Буртняк Іван

Д.е.н., проф. кафедри економічної кібернетики,

Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника,

Малицька Ганна

К.фіз-мат.н., доц. кафедри математичного і функціонального аналізу,

Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника,

Оцінювання деривативів двобар'єрних опціонів Беселівських процесів методами спектрального аналізу

Розглянемо одновимірну дифузію з процесом Бесселя з дрифтом, який рівний нулю (є ряд процесів цього типу де дрифт не рівний нулю, але їх дослідження можна звести до процесів з нульовим дрифтом). Такі процеси мають застосування при розв'язуванні економічних задач на знаходження короткострокових відсоткових ставок, кредитних спредів та стохастичної волатильності деривативів [1].

Спектральний метод застосовано до похідних фінансових інструментів, ціноутворення через представлення ціни похідного активу $u(t,x)$ нейтральною до ризику очікування деякої функції від майбутньої вартості основного процесу X, тобто як

$$u(t,x) \;=\; \tilde{E}_x\,[H(X_t)] \;= \int H(y)p(t,x,y)\,dy.$$

де $p(t,x,y)$ – щільність переходу X за ймовірністю P. Якщо інфінітезимальний генератор L базового процесу самоспряжений на гільбертовому просторі з приростом міри $m(x)dx$, і спектр L є дискретним, то щільність переходу X має розвинення за власними функціями [2]:

$$p(t,x,y) = m(y)\sum_n e^{-\lambda nt}\,\varphi_n(y)\,\varphi_n(x),$$

де $\{\lambda_n\}$ – власні значення L і $\{\varphi_n\}$ – власні функції: тобто $L\varphi_n = \lambda_n\varphi_n$.

Розглянемо процес для якого оператор L має вигляд

$$L = \partial_{xx}^2 + x^{-1}\partial_x - x^{-2}p^2 \tag{1}$$

де p стала, яку називають індексом, $x > 0$.

Зауважимо, що L сингулярний параболічний оператор, інфінітіземальний, самоспряжений, до нього зводяться ряд операторів де $\sigma^2 = 2x^2$, L є оператором Бесселя. Дифузія з оператором Бесселя досліджувалася роботах [2-3] але при інших крайових умовах, та ортогональних системах функцій. Розглянемо процес, який описується

$$\frac{\partial v(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 v(t,x)}{\partial x^2} + x^{-1}\frac{\partial v(t,x)}{\partial x} - p^2 x^{-2} v(t,x), \quad 0 < x < x_0, \tag{2}$$

і крайовою умовою

$$v(0,x) = K(e^x - 1)^+, \quad v(t, x_0) = 0; \tag{3}$$

де K страйк. Процес є однорідним тому $v(t,x) = \varphi(t)v(x)$.

Із теорії Штурма-Ліувілля, маємо

$$v(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{n\,p}\, e^{-\frac{\mu_n^2}{x_0^2}t}\, J_p\left(\frac{\mu_n}{x_0}x\right), \ \ p \geq 0,$$

де μ_n додатні корені рівняння $J_p(\mu_n x_0) = 0$, $c_{n\,p} = \frac{K\int_0^{x_0} x(e^x-1)\, J_p\left(\frac{\mu_n}{x_0}x\right)dx}{\int_0^{x_0} x J_p^2\left(\frac{\mu_n}{x_0}x\right)dx}$,

Фінансові потоки мають вигляд

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} K c_{n\,p} e^{-\left(\frac{\mu_n}{\ln K}\right)^2 (T-t)}\ J_p\left(\mu_n \ln\frac{x}{K}\right),$$

у випадку, якщо процес закінчується в момент часу Т, коли $X_T = K$

$$u(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} K c_n e^{-\left(\frac{\mu_n}{\ln\frac{R}{L}}\right)^2 (T-t)}\ J_p\left(\frac{\mu_n(K - \ln\frac{x}{L})}{\ln\frac{R}{L}}\right),$$

де $L < x < R$, L, R –бар'єри, K –страйк, а $c_{n\,p} = 2K\frac{\int_0^1 t(e^{Kt}-1)\, J_p(\mu_n t)dt}{J_{p+1}^2(\mu_n)}$.

Ми обчислили розклад фінансового потоку по системі функцій Бесселя розподіл потоків задається функцією Гріна відповідної задачі.

Оскільки проблема оцінювання і дослідження двовимірних бар'єрних опціонів зводиться до дослідження і розв'язання крайової задачі

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + x^{-1}\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} - \frac{p^2 u(t,x)}{x^2}, \ x \in [L, H], \ t \in [0, T],$$

$$u(t, L) = 0, \qquad u(t, H) = 0,$$

$$u(T,x) = \max(\pm(x(T) - K), 0)\, \mathbb{I}_{(L<x(t)<H;t\in[0,T])}.$$

Враховуючи всі міркування щодо встановлення розв'язку класичних крайових задач для сингулярного параболічного оператора L, маємо що

$$u(T,x) = \int_0^{\ln\frac{H}{L}} \left(e^{\xi}L - K\right) \mathbb{I}_{(L<x(t)<H;t\in[0,T])} G(x,\xi) d\xi$$

$$= \int_0^{\ln\frac{H}{L}} \left(e^{\xi}L - K\right) \mathbb{I}_{(L<x(t)<H;t\in[0,T])}$$

$$2\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\left(\frac{\mu_n}{\ln\frac{H}{L}}\right)^2 t} J_p\left(\frac{\mu_n \xi}{\ln\frac{H}{L}}\right) J_p\left(\frac{\mu_n \ln\frac{x}{L}}{\ln\frac{H}{L}}\right)\left(\ln\frac{H}{L}\right)^{-2}\left(J_{p+1}^2(\mu_n)\right)^{-1},$$

де $\mathbb{I}_{(L<x(t)<H;t\in[0,T])}$ ступінчаста функція Хевісайда.

Зауваження. Оскільки корені Бесселивих функцій першого роду близькі до коренів функції $\sin(x+\omega)$, вигляду $k_n = n\pi - \omega$, $\omega = const$, n −ціле, то при великих n, μ_n^2 можна замінити через n^2, звідси випливає, що ряди для функції Гріна та її першої та другої похідної рівномірно збігаються та ведуть себе як

$$C\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\ln^{2n+1}}{(2n+1)!} t < +\infty, \forall x \in [L,H], 0 < t < T, \qquad C > 0, c_0 > 0.$$

тому при наближених обчисленнях через швидку збіжність не потрібно великої кількості коефіцієнтів ряду [4].

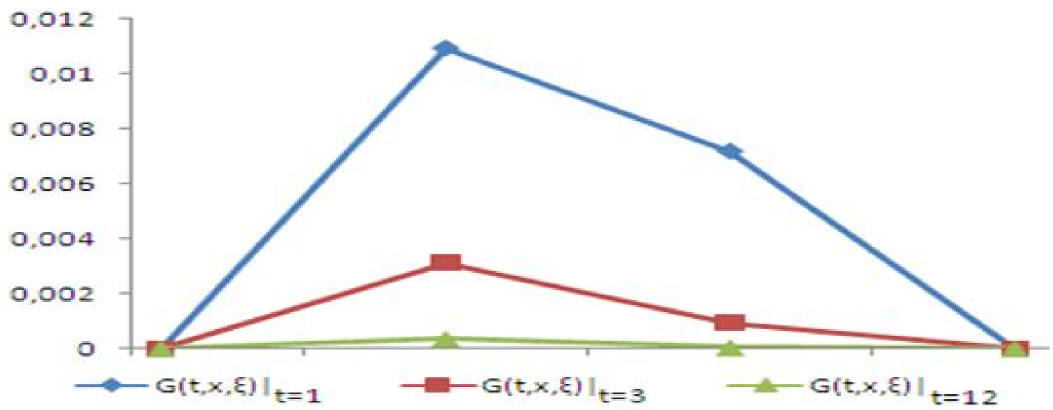

Рис.1. Графік функції Гріна при $L = 90$, $H = 120$, $\xi = 0{,}5$.

Одновимірна дифузія використовується для опису основної динаміки фондового ринку, а спектральний метод служить потужним інструментом для аналітичного ціноутворення. В роботі побудовано функцію Гріна для дифузійного процесу Бесселя двобар'єрного опціону, яка розкладена по системі функцій Бесселя. Функція Гріна записана аналітично і її представлення зручне та не завдає труднощів при обчислені цін деривативів.

Запропоновано застосування спектральних методів для обчислення значення подвійного бар'єрного опціону породженого дифузійним процесом Бесселя. Використовуючи дану методику, можна обчислити ціну опціону у вигляді ряду Фур'є Бесселя з відповідними коефіцієнтами.

Література

1. Burtnyak, I.V. & Malytska, H.P. (2017). Calculating the price for derivative financial assets of Bessel processes using the Sturm-Liouville theory, Problems of Economics,. 2, pp. 310–316.
2. Burtnyak, I.V. & Malytska, A. (2017). Evaluating the financial flows of Bessel processes by using spectral analysis, Business Inform, 7, pp. 120–124
3. Burtnyak, I.V. & Malytska, A. (2017). The Evaluation of Derivatives of Double Barrier Options of the Bessel Processes by Methods of Spectral Analysis, Investment Management and Financial Innovations, Vol. 14, Issue 3, pp. 126–134
4. Burtnyak, I.V. & Malytska, A (2018). Spectral study of options based on CEV model with multidimensional volatility. *Investment Management and Financial Innovations*, *15*(1), 18-25.