Буртняк Іван Володимирович,
професор кафедри економічної кібернетики
Прикарпатський національний університет ім. В Стефаника
Малицька Ганна Петрівна,
доцент кафедри математичного та функціонального аналізу
Прикарпатський національний університет ім. В Стефаника

ЗНАХОДЖЕННЯ ЦІНИ ОПЦІОНУ З МУЛЬТИПЛІКАТИВНОЮ ВОЛАТИЛЬНІСТЮ ЗА ДОПОМОГОЮ РІВНЯННЯ КОЛМОГОРОВА

This article discusses methods for calculating the approximate prices for a broad class of securities using the tools of spectral analysis, singular and regular wave theory in the case of exposure fast and slow operating factors. Finding the price is reduced to solving the problem of finding eigenvalues and certain functions of the equation. Combining the methods of spectral theory of singular and regular disturbances can calculate the approximate price of financial instruments as expansions by eigenfunctions working with infinitesimal generators of two-dimensional diffusion.

Спектральна теорія є основним інструментом для аналізу дифузії, а саме в дослідженні розвинень за власними функціями лінійних операторів.

Нас цікавлять оцінки похідних, тому ми розглянемо динаміку (X, Y, Z) за оцінкою міри з нейтральним ризиком, яку ми позначимо, як $\widetilde{\mathbb{P}}$

$$\begin{cases} dX_t = \big(b(X_t) - a(X_t)f(Y_t, Z_t)\Omega(Y_t, Z_t)\big)dt + a(X_t)f(Y_t, Z_t)d\widetilde{W}_t^x, \\ dY_t = \left(\frac{1}{\epsilon}\alpha(Y_t) - \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\beta(Y_t)\Lambda(Y_t, Z_t)\right)dt + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\beta(Y_t)d\widetilde{W}_t^y, \\ dZ_t = \left(\delta c(Z_t) - \sqrt{\delta}g(Z_t)\Gamma(Y_t, Z_t)\right)dt + \sqrt{\delta}g(Z_t)d\widetilde{W}_t^z, \\ d\langle \widetilde{W}^x, \widetilde{W}^y\rangle_t = \rho_{xy}dt, \\ d\langle \widetilde{W}^x, \widetilde{W}^z\rangle_t = \rho_{xz}dt, \\ d\langle \widetilde{W}^y, \widetilde{W}^z\rangle_t = \rho_{yz}dt, \\ (X_0, Y_0, Z_0) = (x, y, z) \in E, \end{cases} \tag{1}$$

де $d\widetilde{W}_t^x \coloneqq dW_t^x + \left(\frac{v(X_t) - b(X_t)}{a(X_t)f(Y_t, Z_t)} + \Omega(Y_t, Z_t)\right)dt, d\widetilde{W}_t^y \coloneqq dW_t^y + \Lambda(Y_t, Z_t)dt,$

$d\widetilde{W}_t^z \coloneqq dW_t^z + \Gamma(Y_t, Z_t)dt\cdot$

Припустимо, що система рівнянь має єдиний сильний розв'язок, τ – час похідного активу, дефолт може відбутися одним із двох способів: X виходить за інтервал I, або у випадковий час τ_h, яким управляє рівень небезпеки $h(X_t) \geq 0$.

Розглянемо двобар'єрний опціон з тривимірною стохастичною волатильністю, тоді X цінний папір, по якому не виплачуються дивіденди [1]. В нашому випадку X – модель геометричного броунівського руху (ГБР) з багатовимірною стохастичною волатильністю. Зокрема, $\widetilde{\mathbb{P}}$ динаміки в X задані:

$$dX_t = rX_t dt + f(Y_t, Z_t) X_t d\widetilde{W}_t^x \text{ , } h(X_t) = 0,$$

де r – без ризикова відсоткова ставка, а $Y,$ і Z є швидкими і повільними факторами нестабільності та відомі динаміки Y і Z, функції волатильності $f = \sigma \exp(Y_t + Z_t) \exp\left(\frac{\beta^2}{2} - z\right)$, $dY_t = \left(-\frac{1}{\epsilon} Y_t - \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \beta erf(Y_t)\right) dt + \frac{\beta}{\sqrt{\epsilon}} d\widetilde{W}_t^y$,

$$\mathrm{erf}(y) \coloneqq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-t^2} dt$$

$$dZ_t = \left(-\delta Z_t - \sqrt{\delta} g \mathrm{erf}(Z_t)\right) dt + g d\widetilde{W}_t^z.$$

Випишемо пов'язані з (1) оператори [2]

$$\mathfrak{L}_0 = \frac{1}{2} \beta^2(y) \partial_{yy}^2 + \alpha(y) \partial_y, \qquad \mathfrak{L}_1 = \beta(y)(\rho_{xy} a(x) f(y,z) \partial_x - \Lambda(y,z)) \partial_y,$$

$$\mathfrak{L}_2 = \frac{1}{2} \bar{\sigma}^2 a(x) \partial_{xx}^2 + \left(b(x) - a(x) \overline{f\Omega}\, a(x)\right) \partial_x - k(x),$$

де $\bar{\sigma}^2 \coloneqq < f^2(\cdot, z) >$, $\overline{f\Omega} \coloneqq < f(\cdot, z) \Omega(\cdot, z) >$, $< f(y) > \coloneqq \int f(y) \pi(y) dy$, $\pi(y)$– щільність дифузії для Y_t.

Нехай u_{00} розв'язок рівняння $(-\partial_t + \mathfrak{L}_2) u_{00} = 0$, $u_{00}(0, x, z) = H(x)$;
u_{10} – розв'язок рівняння $(-\partial_t + \mathfrak{L}_2) u_{10} = -A u_{00}$, $u_{10}(0, x, z) = 0$;
u_{01} – розв'язок рівняння $(-\partial_t + \mathfrak{L}_2) u_{01} = \mathrm{B} \partial_z u_{00}$, $u_{01}(0, x, z) = 0$,
де $A u_{00} = < \mathfrak{L}_1 \left(\frac{1}{2} a^2(x) \phi \partial_{xx}^2 - \eta \partial_x\right) u_{00} >$, $\phi\ i\ \eta$ розв'язки рівнянь,

$$\mathfrak{L}_0 \phi = f^2 - \bar{\sigma}^2, \quad \mathfrak{L}_0 \eta = f\Omega - \overline{f\Omega}, \tag{2}$$

$$B \coloneqq -g \rho_{xy} < f > a(x) \partial_x - g < \Gamma > \partial_z.$$

Ми маємо формули за якими знаходяться u_{00}, u_{01}, u_{10}, а $\phi\ i\ \eta$ знаходимо, розв'язавши (2).

Наближена ціна опціону для розглянутої моделі дорівнює

$u(t, x, y, z) \approx u_{00} + \sqrt{\epsilon}\, u_{01} + \sqrt{\delta} u_{10}$.

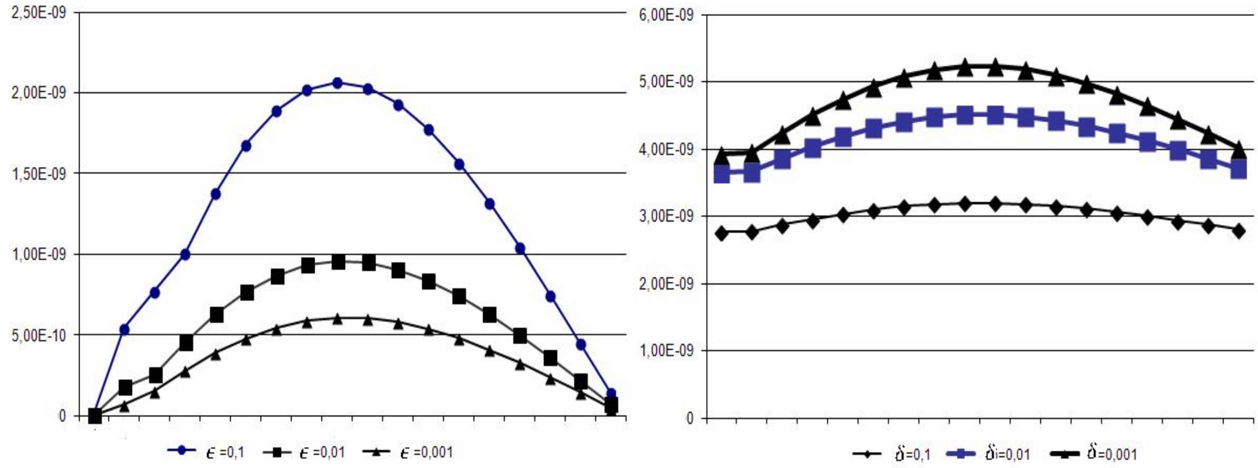

Рис. 1. Ціна опціону з подвійним бар'єром, $L = 300,\ K = 350,\ R = 400,$ $y = 0, z = 2, \beta = 1, \sigma = 0{,}34, r = 0{,}05,\ g = 2, \rho_{xy} = 0{,}5,\ \rho_{xz} = 0{,}18, \rho_{xy} = 0{,}18.$

На лівій частині рисунку 1 зображена наближена ціна $u_{0,0} + \sqrt{\epsilon}u_{1,0}$ з подвійним бар'єром опціону, для моделі яка має тільки швидко змінні чинники волатильності. Права частина рисунку 1 репрезентує наближену ціну $u_{0,0} + \sqrt{\delta}u_{0,1}$ з подвійним бар'єром опціону на конкретну модель, яка містить чинники волатильності, що змінюються повільно.

Комбінуючи методи з спектральної теорії, теорії сингулярних збурень і регулярної теорії збурень, ми зводимо обчислення ціни активу до розв'язання одного рівняння на знаходження власних значень і власних функцій [3].

Список літератури

1. Буртняк І.В., Малицька Г.П. Модель шляхозалежної волатильності для індексу ПФТС // Бизнес Информ. – 2012. – №3. – С. 48–50.
2. Буртняк І.В., Малицька Г.П. Обчислення цін опціонів методами спектрального аналізу // Бизнес Информ. – 2013. – №4. – С. 152–158.
3. Буртняк І.В., Малицька Г.П. Дослідження процесу Орнштейна–Уленбека методами спектрального аналізу // Проблеми економіки. – 2014. – №2. – С. 349–356.