УДК 517.936.4

©2015 р. Г.П. Малицька, І.В. Буртняк

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

ФУНДАМЕНТАЛЬНА МАТРИЦЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ ВИРОДЖЕНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ СИСТЕМ

Досліджено задачу Коші для одного класу вироджених параболічних систем, які є системами типу Колмогорова з довільною скінченою кількістю груп змінних виродження параболічності. Побудовано фундаментальну матрицю розв'язків задачі Коші та встановлено оцінки похідних для систем з сталими коефіцієнтами в параболічній частині.

We study the Cauchy problem for a class of degenerate parabolic systems that are Kolmogorov type systems with arbitrary finite number of groups of variables parabolic degeneration. We construct a fundamental matrix of solutions of the Cauchy problem and obtain estimates of the derivatives for systems with constant coefficients in the parabolic part.

Вступ. В цій статті досліджується задача Коші для одного класу вироджених параболічних систем, що узагальнюють рівняння типу Колмогорова. Такі рівняння з двома групами змінних за якими є виродження вивчалися багатьма вченими, ці дослідження проаналізовано і розвинуто в роботах [1-2]. Системи такого типу досліджувалися в [3-4]. Ми будуємо ФМРЗК у випадку довільної скінченої кількості груп виродження параболічності [5-6]. Рівняння дифузії з інерцією мають широке застосування в дослідженні процесів на фінансових ринках України [7-9].

1. Позначення, постановка задачі. Розглянемо систему n рівнянь

$$\partial_t u_j(t,x) - \sum_{s=1}^{p-1}\sum_{\mu=1}^{n_{s+1}} x_{s,\mu}\partial_{s+1,\mu}u_j(t,x) = \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{|k|\le 2b} a_k^{j\nu}(t,x)D_{x_1}^k u_\nu(t,x), j=\overline{1,n}, \quad (1)$$

де $x=(x_1,..x_p)\in R^m, x_s=(x_1,..x_{n_s})\in R^{n_s}$ $(t,x)\in \Pi_{(0,T]}=\{(t,x): x\in R^m, t\in(0,T)\}$ p,n,n_s,b,m- задані натуральні числа, T- задане додатне число. Припускатимемо, що коефіцієнти $a_k^{j\nu}$ – комплексно значні й такі, що система

$$\partial_t w_j(t,x) = \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{|k|\le 2b} a_k^{j\nu}(t,x)D_{x_1}^k u_\nu(t,x), \quad (2)$$

в якій $(x_2,x_3,..x_p)$ параметрична точка із R^{m-n_1}, є рівномірно параболічною за Петровським у замиканні $\Pi_{[0,T]}$ множини $\Pi_{(0,T]}$.

Для зручності запишемо систему (1) в матричній формі

$$\partial_u - \sum_{s=1}^{p-1} x'_s\partial_{x'_{s+1}} = \sum_{|k|\le 2b} A_k(t,x)D_{x_1}^k u, \quad (3)$$

де $x'_s=(x_{s1},...,x_{sn_{s+1}})$. Задача Коші для (3) полягає в знаходженні розв'язку, що задовольняє початкову умову

$$u(t,x)|_{t=\tau}=\varphi(x), x\in R^m, \quad (4)$$

де $\varphi(X) = (\varphi_1(X),\dots,\varphi_n(X))$. В якості $\varphi_j(X)$ будемо розглядати достатньо гладкі фінітні функції (мають неперервні похідні до порядку $r, r\ge m+1$).

Означення. Під ФМРЗК (3), (4) будемо розуміти квадратну матрицю $G(t,x;\tau,\xi)$ порядку n, таку що для будь-якої гладкої фінітної функції $\varphi(X)$ та довільного $\tau\in[0,T)$ формулою $u(t,x)=\int\limits_{R^m} G(t,x;\tau,\xi)\varphi(\xi)d\xi$, визначається розв'язок системи (3) в $\Pi_{(\tau,T]}$, який задовольняє умову (4).

2. Побудова ФМРЗК . Нехай спочатку система (1) містить тільки похідні порядку $|k|=2b$ по x_1 і коефіцієнти $a_k^{j\nu}$ є сталими. Розглянемо для такої системи задачу Коші з початковими умовами при $t=\tau$, тобто задачу

$$
\begin{gathered}
\partial_t u_j(t,x) - \sum_{s=1}^{p-1}\sum_{\mu=1}^{n_{s+1}} x_{s,\mu}\partial_{s+1,\mu}u_j(t,x) = \\
\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{|k|=2b} a_k^{j\nu} D_{x_1}^k u_\nu(t,x), j=\overline{1,n},
\end{gathered} \tag{5}
$$

$$
u_j(t,x)|_{t=\tau} = \varphi_j(x), x\in R^m, \tag{6}
$$

де φ_j– досить гладкі й фінітні функції. Припускатимемо, що λ-корені $\lambda_1,...,\lambda_n$ рівняння $det\{\sum\limits_{|k|=2b} A_k\sigma_1^k - \lambda I\}$=0, де $\sigma_1^k \in R^{n_1}$, $A := (a_{2b}^{j\nu})_{j,\nu=1}^n$, I– одинична матриця порядку n, i уявна одиниця, задовольняють умову

$$
Re\lambda_j(\sigma_1) \le -\delta_0\sigma_1^{2b} \tag{7}
$$

з деякою сталою δ_0.

Зведемо задачу (5), (6) до задачі Коші для системи диференціальних рівнянь із частинними похідними першого порядку. Для цього компоненти $u_1,...,u_n$ розв'язку задачі (5), (6) шукатимемо у вигляді оберненого перетворення Фур'є F^{-1} по x від невідомих функцій $v_1,...,v_n$, при цьому одержимо таку задачу Коші

$$
\begin{gathered}
\partial_t v(t,\sigma) + \sum_{s=1}^{p-1}\sigma'_{s+1}\partial_{\sigma'_s}v(t,\sigma) = \\
\sum_{|k|=2b} A_k\sigma_1^k v(t,\sigma),
\end{gathered} \tag{8}
$$

$$
v_j(t,\sigma)|_{t=\tau} = \psi_j(\sigma), x\in R^m, \tag{9}
$$

де $\psi_j(\sigma) := F[\varphi_j(x)](\sigma) := \int\limits_{R^m}\exp\{-i(x,\sigma)\}\varphi_j(x)dx$.

Оскільки функції φ_j є досить гладкими та фінітними, то їхні перетворення Фур'є ψ_j аналітичними функціями для яких справджуються нерівності

$$
|\psi_j(\sigma| \le C(1+|\sigma|)^{-r}, \tag{10}
$$

для досить великого натурального числа $r, (r\ge(m+1))$.

У задачі (8), (9) $(\sigma_2,...,\sigma_p)$– параметр. Система (8) є системою диференціальних рівнянь із частинними похідними першого порядку. Згідно [3] така система еквівалентна

$$
\begin{gathered}
dt = \frac{d\sigma_{11}}{\sigma_{21}} = \frac{d\sigma_{21}}{\sigma_{31}} = ... = \frac{d\sigma_{p-1\,1}}{\sigma_{p1}} = \frac{d\sigma_{12}}{\sigma_{22}} = \\
\frac{d\sigma_{22}}{\sigma_{32}} = ... = \frac{d\sigma_{p-1\,2}}{\sigma_{p2}} = \frac{d\sigma_{1n_p}}{\sigma_{2n_p}} = ... = \\
\frac{d\sigma_{p-1\,n_p}}{\sigma_{pn_p}} = ... = \frac{d\sigma_{j-1\,n_s}}{\sigma_{jn_s}} = \frac{d\sigma_{1\,n_2}}{\sigma_{2n_2}} = \\
\frac{dv_1}{\sum\limits_{\nu=1}^{n}\sum\limits_{|k|=2b} a_k^{1\nu}\sigma_1^k v_\nu} = ... = \frac{dv_n}{\sum\limits_{\nu=1}^{n}\sum\limits_{|k|=2b} a_k^{n\nu}\sigma_1^k v_\nu}.
\end{gathered}
$$

Ця система містить $\sum\limits_{j=2}^{p} n_j + m + 1$ рівнянь. Запишемо перші інтеграли

$$
\begin{gathered}
\sigma_{1j} = \frac{t^{p-1}}{(p-1)!}\sigma_{pj} + \frac{t^{p-2}}{(p-2)!}c_{p-1,j}^{(1)} + ... + c_{1,j}^{(1)} := \\
\rho_{1j},\ j=\overline{1,n_2}, \\
\sigma_{1j} = \frac{t^{p-2}}{(p-2)!}\sigma_{p-1,j} + \frac{t^{p-3}}{(p-3)!}c_{p-2,j}^{(2)} + ... + c_{1,j}^{(2)} := \\
\rho_{1j},\ j=\overline{1,n_3}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\sigma_{rj} = \frac{t^{p-r+1}}{(p-r+1)!}\sigma_{r-1,j} + \frac{t^{p-r}}{(p-r)!}c_{p-(r-1),j}^{(r-1)} + ... + \\
c_{r,j}^{(r-1)} := \rho_{rj}, j=\overline{1,n_{r+1}}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\sigma_{p-1,j} = t\sigma_{p,j} + c_{p-1j}^{(p-1)} := \rho_{p-1j}, j=\overline{1,n_p}.
\end{gathered}
$$

Позначимо:

$$
\begin{gathered}
\rho(t,\sigma,c) := (\rho_{11},...,\rho_{1n_2},\sigma_{1n_2+1},...,\sigma_{1n_1}, \\
\rho_{21},...,\rho_{2n_3}\sigma_{2n_3+1},...,\sigma_{2n_2},...,\rho_{p-1,n_{p-1}}, \\
\sigma_{p-1,n_{p-1}+1},...,\sigma_{n-1,n_{p-1}},\sigma_{p1},...,\sigma_{nn_p}).
\end{gathered}
$$

Враховуючи позначення, одержимо таку систему рівнянь на характеристиках

$$
dv = \sum_{|k|=2b} A_k\rho^k v, \tag{11}
$$

з початковою умовою

$$
v(t,\rho(t,\sigma,c))|_{t=\tau} = \psi(\rho(t,\sigma,c)). \tag{12}
$$

Задача (11), (12) має єдиний розв'язок для $0\le\tau<t\le T<+\infty$. Розглянемо випадок коли матриця $(\sum\limits_{|k|=2b} a_k^{j\nu}\rho^k)_{j,\nu=1}^n$ комутує з $(\sum\limits_{|k|=2b}\int\limits_\tau^t a_k^{j\nu}\rho^k)_{j,\nu=1}^n$, тоді розв'язок системи має вигляд

$$
\begin{gathered}
v(t,\rho(t,\sigma,c)) = \exp\{\int_\tau^t \sum_{|k|=2b} A_k\rho^k(\beta,\sigma,c)d\beta\} \\
\psi(\rho(\tau,\sigma,c)).
\end{gathered} \tag{13}
$$

Знайдемо $c_{1,1}^{(1)}, ...c_{p-1,n_p}^{(p-1)}$ з відповідних перших інтегралів

$$c_{1j}^{(1)} = \sigma_{1j} - \frac{t^{p-1}}{(p-1)!}\sigma_{pj} - \frac{t^{p-2}}{(p-2)!}\sigma_{p-1,j} + ...+ (-1)^{(p-1)} t\sigma_{2,j},\ j = \overline{1, n_2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$c_{rj}^{(r)} = \sigma_{r,j} - \frac{t^{r-1}}{(r-1)!}\sigma_{p,j} + ... + (-1)^{(r-1)} t\sigma_{2,j}\ j = \overline{1, n_{r+1}},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$c_{p-1,j}^{(p-1)} = \sigma_{p-1,j} - t\sigma_{p,j}, j = \overline{1, n_p}.$$

На основі [6], враховуючи початкові умови одержимо

$$v(t, \sigma) = \exp\{\int_\tau^t \sum_{|k|=2b} A_k \rho_*^k(\beta, \sigma) d\beta\} \psi(\rho_*(t - \tau, \sigma)). \tag{14}$$

де

$$\rho_*(t - \tau, \sigma) = (\sigma_{1,1} + (\tau - t)\sigma_{1,2} + ...+ \frac{(\tau-t)^{p-1}}{(p-1)!}\sigma_{1,p}, \sigma_{1,n_2} + (\tau - t)\sigma_{2,n_2}, \sigma_{1,n_2+1}, ..., \sigma_{1,n_1}; \sigma_{2,n} + (\tau - t)\sigma_{3,1} + ... + \frac{(\tau-t)^{p-2}}{(p-2)!} \sigma_{p,n_p}, ..., \sigma_{2,n_3} + (\tau - t)\sigma_{2,n_3}, \sigma_{2,n_3+1}, ..., \sigma_{p-1,n_p} + (\tau - t)\sigma_{p,n_p}, \sigma_{p-1,n_p+1}, ..., \sigma_{p-1,n_p-1}, \sigma_{p,1}, ..., \sigma_{p,n_p}).$$

Знайдемо $u(t, x)$

$$u(t, x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}} \int_{R^m} \exp\{i(x, \sigma)+ \int_\tau^t \sum_{|k|=2b} A_k \rho_*^k(\beta, \sigma) d\beta\} \psi(\rho_*(t - \tau, \sigma)) d\sigma. \tag{15}$$

В інтегралі (15) зробимо заміну змінних $\rho_*(t - \tau, \sigma) = \alpha,\ \alpha \in R^m$, отримаємо

$$u(t, x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}} \int_{R^m} \exp\{i \sum_{k=1}^{n_1} (x_{1k}, \alpha_{1k}) + i \sum_{k=1}^{n_2} (x_{2k} + (t - \tau)x_{1k}, \alpha_{2k}) + ... + i \sum_{k=1}^{n_p} (x_{pk}+ (t - \tau)x_{p-1k} + ... + \frac{(t-\tau)^{p-1}}{(p-1)!} x_{1k}, \alpha_{pk}) \psi(\alpha) d\alpha. \tag{16}$$

За побудовою випливає, що ФМРЗК має вигляд

$$G(t - \tau, x, \xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}} \int_{R^m} \exp\{i \sum_{k=1}^{n_1} (x_{1k} - \xi_{1k}, \alpha_{1k}) + i \sum_{k=1}^{n_2} (x_{2k} - \xi_{2k} + (t - \tau)x_{1k}, \alpha_{2k}) + ... +i \sum_{k=1}^{n_p} (x_{pk} - \xi_{pk} + (t - \tau)x_{p-1k} + ...+ \frac{(t-\tau)^{p-1}}{(p-1)!} x_{1k}, \alpha_{pk}) \int_\tau^t \sum_{|k|=2b} A_k \rho_*^k(t - \beta, \beta) d\beta\} d\alpha. \tag{17}$$

Використовуючи методику робіт [6] і параболічність (7) одержимо, що ФМРЗК $G(t - \tau, x + iy, \xi)$ задачі (5), (6) при $t > \tau$ є цілою функцією дійсних аргументів $s_1, ..., s_p$

$$\frac{x_{1k} - \xi_{1k}}{(t-\tau)^{\frac{1}{2b}}} = s_{1k},\quad k = \overline{1, n_1},$$
$$\frac{x_{2k} - \xi_{2k} + x_{1k}}{(t-\tau)^{\frac{2b+1}{2b}}} = s_{2k},\quad k = \overline{1, n_2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{x_{pk} - \xi_{pk} + x_{p-1k}(t-\tau) + x_{p-2k}\frac{(t-\tau)^2}{2!} + .. + x_{1k}\frac{(t-\tau)^{p-1}}{(p-1)!}}{(t-\tau)^{\frac{(p-1)2b+1}{2b}}} = s_{pk},\quad k = \overline{1, n_p}$$

з порядком спадання $q = \frac{2b}{2b-1}$ і з таким же порядком росту по комплексній змінній $iy, y \in R^m$. Правильна оцінка

$$|D_x^k G(t - \tau, x + iy, \xi)| \le C_k(t - \tau)^M \exp\{-c_0(|s|^q - |y|^q)\},\ t > \tau, x \in R^m,$$
$$y \in R^m, c_k > 0, c_0 > 0, |k| = \sum_{j=1}^p k_j$$
$$M = -\sum_{j=1}^p (n_j - k_j) \frac{(j-1)2b+1}{2b},$$

Сталі c_0, c_k залежать від $m, T, \delta_0,\ max|a_k^{j\nu}|$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Eidelman S.D., Ivasyshen S. D., Kochubei A. N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudodifferential equations of parabolic type. – Basel: BirkhaËuser, 2004. – 390 p.

2. *Івасишен С.Д., Івасюк Г.П.* Про фундаментальні розв'язки задачі Коші для рівнянь Фоккера-Планка-Колмогорова деяких вироджених дифузійних процесів // Матем. та комп. модел. Серія: Фіз.-мат. н.: зб. наук. пр. Кам'янець-Подільськ. нац. ун-т, 2011. — Вип. 5. — С. 116-126.

3.*Малицька Г.П.* Системи рівнянь типу Колмогорова // Укр.мат.журн.— 2008.– 60, №12 – С.1650–1663.

4. *Литовченко В.А., Настасий Е.Б.* Вырожденные параболические системы уравнений типа Колмогорова векторного порядка // Сиб. матем. журн.— 2012. –Т. 53, N1. –С. 148–164.

5. *Малицька Г. П.* Про структуру фундаментального розв'язку задачі Коші для еліптико-параболічних рівнянь, що узагальнюють рівняння дифузії з інерцією// Вісн. нац. ун-ту "Львів. політехніка"Сер. Прикл. математика —2000.—№411. — С.221–228.

6. *Malytska G.P., Burtnyak I.V.* The fundamental solution of Cauchy problem for a single equation of the diffusion equation with inertia // Carpathian. Math. Publ. 2014, **6** (2), 320–328.

7. *Буртняк І.В., Малицька Г.П.* Модель шляхозалежної волатильності для індексу ПФТС // Бизнес Информ.— 2012. - №3. - С. 48-50.

8. *Буртняк І.В., Малицька Г.П.* Обчислення цін опціонів методами спектрального аналізу // Бизнес Информ.— 2013.– №4 – С.152–158.

9. *Буртняк І.В., Малицька Г.П.* Дослідження процесу Орнштейна-Уленбека методами спектрального аналізу // Проблеми економіки. - 2014. - №2. - С. 349-356.