

УДК 336.71

Буртняк І.В., к.е.н. доцент кафедри економічної кібернетики, Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника,

Малицька Г.П., к.фіз.-мат.н., доцент кафедри математичного та функціонального аналізу, Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника.

Моделювання динаміки валютних курсів на основі спектрального аналізу

Використано методикау спектрального аналізу для моделювання динаміки валютних курсів, що характеризуються закономірностями циклічного характеру, дослідження здійснено на базі середньотижневих значень курсу євро відносно гривні встановленим Національним Банком України.

Вступ. Курс євро займає провідне місце серед існуючих індикаторів стану справ у фінансово–економічній сфері. Не викликає сумніву його безпосередній вплив як на діяльність фінансової фірми загалом, так і на зміну в часі її окремих ресурсів (характеристик стану). Тому вивчення закономірностей динаміки курсу євро є дуже актуальним. В процесі дослідження динаміки ресурсів фінансової фірми виникає важлива проблема – виявлення і вивчення закономірностей, що мають циклічний характер.

Зупинимось на методах спектрального аналізу вивчення характеристик часових рядів значень курсу євро, які є реалізаціями стаціонарних випадкових процесів, що мають періодичні залежності.

Постановка завдання. Дослідження періодичних складових часових рядів значень курсу євро структуруються на визначення частотних (ω_j) і амплітудних характеристик коливань. Якщо в динаміці деякого спостережуваного процесу присутні стійкі періодичні закономірності, то на

графіку спектральної щільності їм відповідатимуть явно виражені вершини (на відповідних частотах).

Природною мірою “значущості” впливу, що надається тією або іншою гармонікою на коливання можливих траєкторій досліджуваного процесу, щодо його середнього, можна вважати той внесок, який вони вносять в дисперсію. Якщо дисперсія велика, то можна вважати цілком вірогідним припущення, що і відповідні амплітудні коефіцієнти будуть великі. Кількісно відобразити це можна за допомогою автоковаріаційної функції. Для стаціонарного випадкового процесу x_t , вона залежить тільки від інтервалу часу τ , що розділяє його перетини, між якими обчислюються коваріації, і у випадку дійсних процесів має вигляд

$$c_\tau = 2 \cdot \int_0^\pi \cos(\tau\omega) \cdot f(\omega) d\omega, \quad (1)$$

де $f(\omega)$ – функція, що задає спектральну щільність. Ґрунтуючись на (1) і провівши формальне зворотнє перетворення, ми можемо виразити

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left(c_0 + 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot \cos(k\omega) \right). \quad (2)$$

Виходячи з (2), на базі скінченої сукупності даних $\{x_t\}$ ($t=1, \dots, T$), можна побудувати емпіричну оцінку спектральної щільності:

$$\bar{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left(\bar{c}_0 + 2 \cdot \sum_{k=1}^{m-1} \bar{c}_k \cdot \cos(k\omega) \right), \quad (3)$$

де

$$\bar{c}_k = \frac{1}{n-k} \left(\sum_{t=1}^{n-k} x_t x_{t+k} - \frac{1}{n-k} \sum_{t=1+k}^n x_t \sum_{t=1}^{n-k} x_t \right). \quad (4)$$

Застосування спектрального аналізу на практиці зводиться до використання різних методик побудови оцінок спектральної щільності, що мають емпіричний характер. У загальному випадку ці оцінки мають вигляд:

$$\bar{f}(\omega_j) = \frac{1}{2\pi} \left(\lambda_0 \bar{c}_0 + 2 \cdot \sum_{k=1}^m \lambda_k \bar{c}_k \cdot \cos(\omega_j k) \right), \quad (5)$$

де $\omega_j = \frac{\pi j}{m}$, $j = 0, \dots, m$ – точки на осі абсцис, які відповідають значенням частот, в яких визначаються значення оцінок; \bar{c}_k – оцінки коваріацій, λ_k – вагові коефіцієнти. Способи обчислення λ_k і складають специфіку кожної конкретної методики.

Як достатньо ефективний спосіб розв'язання задачі оцінювання спектральної щільності може бути використана методика Тюкі–Хеннінга. Відповідно до неї вагові коефіцієнти λ_k визначаються за формулою

$$\lambda_k = \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{\pi k}{m} \right), \quad (6)$$

а спектральні оцінки

$$L_j = \frac{1}{2\pi} \left(\bar{c}_0 + 2 \cdot \sum_{k=1}^{m-1} \bar{c}_k \cdot \cos \left(\frac{\pi k j}{m} \right) + \bar{c}_m \cdot \cos(\pi j) \right), \quad (7)$$

де оцінки коваріацій мають вигляд (4).

Значення L_j також називають грубими оцінками, тому на практиці ефективніше використовувати згладжені оцінки, які визначаються як

$$U_j = 0.25 \cdot L_{j-1} + 0.5 \cdot L_j + 0.25 \cdot L_{j+1}. \quad (8)$$

Альтернативним способом оцінювання спектральної щільності є оцінки Парзена. Згідно даній методиці λ_k визначаються за формулою

$$\lambda_k = \begin{cases} 1 - \frac{6k^2}{m^2} \left(1 - \frac{k}{m} \right), & 0 \leq k \leq \frac{m}{2}, \\ 2 \cdot \left(1 - \frac{k}{m} \right)^3, & 1 + \frac{m}{2} \leq k \leq m, \end{cases} \quad (9)$$

і, отже, самі оцінки набувають вигляду

$$U_j^* = \frac{\bar{c}_0}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{k=1}^{m/2} \left[1 - \frac{6k^2}{m^2} \left(1 - \frac{k}{m} \right) \right] \cdot \bar{c}_k \cdot \cos \left(\frac{\pi k j}{m} \right) + \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{k=(m/2)+1}^m \left(1 - \frac{k}{m} \right)^3 \cdot \bar{c}_k \cdot \cos \left(\frac{\pi k j}{m} \right), \quad (10)$$

де коваріації оцінюються за формулою

$$\bar{c}_k = \frac{1}{n} \cdot \left(\sum_{t=0}^{n-k} (x_t - \bar{x})(x_{t+k} - \bar{x}) \right), \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{t=0}^n x_t. \quad (11)$$

Конструктивним є підхід, при якому відбувається побудова серій оцінок спектральної щільності з використанням декількох альтернативних методик з подальшою їх емпіричною верифікацією.

В процесі практичної реалізації процедури спектрального аналізу, однією з найважливіших є проблема визначення конкретного значення m , тобто тієї кількості частотних смуг, на яких ми шукатимемо періодичні складові. Вибір m має значний вплив на порядок точності оцінок спектральної щільності (7), (8), (10). Вибираючи m , ми одночасно визначаємо і тривалість максимального періоду, частоти $\omega_j = \pi j/m$, $j = 0, \dots, m$ і $T = 2m$.

Виходячи з міркувань емпіричного плану, у спостережуваній виборці кількість її значень n повинно значно перевищувати m . Оскільки періоди високочастотних коливань є величинами, кратними повному періоду, то невдалий вибір m може спотворити картину дійсного розподілу частот за рахунок “роздування” потужності деякого дійсно існуючого, але неврахованого коливання по суміжних діапазонах. Дане явище одержало найменування втрати потужності.

Згідно методики побудови довірчих інтервалів для оцінок Тьюкі–Хеннінга при рівні значущості $1 - \beta$ довірча смуга для всіх j задається інтервалом

$$\left(\frac{\chi_{\text{крит}}^2(1 - \beta, k)}{k} \cdot \bar{f}(\omega_j), \frac{\chi_{\text{крит}}^2(\beta, k)}{k} \cdot \bar{f}(\omega_j) \right). \quad (12)$$

де $\chi_{\text{крит}}^2(\beta, k)$ – табличне значення розподілу χ^2 з рівнем значущості β і k степенями свободи. У (12) значення числа степенів свободи береться $k = 2n/m$.

Результати. Розглянемо модель динаміки фінансового ресурсу яка має назву адитивної стохастичної моделі (АСМ) і має вигляд $y_t = y_{t-1} + x_t$, де

y_t, y_{t-1} – об’єм фінансового ресурсу в момент часу t і $t-1$; x_t – абсолютний приріст величини ресурсу за час $[t-1, t]$.

Якщо процес переходу може бути описаний співвідношенням $y_t = x_t y_{t-1}$ де $x_t > 0$, це мультиплікативна стохастична модель (МСМ) x_t – коефіцієнт переходу від моменту t до $t-1$.

Безпосереднім об’єктом спектрального аналізу є ряд приростів та ряд коефіцієнтів переходу, розрахованих за середньотижневими значеннями курсу євро відносно гривні встановленим Національним Банком України за період з січня 2002 по грудень 2011 р.

Оцінки спектральної щільності, обчислені за формулами (7), (8), (10), репрезентовані в таблиці 1: причому крім оцінок також наведені межі довірчого інтервалу для згладжених оцінок Тюкі-Хеннінга, розраховані при рівні значущості $\beta = 0.05$ за формулою (12).

Таблиця 1.

Оцінки спектральної щільності, розраховані за рядом приростів.

Номер частотної смуги $j \in 1:m$	Оцінки Тюкі-Хеннінга (грубі) L_j	Оцінки Тюкі-Хеннінга (згладжені) U_j	Оцінки Парзена U_j^*	Межі довірчого інтервалу для оцінок U_j	
				нижня	верхня
0	2,46	2,10	2,09	0,74	3,89
1	1,74	1,55	1,61	0,51	2,94
2	0,28	0,63	0,68	0,10	1,32
3	0,22	0,20	0,14	0,12	0,57
4	0,06	0,26	0,23	0,01	0,68
5	0,69	0,59	0,60	0,09	1,26
6	0,93	0,75	0,74	0,16	1,54
7	0,47	0,50	0,48	0,05	1,09
8	0,12	0,15	0,15	0,11	0,48
9	0,12	0,13	0,18	0,11	0,46
10	0,65	0,54	0,51	0,07	1,17
11	0,97	0,76	0,69	0,16	1,56
12	0,46	0,47	0,53	0,03	1,04
13	0,01	0,32	0,39	0,03	0,78
14	0,84	0,53	0,46	0,06	1,15
15	0,44	0,47	0,45	0,03	1,04
16	0,15	0,28	0,33	0,05	0,71
17	0,37	0,23	0,21	0,07	0,63
18	0,03	0,12	0,11	0,12	0,44
19	0,04	0,05	0,06	0,15	0,32
20	0,11	0,04	0,02	0,15	0,30
21	0,09	0,04	0,04	0,19	0,16

22	0,07	0,04	0,03	0,19	0,16
23	0,08	0,07	0,07	0,14	0,36
24	0,20	0,17	0,17	0,10	0,52
25	0,18	0,17	0,18	0,10	0,52
26	0,10	0,09	0,10	0,13	0,39
27	0,01	0,01	0,00	0,17	0,24
28	0,05	0,06	0,06	0,19	0,12
29	0,12	0,05	0,06	0,19	0,13
30	0,08	0,02	0,02	0,18	0,19
31	0,10	0,03	0,04	0,16	0,27
32	0,23	0,08	0,06	0,13	0,37
33	0,03	0,02	0,00	0,18	0,19
34	0,23	0,06	0,04	0,19	0,12
35	0,27	0,01	0,04	0,17	0,24
36	0,27	0,09	0,08	0,21	0,06
37	0,09	0,12	0,10	0,22	0,02
38	0,02	0,05	0,09	0,19	0,13
39	0,08	0,10	0,09	0,21	0,06
40	0,21	0,05	0,05	0,19	0,13
41	0,28	0,03	0,02	0,16	0,28
42	0,23	0,05	0,08	0,15	0,32
43	0,40	0,16	0,13	0,10	0,50
44	0,06	0,10	0,12	0,12	0,41
45	0,11	0,09	0,12	0,13	0,38
46	0,52	0,20	0,16	0,08	0,57
47	0,14	0,10	0,11	0,12	0,41
48	0,17	0,03	0,04	0,16	0,28
49	0,09	0,05	0,03	0,15	0,31
50	0,19	0,08	0,08	0,13	0,37
51	0,03	0,15	0,15	0,11	0,48
52	0,34	0,11	0,19	0,12	0,42

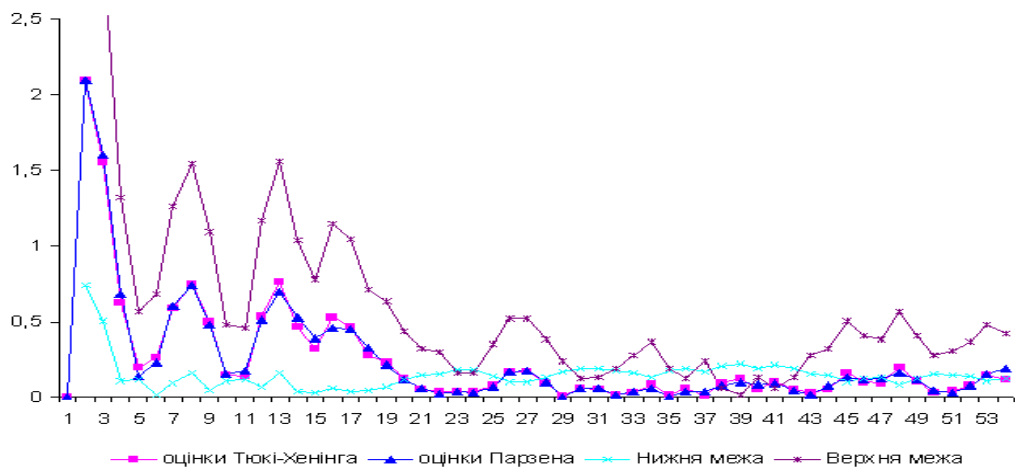


Рис. 1. Оцінки спектральної щільності, розраховані за рядом приростів.

Аналізуючи оцінки спектральної щільності на рис 1, робимо висновки:

- спостерігається певна узгодженість між результатами, що відповідають різним методикам (Тюкі – Хеннінга і Парзена);

- оцінки початкових частот спектру ($j \leq 3$) достатньо високі, що пояснюється впливом неперіодичної складової.

Таблиця 2.

Оцінки спектральної щільності, розраховані для коефіцієнтів переходу

Номер частотної смуги $j \in 1:m$	Оцінки Тьюкі-Хеннінга (грубі) L_j	Оцінки Тьюкі-Хеннінга (згладжені) U_j	Оцінки Парзена U_j^*	Межі довірчого інтервалу для оцінок U_j	
				нижня	верхня
0	0,0015	0,0013	0,0012	0,0006	0,0024
1	0,0012	0,0010	0,0010	0,0004	0,0018
2	0,0002	0,0005	0,0006	0,0002	0,0008
3	0,0003	0,0004	0,0004	0,0002	0,0006
4	0,0006	0,0005	0,0005	0,0002	0,0008
5	0,0005	0,0006	0,0006	0,0002	0,0010
6	0,0008	0,0006	0,0006	0,0003	0,0011
7	0,0004	0,0005	0,0005	0,0002	0,0008
8	0,0004	0,0003	0,0003	0,0001	0,0005
9	0,0001	0,0003	0,0003	0,0001	0,0004
10	0,0003	0,0004	0,0004	0,0002	0,0006
11	0,0006	0,0006	0,0005	0,0002	0,0010
12	0,0006	0,0006	0,0006	0,0003	0,0010
13	0,0005	0,0006	0,0006	0,0003	0,0011
14	0,0009	0,0007	0,0006	0,0003	0,0012
15	0,0005	0,0005	0,0005	0,0002	0,0009
16	0,0001	0,0003	0,0004	0,0001	0,0005
17	0,0004	0,0003	0,0003	0,0001	0,0005
18	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0004
19	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0004
20	0,0003	0,0002	0,0002	0,0001	0,0004
21	0,0001	0,0002	0,0002	0,0001	0,0003
22	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0003
23	0,0001	0,0002	0,0002	0,0001	0,0003
24	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0004
25	0,0003	0,0002	0,0002	0,0001	0,0004
26	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0003
27	0,0001	0,0001	0,0001	0,0000	0,0002
28	0,0001	0,0001	0,0001	0,0000	0,0001
29	0,0000	0,0001	0,0001	0,0000	0,0002
30	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0003
31	0,0001	0,0002	0,0002	0,0001	0,0003
32	0,0003	0,0002	0,0002	0,0001	0,0004
33	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0003
34	0,0001	0,0002	0,0002	0,0001	0,0003
35	0,0004	0,0002	0,0002	0,0001	0,0003
36	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002
37	0,0002	0,0001	0,0001	0,0000	0,0002
38	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002
39	0,0002	0,0001	0,0001	0,0000	0,0002
40	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002
41	0,0004	0,0002	0,0002	0,0001	0,0004
42	0,0002	0,0004	0,0004	0,0002	0,0007
43	0,0009	0,0005	0,0005	0,0002	0,0009
44	0,0003	0,0004	0,0004	0,0002	0,0007

45	0,0001	0,0003	0,0004	0,0001	0,0006
46	0,0009	0,0005	0,0005	0,0002	0,0010
47	0,0003	0,0004	0,0004	0,0002	0,0007
48	0,0002	0,0002	0,0003	0,0001	0,0004
49	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0003
50	0,0003	0,0002	0,0002	0,0001	0,0004
51	0,0001	0,0002	0,0002	0,0001	0,0003
52	0,0004	0,0002	0,0002	0,0001	0,0004

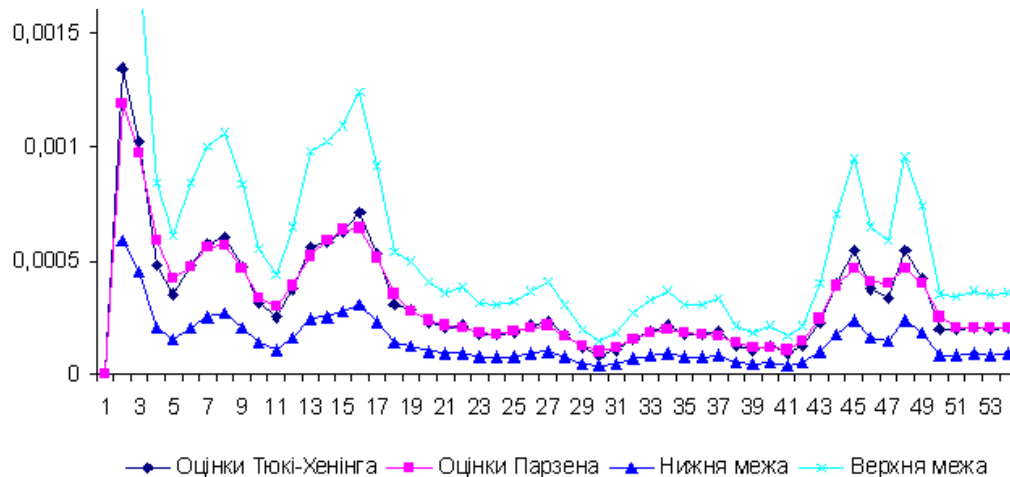


Рис 2. Оцінки спектральної щільності, розраховані для коефіцієнтів переходу.

При більш детальному дослідженні даних, які представлені в таблицях 1 і 2, ми можемо виділити чотири групи частотних смуг, на яких наявні вершини потужності періодичних коливань. Це смуги: 7, 18, 22, 45.

Про присутність відповідних циклів в часовому ряді значень, що як показали проведені дослідження, можна стверджувати з упевненістю. Шляхом стандартного перерахунку одержуємо довжини періодів циклічних компонент у тижнях:

$$104/7 = 14.86, 104/17 = 6.12, 104/22 = 4.72, 104/45 = 2.31.$$

Таким чином, першій групі смуг відповідають цикли, період яких наближено дорівнює 14 тижнів. Вони можуть бути ідентифіковані як кварталні, а їхня присутність є прогнозованим явищем.

Друга група коливань – наближено дорівнює 6.12 Їх можна трактувати як напівквартальні, вони не мають прямих пояснень. Не можна виключати і того, що присутність даного піку на діаграмі спектральної щільності

викликана впливом квартальних циклів, або є наслідком неминучих похибок, що породжуються емпіричною природою наших методик.

Цикл з періодом завдовжки 4.72 тижні, що відповідає третій групі частотних смуг, може бути умовно пов'язаний з місячними коливаннями.

Четверта група коливань – наближено дорівнює 2.31 тижня відповідає двотижневим коливанням. Їх присутність не суперечить змістовним умовам варіації спостережуваного показника.

Порівнюючи між собою абсолютні величини спектральних оцінок, можна зробити висновок про те, що найбільша питома вага окремих циклів які визначають дисперсію даного процесу, “місячних” циклів. Далі по рівню потужності квартальні, а за ними – напівквартальні цикли.

Висновок. Значення фінансових показників формуються під впливом значного кола закономірностей, як періодичних, так і неперіодичних. На основі простого співставлення взаємного розташування стовпців, що відповідають згладженим оцінкам Тюкі-Хеннінга і графіка оцінок Парзена, ми можемо дійти висновку про суттєву ідентичність результатів обох методик спектрального аналізу. Комплексне їх використання є певною гарантією об'єктивності висновків, одержаних в ході досліджень, з їхньою допомогою виробляється стратегія дослідження динаміки показників стану фінансових ринків.

Література

1. Благун І.С. Моделювання стохастичної динаміки фінансових ресурсів / І.С. Благун, І. В. Буртняк // Моделювання регіональної економіки: зб. наук. праць – Івано-Франківськ : Плай, 2004. – №4. – С. 3–16.
2. Благун І.С. Спектральний аналіз динаміки валютних курсів / І.С. Благун, І.В. Буртняк // Економічна кібернетика. – 2005. – № 5–6. – С. 86–93.