійним бар'єром опціону на конкретну модель, яка містить чинники волатильності, що змінюються повільно.

Комбінуючи методи з спектральної теорії, теорії сингулярних збурень і регулярної теорії збурень, ми зводимо обчислення ціни активу до розв'язання одного рівняння на знаходження власних значень і власних функцій.

Література

1. Anderson T. W., Introduction to Multivariate Statistical Analysis, New York, 1968.– P. 584.
2. Благун І.С., Буртняк І.В. Спектральний аналіз динаміки валютних курсів // Економічна кібернетика. Міжнародний науковий журнал, –2005. –№ 5–6. – С. 86–93.