

ОБЧИСЛЕННЯ ЦІН ОПЦІОНІВ ЗА ДОПОМОГОЮ МОДЕЛІ CEV З БАГАТОВИМІРНОЮ СТОХАСТИЧНОЮ ВОЛАТИЛЬНІСТЮ

В статті розроблено систематичний метод обчислення наближеної ціни для широкого класу цінних паперів за допомогою інструментів спектрального аналізу, сингулярної та регулярної хвильової теорії. Ціна опціонів залежить від стохастичної волатильності, яка описується шляхозалежним процесом. Знаходження ціни зводиться до розв'язання проблеми знаходження власних значень і власних функцій певного рівняння.

Ключові слова: стохастична волатильність, локальна волатильність, спектральна теорія, сингулярна хвильова теорія, регулярна хвильова теорія.

I.V. BURTONYAK, H.P. MALYTSKA

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University

CALCULATION OPTION PRICES USING MODELS CEV WITH MULTIDIMENSIONAL STOCHASTIC VOLATILITY

The paper developed a systematic method for calculating approximate prices for a broad class of securities using the tools of spectral analysis, singular and regular wave theory. Price options depends on stochastic volatility, which is described path-dependent process. Finding the price is reduced to the problem of finding the eigenvalues and eigenfunctions of a certain equation.

Keywords: derivative pricing, stochastic volatility, local volatility, spectral theory, singular perturbation theory, regular perturbation theory.

Постановка проблеми. Спектральну теорію Гільберта економісти почали широко використовувати в другій половині 20 століття, особливо широке застосування вона одержала в фінансовій математиці для аналізу моделей дифузії на базі розвинення за власними функціями і власними значеннями лінійних операторів. Наприклад, для знаходження ціни європейського опціону за допомогою моделі Блека-Шоулза [1]. Серед наукових проблем, які можна вирішити шляхом застосування спектральних методів: прогнозування цін опціонів [2], знаходження відсоткової ставки на цінні папери [3], моделювання волатильності фінансових активів [4].

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Задачі оцінювання похідних активів аналітично розв'язуються за допомогою методів спектральної теорії [5].

Як спектральна теорія так і стохастичні моделі волатильності стали незамінним інструментом у фінансовій математиці, це пов'язано з тим, ціни двобар'єрного опціону підпорядковується броунівському руху і корелюють з волатильністю [6]. Дослідження стохастичної волатильності, зокрема волатильності активу, що лежить в основі похідної та контролюється нелокальною дифузиею.

У цій статті ми продовжуємо тематику робіт [7-10], поширюючи її на теорію моделі CEV (constant elasticity of variance model), яка розроблена Джоном Коксом в 1975 році [1], застосовуючи методику [2-4].

Комбінуючи методи з спектральної теорії сингулярних і регулярних збурень, можна наближено обчислити ціну вибору, як розвинення за власними функціями, хоч працюватимемо з інфінітезимальними генераторами трьохвимірної дифузії.

Постановка цілей. Розглянемо спочатку одновірну дифузиею $dX_t = v(X_t)dt + a(X_t)dW_t$ в якій є можливість проявляти кіллінг (стрибок дефолту) на швидкості $h(X_t) \geq 0$, W_t – геометричний броунівський рух, X завжди строго додатній. До загальної дифузії ми додаємо два фактори нелокальної волатильності: $a(X_t) \rightarrow a(X_t)f(Y_t, Z_t)$. Перший фактор Y – це фактор швидко мінливих чинників. Другий фактор Z змінюється повільно. Таким чином, наша модель є багатовимірною стохастичною волатильною моделлю.

Нехай (Ω, F, P) ймовірнісний простір, який підтримує корельований броунівський рух (W^x, W^y, W^z) і експоненціальна випадкова змінна $\varepsilon \sim \text{Exp}(1)$, яка не залежить від (W^x, W^y, W^z) . Будемо вважати, що економіка з трьома факторами, описана однорідним часом, неперервним процесом Маркова $\chi = (X, Y, Z)$, який приймає значення в деякому просторі станів $E = I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $I = (e_1, e_2)$, $-\infty \leq e_1 < e_2 \leq \infty$. Припустимо, що χ починається в E і миттєво зникає, як тільки $X \notin I$, тобто:

Динаміка χ за фізичною мірою \mathbb{P} , є наступною:

$$\chi_t = \begin{cases} (X_t, Y_t, Z_t), & \tau_I < t \\ \Delta, & \tau_I > t \end{cases}, \quad \tau_I = \inf(t > 0: X_t \notin I),$$

де (X, Y, Z) , задаються

$$\left\{ \begin{array}{l} dX_t = v(X_t)dt + a(X_t)f(Y_t, Z_t)dW_t^x, \\ dY_t = \frac{1}{\epsilon}\alpha(Y_t)dt + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\beta(Y_t)dW_t^y, \\ dZ_t = \delta c(Z_t)dt + \sqrt{\delta}g(Z_t)dW_t^z, \\ d(W^x, W^y)_t = \rho_{xz}dt, \\ d(W^x, W^z)_t = \rho_{xy}dt, \\ d(W^y, W^z)_t = \rho_{yz}dt, \\ (X_0, Y_0, Z_0) = (x, y, z) \in E. \end{array} \right.$$

причому $(\rho_{xy}, \rho_{xz}, \rho_{yz})$ такі, що $|\rho_{xy}|, |\rho_{xz}|, |\rho_{yz}| \leq 1$ та $1 + 2\rho_{xy}\rho_{xz}\rho_{yz} - \rho_{xy}^2 - \rho_{xz}^2 - \rho_{yz}^2 \geq 0$, а матриця кореляції броунівського руху додатно визначена. Процес X може відображати наприклад величину індексу, коротку відсоткову ставку, ціну опціону. Під фізичною мірою \mathbb{P} процесу X , розуміють процес, який має миттєвий дрейф $v(X_t)$ і стохастичну волатильність $a(X_t)f(Y_t, Z_t) > 0$, що має обидві компоненти: локальну $a(X_t)$ і нелокальну $f(Y_t, Z_t)$. Нелокальна компонента волатильності $f(Y_t, Z_t)$ базується на двох факторах: Y та Z . таких що для нескінченно малих генераторів маємо

$$\mathfrak{L}_Y^\epsilon = \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{1}{2} \beta^2(y) \partial_{yy}^2 + \alpha(y) \partial_y \right), \quad \mathfrak{L}_Z^\delta = \delta \left(\frac{1}{2} g^2(z) \partial_{zz}^2 + c(z) \partial_z \right),$$

Таким чином, Y та Z мають внутрішню шкалу часу $\epsilon > 0$ і $\frac{1}{\delta} > 0$. Вважатимемо, що $\epsilon \ll 1$ і $\delta \ll 1$, внутрішня шкала часу Y є малою а внутрішня шкала часу Z велика. Отже, Y є швидко змінний фактор волатильності, а Z повільно змінний фактор. Зауважимо, що \mathfrak{L}_Y^ϵ і \mathfrak{L}_Z^δ мають форму

$$L = \frac{1}{2} a^2(x) \partial_{xx}^2 + b(x) \partial_x - k(x), \quad x \in (e_1, e_2), \quad (1)$$

Нехай потрібно виплатити дивіденди по активу $S_t = \mathbb{I}_{\{\tau > t\}} X_t$, $S > 0$. то простором станів X буде $e_1, e_2 = (0, \infty)$. Розглянемо багатовимірний дифузійний процес на кілінгу (скачку дефолту) сталої варіативної моделі. Зокрема, $\tilde{\mathbb{P}}$ динаміка X дефолту задається як

$$dX_t = (\mu + cX_t^{2\eta})X_t dt + (f(Y_t, Z_t)X_t^\eta)X_t d\tilde{W}_t^x, \quad h(X_t) = \mu + cX_t^{2\eta}.$$

Для спрощення обчислень вважатимемо, що безризикова відсоткова ставка $r = 0$, $\mu > 0$, $c > 0$, Y і Z є швидко і повільно змінні фактори волатильності, які визначаються системою

$$\left\{ \begin{array}{l} dX_t = (b(X_t) - a(X_t)f(Y_t, Z_t)\Omega(Y_t, Z_t))dt + a(X_t)f(Y_t, Z_t)d\tilde{W}_t^x, \\ dY_t = \left(\frac{1}{\varepsilon}\alpha(Y_t) - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\beta(Y_t)\Lambda(Y_t, Z_t) \right) dt + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\beta(Y_t)d\tilde{W}_t^y, \\ dZ_t = \left(\delta c(Z_t) - \sqrt{\delta}g(Z_t)\Gamma(Y_t, Z_t) \right) dt + \sqrt{\delta}g(Z_t)d\tilde{W}_t^z, \\ d\langle \tilde{W}^x, \tilde{W}^y \rangle_t = \rho_{xy}dt, \\ d\langle \tilde{W}^x, \tilde{W}^z \rangle_t = \rho_{xz}dt, \\ d\langle \tilde{W}^y, \tilde{W}^z \rangle_t = \rho_{yz}dt, \\ (X_0, Y_0, Z_0) = (x, y, z) \in E, \end{array} \right.$$

де

$$\begin{aligned} d\tilde{W}_t^x &:= dW_t^x + \left(\frac{v(X_t) - b(X_t)}{a(X_t)f(Y_t, Z_t)} + \Omega(Y_t, Z_t) \right) dt, \\ d\tilde{W}_t^y &:= dW_t^y + \Lambda(Y_t, Z_t)dt, \\ d\tilde{W}_t^z &:= dW_t^z + \Gamma(Y_t, Z_t)dt, \end{aligned}$$

У нашому дослідженні, дефолт може відбутися одним із двох способів, коли X виходить за інтервал I , або у випадковий час τ_h , ($h(X_t) \geq 0$ стохастична величина, так званий рівень небезпеки). Математично час дефолту τ можна виразити наступним чином:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau = \tau_I \wedge \tau_h, \\ \tau_I = \inf\{t \geq 0: X_t \notin I\}, \\ \tau_h = \inf\left\{t \geq 0: \int_0^t h(X_s)ds \geq \varepsilon\right\}, \quad \varepsilon \sim \text{Exp}(1), \quad \varepsilon \perp (X, Y, Z). \end{array} \right.$$

Волатильність X включає в себе місцеву компоненту X_t^η і нелокальну компоненту багатовимірності $f(Y_t, Z_t)$. Ми припускаємо, $\eta < 0$, тобто місцева компонента волатильності X_t^η збільшується при зменшенні X_t , це означає що ціни і волатильність мають від'ємну кореляцію. Стохастичний рівень небезпеки $h(X_t)$ зростає, при спаданні X . Обчислимо наближену ціну європейського опціону пут для активу S . Ціну європейського опціону можна знайти за формулою (2).

$$\langle \mathcal{L}_2 \rangle = \frac{1}{2} \bar{\sigma}^2 x^{2\eta+2} \partial_{xx}^2 + (\mu + cx^{2\eta})x \partial_x - (\mu + cx^{2\eta}), \quad (2)$$

\mathfrak{L}_2 – нескінченно малий генератор, кінець інтервалу тобто точка $e_2 = \infty$ є природною границею. Однак, класифікація точки $e_1 = 0$ залежить від вартості η і $c/\bar{\sigma}^2$. Тому проводять наступну класифікацію:

1) $c/\bar{\sigma}^2 \geq 1/2$, $\eta < 0$, $e_1 = 0$ – тривіальний випадок,

2) $c/\bar{\sigma}^2 \in (0, 1/2)$, $\eta \in \left[\frac{c}{\bar{\sigma}^2} - 1/2, 0\right)$, $e_1 = 0$ – це число відіграє роль початкового моменту,

3) $c/\bar{\sigma}^2 \in (0, 1/2)$, $\eta \in \left[\frac{c}{\bar{\sigma}^2} - \frac{1}{2}, 0\right)$, $e_1 = 0$ при такій умові початок інтервалу є сталим.

Якщо параметри $(c, \bar{\sigma}, \eta)$ задовольняють $c/\bar{\sigma}^2 \in (0, 1/2)$, а $\eta \in \left[\frac{c}{\bar{\sigma}^2} - \frac{1}{2}, 0\right)$, $e_1 = 0$, то e_1 вважають кіллінговою межею. Щоб обчислити наближену ціну європейського опціону, ми повинні знайти власні функції $\{\psi_n\}$, власні значення $\{\lambda_n\}$ оператора $\langle \mathfrak{L}_2 \rangle$. Зазначимо, що $\langle \mathfrak{L}_2 \rangle$, поданий у (2), має вигляд інфінітезимального генератора одномірної дифузії (1) з волатильністю $\bar{\sigma}a(x)$, відхиленням $(b(x) - f\bar{\Omega}a(x))$ і кіллінгом $k(x)$, $dom(\langle \mathfrak{L}_2 \rangle)$ включає граничні умови, які повинні бути накладені на кінцях e_1 та e_2 рівняння $-\langle \mathfrak{L}_2 \rangle \psi_n = \lambda_n \psi_n$, $\psi_n \in dom(\langle \mathfrak{L}_2 \rangle)$, на інтервалі $(0, \infty)$ з $\langle \mathfrak{L}_2 \rangle$ записаного у вигляді (5) тобто

$$\lim_{x \searrow 0} \psi_n = 0, \text{ якщо } \frac{c}{\bar{\sigma}^2} \in \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

Виклад основного матеріалу. Розв'язок має вигляд [12]

$$\psi_n = A^{\frac{v}{2}} \sqrt{\frac{(n-1)! \mu}{\Gamma(v+n)}} x \exp(-Ax^{-2\eta}) L_{n-1}^{(v)}(Ax^{-2\eta}), \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

$$\lambda_n = 2\mu|\eta|(n+v), \quad v = \frac{1 + 2\left(\frac{2}{\bar{\sigma}^2}\right)}{2|\eta|},$$

де $L_n^{(v)}$ є узагальненими поліномами Лагерра. Запишемо вирази для операторів \mathcal{A} і \mathcal{B} :

$$\mathcal{A} = -v_3 x^{\eta+1} \partial_x x^{2\eta+2} \partial_{xx}^2 - v_2 x^{2\eta+2} \partial_{xx}^2, \quad \mathcal{B} = -v_1 x^{\eta+1} \partial_x - v_0.$$

Аналітичні вирази для $\mathcal{A}_{k,n}$, $\mathcal{B}_{k,n}$ і $\tilde{\mathcal{B}}_{k,n}$ можна отримати, зробивши заміну змінних [9] $Ax^{-2\eta} \rightarrow y$, використовуючи $\partial_y L_n^v(y) = -L_{n-1}^{(v+1)}(y)$ і

$$\int_0^\infty y^\gamma e^{-y} L_n^{(\alpha)}(y) L_m^{(\beta)}(y) dy =$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha - \gamma + n)\Gamma(\beta + 1 + m)\Gamma(\gamma + 1)}{\Gamma(\alpha - \gamma)\Gamma(\beta + 1)n!m!} {}_3F_2 \left(\begin{matrix} \gamma + 1, & -m, & \gamma + 1 - \alpha \\ \beta + 1, & \gamma + 1 - \alpha - n, & \end{matrix} ; 1 \right)$$

де ${}_3F_2$ є узагальненою гіпергеометричною функцією. Формули для визначення $\mathcal{A}_{k,n}$, $\mathcal{B}_{k,n}$ і $\tilde{\mathcal{B}}_{k,n}$, мають вигляд [10].

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{k,n} &= -\vartheta_3 \left\{ \sum_{m=0}^{3 \wedge n} \binom{3}{m} \left(\frac{-1}{\kappa} \right)^{3-m} \left(\frac{2\sqrt{\kappa}}{\bar{\sigma}} \right)^m \frac{n! \mathcal{N}_n}{(n-m)! \mathcal{N}_{n-m}} \delta_{k,n-m} \right\} \\ &\quad - (\vartheta_2 + \mathfrak{U}_2) \left\{ \sum_{m=0}^{3 \wedge n} \binom{2}{m} \left(\frac{-1}{\kappa} \right)^{2-m} \left(\frac{2\sqrt{\kappa}}{\bar{\sigma}} \right)^m \frac{n! \mathcal{N}_n}{(n-m)! \mathcal{N}_{n-m}} \delta_{k,n-m} \right\} \\ &\quad - \mathfrak{U}_1 \left\{ \left(\frac{-1}{\kappa} \right) \delta_{k,n} + \left(\frac{2\sqrt{\kappa}}{\bar{\sigma}} \right) \frac{n! \mathcal{N}_n}{(n-1)! \mathcal{N}_{n-1}} \delta_{k,n-1} \right\}, \\ \mathcal{B}_{k,n} &= -\vartheta_1 \left\{ \left(\frac{-1}{\kappa} \right) \delta_{k,n} + \left(\frac{2\sqrt{\kappa}}{\bar{\sigma}} \right) \frac{n! \mathcal{N}_n}{(n-1)! \mathcal{N}_{n-1}} \delta_{k,n-1} \right\} - \vartheta_0 \delta_{k,n}, \\ \tilde{\mathcal{B}}_{k,n} &= -\vartheta_1 \bar{\sigma}' \left\{ \left[\left(\frac{-1}{\kappa} \right) \left(\frac{1}{2\bar{\sigma}} - \frac{\bar{\sigma}}{\kappa^3} - \frac{n}{\bar{\sigma}} \right) \right] \delta_{k,n} \right. \\ &\quad + \left[\left(\frac{-1}{\kappa} \right) \left(\frac{4}{\kappa^{\frac{3}{2}}} \right) + \left(\frac{2\sqrt{\kappa}}{\bar{\sigma}} \right) \left(\frac{1}{2\bar{\sigma}} - \frac{\bar{\sigma}}{\kappa^3} - \frac{n}{\bar{\sigma}} \right) \right] \frac{n! \mathcal{N}_n}{(n-1)! \mathcal{N}_{n-1}} \delta_{k,n-1} \\ &\quad + \left[\left(\frac{-1}{\kappa} \right) \left(\frac{-2}{\bar{\sigma}} \right) + \left(\frac{2\sqrt{\kappa}}{\bar{\sigma}} \right) \left(\frac{4}{\kappa^{\frac{3}{2}}} \right) \right] \frac{n! \mathcal{N}_n}{(n-2)! \mathcal{N}_{n-2}} \delta_{k,n-2} \\ &\quad \left. + \left[\left(\frac{2\sqrt{\kappa}}{\bar{\sigma}} \right) \left(\frac{-2}{\bar{\sigma}} \right) \right] \frac{n! \mathcal{N}_n}{(n-3)! \mathcal{N}_{n-3}} \delta_{k,n-3} \right\} \\ &\quad - \vartheta_0 \bar{\sigma}' \left\{ \left(\frac{1}{2\bar{\sigma}} - \frac{\bar{\sigma}}{\kappa^3} - \frac{n}{\bar{\sigma}} \right) \delta_{k,n} + \left(\frac{4}{\kappa^{\frac{3}{2}}} \right) \frac{n! \mathcal{N}_n}{(n-1)! \mathcal{N}_{n-1}} \delta_{k,n-1} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{-2}{\bar{\sigma}} \right) \frac{n! \mathcal{N}_n}{(n-2)! \mathcal{N}_{n-2}} \delta_{k,n-2} \right\} \\ &\quad - \vartheta_1 \bar{\Omega}' \left\{ \left(\frac{1}{\kappa^3} \right) \delta_{k,n} + \left(\frac{-4}{\bar{\sigma} \kappa^{\frac{3}{2}}} \right) \frac{n! \mathcal{N}_n}{(n-1)! \mathcal{N}_{n-1}} \delta_{k,n-1} + \left(\frac{4}{\bar{\sigma}^2} \right) \frac{n! \mathcal{N}_n}{(n-2)! \mathcal{N}_{n-2}} \delta_{k,n-2} \right\} \end{aligned}$$

$$-\vartheta_0 \overline{f\Omega}' \left\{ \left(\frac{-1}{\kappa^2} \right) \delta_{k,n} + \left(\frac{2}{\overline{\sigma}\sqrt{\kappa}} \right) \frac{n! \mathcal{N}_n}{(n-1)! \mathcal{N}_{n-1}} \delta_{k,n-1} \right\}.$$

$$c_n = (\psi_n, 1) = \frac{2}{\overline{\sigma}} \sqrt{\frac{\pi}{\kappa}} \mathcal{N}_n A^n e^{-A^2/4}.$$

Виграш європейського опціону з ціною виконання $K > 0$ можна розкласти наступним чином:

$$(K - S_t)^+ = (K - X_t)^+ \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} + K(1 - \mathbb{1}_{\{\tau > t\}}). \quad (3)$$

Перший доданок в правій частині (3) є прибуток опціону поданого до дефолту у момент часу t . Другий член це прибуток опціону поданого після дефолту, який відбувається у момент часу t . Таким чином, вартість опціону з ціною виконання K – позначається як $u^{\epsilon, \delta}(t, x; K)$ і може бути виражена у вигляді суми:

$$u^{\epsilon, \delta}(t, x; K) = u_o^{\epsilon, \delta}(t, x; K) + u_D^{\epsilon, \delta}(t, x; K),$$

де

$$u_o^{\epsilon, \delta}(t, x; K) = \tilde{\mathbb{E}}_{x,y,z}[(K - X_t)^+ \mathbb{1}_{\{\tau > t\}}],$$

$$\begin{aligned} u_D^{\epsilon, \delta}(t, x; K) &= K - K \tilde{\mathbb{E}}_{x,y,z}[\mathbb{1}_{\{\tau > t\}}] = K - K \int_0^\infty \tilde{\mathbb{E}}_{x,y,z}[\delta_{x'}(X_t) \mathbb{1}_{\{\tau > t\}}] dx' \\ &= K - K \int_0^\infty u_1^{\epsilon, \delta}(t, x; x') dx', \end{aligned}$$

$$u_1^{\epsilon, \delta}(t, x; x') = \tilde{\mathbb{E}}_{x,y,z}[\delta_{x'}(X_t) \mathbb{1}_{\{\tau > t\}}], \quad 1 \notin L^2(\mathbb{R}^+, \mathfrak{m})$$

ми використовували, що $1 = \int_0^\infty \delta_{x'}(X_t) dx'$ на множині $\{\tau > T\}$.

Так, як функції виграшу $H_0(x) = (K - x)^+$ і $H_1(x) = \delta_{x'}(x)$ належать $L^2(\mathbb{R}^+, \mathfrak{m})$, ми можемо обчислити:

$$c_{0,n} = (\psi_n(\cdot), (k - \cdot)^+), \quad c_{1,n} = (\psi_n, \delta_{x'}).$$

Вирази для $c_{0,n}$ та $c_{1,n}$ можна знайти з [13].

$$c_{0,n} = \frac{A^{\frac{v}{2}+1} K^{\frac{2c}{\overline{\sigma}^2}+1-2\eta} \sqrt{\Gamma(v+n)}}{\Gamma(v+n) \sqrt{\mu(n-1)!}} \times$$

$$\left[\frac{|\eta|}{\frac{c}{\overline{\sigma}^2} + |\eta|} {}_2F_2 \left(\begin{matrix} 1-n & \frac{c}{\overline{\sigma}^2} + 1 \\ |\eta| & \end{matrix} ; AK^{-2\eta} \right) - \frac{\Gamma(v+1)(n-1)!}{\Gamma(v+n+1)} L_{n-1}^{(v+1)}(AK^{-2\eta}) \right],$$

$$c_{1,n} = \psi_n(x')m(x').$$

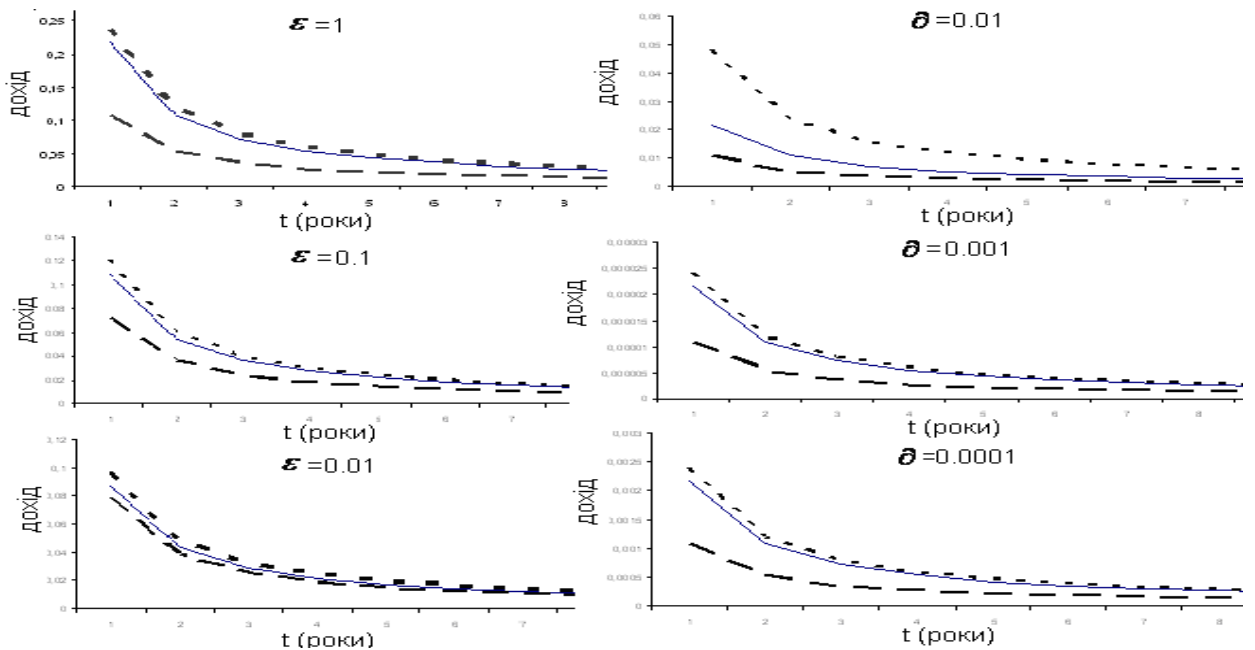
Орієнтовну вартість європейського опціону тепер можна обчислити за допомогою теорем 1, 2 і 3 [10].

Для європейського варіанту волатильність опціону $I^{\epsilon,\delta}$ з ціною $u^{\epsilon,\delta}(t, x; K)$ визначається з використанням

$$u^{\epsilon,\delta}(t, x; K) = u^{BS}(t, x, I^{\epsilon,\delta}; K)$$

де $u^{BS}(t, x, I^{\epsilon,\delta}; K)$ ціна Блека-Шоулза з волатильністю $I^{\epsilon,\delta}$.

Результати обчислень наведемо на рисунку 1.



На лівій стороні рисунка 1 побудовано волатильність яка залежить від ціни $u_{0,0} + \sqrt{\epsilon}u_{1,0}$, опціону для моделі, яка має тільки швидко змінні чинники волатильності. Динаміка Y і функція волатильності f задаються формулою.

$$dY_t = \left(-\frac{1}{\epsilon}Y_t - \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\beta\text{Erf}(Y_t) \right) dt + \beta d\tilde{W}_t^y, \quad f(Y_t) = \frac{\sigma \exp(Y_t)}{\exp\left(-\frac{\beta^2}{2}\right)},$$

$$\text{Erf}(y) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-t^2} dt.$$

Для порівняння, побудовано волатильність, повної вартості u^ϵ і На правій стороні рисунка 1 наведено волатильність викликану наближеною ціною $u_{0,0} + \sqrt{\delta}u_{1,0}$, опціону для моделі, яка має тільки повільно мінливий фактор волатильності. Динаміка Z і функція волатильності f задаються

$$dZ_t = \left(-\delta Z_t - \sqrt{\delta}g\text{Erf}(Z_t) \right) dt + g d\tilde{W}_t^z, \quad f(Z_t) = \frac{\sigma \exp(Z_t)}{\exp(z)}.$$

Для порівняння, побудовано волатильність, повної вартості u^δ і $u_{0,0}$. Як і слід було очікувати, при ϵ і δ які прямують до нуля волатильність прямує до ціни волатильності імплікованою повною ціною.

Висновки. Ця стаття розширює методикку знаходження орієнтовної ціни для широкого класу похідних-активів. Однією з основних переваг нашої методології ціноутворення є те, що, комбінуючи методи з спектральної теорії сингулярних і регулярних збурень, обчислення ціни активу зводиться до розв'язання рівняння методом знаходження власних значень, власних функцій та розв'язання двох рівнянь Пуассона.

Перспективи подальших досліджень. Перспективами подальших досліджень у даному напрямі є вдосконалення спектральної теорії та поширення результатів статті на випадки, коли рівняння з якого знаходяться власні значення не має дискретного спектру, а також коли стохастична волатильність залежить від чотирьох і більше неоднорідних факторів, які присутні на фондових ринках.

Література

1. Alan Lewis, Applications of eigenfunction expansions in continuous-time finance, *Mathematical Finance*, 8(1998), pp. 349–383.
2. Robert S. Goldstein and William P. Keirstead, On the term structure of interest rates in the presence of reflecting and absorbing boundaries, SSRN eLibrary, (1997), pp. 381–395.
3. Antoon Pelsser, Pricing double barrier options using laplace transforms, *Finance and Stochastics*, 4 (2000), pp. 95–104.
4. Dmitry Davydov and Vadim Linetsky, Structuring, pricing and hedging double-barrier step options, *Journal of Computational Finance*, 5 (2001), pp. 55–88.
5. Jean-Pierre Fouque, George Papanicolaou, and Ronnie Sircar, *Derivatives in Financial Markets with Stochastic Volatility*, Cambridge University Press, 2000.
6. Jim Gatheral, *The Volatility Surface: a Practitioner's Guide*, John Wiley and Sons, Inc., 2006.
7. Буртняк І.В., Малицька Г.П. Модель шляхозалежної волатильності для індексу ПФТС // *Бизнес Информ.* – 2012. – №3. – С. 48–50.
8. Буртняк І.В., Малицька Г.П. Обчислення цін опціонів методами спектрального аналізу // *Бизнес Информ.* – 2013. – №4. – С. 152–158.

9. Буртняк І.В., Малицька Г.П. Дослідження процесу Орнштейна–Уленбека методами спектрального аналізу // Проблеми економіки. – 2014. – №2. – С. 349–356.

10. Cox, J. "Notes on Option Pricing I: Constant Elasticity of Diffusions." Unpublished draft, Stanford University, 1975.

11. V. Linetsky. Lookback options and diffusion hitting times: A spectral expansion approach. *Finance and Stochastics*, 8(3):373–398, 2004.

12. J.-P. Fouque., R. Sircar., K. Solna. Multiname and Multiscale Default Modeling, *Multiscale Modeling and Simulation* 7(4), 2009, pages 1956-1978.

13. M. Lorig. Pricing Derivatives on Multiscale Diffusions: An Eigenfunction Expansion Approach. Princeton University - Department of Operations Research & Financial Engineering (ORFE), 2012.

References

1. Alan Lewis, Applications of eigenfunction expansions in continuous-time finance, *Mathematical Finance*, 8(1998), pp. 349–383.

2. Robert S. Goldstein and William P. Keirstead, On the term structure of interest rates in the presence of reflecting and absorbing boundaries, SSRN eLibrary, (1997), pp. 381–395.

3. Antoon Pelsser, Pricing double barrier options using laplace transforms, *Finance and Stochastics*, 4 (2000), pp. 95–104.

4. Dmitry Davydov and Vadim Linetsky, Structuring, pricing and hedging double-barrier step options, *Journal of Computational Finance*, 5 (2001), pp. 55–88.

5. Jean-Pierre Fouque, George Papanicolaou, and Ronnie Sircar, *Derivatives in Financial Markets with Stochastic Volatility*, Cambridge University Press, 2000.

6. Jim Gatheral, *The Volatility Surface: a Practitioner's Guide*, John Wiley and Sons, Inc., 2006.

7. Burtnyak, I.V. and Malyska, A.P., 2012. The Model of Path-dependent Volatility for Index PFTS, *Business Inform*, 3, pp. 48–50 [in Ukrainian].

8. Burtnyak, I.V. and Malyska, A.P., 2013. Calculation of Option Pricing Using Methods of Spectral Analysis, *Business Inform*. 4, pp. 152–158 [in Ukrainian].

9. Burtnyak, I.V. and Malyska, A.P., 2014. Research of Ornstein-Uhlenbeck Process Using the Spectral Analysis Methods, *Problems of Economics*,. 2, pp. 49–356 [in Ukrainian].

10. Cox, J. "Notes on Option Pricing I: Constant Elasticity of Diffusions." Unpublished draft, Stanford University, 1975.

11. V. Linetsky. Lookback options and diffusion hitting times: A spectral expansion approach. *Finance and Stochastics*, 8(3):373–398, 2004.

12. J.-P. Fouque., R. Sircar., K. Solna. Multiname and Multiscale Default Modeling, *Multiscale Modeling and Simulation* 7(4), 2009, pages 1956-1978

13. M. Lorig. Pricing Derivatives on Multiscale Diffusions: An Eigenfunction Expansion Approach. Princeton University - Department of Operations Research & Financial Engineering (ORFE), 2012.