УДК 519.86: 336.71 Буртняк І.В.

Моделювання динаміки індексу ПФТС

Вступ. У сучасній світовій фінансовій системі саме фондовий ринок може слугувати незалежним індикатором сталості та визначеності перерозподілу фінансових та грошових ресурсів, бо цей ринок є одночасно сегментом грошового ринку та ринку капіталів. Тобто фондовий ринок розглядається у якості одного з найбільш ефективних механізмів регулювання перетоку фінансових ресурсів за допомогою різних інструментів.

Дослідження розвитку фондового ринку є тією основою, яка сприяє визначенню напрямків у розбудові економіки. Збалансованість та взаємопов'язаність різноманітних індикаторів фондового ринку є запорукою стійкості руху фінансових ресурсів між різним економічними агентами як в межах, так і поза межами країни. Найбільш відомим серед вітчизняних фондових індексів є індекс ПФТС, який розраховується на основі простих акцій підприємств, що пройшли лістинг в ПФТС.

Стан розвитку фондового ринку, умови та ефективність перерозподілу фінансових ресурсів багато в чому відображаються у відповідних фондових індексах, які уявляють собою агрегований показник змін у певних економічних подіях на цьому сегменті ринку. До того ж, щоб прогнозувати динаміку фондових ринків, потрібно чітко, на кількісному рівні знати відповідні тенденції. Це знов-таки знаходить певне відображення у динаміці фондових індексів та визначає їх множинність.

Втім слід помітити, що саме у коливаннях фондових індексів проявляється невизначеність фондових ринків, яка є наслідком різних причин. Так, в основі невизначеності фондового ринку США, що спостерігається на цей час, знаходиться накопичений розрив між споживанням та заощадженням, переоцінка акцій деяких компаній.

Постановка завдання. Розглянемо індекс ПФТС, який відображає понад 90% загального обсягу торгів організованого фондового ринку в

Україні, то неупереджений погляд на його динаміку дає неабияку підставу говорити про невизначеність фондового ринку.

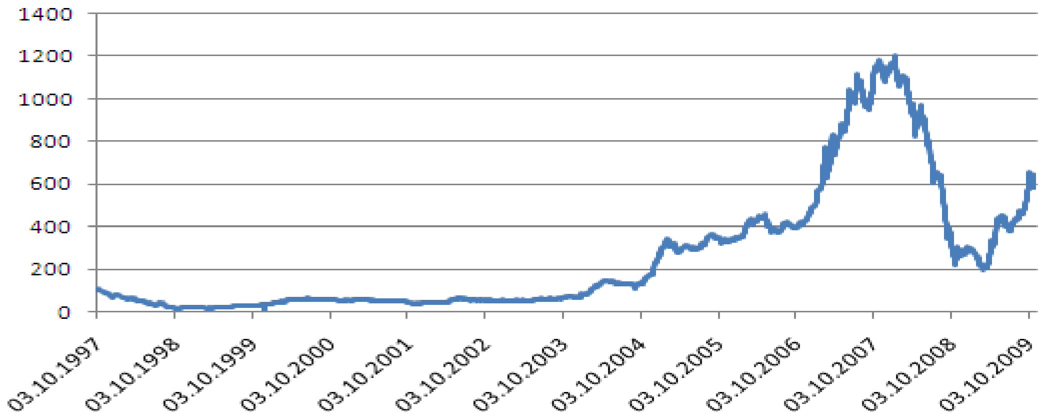

Рис.1. Динаміка індексу ПФТС з 03.10.97 по 13.11.09.

Існуюча динаміка часових інтервалів значень фондового індексу ПФТС не дає можливості побудувати єдину модель відповідних прогнозних оцінок. Більш того, застосування вінеровської моделі опису такого процесу, як найбільш розповсюдженої серед брокерів та інвесторів, є також малопридатною, що обумовлює інший бік невизначеності – побудову адекватної прогнозної моделі.

Таблиця 1

Основні статистичні характеристики індексу ПФТС в 2009 р.

Статистичні характеристики				
Середнє	Стандартне відхилення	Медіана	Ексцес	Асиметрія
397,79	128,92	413,09	2,19	0,22

Так середнє значення, яке характеризує розсіювання середньої дохідності є досить значним. Це, у свою чергу, ускладнює не лише вибір інвестора, а й свідчить про неоднозначність руху фінансових потоків на різних сегментах ринку.

Стандартне відхилення, що характеризує ступінь відповідного ризику вкладання в цінні папери підтверджує не одностайність у русі відповідних фінансових ресурсів та потоків. Підґрунтям останнього є значне розсіювання стандартного відхилення дохідностей за різними фондовими індексами.

Медіана, яка вказує на значення дохідності і ділить розподіл на рівні частини, показує, що індекс за досліджуваний період має переважне зростання в динаміці дохідностей;

Ексцес та асиметрія, які вказують на можливу відмінність, від нормального закону розподілу (який, до речі, покладено в основу класичних методів оцінки та управління фінансовими потоками на ринках розвинених країн) показують, що додатний ексцес визначає гостровершинність розподілу (чим він більший, тим гострішою є вершина розподілу, а додатна асиметрія свідчить про скошеність розподілу в бік додатних значень дохідностей [1].

Результати. На різних проміжках індекс може мати різні розподіли, зокрема вибірка з 08.01.2009 по 13.11.2009 не підтверджує нормальний, а підтверджує показниковий розподіл.

Таблиця 2

Перевірка гіпотези про показниковий розподіл індексу ПФТС за період з 08.01.2009 по 13.11.2009

Інтервал	Верхня межа інтервалу	Частота ν_k	Відносна частота ν_k / n	Імовірність попадання на k-й інтервал p_k	χ_k^2
$(199.1; 234.64)$	234.64	30	0.122	0.050	1.443
$(234.64; 270.18)$	270.18	16	0.065	0.046	0.415
$(270.18; 305.72)$	305.72	26	0.106	0.042	1.498
$(305.72; 376.8)$	376.8	15	0.061	0.075	-0.185
$(376.8; 412.34)$	412.34	34	0.138	0.033	3.185
$(412.34; 447.88)$	447.88	53	0.215	0.030	6.086
$(447.88; 483.42)$	483.42	29	0.118	0.028	3.211
$(483.42; 554.5)$	554.5	11	0.045	0.050	-0.097
$(554.5; 590.04)$	590.04	7	0.028	0.022	0.302
$(590.04; 625.58)$	625.58	12	0.049	0.020	1.425
$(625.58; 661.12)$	661.12	13	0.053	0.019	1.853

Просумувавши значення χ_k^2 (див. стовпець табл.2) одержуємо $\chi^2 = 19.136$. Таким чином, вибіркова статистика не перевищує критичного табличного значення $\chi_{\grave{e}\eth\grave{e}\eth}^2 = 21.1$, що відповідає $\beta = 0,01$ і $l - 3 = 8$ степеням свободи. Враховуючи це, ми можемо прийняти нашу гіпотезу.

Проте дисперсія вибірки не співпадає з дисперсією генеральної сукупності, що підтверджує невизначеність фондового ринку.

В роботі [2] розроблено теорію адитивної та мультиплікативної моделей для нормально розподілених приростів і логонормально розподілених коефіцієнтів переходу.

Розроблено методи прогнозування і моніторингу, для розглянутої вибірки з 08.01.2009 по 13.11.2009 приростів щоденних та середньотижневих значень індексу ПФТС, підтверджено подвійний експоненціальний розподіл, або розподіл Лапласа.

Таблиця 3

Перевірка гіпотези про розподіл Лапласа приростів, які відповідають щоденним значенням індексу ПФТС за період з 08.01.2009 р. по 13.11.2009 р.

Інтервал	Верхня межа інтервалу	Частота v_k	Відносна частота v_k / n	Імовірність попадання на k-й інтервал p_k	χ_k^2
$(-\infty, \overline{m}-3\overline{s})$	-24.05	2	0.009	0.007	0.163
$(\overline{m}-3\overline{s}, \overline{m}-2\overline{s})$	-15.51	2	0.009	0.022	1.576
$(\overline{m}-2\overline{s}, \overline{m}-\overline{s})$	-6.98	25	0.116	0.092	1.378
$(\overline{m}-\overline{s}, \overline{m})$	1.56	86	0.400	0.378	0.275
$(\overline{m}, \overline{m}+\overline{s})$	10.10	73	0.340	0.378	0.842
$(\overline{m}+\overline{s}, \overline{m}+2\overline{s})$	18.63	18	0.084	0.094	0.242
$(\overline{m}+2\overline{s}, \overline{m}+3\overline{s})$	27.17	7	0.033	0.022	1.089
$(\overline{m}+3\overline{s}, +\infty)$		2	0.009	0.007	0.163

Просумувавши значення χ_k^2 (див. стовпець табл.3) одержуємо $\chi^2 = 5.727$, вибіркова статистика не перевищує критичного табличного значення $\chi^2_{êðèò} = 12.6$, що відповідає $\beta = 0,05$ і $l - 3 = 5$ степеням свободи. Отже, ми можемо прийняти нашу гіпотезу.

Розподіл Лапласа приростів, що відповідаютьсередньотижневим значенням індексу ПФТС за період з 08.01.2009 р. по 13.11.2009 р. теж підтверджується.

Враховуючи розподіл розглянемо адитивну стохастичну модель [], а на її базі прогнозування індексу ПФТС

В загальному адитивна стохастична модель (АСМ) динаміки фінансового ресурсу може бути записана у вигляді рекурентного співвідношення

$$\tilde{x}_t = \tilde{x}_{t-1} + \tilde{\alpha}_t, \tag{1}$$

де $\tilde{x}_t, \tilde{x}_{t-1}$ – обсяг фінансового ресурсу на момент часу t і $t-1 \left(t \in 0:T\right)$

$\tilde{\alpha}_t$ – абсолютний приріст величини ресурсу за момент часу $\left[t-1, t\right]$.

Значення, які приймає $\tilde{\alpha}_t$, розглядаємо як реалізацію деякої випадкової величини. $\tilde{\alpha}_t$ – називаються приростами . На основі (1) можна виразити стан ресурсу в будь–який момент через його стан у початковий момент часу x_0 .

$$\tilde{x}_t = x_0 + \sum_{i=1}^{t} \tilde{\alpha}_i. \tag{2}$$

При цьому зв'язок між початковим моментом $t = 0$ і деяким довільним моментом t, $\tilde{\alpha}_{1,t} = \sum_{i=1}^{t} \tilde{\alpha}_i$. Подальший розвиток АСМ пов'язаний з прийняттям передумов, що стосуються характеру розподілу випадкових величин $\tilde{\alpha}_t$. Достатньо природнім є припущення про те, що $\tilde{\alpha}_t$, розподілені за подвійним показниковим розподілом, так званий розподіл Лапласа з деякими параметрами m_t, s_t, щільність цього розподілу має вигляд

$$f\left(x\right) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x-m|}, x \in R^1, \quad \lambda > 0 \tag{3}$$

де m_t – математичне сподівання має вигляд

$$M\left[\alpha\right] = \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\lambda|x-m|} dx = \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{m} x e^{\lambda(x-m)} dx + \frac{\lambda}{2} \int_{m}^{+\infty} x e^{-\lambda(x-m)} dx = m. \tag{4}$$

дисперсія буде виглядати так

$$D\left(X\right) = M\left(X^2\right) - M^2\left(X\right) = \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\lambda|x-m|} dx - m^2,$$

$$M\left[X^2\right]=\frac{\lambda}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2e^{-\lambda|x-m|}dx=\frac{\lambda}{2}\int_{-\infty}^{m}x^2e^{\lambda(x-m)}dx+\frac{\lambda}{2}\int_{m}^{+\infty}x^2e^{-\lambda(x-m)}dx=m^2+\frac{2}{\lambda^2},$$
$$D(X)=m^2+\frac{2}{\lambda^2}-m^2=\frac{2}{\lambda^2}. \qquad (5)$$

Також вважатимемо, що випадкові величини $\tilde{\alpha}_t$, є взаємно незалежними. Тоді для випадкової величини $\tilde{\alpha}_{1,t}$, математичне сподівання і дисперсія матимуть вигляд $m_{1,t}=\sum_{i=1}^{t}m_i$, $s_{1,m}^2=\sum_{i=1}^{t}s_i^2$.

Як правило, для нетривалих часових періодів, що характеризуються відносною стабільністю умов, може бути прийнята гіпотеза про те, що для будь-яких моментів $t\in 0:T$ випадкові величини $\tilde{\alpha}_t$, мають однаковий розподіл і можуть розглядатися як серія реалізацій випадкової величини $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\alpha}=\tilde{\alpha}_t$, де $\tilde{\alpha}\in L(m,\lambda)$. Математичне сподівання випадкового приросту $\tilde{\alpha}_{1,t}$, може бути виражене як: $M\left[\tilde{\alpha}_{1,t}\right]=m_{1,t}=tm,$ а дисперсія: $D\left[\tilde{\alpha}_{1,t}\right]=s_{1,t}^2=ts^2=\frac{2t}{\lambda^2}$

Значення $M\left[\tilde{\alpha}_{1,t}\right]$ може бути використане при побудові прогнозу очікуваної величини ресурсу на момент *t* при відомому значенні x_0 :

$$x_t=x_0+M\left[\tilde{\alpha}_{1,t}\right]=x_0+m_{1,t}=x_0+tm \qquad (6)$$

Відповідно, точність такого прогнозу може бути оцінена з допомогою стандартного відхилення

$$s_t=\sqrt{D\left[\tilde{x}_t\right]}=\sqrt{D\left[\tilde{\alpha}_{1,t}\right]}=\sqrt{2t}\lambda^{-1} \qquad (7)$$

s_t може бути використано при побудові довірчого інтервалу $\left[x_t-\gamma s_t, x_t+\gamma s_t\right]$, в який можливі значення спостережуваного ресурсу (у момент часу t) потрапляють із заданою ймовірністю.

Вибір коефіцієнта γ>0 дозволяє забезпечити бажану імовірність попадання значень випадкової величини ресурсу $\tilde{x}_t$, у вказаний інтервал.

При практичному використанні АСМ в наведених вище формулах відбувається заміна математичного сподівання і дисперсії на їх оцінки, побудованих по серіях емпіричних значень фінансового ресурсу, що вивчається.

Для розподіленої за Лапласом випадкової величини $\tilde{\alpha}$ як консистентна, незміщена і ефективна оцінка параметра m може використовуватися вибіркове середнє $\overline{m} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\alpha_i$, де $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_k$ емпіричні (що спостерігалися протягом деякого проміжку часу) значення приростів ресурсу. В той же час, консистентною і незміщеною оцінкою для параметра s^2 служить виправлена вибіркова дисперсія $\overline{s}^2 = \frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k}\left[\alpha_i - \overline{m}\right]^2$, якій відповідає виправлене вибіркове стандартне відхилення .

Підставивши оцінки параметрів m і s^2, ми одержуємо емпіричні формули як для прогнозу величини ресурсу на момент часу t, $x_t = x_0 + tm$, так і для його точності (стандартного відхилення) $\overline{s}_t = \sqrt{t} \cdot \overline{s}$.

На базі сформульованої вище адитивної стохастичної моделі може бути побудований наступний алгоритм процедури прогнозування очікуваних значень фінансового ресурсу (щодо моменту часу t_0 на n подальших періодів) .

1. Визначення величини k — об'єму базової вибірки, по якій надалі здійснюється розрахунок вибіркового середнього ($\overline{m}$) і вибіркового стандартного відхилення ($\overline{s}$). Ясно, що k обмежене зверху фактичною довжиною ряду даних, який ми маємо до моменту t_0. Відзначимо також, що вибором k фактично задається ступінь обліку тенденцій, що мали місце раніше і, як очікується, що зберігаються в майбутньому (щонайменше протягом n наступних періодів).

2. Розрахунок серії з k приростів: $\alpha_i = x_{t_0-k+i-1} - x_{t_0-k+i}$, äå $i = 1, \ldots k$.

3. Розрахунок вибіркового середнього $\overline{m}$, що використовується як оцінка математичного сподівання (m) стохастичного приросту $\tilde{\alpha}$: $\overline{m} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\alpha_i$,

4. Розрахунок виправленого стандартного відхилення $\overline{s}$: $\overline{s} = \sqrt{\frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k}\left[\alpha_i - \overline{m}\right]^2}$

5. Розрахунок прогнозних значень величини фінансового ресурсу (показника) на моменти часу $t_0+1,\ldots,t_0+n$: $x_t = x_0 + tm, t = 1:n,$ де x_0 – об'єм ресурсу у момент часу t_0.

6. Розрахунок оцінки стандартного відхилення випадкової величини $\tilde{x}_t$: $\overline{s_t} = \sqrt{t}\cdot\overline{s}, t = 1:n.$

6. Побудова нижньої $\left(x_t - \gamma s_t\right)$і верхньої $\left(x_t + \gamma s_t\right)$ інтервальних оцінок можливих відхилень фактичних значень ресурсу від тих, що передбачаються (із заданою імовірністю, визначеною параметром γ).

Запропонована схема прогнозування може бути проілюстрована на прикладі побудови прогнозу індексу ПФТС на основі ряду його щоденних чи середньо тижневих значень. У табл. 5 наведено фактичні і прогнозні значення індексу , побудованими з 06.05.2009 р. на 25 днів наперед. При цьому як базова вибірка для визначення $\overline{m}$ і $\overline{s}$ використовувалися попередні значення на рік назад. В нас $\overline{m} = 1.56, \quad \overline{s} = 8.53$.

Таблиця 5.

Прогнозні і фактичні значення індексу ПФТС за період з 01.09.2009 р. по 06.10.2009 р.

№	Дата	Значення x_t	Прогноз $\overline{x_t}$	Нижня межа-1 $\overline{x_t} - \overline{s_t}$	Верхня межа-1 $\overline{x_t} + \overline{s_t}$	Нижня межа-2 $\overline{x_t} - 2\cdot\overline{s_t}$	Верхня межа-2 $\overline{x_t} + 2\cdot\overline{s_t}$
0	01.09.2009	462.36	462.36	462.36	462.36	462.36	462.36
1	02.09.2009	458.06	463.92	449.530	466.590	441.000	475.120
2	03.09.2009	463.86	465.48	451.797	475.923	439.734	487.986
3	04.09.2009	459.25	467.04	444.476	474.024	429.701	488.799
4	07.09.2009	460.83	468.6	443.770	477.890	426.710	494.950
5	08.09.2009	464.21	470.16	445.136	483.284	426.063	502.357
6	09.09.2009	465.53	471.72	444.636	486.424	423.742	507.318
7	10.09.2009	470.56	473.28	447.992	493.128	425.423	515.697
8	11.09.2009	472.33	474.84	448.204	496.456	424.077	520.583
9	14.09.2009	472.57	476.4	446.980	498.160	421.390	523.750
10	15.09.2009	478.58	477.96	451.606	505.554	424.632	532.528
11	16.09.2009	484.9	479.52	456.609	513.191	428.318	541.482

12	17.09.2009	489.27	481.08	459.721	518.819	430.172	548.368
13	18.09.2009	491.02	482.64	460.265	521.775	429.509	552.531
14	21.09.2009	492.69	484.2	460.774	524.606	428.857	556.523
15	22.09.2009	502.36	485.76	469.323	535.397	436.287	568.433
16	23.09.2009	507.08	487.32	472.960	541.200	438.840	575.320
17	24.09.2009	514.68	488.88	479.510	549.850	444.340	585.020
18	25.09.2009	515.19	490.44	479.000	551.380	442.811	587.569
19	28.09.2009	526.44	492	489.259	563.621	452.077	600.803
20	29.09.2009	548.04	493.56	509.893	586.187	471.745	624.335
21	30.09.2009	553.29	495.12	514.201	592.379	475.111	631.469
22	01.10.2009	573.2	496.68	533.191	613.209	493.182	653.218
23	02.10.2009	570.34	498.24	529.432	611.248	488.523	652.157
24	05.10.2009	580.1	499.8	538.312	621.888	496.523	663.677
25	06.10.2009	596.91	501.36	554.260	639.560	511.610	682.210

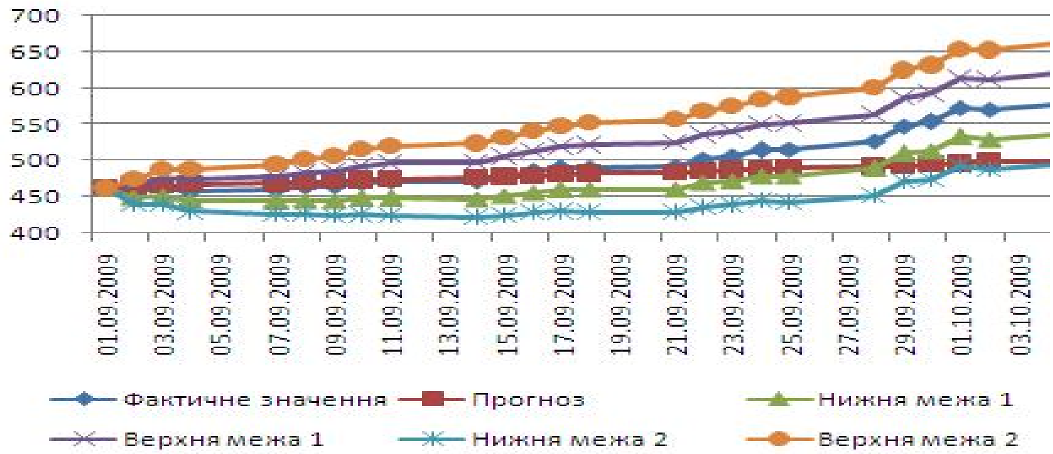

Рис. 3. Прогнозні і фактичні щоденні значення індексу ПФТС за період з 01.09.2009 р. по 06.10.2009 р.

На рис. 3 показані графіки, що відображають співвідношення між прогнозними і фактичними значеннями індексу ПФТС. На основі рис. 3 можна зробити висновок про те, що істотних відхилень прогнозних від фактичних величин, а також щодо коридору, що задається виразами $\overline{x}_t \pm \overline{s}_t$ не спостерігається.

Зауважимо, що закон розподілу суми незалежних однаково розподілених приростів $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$ має вигляд

$$F(z) = \underbrace{\iint}_{\substack{n \\ \sum_{i=1}^{n} x_i \le z}} \exp\left\{-\lambda \sum_{j=1}^{n} \left| x_j - m \right| \right\} dx_1 \ldots dx_n = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{z-x_1} dx_2 \int_{-\infty}^{z-x_1-x_2} dx_3 \ldots \int_{-\infty}^{z-\sum x_j} \exp\left\{-\lambda \sum_{j=1}^{n} \left| x_j - m \right| \right\} dx_n$$

що використовуються для підбору γ.

Сформулюємо теорему Ляпунова [3. С 303].

Якщо $\alpha_1,...,\alpha_n$– незалежні випадкові величини, що мають однаковий закон розподілу з математичним сподіванням m і дисперсією s^2 то при необмеженомузбільшенню n закон розподілу суми $y_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_i$ необмежено наближаються до нормального розподілу.

На підставі цієї теореми, якщо для обчислення m і s^2 використовується достатньо велике число однаковорозподілених приростів, то прогнозні значення мають нормальний розподіл і можна застосувати методику робіт [] для моніторингу математичного сподівання і дисперсії.

Оскільки результати, одержані в ході застосування прогнозних методик, в переважній більшості випадків стають основою для ухвалення подальших управлінських рішень, остільки вибір конкретної методики визначається технологіями управління, що склалися. Так, якщо управлінські рішення ухвалюються в моменти часу, які істотно відрізняються між собою тобто, по суті, мова йде про разові акти управлінських дій, то викладена вище схема є цілком ефективною і реалістичною.

Набір показників оцінки ефективності прогнозів є достатньо різноманітний. Серед них, наприклад, можуть бути. названі величина максимального відхилення між фактичними значеннями і прогнозними значеннями, відносна частка випадків перевищення величинами відхилень деякого заданого рівня тощо. Коефіцієнт відносного відхилення розраховується за формулою

$$\zeta_t = \frac{|x_t - \overline{x}_t|}{x_t} \cdot 100 \qquad (8)$$

де ζ_t – коефіцієнт відносного відхилення фактичного значення від прогнозного в момент часу t (у відсотках);

x_t – фактичне відхилення ресурсу (показника) в момент часу *t;*

$\overline{x}_t$ – прогнозне значення фінансового ресурсу в момент часу t.

Серед переваг відносного відхилення є незалежність від розмірності і масштабів досліджуваного фінансового ресурсу, тому часовий ряд, як правило, дає об'єктивну картину точності і надійності використаної прогностичної методики.

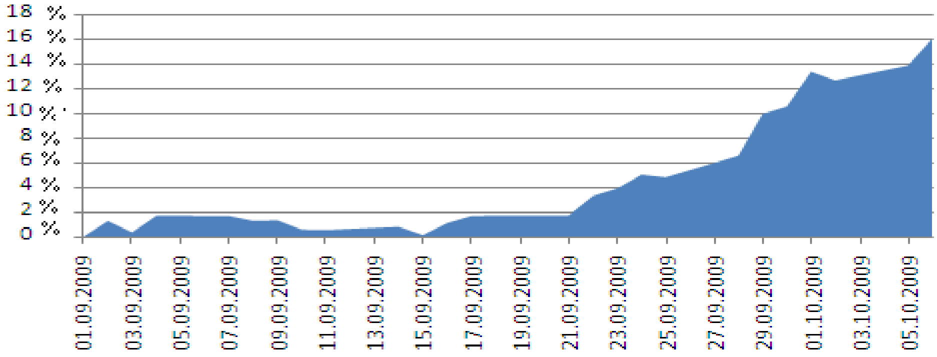

Рис. 5. Відносні відхилення фактичних щоденних значень індексу ПФТС від прогнозних за вересень 2009 р.

На рис.5 наведена гістограма відносних відхилень фактичних значень індексу ПФТС від прогнозів. На основі даної ілюстрації стверджуємо, що для більшості днів даного періоду значення відносного відхилення не перевищує рівень 15%; що свідчить про точність прогнозу.

Висновок. Розроблена адитивна модель для прогнозування індексу ПФТС має універсальний характер, що в свою чергу зумовлює можливості для ефективного і плідного використання при роботі з широким спектром фінансових ресурсів і показників.

Література

1. Буртняк І.В. Аналіз перерозподілу фінансових ресурсів / І.В. Буртняк // Моделювання регіональної економіки: зб. наук. праць – Івано-Франківськ : Плай, 2006. –№1(6). – С. 25–38.
2. Благун І.С. Методи моніторингу динаміки фінансового ресурсу / І.С. Благун, І.В. Буртняк // Наукові записки: зб. наук. праць. Серія ,,Економіка”. – Вип. 9. Ч. 4. – Острог : Національний університет “Острозька академія”, 2007. – С. 123–129.
3. Вентцель Е.С. Теория вероятностей / Е.С. Вентцель. – М.: Высшая школа, 1969. С. 576.