Буртняк І.В., Малицька Г.П.

Прогнозування економічних і соціальних процесів

УДК 330.4
ББК 65.23

Авторський колектив:

Буртняк І.В, доктор економічних наук, професор;

Малицька Г.П., кандидат фізико-математичних наук, доцент.

Рецензенти

В.М. Андрієнко – доктор економічних наук, професор
(Донецький національний університет)

О.М. Ляшенко – доктор економічних наук, професор
(Тернопільський національний економічний університет)

В.М. Даніч – доктор економічних наук, професор
(Луганський національний університет ім В. Даля)

Прогнозування економічних і соціальних процесів: навч. посіб. /І.В. Буртняк, Г.П. Малицька; 2019. – 131 с.

У посібнику розглянуто прогнозування економічних та соціальних процесів та обґрунтування кількісних та якісних змін їхнього розвитку в майбутньому. Опанування яких дозволить сформувати систему знань і практичних навичок для побудови і перевірки якості прогнозів. Матеріал посібника згруповано у чотири розділи, теоретичне викладення матеріалу яких супроводжується практичною реалізацією відповідних задач. У кінці кожного розділу наводяться вправи для перевірки знань.

Видання призначене для студентів економічних спеціальностей вищих навчальних закладів, аспірантів, усіх, хто цікавиться проблематикою прогнозування економічних і соціальних процесів.

УДК 330.4
ББК 65.23

ЗМІСТ

Передмова

В умовах динамічних змін у вирішальне значення має інформація орієнтована на майбутнє. Прогнозування – це, фактично, моделювання реальної ситуації, її здійснення у абстрактній сфері з перевіркою кінцевих результатів й аналізуванням перебігу визначеної прогнозованої ситуації. Тому, однією з ключових навичок менеджерів є побудова прогнозів. Прогнозування є невід'ємною частиною процесу управління. Особливо це відноситься до сфери економічних явищ, в яких результат рішень, прийнятих сьогодні багато в чому залежить від того, що буде завтра. Прогнозування зменшує невизначеність і допомагає підвищити точність рішення, і таким чином усунути втрати суб'єктів підприємницької діяльності.

Зміст цієї роботи викладений в чотирьох розділах. Перший знайомить читача з теоретичними основами прогнозування. Зокрема, у ньому розглядаються концепції прогнозів та їх значення в економіці, прогнозування і класифікація функцій, правила і методи прогнозування, організація процесу передбачення та помилки прогнозів.

Другий розділ розкриває можливості прогнозування на основі класичних моделей тренду. Тут репрезентовані методи прогнозування з урахуванням основних складових часових рядів, а саме, тенденції сезонних і випадкових коливань середньорічних темпів змін.

Третій розділ присвячений методам прогнозування на основі адаптивних моделей. Вони характеризуються високою гнучкістю і можливістю коригування нерегулярних змін в напрямку тренду, але їхній результат може бути спотворений сезонним коливанням. З цієї причини, адаптивні моделі особливо корисні при побудові короткострокових прогнозів.

У четвертому розділі розглянуті питання, які стосуються побудови точкового та інтервального прогнозів, заснованих на лінійній економетричній моделі.

Основною перевагою даної роботи є включення багатьох прикладів, що ілюструють природу прогнозування і дають змогу показати інтерпретації можливих результатів. Крім того, посібник містить велику кількість завдань для самостійної роботи. Ступінь оволодіння знаннями полегшують відповіді на всі завдання, що містяться в кінці кожного розділу.

Посібник призначений, в першу чергу, для студентів та аспірантів економічних спеціальностей, а також буде корисним для широкого кола осіб, які цікавляться проблематикою прогнозування економічних і соціальних процесів.

Розділ 1

Equation Chapter 1 Section 1

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ПРОГНОЗУВАННЯ

1.1. Поняття прогнозів та їхнє значення в економіці

Термін прогноз від грецького prognosis означає передбачення на підставі визначених даних. Можна виділити дві частини: префікс pro та слово gnosis. Префікс означає вступну, підготовчу стадію, а gnosis означає знання про щось, що не наступило. Прогноз потрібно відрізняти від припущення.

Прогнози, що стосуються суспільно-економічних явищ, побудовані на висновках експертів відносно моделей, які найкраще, за певним критерієм, описують аналізовані проблеми. Модель є віддзеркаленням досліджуваної реальності. Наприклад, знання основ хімічних реакцій дозволяє визначити склад і властивості утворених зв’язків, а правила руху планет дозволяють побудувати прогнози, які стосуються довжини дня чи пір року.

Багато вчених визначає прогноз в поєднанні з висновком про майбутнє, тобто під прогнозом ми розуміємо висновки про випадки визначених явищ…

Існує багато означень прогнозування. Вони пов’язані з різними ситуаціями, цілями і методами досліджень. Далі ми вважаємо, що прогноз є судженням про майбутнє і має такі властивості:

- сформульований з використанням досягнення науки,
- відноситься до майбутніх явищ,
- чітко сформульований і можливий до перевірки.

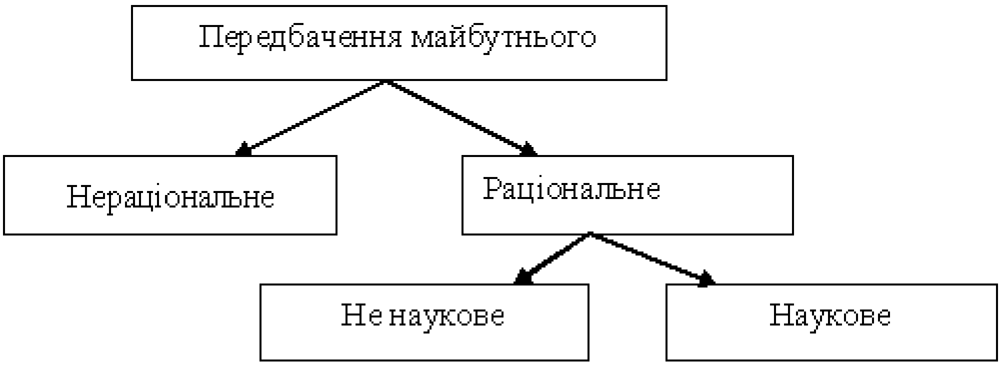

Рис.1.1. Види передбачень майбутнього.

Про нераціональне передбачення говоримо тоді, коли в процесі обґрунтування майбутнього користуємося різними прикметами. Раціональним передбачення є тоді, коли ми використовуємо логічні дані, які ґрунтуються на зборі фактів про минуле, їхню інтерпретацію з якої випливає висновок. Передбачення в яких не використовуються наукові принципи називаються передбаченнями на здоровий глузд. Наприклад, прогнози на основі поведінки тварин, росту рослин та ін. Якщо ми користуємося науковими здобутками та методами, то маємо справу з науковими передбаченнями.

Прогнозування це раціональні наукові методи передбачення майбутнього.

Звернемо увагу, що використання досягнень науки не гарантує надійності розроблених прогнозів. Економічні явища надзвичайно складні та знаходяться турбулентному оточенні. Крім того, ці явища позбавлені можливості експериментування (настільки, як в природничих науках). Як свідчить практика, краще знати правду неточно, ніж детально помилятися. Тобто, точне прогнозування це вміння дане не багатьом і є поєднанням знання та мистецтва.

Не дивлячись на розвинуту методологію прогнозування, досить часто не вдається передбачити того, що чекає нас в найближчому майбутньому. Проблеми, пов'язані з передбаченням майбутнього, засвідчують, що прогнозування полягає на описанні випадків, які можуть бути в майбутньому, не даючи відповіді на питання, чому вони не відбулися. Хоч прогнози не завжди є точними, але вони пояснюють, які явища і тренди можуть зберігатися, чи відбутися протягом найближчих років. Завдяки тому існує можливість прийняття дій, спрямованих до усунення негативних випадків. Наприклад, в половині 70 років минулого століття, передбачено ряд таких явищ, як перенаселення, вичерпання ресурсу нафти, підтоплення приморських місцевостей через парниковий ефект і та ін. Внаслідок даних прогнозів почали вводити різні обмеження, щоб зменшити негативні наслідки.

Прогнозування є цінним інструментом в діяльності економічних суб'єктів. В умовах динамічних змін їхнього оточення, вирішальну роль відіграє інформація про майбутнє. З цих міркувань одним з провідних завдань сучасних менеджерів є вміння використовувати знання, які доступні для складання прогнозів. На даний момент прогнозування – інтегральна частина процесу управління, і дуже цінується на ринку праці. Це стосується сфери економічних явищ, де від результату рішень, прийнятих сьогодні залежить те, яка ситуація буде завтра. Прогнозування зменшує нерішучість і сприяє зростанню точності прийнятих рішень, а тим самим зменшує втрати в різних сферах діяльності економічних суб'єктів.

Таблиця 1.1.

Наслідки вдалих рішень

Простір рішень	Наслідки невипадкових рішень	
	Переоцінка	Недооцінка
Кількість продукції	Надмірні запаси	Незадоволений попит
Рівень запасів	Кошти пов’язані із заготовленням виробів	Відсутність неперервного продажу
Фінанси	Невикористаний “мертвий капітал”	Відсутність ліквідності
Мережа розподілу	Збільшення коштів на зберігання	Невикористані ринкові можливості
Рівень зайнятості	Великі витрати, пов’язані з підготовкою кадрів	Труднощі з обслуговуванням клієнтів
Ціни	Зменшення конкурентноздатності	Невикористані шанси ринкового зростання

Прогнози виконують інформаційну та попереджувальну ролі. Прогнозування використовують передбачення мікро та макро явищ для різних структур. Макроекономічні прогнози будуються спеціальними організаціями та інститутами і стосуються процентної ставки, ступеня інфляції, загального ринкового попиту в країні та ін. Макроекономічні прогнози мають істотний вплив на діяльність уряду і фінансових установ, та інших економічних суб’єктів.

Мікроекономічні прогнози будуються на підприємствах або інституціях, що займаються аналізом ринку. Предметом мікроекономічних прогнозів є попит, пропозиція, ціни, поведінка конкурентів та ін. Як випливає з емпіричних досліджень, в більшості фірм функція прогнозування застосовується спочатку у маркетинговому та виробничому, а потім у фінансовому відділах. Лише в невеликій частині фірм є окремо відділ прогнозування.

Функція прогнозування реалізовується диференційовано по галузях. Найчастіше прогнози використовуються в транспортній, енергетичній та фармацевтичній сферах. Прогнози використовуються підприємствами різних галузей випливає для отримання додаткової інформації необхідної в процесі прийняття рішення. У таблиці 1.2 наведені приклади суб'єктів, які використовують прогнозування як інструмент передбачення різних явищ в майбутньому.

Таблиця 1.2

Приклади суб'єктів, які використовують в своїй діяльності прогнозування

Суб'єкти що використовують прогноз	Управління міжнародною організацією	Уряд	Керівництво підприємствами країни	Директор театру
Об'єкт прогнозування	Європа	Країна	Промислова галузь	Театр
Прогнозоване явище	Розвиток нового ринку	Економічна кон'юнктура	Кон'юнктура в галузі	Інтерес суспільства до вистав
Дані для прогнозування	Макро- і мікроекономічні (загальний ринковий попит)	Макроекономічні (ставка інфляції)	Макро- і мікроекономічні (прогнози кон'юнктури)	Мікроекономічні (розмова з глядачами)
Прогнозована змінна	Ємність вибраних європейських ринків	Коефіцієнт кон'юнктури	Передбачуваний річний продаж продукту	Постановка нової вистави
Приклади рішень, що використовують прогноз	Вихід фірм на український ринок при передбаченому попиті на продукти	Впровадження преференційних кредитів при збільшенні коефіцієнта кон'юнктури	Збільшення потужності при передбаченому зростанні коефіцієнта кон'юнктури галузі	Початок приготувань до артистичних міроприємств при передбаченому зацікавленні суспільства

Загалом можна констатувати, що значення прогнозування в досягненні цілей випливає перш за все з невизначеності майбутнього, та впливу часу між прийняттям певного рішення його реалізацією і наслідками.

1.2. Функція і класифікація прогнозів

Основною метою прогнозування є прийняття правильних рішень. У зв'язку з цим виділяють три основні функції прогнозів:

1. підготовча,
2. активізаційна,
3. інформаційна.

Підготовча функція стосується однієї людини, групи осіб, суб'єкта господарювання або установи. За якість прогнозу відповідає особа, яка вміє робити висновки, бо наслідки поточного рішення мають значення в майбутньому.

Активізаційна функція прогнозів спонукає приймати дії, що сприяють реалізації прогнозу, який завчасно повідомляє про вигідні явища, та не виконувати дії, якщо вони сприяють негативним результатам (прогноз зменшення продажу, чи збільшення кількості продуктів, що не відповідають якісним нормам).

Інформаційна функція прогнозів пов'язана з усвідомленням суспільства відповідних змінам і зменшення страху перед майбутнім. Таку роль у минулому виконували пророцтва голоду, війни, природних катаклізмів. Оголошення прогнозів може викликати різні реакції.

Окрім трьох основних вище вказаних, виділяють також допоміжні функції, а саме:

•аргументаційну - прогноз подає різного роду аргументацію, яка полегшує прийняття певних рішень;

•дорадчу - прогноз підготовлює інформацію, яка відносяться до певних явищ і є предметом прийняття рішень;

•медійну - прогноз допомагає ідентифікувати трансакційну ціну.

Таблиця 1.3

Класифікація прогнозів

Критерій поділу	Вид прогнозу
Часовий горизонт	– коротко-, середньо-, та довготермінові – оперативні, стратегічні – перспективні, над перспективні
Характер і структура	– прості, складні – кількісні, якісні – точкові, граничні – скалярні, векторні – одноразові, повторні – комплексні, наслідкові – конструктивні, деструктивні
Ступінь загальності	– загальні та детальні
Сфера застосування	– глобальні, часткові
Радіус дії	– світові, міжнародні, державні, регіональні
Методи опрацювання	– мінімальні, середні, максимальні – чисті (первісні), верифікаційні, модельні – неускладнені, мінімально очікуваних втрат
Ціль і функція	– дослідницькі, застережу вальні, реалістичні – нормативні – активні, пасивні

Широкий клас прогнозування, а також різні форми прогнозів, вимагають їх систематизації. При класифікації прогнозів використовують різні критерії. Найчастіше класифікацію за часовим проміжком. Тобто коротко, середньо і довго термінові.

Короткотермінові –не перевищують одного року, середньо термінові – двох років і довготермінові більше двох років. Варто зауважити, що поділ має умовний характер. Наприклад, в демографії за короткотерміновими вважають прогнози не більші 5 років, середньо термінові - 10 років, а довготермінові - більше 10 років. Для торгівельних підприємств короткотерміновий прогноз 3 місяці, середньо терміновий - 2 роки, довготермінові - більше 2 років, а в метеорології короткотермінові прогнози до 24 годин, середньо термінові – -тиждень, довготермінові – місяць. В межах довготермінових прогнозів часто виокремлюють перспективні (10-15 років), також надперспективні **(**більше 20 років).

Слід зазначити, що критерій часу вказує на характер змін, які стосуються прогнозованого явища. Короткотерміновий прогноз описує зміни кількісних характеристик прогнозованого явища. Ці зміни виражаються зростанням, або спаданням величини прогнозованої змінної, які розкривають її характер (функція регресії, або тренд).

Середньо терміновий - це прогноз на такий проміжок, де відбуваються не тільки кількісні змін, а й якісні. Зміни якісні виявляються у відхиленні від допустимих меж (появи нових чинників, які впливають на прогнозовану змінну, що відображається зміною виду тренду, або ж величини параметрів функції регресії).

Довготерміновий прогноз охоплює такий період, в якому сподіваємося, на кількісні так і суттєві якісні зміни. Метод прогнозування повинен враховувати обидва типи змін.

За часовим проміжком проводиться також поділ на прогнози оперативні і стратегічні. Оперативні прогнози найчастіше є короткотерміновими і використовуються в оперативному плануванні економічних суб'єктів, також для визначення поточної економічної політики. Стратегічні прогнози використовують для прийняття довгострокових рішень.

За характером, чи структурою проводиться поділ на прості та складні прогнози. Прості – стосуються окремих економічних змінних. Складні –відображають багатоаспектні зв'язки, які описуються набором змінних. Наприклад, умови життя людей, чи частка продукції в асортименті виробів.

З іншої сторони ці прогнози поділяються на кількісні та якісні. В кількісних стан прогнозованої змінної описуються чисельно. Кількісні прогнози можуть бути точковими (прогнозована змінна набуває визначеного значення), інтервальними (прогнозована змінна знаходиться в певних межах), скалярними (прогнозована величина одновимірна) та векторними (прогнозована величина є вектором, двох чи більше вимірною). Якісні прогнози відносяться до невимірних, або є умовним описом стану кількісної змінної (за місяць курс долара до гривні зросте).

Поділяють прогнози на одноразові та повторні. Одноразові – використовуються лише раз (найчастіше стосуються стратегічних змінних). Повторні поділяються на неперервні, залежно від надходження інформації, та покращені, ґрунтуються на оперативному прогнозі.

Також існує поділ прогнозів на комплексні, наслідкові, конструктивні та деструктивні.

Комплексні – найчастіше будуються для складних явищ для загального опису їхнього майбутнього стану.

Наслідкові – стосуються майбутнього стану описаного економічного явища в декількох проміжках, причому вони не обов'язково мусять бути віддалені між собою в один і той самий проміжок часу.

Конструктивні – це прогнози, оголошення яких сприяє їхній реалізації (оголошення прогнозу зростання ціни на цукор, провокує попит і в результаті збільшення ціни, яка без цього прогнозу не збільшилася б).

Деструктивні – оголошення яких, спричиняє зменшення точності прогнозованих явищ, тобто прогноз великого напливу туристів у Карпати, може відбити охоту у багатьох людей до поїздки через ймовірне збільшення цін, в результаті кількість туристів може бути значно меншою від прогнозованої.

За критерієм детальності – загальні, які описують майбутній стан явища і детальні, які стосуються майбутнього стану певного аспекту прогнозованого явища.

За радіусом дії – світові, міжнародні та регіональні. Прогнози класифікують за методами їхньої розробки. Можна виділити прогнози мінімальні, середні, максимальні, чисті, верифікаційні (атестуючі), модельовані, найбільшої правдоподібності та мінімально сподіваних втрат. Варіація майбутнього є наслідком побудови прогнозів різних термінів.

Чисті прогнози (первісні) виникають внаслідок екстраполяції спостереженої тенденції досліджуваного явища. Ці прогнози короткотермінові та є вступом до передбачення майбутнього розвитку. Верифікаційні – періодичні прогнози, що утворюються на основі неперервного, нового статистичного матеріалу. Модельні прогнози – формуються на базі моделей, які відображають майбутній розвиток прогнозованих змінних. Прогнози, що використовують ймовірнісні методи найбільшої правдоподібності та мінімально очікуваних втрат мають відповідні назви.

За своїм призначенням прогнози поділяють на дослідницькі, реалістичні, активні та пасивні.

Дослідницькі прогнози вказують на різні можливі версії розвитку майбутнього. До них відносяться, так звані, застережні та нормативні прогнози. Завданням застережних прогнозів є передбачення не корисних для споживача випадків. Дослідницькі прогнози тісно пов'язані з активізаційною функцією. Якщо прогнози стосуються певних норм, які будуть обов'язковими в майбутньому то їх називають нормативними. Прогнози цього виду повинні застосовуватися для знаходження найкращого варіанту розвитку майбутнього.

Реалістичні – характеризуються високим рівнем довіри їхніх адресатів, в цьому випадку виконується підготовча функція прогнозу.

Активні – сприяють прийняттю певних рішень, які гарантують кінцевий результат, темп розвитку прогнозованих явищ.

Пасивні – показують майбутній напрямок змін, але не дають ніяких рекомендацій пов'язаних з розвитком прогнозованих змінних.

1.3. Основи і методи прогнозування

В процесі прогнозування можна виділити дві основні фази
1. діагностування минулого
2. визначення майбутнього

Діагностування минулого має на меті пізнання природи прогнозованого явища, механізмів його розвитку та оцінки чинників, що його визначають. В цій фазі відбувається збір інформації, що стосується минулого і над якою будуть проводитися відповідні перетворення. Далі будується формальна модель (економетрична або модель тенденції розвитку) або твердження.

В другій фазі, яка називається визначення майбутнього, відбувається перехід від перетворених даних до прогнозу. Спосіб такого переходу називається правилом прогнозування. Метод прогнозування це спеціально визначені підходи, які використовуються для розв'язання задач прогнозування. Вибрані способи перетворення даних пов'язані з різними правилами визначення прогнозу. Метод прогнозування полягає у визначенні моделі та правил прогнозу.

Найчастіше застосовуються такі правила прогнозування:

- основні
- основні з уточненнями
- не ускладнені
- найбільшої правдоподібності
- мінімальних втрат

Основні правила описують прогнозовану змінну за допомогою екстраполяції моделі цієї ж змінної поза вибіркою. Ця модель буде актуальною в майбутньому моменті або проміжку T, на який робиться прогноз. Таке припущення виконується при прогнозуванні явищ з великою інерцією, тобто з повільними еволюційними кількісними змінами.

У випадку виконання аргументованих припущень, які стосуються майбутнього, спостережених в минулому відхилень емпіричних даних від моделі, знаходять застосування у основному правилі з уточненням. Прогноз ґрунтується на основному правилі, до якого вносяться поправки. Якщо, наприклад, теоретичне відхилення знайденої з моделі величини прогнозованої змінної ($\hat{y}_n$) від реальної величини (y_n) в момент n на тривалий час то поправка (p) моменту $T > n$ має вигляд:

$$p = y_n - \hat{y}_n . \qquad (1.1)$$

Ця поправка додається до прогнозу, отриманого за допомогою основного правила.

Згідно з неускладненим правилом прогноз ґрунтується на рівні величини очікуваної змінної в прогнозованому околі:

$$y_T^* = E\left(Y_t\right), \quad T > n . \qquad (1.2)$$

де y_T^* прогноз змінної Y на момент $T > n$, $E\left(Y_t\right)$ величина змінної Y в проміжку $T > n$.

Правило найбільшої правдоподібності встановлюється на рівні найбільш ймовірної величини прогнозованої змінної, або модальної. Якщо величини прогнозованої змінної утворюють скінчену множину (змінна є дискретною), то за точку початку прогнозу береться така величина, для якої ймовірність її появи є найбільшою. Якщо можливі величини є нескінченною множиною, то прогноз є граничним. Зауважимо, що правило найбільшої правдоподібності можна застосовувати тільки тоді, коли змінна має випадковий характер і відомий її ймовірнісний розподіл, або функція щільності.

За правилом мінімальних втрат, прогнозується такий стан змінної, який спричиняє найменші втрати. Рівень втрат пов'язаний з допущеною помилкою прогнозу. Це правило відіграє основну роль при прогнозуванні тих змінних, переоцінювання, чи недооцінювання яких, може спричинити фінансові витрати.

В теорій прогнозів приймається ряд ідей, які називаються основними ідеями для майбутніх висновків, найважливішими є такі:

1. Оцінка параметрів моделі, де прогнозована змінна відіграє роль пояснюючої.
2. Аналітичний вигляд прогнозної моделі, множина пояснюючих змінних, величина її прогнозованих параметрів.
3. Розклад випадкового складника моделі, чи є він стаціонарним, чи повільно і регулярно змінюється.
4. Для прогнозованого періоду величина пояснюючих змінних, що входять в модель.
5. Допустима екстраполяція моделі, поза множиною пояснюючих змінних, на підставі якої оцінено модель.

Ці ідеї завжди виконуються при короткотерміновому прогнозуванні, а при створенні прогнозу на довший період, виконуються не всі з основних правил, що спричиняє до великих систематичних помилок. Необхідною умовою побудови статистично обґрунтованого прогнозу є перевірка прийнятих ідей, які повинні, по мірі можливості, найкраще відповідати дійсності.

З погляду на вид використаного прогнозу, ціль та характер передбачуваного явища, на практиці використовують різні методи прогнозування. Основними критеріями вибору методу є:

- Часовий горизонт
- Доступність і цінність даних
- Простота застосування
- Можливість інтерпретації результатів
- Ймовірність результатів, допустимість прогнозу

Методи прогнозування можна в загальному поділити на дві групи: кількісні (математично-статистичні) та якісні (евристичні).

Кількісні методи найчастіше використовуються для прогнозування нескладних явищ на короткий період. Інструментом прогнозування є різні моделі (класичні та адаптаційні моделі тренду, причинно-описові, авто регресійні, прості та рекурентні моделі).

Якісні методи використовують для довготермінового прогнозування (наукових відкриттів, розвитку науки і техніки). Виокремлюють методи анкетні, інтуїтивні, почергових наближень, рефлексії, аналогові. Ці методи ґрунтуються на знаннях, досвіді, інтуїції, здоровому глузді.

Класифікація головних методів прогнозування наведено на рисунку 1.2.

Рис. 1.2. Класифікація методів прогнозування

Прогнозування є передбаченням величини, або змін ендогенних (прогнозованих) змінних. Воно може стосуватися:

– Самого факту здійснення описаних випадків (виграшу партії X в парламентських виборах, опадів снігу, чи дощу),
– Моменту, або проміжку описаного випадку (прийняття України до Європейського союзу, зростання процентної ставки до рівня 5%).
– Рівня описаної змінної (сили вітру в 10 години ранку завтрашнього дня)
– Сили впливу певного випадку на інші змінні (вплив зростання цін товарів і послуг в Україні 2008–2009 роках на рівень ставки інфляції в грудні 2009р.).

В залежності від характеру прогнозованої змінної для прогнозування застосовують різні методи. Наприклад, для прогнозування факту здійснення описаного випадку та моменту його появи використовуються не математичні методи, а опис передбачуваного рівня та впливу на рівень іншої змінної можливий, здійснюється за допомогою застосування математично-статистичних методів.

1.4. Організація процесу прогнозування

Прогнозування є процесом, що складається з таких етапів:

1. постановка завдання
2. опис передумов
3. вибір методів і правил
4. основа прогнозу
5. оцінка точності

На першому етапі потрібно описати предмет, ціль та горизонт та якісні вимоги прогнозу. Горизонтом (проміжком прогнозування) називається кількість проміжків або моментів, на які поширюється прогноз. Найдальший момент або проміжок в майбутньому, в якому справджується прогноз, називається максимальним горизонтом прогнозування. Прогноз є допустимим, якщо вибірка дозволяє виконання поставленої цілі.

Прийняття прогнозних припущень пов’язане з дослідженням минулого. На цьому етапі збирається кількісна інформація (статистичні дані) та якісна (характеристика, експертиза, теорія, тощо). Потрібно зібрати таку інформацію, на основі якої можна оцінити минуле і забезпечити стан прогнозованого явища, механізмів розвитку та його економічних, соціальних і технологічних аспектів. Лише дані відповідної якості, дозволяють сформулювати гіпотези щодо збереження досліджуваного явища в майбутньому.

Опис прогнозних основ, що ґрунтуються на механізмі, який породжує прогнозну змінну, є великий вплив на вибір методів і правил прогнозування. Звернемо увагу, що основними критеріями вибору, правил та методів прогнозування повинні бути: часовий горизонт прогнозу, легкість застосування, доступність і якість збору даних, можливість інтерпретації, ймовірність отриманих результатів та допустимість побудованого прогнозу.

Основа прогнозу проводиться згідно з вимогами вибраного методу. У випадку математично-статистичних методів, необхідно побудова формальної моделі, що базується на вибраних змінних. Визначення прогнозу не математичними методами (евристичними), ґрунтується на побудові колективом експертів, певної смислової ідеї, яка утворює найкращу, за їхнім припущенням, версію прогнозу.

Оцінка точності використовується для встановлення допустимої похибки і точності згідно з величиною вибірки, стосується якості прогнозу, повинна уточнюватися згідно з описом в першому етапі. Допустимість прогнозу досліджується в тому самому проміжку часу, для якого він складений. Якість прогнозу встановлюється з проходженням часу після реалізації (оцінка по факту). Оцінка встановлює, чи процес прогнозування є скінченим. В іншому випадку потрібно зробити зміни в ході процесу прогнозування і якщо потрібно повторити описані етапи.

1.5. Похибки прогнозу ex post та ex ante

Прогнозування може мати минулий, або майбутній характер. В результаті застосування того чи іншого виду ми отримаємо прогнози ex post та ex ante. Ex post називають згаслими, визначаються для проміжку t, для якого відома істинна величина прогнозованої змінної Y_t, якщо прогноз визначений на підставі економетричної моделі, то можемо стверджувати що ex post побудований при відомих величинах екзогенних (пояснюючих) змінних, він називається стабільним.

Прогнозування ex post є особливо зручним інструментом для узгодження теоретичних величин (отриманих з моделі) з емпіричною (реальною) величиною прогнозованої змінної.

Прогноз ex ante визначається для всіх проміжків горизонту прогнозування. Якщо прогноз визначений за економетричною моделлю, то величини екзогенних змінних визначаються поза моделлю, тобто при прогнозі ex ante потрібно спочатку встановити величини екзогенних змінних в прогнозованому проміжку, а потім визначити прогноз. Правильність припущень щодо сподіваних величин пояснюючих змінних мають вплив на якість прогнозу. Деякі автори прогноз ex ante називають істинним або умовним.

Взаємозалежність між прогнозами наведена на рисунку 1.3

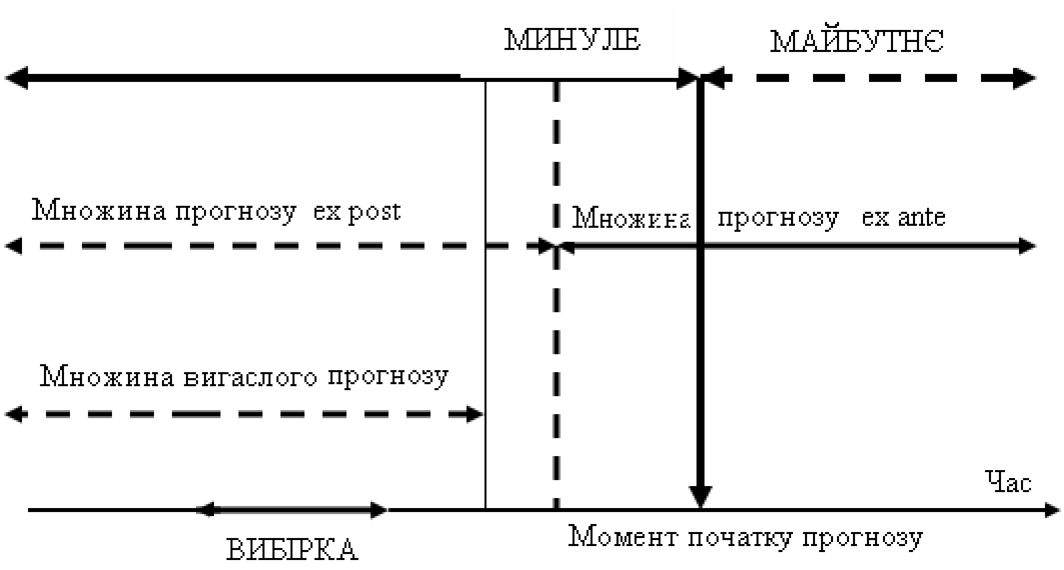

Рис. 1.3. Залежність між прогнозами

Кожен прогнозист намагається робити правильні прогнози. Оцінка правильності може доводитися двома способами:

- Оцінка очікуваної величини відхилень прогнозованої змінної від прогнозу. Цю різницю часто називають похибкою прогнозу. Сподівана похибка віднімається від прогнозу, її можна назвати похибкою ex ante;
- Розрахунок величини відхилення прогнозованої змінної від прогнозу. Після знаходження величини прогнозованої змінної прогноз згасає. Відхилення, яке стосується згаслих прогнозів, називається похибкою прогнозу ex post.

Похибки ex post та ex ante використовують при перевірці допустимості прогнозу. Вони можуть бути пойменованими (називатися прогнозованою змінною) величинами або не пойменованими (виражатися в процентах). В першому випадку говоримо про безумовні, а в другому про умовні похибки. Визначаються як для точкових так і інтервальних прогнозів.

Можна стверджувати, що прогнози є допустимими (точними), якщо показник точності знаходиться в межах від 5% до 10% і не допустимими якщо цей показник більший 10%. Дані межі стосуються відносної точності прогнозу. Велике значення має характер і значення прогнозованої змінної.

Похибки прогнозу ex ante можуть бути оцінені, тому що в момент визначення прогнозу дійсна величина змінної в прогнозованому моменті є невідомою, на ній базується точність і допустимість прогнозу.

Оцінки похибок ex post та ex ante описані в наступних розділах посібника.

1.6. Статистичні дані, що використовуються в прогнозуванні

В процесі прогнозування істотну роль відіграють статистичні дані, які є однією з підстав вибору моделі для прогнозування, за її допомогою можна встановити залежності між різними аспектами аналізованого явища, оцінити параметри і стохастичну структуру, верифікацію прогнозу та ін. В зв’язку з цим, потрібно щоб дані були відповідної якості. Досить часто використовують такі властивості, які описують якість даних: однорідність, об’єктивність, вірогідність, цільність, повнота, порівняльність, актуальність. На якість статистичних даних мають вплив професіоналізм та об’єктивність статистичних службу, що збирають економічні дані.

Залежно від рівня аналізу, статистичні дані поділяються на макро- і мікроекономічні. Макроекономічні відображають явища, що стосуються всієї країни, області, чи сектору економіки. Джерелом для статистичних даних є Головне Управління Статистики. Мікроекономічні дані використовуються для дослідження окремих суб'єктів господарювання. Мікроекономічні дані можна при відповідній агрегації перетворені в макроекономічні, протилежне перетворення, як правило, не можливе.

Статистичні дані можуть мати вигляд часових, різницевих, чи різницево-часових рядів. З формальної точки зору часові ряди є впорядковані стани змінної Y відносно часу t, вони можуть бути одно- або багатовимірні. Одновимірні часові ряди можна записати у вигляді вектора

$$y = \left[y_1, y_2, ..., y_n \right] \tag{1.3}$$

де y_t є станом змінної Y в моменті, чи проміжку t $\left(t = 1, 2, ..., n \right)$.

Часові ряди можуть стосуватися як вимірних (величина зарплати), так і не вимірних (навчання працівників) змінних.

Багатовимірний часовий ряд записується у вигляді матриці розмірності $\left(G \times n \right)$:

$$Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{G1} & y_{G2} & \cdots & y_{Gn} \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

де y_{gt} стан змінної g в момент $t \left(g = 1, 2, ..., G; t = 1, 2, ..., n \right)$.

Часові ряди, що стосуються економічних явищ, як правило є короткими, але мала вибірка не завжди може забезпечити сподівану точність оцінок. В багатьох випадках особи, що роблять прогнози постають перед дилемою, чи забезпечити однорідність та актуальність статистичних даних, чи збільшити довжину часових рядів, жертвуючи однорідністю та актуальністю? На це питання немає однозначної відповіді.

Різницеві ряди це набори чисел, що стосуються змінних, які характеризують певні явища і мають місце в один і в той самий час, тільки для різних об'єктів (банки, області). Однорідність даних дозволяє порівнювати зібрану інформацію, в цьому випадку можемо використовувати велику вибірку з великою ймовірністю і точністю отриманих висновків. База даних для таких рядів має вигляд:

1. одновимірного різницевого ряду

$$y = \left[y_1, y_2, ..., y_K \right], \tag{1.5}$$

де y_k $\left(k = 1, 2, ..., K \right)$ є станом змінної Y в k-му об'єкті в момент t,

2. багатовимірного різницевого ряду

$$Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1K} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2K} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{G1} & y_{G2} & \cdots & y_{GK} \end{pmatrix}, \tag{1.6}$$

де y_{gk} стан змінної g $\left(g = 1, 2, ..., G \right)$ в об'єкті k $\left(1, 2, ..., K \right)$для моменту t .

Різницево-часові – утворені рядами змінних G, що описують K об'єктів. Формально їх можна зобразити транспонованою матрицею

$$Y = \begin{bmatrix} Y^1 \\ Y^2 \\ \vdots \\ Y^K \end{bmatrix}, \tag{1.7}$$

де Y^K матриця типу (1.4), $k = 1, 2, ..., K$.

Прикладом таких рядів можуть бути збір інформації, що стосується середньоденного курсу купівлі євро і долара в чотирьох банках на протязі п’яти днів останнього тижня минулого року. В цьому випадку банки є об’єктами, євро і долар – змінними, а довжина часового ряду дорівнює 5.

Зібрані дані можна репрезентувати у вигляді тривимірного куба (рис. 1.3). На рисунку вісь X це простір (об’єкти), T – час, Y – змінні.

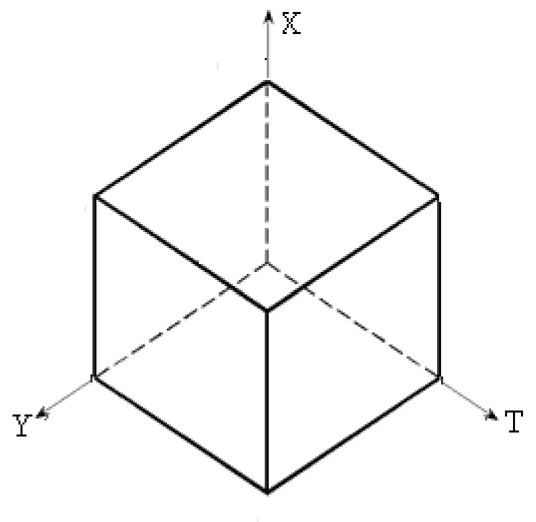

Рис. 1.4 Тривимірний інформаційний куб

Провівши переріз куба площиною паралельною до осей OX і OT, отримаємо інформаційну матрицю різницево-часових даних, якщо зробити переріз двома площинами (перша паралельна до OY і OT, друга до OY і OX) отримаємо вектор спостереження вибраного околу і певного об’єкта до всіх змінних.

Статистичні дані, які використовуються для аналізу, певним чином узагальнюються (агрегуються).

Агрегація даних ґрунтується на приєднанні частини сукупності даних нижчого ряду до даних вищого ряду. Наприклад, стосовно об’єднання даних про самоврядування в районах в інформацію по області, або місячні дані, що притаманні аналізованому явищу, узагальнюються в річні. Не агрегованою є первинна інформація, зібрана, наприклад анкетуванням, для таких досліджень основним знаряддям є анкетний лист.

Зібрані дані перед початком перетворення і аналізу повинні бути перевіреними, тобто пройти верифікацію, щоб усунути, якщо потрібно, похибки, які можуть бути випадковими, або систематичними. Випадкові виникають через неуважність при отриманні інформації з джерела даних, є результатом недосконалих інструментів і методів, що використовуються в дослідженнях (похибки вимірювання).

Систематичні похибки є результатом свідомої фальсифікації даних призначених для статистичних цілей, наприклад, боязнь негативної оцінки однолітків. При дослідженні бюджетів домогосподарств часто зменшують видатки на алкогольні напої.

Одним із способів виявлення помилок в статистичних даних, так званих, не типових спостереженнях, є використання кількісних методів. Один з них базується на критерії Шовене (Chauvenet), що використовує середній рівень досліджуваного явища.

Часто в емпіричних дослідженнях зібраний статистичний матеріал є неповним, це може бути зумовлено такими чинниками:

1. браком даних (при зондуванні ринку на деякі питання респонденти не дають відповіді);

2. зібрані дані не відповідають відповідним критеріям якості;
3. виключенням великої кількості нетипових спостережень

Досить часто брак даних відчувається при прогнозуванні економічних явищ міжнародного характеру. У випадку нестачі даних, поповнення в часових рядах здійснюють за допомогою інтерполяції, екстраполяції або методом оцінок.

Екстраполяція та інтерполяція застосовуються тоді, коли розвиток аналізованого явища є досить регулярним та існує можливості підібрати дані, яких не вистачає, за допомогою функції тренду. Функцію тренду використовують для екстраполяції (підбір даних зовні ряду) та інтерполяції (підбір даних всередині ряду, які знаходяться між відомими величинами).

Якщо аналізований часовий ряд характеризується значною нерегулярністю змін в часі, то важко виокремити тенденції розвитку. У цьому випадку використовують метод оцінок. Невідомі значення часового ряду оцінюються за допомогою визначення допоміжних величин, що відповідають відміченим часовим проміжкам.

Підчас прогнозування складних явищ використовують синтетичні змінні, тобто опис складного явища, яке утворене за допомогою багатьох окремих атрибутів і заміняють за допомогою однієї агрегованої величини.

Формально синтетичною змінною є функція

$$Z = f\left(Z_1, Z_2, ..., Z_k\right), \qquad (1.8)$$

яка перетворює матрицю Z формалізованих величин стандартизованих змінних $Z_1, Z_2, ..., Z_k$ у вектор Z реалізацій синтетичних змінних.

Звернемо увагу на те, що в наборі вихідних даних, можуть знаходитися змінні, які мають різний вплив на величину синтетичної змінної. В цьому наборі виокремлюють три підмножини, а саме, стимулянти, дестимулянти та домінанти.

Стимулянти – змінні величини, які вищі від досліджуваних величин, свідчать про кращий рівень розглянутого явища (вплив довжини доріг державного значення з твердим покриттям на розвиток комунальної інфраструктури).

Дестимулянти – змінні, зростання величини яких призводить до погіршення ситуації на досліджуваному об’єкті (величина безробіття в контексті досліджень ринку праці).

Номінанти – є найкориснішими з точки зору оцінки величини досліджуваних об’єктів (отриманий рівень життя населення, номінальна вартість, споживчі видатки, чи частка інвестицій в певній галузі).

Однією з переваг моделі з синтетичними змінними є точніший опис аналітичного вигляду і відповідно більш точне прогнозування.

Equation Section (Next)**Розділ 2**

ПРОГНОЗУВАННЯ НА ОСНОВІ КЛАСИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ТРЕНДУ

2.1. Поняття, вигляд і склад часових рядів

Часовим рядом (хронологічним, динамічним) називається множина кількісних величин досліджуваного явища (y_t), спостереженого в чергових проміжках часу (t). В цих рядах величина аналізованого явища (залежна змінна) є функцією часу (незалежна змінна), або:

$$y_t = f\left(t\right) \tag{2.1}$$

Часова змінна може бути множиною точок на осі часу. Виокремлюють часові ряди моментів і проміжків. Часові ряди моментів, побудовані для величин ресурсів, виникають в результаті виміру досліджуваного явища в певному проміжку часу (відповідно стану на кінець місяця, кварталу, року). Часові ряди моментів стосуються потоку і виникають в результаті сумування величин досліджуваного явища в межах однакової потужності (річна продукція підприємства Х є сумою випущеної продукції за 12 місяців, чи за 4 квартали). Нехай деякі ресурси мають вимір W (стан на даний момент), то величина явища на даний момент часу вимірюється як WT^{-1}. Вимір явищ має істотне значення при аналізі суспільно-економічних процесів.

За допомогою поєднань понять засобів і потоків можна визначити різні економічні категорії. Наприклад, виробничий процес можна описати, як перетворення засобів праці в потік готових виробів, тобто засоби W використовуються за час T, або $W/T = WT^{-1}$. В свою чергу, якщо перетворювати прибуток, або потік живої праці при виробництві продукції в засоби на даний момент часу, то маємо $WT^{-1}T = W$.

Емпіричні спостереження мають скінчену кількість реалізацій випадкової змінної $\left(Y_t\right)$, їх можна репрезентувати за допомогою таблиці, яка складається з двох рядків (стовпців).

Таблиця 2.1.

Загальний вигляд часового ряду

t	1	2	…	$n-1$	n
y_t	y_1	y_2	…	y_{n-1}	y_n

Напрямок зміни явищ в часі можна пояснити за допомогою тенденції розвитку (тренду), наприклад, розглянемо сезонні та випадкові коливання. Рівняння, яке описує розвиток досліджуваного явища як функцію тренду, сезонних та випадкових коливань називається моделлю з часовими коливаннями. Складові часового ряду можна об’єднати за допомогою додавання, чи множення. Виокремлюють адитивну та мультиплікативну моделі коливань.

Розглянемо часовий ряд $y_1, y_2, ..., y_n$, якщо кожен елемент y_t є сумою складових, то має місце адитивна модель, яка описується рівнянням

$$y_t = f\left(t\right) + g\left(t\right) + \varepsilon_t, \quad \left(t = 1, 2, ..., n\right), \tag{2.2}$$

де $f\left(t\right)$ функція від часу, яка описує тренд, $g\left(t\right)$ функція від часу, яка описує сезонні коливання, ε_t випадкова складова, що описує випадкові коливання (нерегулярні).

Якщо кожен елемент y_t є добутком складових часового ряду, то має місце мультиплікативна модель, яка найчастіше описується рівнянням виду

$$y_t = f(t)g(t)\varepsilon_t, \quad (t = 1, 2, ..., n) \tag{2.3}$$

У випадку, коли часовий ряд охоплює великий проміжок, то для кожної з моделей слід приєднати додатковий елемент, який називається циклічними коливаннями. Кожен часовий ряд складається з систематичної і випадкової складових. Систематична складова може мати вигляд тренду, середнього, чи періодичної складової. Класифікація наведена на рисунку 2.1.

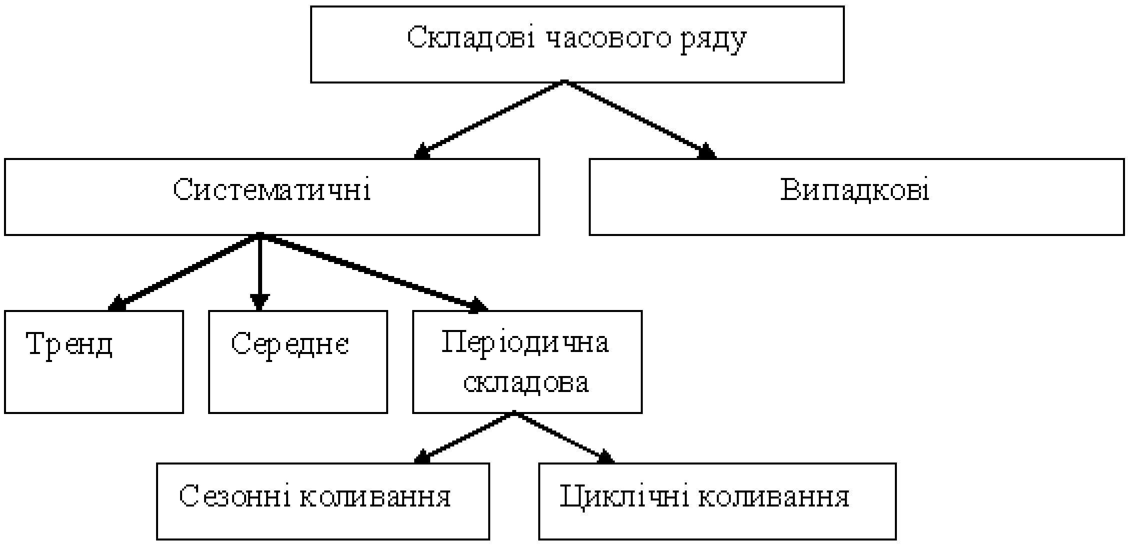

Рис. 2.1. Класифікація складових часового ряду

При побудові моделі коливань з використанням часового ряду $y_1, y_2, ..., y_n$ виділяють наступні етапи:

- Визначають клас функції тренду, або стверджують недостатню тенденцію розвитку
- Ідентифікують цикли і амплітуди сезонних коливань
- Визначають силу впливу випадкових коливань

Потрібно відмітити, що в часовому ряді не завжди можуть виступати всі описані складові, процес їх виокремлення називається декомпозицією. Виділення складової є підставою для прогнозування розглянутого явища в майбутньому.

2.2. Виділення функції тренду

Трендом (тенденцією розвитку) називають повільні, односторонні і систематичні зміни рівня явищ, розглянуті в досить довгому проміжку. Найпростішим методом вибору аналітичного вигляду функції тренду є графічний аналіз. Він ґрунтується на оцінці емпіричних точок, що відповідають спостереженим величинам часового ряду: $y_1, y_2, ..., y_t$ в послідовних проміжках. Наприклад, існування показникового, логарифмічного, чи степеневого тренду свідчить наближений вигляд емпіричних точок, відповідних координат $(t, \ln y_t)$, $(\ln t, y_t)$, чи $(\ln t, \ln y_t)$.

Зроблений на підставі графічного аналізу вибір аналітичного вигляду функції тренду підтверджується дослідженням динамічних властивостей.

Графічний аналіз часто вказує на лінійну функцію тренду досліджуваної змінної. Підтвердженням правильності вибору, такої аналітичної тенденції розвитку є сталість різниць

$$\Delta y_t = y_t - y_{t-1}, \quad \left(t = 1, 2, ..., n\right), \tag{2.4}$$

де

$$\Delta y_t = const \quad \text{äëÿ äî â³ëüí î ¿âåëè÷èí è } t\,. \tag{2.5}$$

Це можна побачити безпосередньо з таблиці

Таблиця 2.2

Прогнозування на основі класичної моделі тренду

t	$y_t = a_0 + a_1 t$	$\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$
0	a_0	–
1	$a_0 + a_1$	$a_0 + a_1 - a_0 = a_1$
2	$a_0 + 2a_1$	$a_0 + 2a_1 - a_0 - a_1 = a_1$
3	$a_0 + 3a_1$	$a_0 + 3a_1 - a_0 - 2a_1 = a_1$
4	$a_0 + 4a_1$	$a_0 + 4a_1 - a_0 - 3a_1 = a_1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Якщо функція тренду є многочленом другого степеня (парабола), то сталими є прирости другого порядку

Таблиця 2.3

Прогнозування на основі класичної моделі тренду другого степеня

t	$y_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$	$\Delta y_t^{(1)}$	$\Delta y_t^{(2)}$
0	a_0	–	–
1	$a_0 + a_1 + a_2$	$a_1 + a_2$	–
2	$a_0 + 2a_1 + 4a_2$	$a_1 + 3a_2$	$2a_2$
3	$a_0 + 3a_1 + 9a_2$	$a_1 + 5a_2$	$2a_2$
4	$a_0 + 4a_1 + 16a_2$	$a_1 + 7a_2$	$2a_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Змінна y_t $\left(t = 1, 2, ..., n\right)$ вказує на показниковий тренд $\left(y_t = a_0 a_1^t\right)$, якщо для функції виконується умова сталості приростів, які визначаються співвідношенням

$$\frac{\Delta y_t}{y_{t-1}} = \frac{y_t - y_{t-1}}{y_{t-1}} = const \tag{2.6}$$

Умова (2.6) є умовою на сталість ланцюгових індексів, обчислених для ряду $y_1, y_2, ..., y_t$ $\left(t = 1, 2, ..., n\right)$.

Підкреслимо, що розглянуті способи вибору аналітичного вигляду функції тенденції розвитку є наближеними. Потрібно не залишати поза увагою теоретичні принципи механізму розвитку аналізованої змінної, крім того, аналітичний вигляд тренду не повинен бути складним (важко оцінити параметри функції і правильно інтерпретувати отримані результати).

При виборі функції тренду використовують такі принципи:

- Аналітичний вигляд функції повинен ґрунтуватися на конкретних теоретичних припущеннях
- Структурні параметри функції повинні мати методичне значення в описі розвитку досліджуваного явища
- Функція повинна сприяти в отриманні прогнозу згідно реальних реалізацій аналізованого явища.

В результаті чого можна стверджувати, що при виборі вигляду аналітичної функції тренду потрібно дотримуватися певних компромісів, вони повинні стосуватися з одного боку методичної поправки функції, а з другого – можливості врахування структурних параметрів. З цієї точки зору в процесі прогнозування найчастіше використовують лінійні функції тренду, або функції, що зводяться до лінійних (через логарифмування).

Спосіб поведінки при прогнозуванні залежить від виду складових, що входять до складу часових рядів (особливо тренду і сезонності). Беручи до уваги тип тренду (адитивний (лінійний), мультиплікативний (нелінійний), чи нестачу тренду) та вид сезонності (адитивну, мультиплікативну, а також брак сезонності), часові ряди можемо поділити на 9 груп.

Вважаємо, що випадкова складова присутня у всіх родах часових рядів, їхня класифікація наведена на рисунку 2.2.

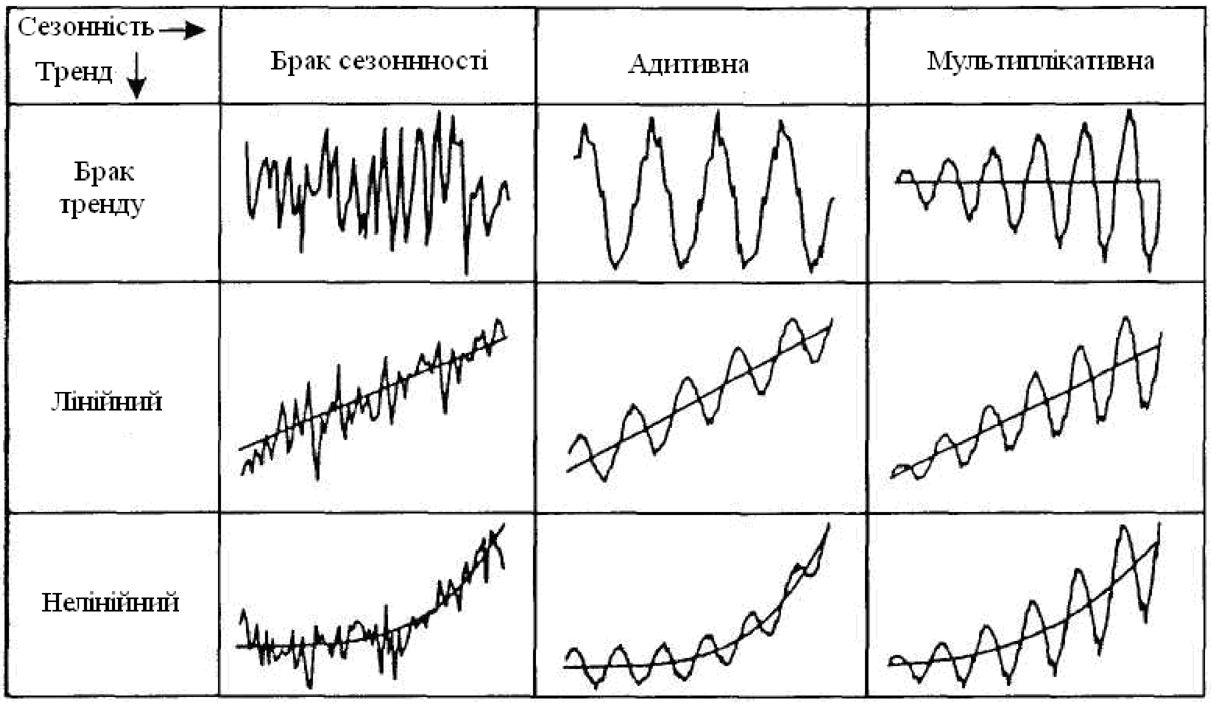

Рис. 2.2. Класифікація часових рядів

Вважатимемо, що шукана функція тренду є лінійною і має вигляд

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \varepsilon_t, \quad (t = 1, 2, ..., n). \tag{2.7}$$

Невідомі параметри α_0, α_1 функції (2.7) оцінимо за допомогою методу найменших квадратів (МНК). Він ґрунтується на оцінюванні параметрів функції тренду так, щоб сума квадратів відхилень емпіричних величин від теоретичних була мінімальною. Формально критерій найменших квадратів можна записати в такому вигляді:

$$W = \sum_{t=1}^{n} \left(y_t - \hat{y}_t \right)^2 = \min . \tag{2.8}$$

Для лінійної функції тренду критерій має вигляд

$$W=\sum_{t=1}^{n}\left(y_t-a_0-a_1t\right)^2=\min. \tag{2.9}$$

Підставивши значення y_t та t, отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases}\sum_{t=1}^{n}y_t=na_0+a_1\sum_{t=1}^{n}t,\\ \sum_{t=1}^{n}y_tt=a_0\sum_{t=1}^{n}t+a_1\sum_{t=1}^{n}t^2.\end{cases} \tag{2.10}$$

Розв'язком (2.10) є:

$$a_1=\frac{n\sum_{t=1}^{n}ty_t-\sum_{t=1}^{n}t\sum_{t=1}^{n}y_t}{n\sum_{t=1}^{n}t^2-\left(\sum_{t=1}^{n}t\right)^2}=\frac{12\sum_{t=1}^{n}ty_t}{n^3-n}-\frac{6\sum_{t=1}^{n}y_t}{n^2-n}=\frac{\sum_{t=1}^{n}\left(y-\overline{y}\right)\left(t-\overline{t}\right)}{\sum_{t=1}^{n}\left(t-\overline{t}\right)^2}, \tag{2.11}$$

та

$$a_0=\frac{\sum_{t=1}^{n}y_t-a_1\sum_{t=1}^{n}t}{n}=\overline{y}-a_1\overline{t}. \tag{2.12}$$

В результаті оцінки параметрів, функція тренду записується так:

$$\hat{y}_t=a_0+a_1t+e_t,\ (t=1,2,...,n), \tag{2.13}$$

$$e_t=y_t-\hat{y}_t,\ (t=1,2,...,n). \tag{2.14}$$

за залишками моделі.

Використовуючи матричну модель (2.7), можна записати

$$y=T\alpha+\varepsilon, \tag{2.15}$$

де $y=\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{bmatrix}, T=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\\ \vdots & \vdots\\ 1 & n\end{bmatrix}, \alpha=\begin{bmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\end{bmatrix}, \varepsilon=\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \vdots\\ \varepsilon_n\end{bmatrix}.$

Тобто, y – вектор спостережуваної величини часового ряду розмірності $\left(n\times1\right)$, T – матриця величини часової змінної, розмірності $\left(n\times2\right)$, α – параметрів α_0,α_1, розмірності $\left(2\times1\right)$, а ε є вектором випадкових складових розмірності $\left(n\times1\right)$.

В цьому випадку рівняння отримані в результаті застосування МНК набудуть вигляду:

$$T^TTa=T^Ty, \tag{2.16}$$

де Т записане у верхньому регістрі, означає транспонування матриці.

$$T^TT=\begin{bmatrix}n & \sum_{t=1}^{n}t\\ \sum_{t=1}^{n}t & \sum_{t=1}^{n}t^2\end{bmatrix}, T^Ty=\begin{bmatrix}\sum_{t=1}^{n}y_t\\ \sum_{t=1}^{n}ty_t\end{bmatrix}, a=\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\end{bmatrix}, \det\left(T^TT\right)\neq0. \tag{2.17}$$

Складові вектора a є величинами, які обчислюються за формулою

$$a=\left(T^TT\right)^{-1}T^Ty. \tag{2.18}$$

Оцінене рівняння (2.15) набуває вигляду:

$$y=Ta+e, \tag{2.19}$$

де вектор e визначений за допомогою формули:

$$e = y - Ta = y - \hat{y}, \tag{2.20}$$

якщо існує обернена матриця

$$\left(T^T T\right)^{-1} = \begin{bmatrix} A & C \\ C & B \end{bmatrix}, \tag{2.21}$$

то вектор a, оцінки структурних параметрів лінійної функції тренду, має вигляд:

$$a = \begin{bmatrix} A & C \\ C & B \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{n} y_t \\ \sum_{t=1}^{n} t y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\sum_{t=1}^{n} y_t & C\sum_{t=1}^{n} t y_t \\ C\sum_{t=1}^{n} y_t & B\sum_{t=1}^{n} t y_t \end{bmatrix}. \tag{2.22}$$

Тобто

$$a_0 = A\sum_{t=1}^{n} y_t + C\sum_{t=1}^{n} t y_t, \tag{2.23}$$

$$a_1 = C\sum_{t=1}^{n} y_t + B\sum_{t=1}^{n} t y_t, \tag{2.24}$$

Оскільки

$$\sum_{t=1}^{n} t = \frac{n(n+1)}{2}, \tag{2.25}$$

$$\sum_{t=1}^{n} t^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \tag{2.26}$$

то

$$A = \frac{2(2n+1)}{2n(2n+1) - 3n(n+1)}, \tag{2.27}$$

$$B = \frac{12}{2n(n+1)(2n+1) - 3n(n+1)^2}, \tag{2.28}$$

$$C = \frac{6}{2n(2n+1) - 3n(n+1)}. \tag{2.29}$$

Лінійна функція тренду може бути записана наступним чином:

$$\hat{y}_t = a_1 t + a_0 + e_t. \tag{2.30}$$

Процедуру визначення оцінок a_0 і a_1 лінійної функції тренду можна значно спростити, якщо одиниці часу такі, що їхня сума дорівнює нулю. Це можна зробити таким способом, при непарній кількості спостережень в часовому ряді, центральне значення занумеровуємо нулем, а потім наступні нумеруємо: 1,2,…, а попередні: -1, -2,… У випадку парної кількості, два спостереження, що знаходяться в центрі ряду нумеруємо -0,5 та 0,5, наступні занумеровуємо 1,5, 2,5,…, а попередні -1,5, -2,5… Якщо одиниці часу мають номери, сума яких дорівнює нулю, то (2.10) набуде вигляду:

$$\begin{cases} \sum_{t=1}^{n} y_t = n a_0, \\ \sum_{t=1}^{n} y_t t' = a_1 \sum_{t=1}^{n} (t')^2. \end{cases} \tag{2.31}$$

Розв’язком даної системи є величини:

$$a_0 = \frac{\sum_{t=1}^{n} y_t}{n}, \tag{2.32}$$

та

$$a_1 = \frac{\sum_{t=1}^{n} y_t t'}{\sum_{t=1}^{n} (t')^2}. \qquad (2.33)$$

Економічна інтерпретація оцінки a_1 означає середню зміну (спадання, чи зростання) досліджуваного явища, яке відбувається в певній одиниці часу. Оцінка a_0, називається вільним виразом функції тренду, описує теоретичний рівень досліджуваного явища в околі $t = 0$ (якщо нумерація одиниць часу задовольняє умову $\sum_{t=1}^{n} t \neq 0$), або середній рівень досліджуваного явища в аналізованому часовому проміжку (якщо нумерація одиниць часу задовольняє умову $\sum_{t=1}^{n} t = 0$).

Однією з умов використання оціненої функції тренду для прогнозування є її відповідність до емпіричних даних. Для оцінки відповідності функції тренду використовують такі показники:

- Стандартне відхилення:

$$S_e^2 = \frac{\sum_{t=1}^{n} (y_t - \hat{y}_t)^2}{n-k} = \frac{e^T e}{n-k} = \frac{(y - Ta)^T (y - Ta)}{n-k}, \qquad (2.34)$$

де k є кількість оцінених параметрів функції тренду (для лінійної функції $k = 2$)

- Коефіцієнт зміни стохастичних складових:

$$V_e = \frac{S_e}{\overline{y}} \times 100. \qquad (2.35)$$

- Коефіцієнт збіжності:

$$\varphi^2 = \frac{\sum_{t=1}^{n} (y_t - \hat{y}_t)^2}{\sum_{t=1}^{n} (y_t - \overline{y}_t)^2} = \frac{e^T e}{\sum_{t=1}^{n} (y_t - \overline{y}_t)^2} = \frac{e^T e}{y^T y - \frac{1}{n}(\mathbf{1}^T y)^2} = \frac{(n-k) S_e^2}{\sum_{t=1}^{n} (y_t - \overline{y}_t)^2}, \qquad (2.36)$$

де **1** є $(n \times 1)$ вимірним вектором, всі елементи якого дорівнюють одиниці.

- Коефіцієнт детермінації:

$$R^2 = 1 - \varphi^2. \qquad (2.37)$$

- Середні похибки оцінки параметрів

$$D(a_0) = S_e \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{n} t^2}{n\left(\sum_{t=1}^{n} t^2 - n\overline{t}^2\right)}} = S_e \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{n} t^2}{n \sum_{t=1}^{n} (t - \overline{t})^2}}, \qquad (2.38)$$

$$D(a_1) = \frac{S_e}{\sqrt{\sum_{t=1}^{n} t^2 - n\overline{t}^2}} = \frac{S_e}{\sqrt{\sum_{t=1}^{n} (t - \overline{t})^2}}. \qquad (2.39)$$

Стандартне відхилення інформує проте, як теоретичні значення відрізняються від емпіричних. Чим менша величина стандартного відхилення, тим точніше функція тренду описує прогноз на майбутнє.

Коефіцієнт зміни описує, яка частина середнього рівня досліджуваного явища відхиляється від випадкової функції тренду. З статистичної точки зору функція тренду є тим краща, чим ближче V_e до нуля.

Коефіцієнт збіжності φ^2 відображає, яка частина змін є невизначеною за допомогою функції тренду. Коефіцієнт детермінації R^2 описує, ту частину змінності досліджуваного явища, яка описується за допомогою тренду. Коефіцієнти збіжності та детермінації набувають значення в межах від нуля до одиниці, але їхня сума завжди повинна дорівнювати 1:

$$\varphi^2 + R^2 = 1. \tag{2.40}$$

Функція тренду найкраще підходить до відображення результатів спостережень, тоді коли φ^2 наближається до нуля, а R^2 до одиниці.

Середні відхилення оцінок параметрів інформують про те, з яким знаком нам потрібно брати параметри α_0 та α_1 на основі результатів випадкового випробовування. Чим менші відхилення оцінок, тим точніше функція тренду відображає емпіричні значення.

$$\frac{D(a_0)}{a_0} \quad \text{і} \quad \frac{D(a_1)}{a_1} \quad - \text{ ñåðåäí ³ ï î õèáêè}. \tag{2.41}$$

Середні похибки оцінок відповідних параметрів, виражаються в процентах, судять про значущість оцінок, якщо похибки перевищують 50% то це дуже зменшує значущість отриманих оцінок. Причинами, які провокують великі похибки можуть бути:

1. невелика розмірність вибірки, яка використовується для оцінки параметрів функції тренду,
2. невластивий метод оцінки параметрів функції тренду,
3. прийняття невластивого аналітичного вигляду функції тренду.

Величини середніх похибок оцінки записані під оцінками відповідних параметрів, а саме:

$$\begin{array}{ccc} \hat{y}_t = a_0 + & a_1 t + & e_t \\ D(a_0) & D(a_1) & (S_e) \end{array} \tag{2.42}$$

Потрібно звернути увагу на те, що середні похибки оцінок параметрів $D(a_0)$ та $D(a_1)$ можна отримати добувши квадратні корені з відповідних діагональних елементів матриці варіації та коваріації оцінок параметрів:

$$D^2(a) = S_e^2 \left(T^T T\right)^{-1} \tag{2.43}$$

Якість функції тренду можна також оцінити, верифікувавши нульову гіпотезу про істотність кожного з параметрів. У випадку лінійної функції найчастіше оцінюють істотність коефіцієнта напрямку тренду. З цією ціллю нульову гіпотезу $H_0 : \alpha_1 = 0$, розглядають замість альтернативної гіпотези $H_1 : \alpha_1 \neq 0$. Для верифікації гіпотези H_0 використовується статистика у вигляді:

$$t = \frac{a_1}{D(a_1)} \tag{2.44}$$

де a_1 оцінка параметру α_1, а $D(a_1)$– похибка оцінки параметру α_1

З таблиці t–Стюдента отримуємо, для загального рівня істотності α та $n-k$ ступенів свободи, що критична величина тесту t_α. Якщо емпірична величина статистики (2.44) попадає в проміжок $(-\infty, -t_\alpha) \cup (t_\alpha, +\infty)$ то H_0 відкидаємо на користь H_1, це рівнозначно з тим, що оцінка α_1 є істотною.

2.3. Екстраполяція лінійної функції тенденції розвитку

Визначення тенденції розвитку описаного явища служить для двох цілей: опису минулого та прогнозування.

Прогнозування на основі функції тренду носить назву екстраполяції. Екстраполяція застосовується тоді, якщо виконуються наступні умови:

1. Аналітичний вигляд функції тренду в проміжку, де здійснюється прогнозування, є незмінним.
2. Сила і напрямок коливань. спостережених в минулому, не змінилися.
3. Випадкові коливання не істотні для досліджуваного явища в прогнозованому околі.

Як правило, екстраполяція застосовується для короткострокового прогнозування, чим коротший горизонт прогнозу, тим більша правдоподібність виконання накладених умов.

Передбачуваний рівень явища в околі T у випадку використання лінійної функції тренду визначається з залежності:

$$y_T^* = a_0 + a_1 T = x_T^T a \qquad (2.45)$$

де $T = n+1, n+2, ..., x_T^T$ є транспонованим вектором величини змінних в прогнозованому околі $\left(x_T^T = \begin{bmatrix} 1 & T \end{bmatrix}\right)$, a – вектором оцінок параметрів функції тренду.

В прогнозуванні розрізняють два основні види: прогнози точкові та граничні. Точкові прогнози виражаються у вигляді одного спостереження. Граничні прогнози можна подати у вигляді:

$$P\left\{dy_T^* < y_T < gy_T^*\right\} = 1 - \alpha, \qquad (2.46)$$

де P – ймовірність, $dy_T^* = y_T^* - u_\alpha D_T$ – нижня межа, $gy_T^* = y_T^* + u_\alpha D_T$ верхня межа прогнозу.

Величина y_T^* є точковим прогнозом на окіл T. Символ D_T означає похибку точкового прогнозу і визначається за допомогою формули:

$$D_T = S_e \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{\left(T - \overline{t}\right)^2}{\sum_{t=1}^{n}\left(t - \overline{t}\right)^2}}, \qquad (2.47)$$

або

$$D_T = S_e \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{3\left(2T - n - 1\right)^2}{n^3 - n}}, \qquad (2.48)$$

де S_e – стандартне відхилення залишків функції тренду, що використовується для прогнозування.

Середня похибка прогнозу D_T є іменованою величиною (називається так само як прогнозована змінна) і визначається з залежності:

$$D_T = \sqrt{D^2\left(a_0\right) + TD\left(a_1\right) + 2T\operatorname{cov}\left(a_1, a_0\right) + S_e^2}. \qquad (2.49)$$

Як результат з (2.49), середня похибка прогнозу залежить від рівня варіації залишкового складника та від величини похибки оцінених параметрів функції тренду і коваріації $\operatorname{cov}\left(a_1, a_0\right)$. Коваріації обчислюються за формулою

$$\operatorname{cov}\left(a_1, a_0\right) = \frac{-6}{n^2 - n} \times S_e^2. \qquad (2.50)$$

Для оцінки середньої відносної похибки прогнозу використовуємо формулу

$$D_T{}' = \frac{D_T}{y_T^*} \times 100. \qquad (2.51)$$

Для визначення нижньої і верхньої границі прогнозу використовують величину u_α. Якщо відхилення функції тренду має нормальний розподіл, і маємо велику вибірку, то границі отримуємо з таблиць нормального розподілу згідно формули:

$$F\left(u_\alpha\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}, \qquad (2.52)$$

де α рівень значущості.

Якщо випадкові відхилення мають мають нормальний розподіл, а вибірка, на підставі якої оцінено параметри функції, є невеликою, то u_α заміняємо величиною $t_{\alpha,s}$ яку беремо з таблиць розкладу t–Стюдента.

У випадку, коли випадкові відхилення фукнції тренду не мають нормального розподілу, тоді при побудові прогнозу граничні величини визначають з залежності:

$$u = \sqrt{\frac{1}{1-\left(1-\alpha\right)}} = \sqrt{\frac{1}{\alpha}}, \qquad (2.53)$$

Абсолютна похибка граничного прогнозу визначається наступним чином:

$$V_T = \frac{\text{âåðõí ÿ ì åæà - í èæí ÿ ì åæà}}{2}, \qquad (2.54)$$

або

$$V_T = \left| u_\alpha D_T \right|. \qquad (2.55)$$

Згідно вище сказаного символ u_α в (2.55) зміняємо, при виконанні відповідних умов на $t_{\alpha,s}$ або u.

Відносна похибка граничного прогнозу визнається з формули:

$$V_T' = \frac{V_T}{y_T^*} \times 100. \qquad (2.56)$$

Припущення про нормальність розподілу випадкових відхилень функції тренду, можна перевірити за допомогою тесту Ярка-Бера. В ньому для верифікації нормальності розподілу випадкового складника є подібність третього і четвертого центральних моментів розкладу залишків функції тренду до величини тих моментів у нормальному розподілі (третій центральний момент для нормального розподілу дорівнює 0, а четвертий дорівнює 3). Припускаємо, що залишки функції тренду є емпіричними реалізаціями випадкового складника. Тестуванню підлягає нульова гіпотеза H_0: випадковий складник функції тренду має нормальний розподіл, та альтернативна гіпотеза H_1: випадковий складник моделі не має нормального розподілу.

Для верифікації H_0 використовують статистику Ярка-Бера, що описується так:

$$JB = n\left[\frac{1}{6}B_1 + \frac{1}{24}\left(B_2 - 3\right)^2\right], \qquad (2.57)$$

причому

$$B_1 = \left(\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\frac{e_t^3}{\overline{S}^3}\right)^2, \qquad (2.58)$$

$$\overline{S} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} e_t^2}, \qquad (2.59)$$

$$B_2 = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\frac{e_t^4}{\overline{S}^4}. \qquad (2.60)$$

Символом n позначено величину вибірки, на основі якої оцінено функцію регресії, e_t – залишки для $t = 1, 2, ..., n$.

Статистика JB має розподіл χ^2 з двома ступенями свободи. Знаходимо критичну величину тесту, а потім теоретичну χ^2_α, при рівні істотності α. Нульова гіпотеза відкидається якщо $JB > \chi^2_\alpha$, в іншому випадку гіпотеза приймається.

В (2.46) межею є $1-\alpha$, ця величина називається ймовірністю прогнозу. Описані похибки пов'язані з визначенням прогнозу, їх називають похибками прогнозу ex ante. Вони характеризують величину відхилень фактичних значень від прогнозних. Звернемо увагу, що не всі методи прогнозування допускають оцінку похибок прогнозу ex ante.

Приклад 2.1. На підставі даних, щодо кількості виданих пластикових карт банком X на протязі останніх 10 років, побудувати точковий та граничний прогноз (при ймовірності $1-\alpha = 0.95$) на проміжок $T = 12$. Кількість виданих пластикових карт (тис. шт.) в році $t = 1,2,...,10$ є такою: 6,8; 7,6; 8,7; 8,7; 9,3; 10,1; 10,4; 10,8; 10,7; 12,4. Оцінити точність побудованого прогнозу.

Розподіл емпіричних даних утворює часовий ряд, функція тренду має, з точністю до випадкового складника, лінійний характер вигляду (2.7). Для оцінки параметрів функції використовуємо систему рівнянь (2.10). Занесемо дані в табл. 2.4 і зробимо допоміжні розрахунки

Таблиця. 2.4

t	y_t	$y_t t$	t^2	t'	$y_t t'$	$(t')^2$	$\hat{y}_t$	$y_t - \hat{y}_t$	$(y_t - \hat{y}_t)^2$	$y_t - \overline{y}_t$	$(y_t - \overline{y}_t)^2$
1	6,8	6,8	1	-4,5	-30,60	20,25	7,12	-0,32	0,1024	-2,75	7,5625
2	7,6	15,2	4	-3,5	-26,60	12,25	7,66	-0,06	0,0036	-1,95	3,8025
3	8,7	26,1	9	-2,5	-21,75	6,25	8,20	0,50	0,2500	-0,85	0,7225
4	8,7	34,8	16	-1,5	-13,05	2,25	8,74	-0,04	0,0016	-0,85	0,7225
5	9,3	46,5	25	-0,5	-4,65	0,25	9,28	0,02	0,0004	-0,25	0,0625
6	10,1	60,6	36	0,5	5,05	0,25	9,82	0,28	0,0784	0,55	0,3025
7	10,4	72,8	49	1,5	15,60	2,25	10,36	0,04	0,0016	0,85	0,7225
8	10,8	86,4	64	2,5	27,00	6,25	10,90	-0,10	0,0100	1,25	1,5625
9	10,7	96,3	81	3,5	37,45	12,25	11,44	0,74	0,5476	1,15	1,3225
10	12,4	124,0	100	4,5	55,80	20,25	11,98	0,42	0,1764	2,85	8,1225
$\sum$ 55	95,5	569,5	385	0	44,25	82,50	X	X	1,1720	X	24,905

Підставимо відповідні дані в систему рівнянь (2.10) отримаємо:

$$\begin{cases} 10a_0 + 55a_1 = 95,5 \\ 55a_0 + 385a_1 = 569,5 \end{cases}$$

Розв'язавши систему, отримаємо $a_1 = 0,54 \quad a_0 = 6,58$, а рівняння лінійної функції тренду має вигляд:

$$\hat{y} = 6,58 + 0,54t \quad \left(\sum t \neq 0\right) \tag{2.61}$$

Якщо одиниці часу занумеровані так, що їхня сума дорівнює нулю, то використавши (2.31) отримаємо:

$$\begin{cases} 10a_0 = 95,5 \\ 82,5a_1 = 44,25 \end{cases}$$

Звідси $a_1 = 0,54 \quad a_0 = 9,55$, а функція тренду при умові $\left(\sum t = 0\right)$ має вигляд:

$$\hat{y} = 9,55 + 0,54t \quad \left(\sum t = 0\right) \tag{2.62}$$

Перед використанням функції тренду для прогнозування потрібно перевірити, чи відповідає вона емпіричним даним. Для цього обчислимо коефіцієнти змінності (2.35) та збіжності (2.36), а також коефіцієнт детермінації (2.37) і середні похибки оцінки параметрів (2.38) і (2.39). З табл. 2.2 маємо:

Стандартне відхилення $S_e = \sqrt{\dfrac{1,172}{10-2}} = 0,3828$ (тис. шт.).

Коефіцієнт змінності $V_e = \dfrac{0,3828}{9,55} \times 100 = 4\%$.

Коефіцієнт збіжності $\varphi^2 = \dfrac{1,172}{24,905} = 0,047$.

Коефіцієнт детермінації $R^2 = 1 - \varphi^2$; $R^2 = 0,953$.

Величини середніх похибок оцінок параметрів мають вигляд

$$D(a_1) = \frac{0,3828}{\sqrt{385 - 10 \times 5,5^2}} = 0,042,$$

$$D(a_0) = 0,3828 \sqrt{\frac{385}{10\left(385 - 10 \times 5,5^2\right)}} = 0,262 .$$

Тенденцію кількості виданих пластикових карт можна записати у вигляді:

$$\hat{y} = 6,58 \quad + \quad 0,54t \quad + e_t$$

$$(0,262) \quad (0,042) \quad (0,3828) \qquad \left(\sum t \neq 0\right)$$

Істотність коефіцієнта напрямку тренду можна перевірити за допомогою тесту $t-$Стюдента (2.44). Нульова гіпотеза може бути записана як: $H_0 : \alpha_1 = 0$, альтернативна – $H_1 : \alpha_1 \neq 0$. Емпірична величина тесту дорівнює:

$$t = \frac{0,54}{0,042} = 12,857.$$

Для рівня істотності $\alpha = 0,05$ та $10 - 2 = 8$ ступенів свободи, критична величина взята з таблиць розкладу $t-$Стюдента $t_\alpha = 2,306$. Оскільки $t = 12,857 > t_\alpha = 2,306$, то H_0 потрібно відкинути. Це означає, що оцінка коефіцієнта напрямку є істотною.

Отримані результати обчислень (малі середні похибки оцінок параметрів, так і коефіцієнтів змінності та збіжності, а також дуже близьке до одиниці значення коефіцієнта детермінації) вказують на те, що лінійна функція тренду добре описує досліджуване явище і може бути використана для прогнозування.

Визначений на підставі (2.45) точковий прогноз кількості пластикових карт для проміжку $T = 12$ має вигляд:

$$y^*_{T=12} = 6,58 + 0,54 \times 12 = \begin{bmatrix} 1 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6,58 \\ 0,54 \end{bmatrix} = 13,06 \text{ (тис. шт.)}$$

Отриманий результат використаний до прогнозування функції (2.62):

$$y^*_{T=12} = 9,55 + 0,54 \times 6,5 = \begin{bmatrix} 1 & 6,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9,55 \\ 0,54 \end{bmatrix} = 13,06 \text{ (тис. шт.)}$$

Точковий прогноз записується з точністю до стандартного відхилення S_e , тобто подаємо у вигляді:

$$y^*_{T=12} = \left[13,06 \pm 0,3828\right] \text{(тис. шт.)}$$

На наступному кроці потрібно обчислити пряму і відносну похибки прогнозу. Використавши (2.47) отримаємо:

$$D_T = 0,3828\sqrt{1+\frac{1}{10}+\frac{(12-5,5)^2}{82,5}} = 1,103 \text{ (тис. шт.)}$$

$$D_T{}' = \frac{1,103}{13,06}\times 100 = 8,45\%$$

Це означає, що отриманий проноз – допустимий, бо характеризується невеликою відносною похибкою.

Для того, щоб побудувати граничний прогноз, потрібно перевірити нормальність розподілу випадкового складника функції тренду. Перевіримо за допомогою тесту Ярка-Бера, допоміжні обчислення наведені в табл. 2.5.

Таблиця 2.5.

t	y_t	$\hat{y}_t$	$e_t = y_t - \hat{y}_t$	e_t^2	e_t^3	e_t^4	$e_t^3 / \overline{S}^3$	$e_t^4 / \overline{S}^4$
1	6,8	7,12	-0,32	0,1024	-0,0328	0,0105	-0,8180	0,7664
2	7,6	7,66	-0,06	0,0036	-0,0002	0,0000	-0,0050	0,0000
3	8,7	8,20	0,50	0,2500	0,1250	0,0625	3,1172	4,5620
4	8,7	8,74	-0,04	0,0016	-0,0001	0,0000	-0,0025	0,0000
5	9,3	9,28	0,02	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
6	10,1	9,82	0,28	0,0784	0,0220	0,0061	0,5486	0,4453
7	10,4	10,36	0,04	0,0016	0,0001	0,0000	0,0025	0,0000
8	10,8	10,90	-0,10	0,0100	-0,0010	0,0001	-0,0249	0,0073
9	10,7	11,44	0,74	0,5476	0,4052	0,2999	10,1047	21,8905
10	12,4	11,98	0,42	0,1764	0,0741	0,0311	1,8479	2,2701
$\sum$	95,5	95,5	X	1,1720	0,5923	0,4102	14,7705	29,9416

Підставивши відповідні дані з таблиці у формули (2.58), (2.59) і (2.60) отримаємо:

$$B_1 = (0,1\cdot 14,7705)^2 = 2,1817,$$

$$\overline{S} = \sqrt{0,1\cdot 1,172} = 0,3423,$$

$$B_2 = 0,1\cdot 29,9416 = 2,9942.$$

Емпірична величина статистики JB (2.57) дорівнює:

$$JB = 10\left[\frac{1}{6}2,1817 + \frac{1}{24}(2,9942-3)^2\right] = 3,6362.$$

Критична величина χ^2 при рівні істотності $0,05$ дорівнює $5,991$. Порівняємо:

$$JB = 3,6362 < \chi_\alpha^2 = 5,991.$$

Можемо стверджувати, що немає підстав для відкидання нульової гіпотези, тобто випадковий показник розглянутої функції тренду, має нормальний розподіл.

Функція тренду (в нашому прикладі) була оцінена на підставі малої вибірки $(n=10)$. Взявши ймовірність на рівні $1-\alpha$=0,95, побудуємо граничний прогноз на проміжок $T=12$:

$$P\left\{y_T^* - t_{\alpha,S}D_T < y_T < y_T^* + t_{\alpha,S}D_T\right\} = 1-\alpha\,. \tag{2.63}$$

Величину $t_{\alpha,S}$ беремо з таблиць розподілу $t-$Стюдента (при рівні істотності $0,05$ та 8 ступенів свободи) $t_{\alpha,S} = 2,306$. Отримаємо такий граничний прогноз:

$$13,06 - 2,306\cdot 1,103 < y_T < 13,06 + 2,306\cdot 1,103,$$

$$10,52 < y_T < 15,60.$$

Абсолютна та відносна похибки прогнозу, обчислені на основі формул (2.55), (2.56) , дорівнюють:

$$V_T = \left|2,306 \cdot 1,103\right| = 2,54 \text{ (тис. шт.)}$$

$$V_T' = \frac{2,54}{13,06} \cdot 100 = 19,54\%.$$

Отримані похибки є досить високими. Їхній рівень може стати меншим, у випадку застосування, іншого методу прогнозування. Прийняти, чи відхилити побудований прогноз приймає рішення користувач.

2.4. Прогнозування на основі нелінійної моделі тренду

Розглянемо прогнозування на основі нелінійних тенденцій розвитку: квадратичної параболи, показникового та степеневого тренду.

Многочлен другого степеня (квадратна парабола) описується формулою:

$$y_T = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \varepsilon_t \quad \left(a_2 \neq 0, t = 1, 2, ..., n\right) \tag{2.64}$$

Використовуючи МНК для оцінок параметрів, потрібно розв'язати наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases} \sum_{t=1}^{n} y_t = n a_0 + a_1 \sum_{t=1}^{n} t + a_2 \sum_{t=1}^{n} t^2, \\ \sum_{t=1}^{n} t y_t = a_0 \sum_{t=1}^{n} t + a_1 \sum_{t=1}^{n} t^2 + a_2 \sum_{t=1}^{n} t^3, \\ \sum_{t=1}^{n} t^2 y_t = a_0 \sum_{t=1}^{n} t^2 + a_1 \sum_{t=1}^{n} t^3 + a_2 \sum_{t=1}^{n} t^4. \end{cases} \tag{2.65}$$

В (2.65) підставимо:

$$\sum_{t=1}^{n} t = \frac{n\left(n+1\right)}{2}, \tag{2.66}$$

$$\sum_{t=1}^{n} t^2 = \frac{n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)}{6}, \tag{2.67}$$

$$\sum_{t=1}^{n} t^3 = \left[\frac{n\left(n+1\right)}{2}\right]^2, \tag{2.68}$$

$$\sum_{t=1}^{n} t^4 = \frac{n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)}{6} \times \frac{3n^2 + 3n - 1}{5}, \tag{2.69}$$

де n довжина часового ряду.

Параметри параболи можна оцінити користуючись таким матричним рівнянням:

$$a = \left(T^T T\right)^{-1} T y, \tag{2.70}$$

де $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & n & n^2 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad a = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}.$

В цьому випадку точковий прогноз будуємо за такою формулою:

$$y_T^* = x_T^T a = \begin{bmatrix} 1 & T & T^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = a_0 + a_1 T + a_2 T^2, \quad \left(T = n+1, n+2, ...\right). \tag{2.71}$$

Оцінка ex ante абсолютної середньої похибки прогнозу на проміжок T визначається так:

$$D_T = S_e \sqrt{1 + x_T^T \left(T^T T\right)^{-1} x_T}. \tag{2.72}$$

Оцінка ex ante середньої відносної похибки має вигляд:

$$D_T' = \frac{D_T}{y_T^*} \times 100. \tag{2.73}$$

Якщо одиниці часу, динамічного ряду так пронумеровані, що їхня сума дорівнює 0, то система рівнянь має вигляд:

$$\begin{cases} \sum_{t=1}^{n} y_t = na_0 + a_2 \sum_{t=1}^{n} \left(t - \overline{t}\right)^2, \\ \sum_{t=1}^{n} \left(t - \overline{t}\right) y_t = a_1 \sum_{t=1}^{n} \left(t - \overline{t}\right)^2, \\ \sum_{t=1}^{n} \left(t - \overline{t}\right)^2 y_t = a_0 \sum_{t=1}^{n} \left(t - \overline{t}\right)^2 + a_2 \sum_{t=1}^{n} \left(t - \overline{t}\right)^4. \end{cases} \tag{2.74}$$

де $\overline{t}$ середнє арифметичне значення.

Приклад 2.2. За останні 11 років спостережено таке річне споживання продукту X в кілограмах на особу: 17,5; 16,0; 14,5; 13,9; 17,9; 16,9; 15,2; 18,9; 18,6; 17,3; 20,3. Вважаємо, що тенденція розвитку споживання в найближчому майбутньому не зміниться, передбачити рівень споживання продукту X в році $T = n + 1 = 12$.

Співставивши проміжки розглянутого часового ряду, можемо стверджувати, що тенденцію розвитку розглянутого явища, потрібно оцінити квадратичною параболою. Використаємо матричне рівняння та занумеруємо одиниці часу, щоб їхня сума задовольняла умову $\sum t = 0$, маємо:

$$y = \begin{bmatrix} 17{,}5 \\ 16{,}0 \\ 14{,}5 \\ 13{,}9 \\ 17{,}9 \\ 16{,}9 \\ 15{,}2 \\ 18{,}9 \\ 18{,}6 \\ 17{,}3 \\ 20{,}3 \end{bmatrix}, \ T = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 25 \\ 1 & -4 & 16 \\ 1 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \\ 1 & 5 & 25 \end{bmatrix}, \ T^T T = \begin{bmatrix} 11 & 0 & 110 \\ 0 & 110 & 0 \\ 110 & 0 & 1958 \end{bmatrix}, \ \det\left(T^T T\right) = 1038180,$$

$$\left(T^T T\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}20746 & 0 & -0{,}0116 \\ 0 & 0{,}00909 & 0 \\ -0{,}0116 & 0 & 0{,}001166 \end{bmatrix}, \ T^T y = \begin{bmatrix} 187{,}0 \\ 38{,}8 \\ 1940{,}0 \end{bmatrix}.$$

Вектор оцінок параметрів квадратної параболи має вигляд:

$$a=\left(T^{T}T\right)^{-1}Ty=\begin{bmatrix}0,20746 & 0 & -0,0116\\ 0 & 0,00909 & 0\\ -0,0116 & 0 & 0,001166\end{bmatrix}\begin{bmatrix}187,0\\ 38,8\\ 1940,0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}16,1746\\ 0,3527\\ 0,0816\end{bmatrix}.$$

Рівняння тенденції споживання продукту X (при умові, що початком осі OY є середнє арифметичне значення t) має вигляд:

$$\hat{y}_t=16,1746+0,3527t+0,0816t^2,\quad \left(\sum t=0\right).$$

Для апроксимації тенденції споживання обчислимо коефіцієнти зміни залишків $\left(V_e\right)$, збіжності $\left(\varphi^2\right)$, детермінації $\left(R^2\right)$ та середні похибки оцінок параметрів $\left(D\left(a_0\right),D\left(a_1\right),D\left(a_2\right)\right)$.

Коефіцієнт зміни залишків визначається так:

$$V_e=\frac{S_e}{\bar{y}}\times 100=\frac{\left\{\left|y^{T}y-a\left(T^{T}y\right)\right| \big/ \left(n-k\right)\right\}^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{n}\left(\mathbf{1}^{T}y\right)} \tag{2.75}$$

де T – матриця пояснюючих змінних (або одиниць часу), $\mathbf{1}^{T}$ –транспонований одиничний вектор, k – кількість оцінюваних параметрів функції тренду (у випадку параболи $k=3$).

$y^{T}y=3217,32$, $a\left(T^{T}y\right)=3196,64$, $\mathbf{1}^{T}y=187$, $\frac{1}{n}\left(\mathbf{1}^{T}y\right)=\frac{187}{11}=17.$

Підставивши дані у формулу (2.75) маємо:

$$V_e=\frac{\sqrt{\left(3217,32-3196,64\right)\div\left(11-3\right)}}{17}\times 100=9,4\%.$$

Коефіцієнт збіжності, у матричному записі, обчислюється за формулою:

$$\varphi^2=\frac{y^{T}y-a^{T}\left(T^{T}y\right)}{y^{T}y-\frac{1}{n}\left(\mathbf{1}^{T}y\right)^2}. \tag{2.76}$$

Підставимо числові дані у (2.76) отримаємо:

$$\varphi^2=\frac{3217,32-3196,64}{3217,32-\frac{187^2}{11}}=\frac{20,68}{38,32}=0,54.$$

Коефіцієнт детермінації дорівнює:

$$R^2=1-\varphi^2=0,46.$$

Знайдемо середні похибки оцінок параметрів, скористаємося матрицею варіації та коваріації:

$$D^2\left(a\right)=S_e^2\left(T^{T}T\right)^{-1}=2,585\begin{bmatrix}0,20746 & 0 & -0,0116\\ 0 & 0,00909 & 0\\ -0,0116 & 0 & 0,001166\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0,53628 & 0 & -0,03014\\ 0 & 0,0235 & 0\\ -0,03014 & 0 & 0,00301\end{bmatrix}. \tag{2.77}$$

Середні похибки оцінок параметрів є квадратними коренями елементів, що знаходяться на головній діагоналі матриці $D^2\left(a\right)$.

$D\left(a_0\right)=\sqrt{0,53628}=0,73,$

$D\left(a_1\right)=\sqrt{0,0235}=0,15,$

$D\left(a_2\right)=\sqrt{0,00301}=0,05.$

Модель тенденції споживання продукту X має вигляд:

$$\hat{y}_t = 16,1746 + 0,3527t + 0,0816t^2 + \ e_t,$$
$$(0,73) \qquad (0,15) \qquad (0,05) \quad (1,6), \quad \left(\sum t = 0\right).$$

Величина показників оцінки многочлена другого степеня вказує, що квадратичний параболічний тренд добре підходить до емпіричних даних і його можна застосувати для прогнозування. Використаємо для $T = 12$, згідно (2.71) маємо:

$$y_{n+1}^* = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 36 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16,1746 \\ 0,3527 \\ 0,0816 \end{bmatrix} = 16,1746 + 0,3527 \times 6 + 0,0816 \times 6^2 = 21,2 \text{ (кг/особу).}$$

Звернемо увагу, що при прогнозуванні ми використали квадратну параболу, параметри якої оцінено при виконанні умови $\left(\sum t = 0\right)$. Тому вектор пояснюючих змінних в прогнозованому проміжку має вигляд $\begin{bmatrix} 1 & 6 & 36 \end{bmatrix}$, а не $\begin{bmatrix} 1 & 12 & 144 \end{bmatrix}$.

Похибка ex ante прогнозу, визначена за формулою (2.72), дорівнює:

$$D_T = 1,6\sqrt{1 + \begin{bmatrix} 1 & 6 & 36 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,20746 & 0 & -0,0116 \\ 0 & 0,00909 & 0 \\ -0,0116 & 0 & 0,001166 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 36 \end{bmatrix}} = 5,91 \text{ (кг/особу).}$$

Відносна похибка точкового прогнозу за формулою (2.73), дорівнює:

$$D_T' = \frac{5,91}{21,2} \times 100 = 27,9\%.$$

Отримана похибка досить велика, а це означає, що точковий прогноз недопустимий.

Граничний прогноз будується аналогічно, як і у випадку лінійної функції тренду в околі точкового прогнозу. Для визначення меж прогнозу, потрібно перевірити, чи є нормальний розподіл прогнозованої змінної.

Використавши числові дані та вважаючи, що ймовірність прогнозу $0,95$, побудуємо граничний прогноз, користуючись формулою (2.63), отримаємо:

$$21,2 - 2,306 \cdot 5,91 < y_T < 21,2 + 2,306 \cdot 5,91,$$
$$7,57 < y_T < 34,83.$$

Абсолютна похибка граничного прогнозу має вигляд:

$$V_T = \frac{34,83 - 7,57}{2} = 13,63 \text{ (кг/особу),}$$

або

$$V_T = \left|2,306 \cdot 5,91\right| = 13,63 \text{ (кг/особу).}$$

Відносна похибка побудованого граничного прогнозу дорівнює:

$$V_T' = \frac{13,63}{21,2} \cdot 100 = 64,29\%.$$

Визначений граничний прогноз характеризується великою похибкою.

У випадку, коли розвиток аналізованого явища характеризується зростанням, або спаданням, то тоді для опису тенденції розвитку використовується показникова функція вигляду:

$$\hat{y}_t = a_0 a_1^t e^{\xi_t}, \tag{2.78}$$

де ξ_t – випадковий складник.

Функція (2.78) для $a_0 > 0$ та $0 < a_1 < 1$, асимтотично наближається до нуля, а при $a_1 > 1$ прямує до нескінченості.

Вважаємо, що розвиток даного явища відбувається, за допомогою показникової функції. Сталий приріст, що виражається через a_1 і відповідає даній функції, називається середнім показником приросту, його можна записати у вигляді: $a_1 = 1 + p$, де p норма приросту.

Рівняння (2.78) можна записати так:

$$\hat{y}_t = a_0 a_1^t 10^{\xi_t}. \qquad (2.79)$$

Для оцінки параметрів показникової функції потрібно її прологарифмувати (використавши натуральний логарифм для (2.78) і десятковий для (2.79)).

Прологарифмувавши (2.79) отримаємо:

$$\lg \hat{y}_t = \lg a_0 + t \lg a_1 + \eta_t, \qquad (2.80)$$

де η_t – новий залишковий складник, визначений як $\eta_t = \lg y_t - \lg \hat{y}_t$.

Величини $\lg a_0$ та $\lg a_1$ знайдемо з матричного рівняння, в якому:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & n \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} \lg y_1 \\ \lg y_2 \\ \vdots \\ \lg y_n \end{bmatrix}, \quad a = \begin{bmatrix} \lg a_0 \\ \lg a_1 \end{bmatrix}. \qquad (2.81)$$

Приклад 2.3. Продаж кави (в кг.) в сільському магазині на протязі шести років становив: 241, 265, 302, 346, 435, 480. Використовуючи показникову функцію тренду, передбачити рівень продажу кави в році $T = n + 1$.

В цьому випадку прогнозована змінна виражена за допомогою логарифмів. Обчисливши десяткові логарифми, маємо:

$$y = \begin{bmatrix} 2,3820 \\ 2,4232 \\ 2,4800 \\ 2,5391 \\ 2,6385 \\ 2,6812 \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}, T^T T = \begin{bmatrix} 6 & 21 \\ 21 & 91 \end{bmatrix}, \det\left(T^T T\right) = 105,$$

$$\left(T^T T\right)^{-1} = \frac{1}{105} \begin{bmatrix} 91 & -21 \\ -21 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8667 & -0,2 \\ -0,2 & 0,0571 \end{bmatrix}, T^T y = \begin{bmatrix} 15,144 \\ 54,1045 \end{bmatrix},$$

$$a = \left(T^T T\right)^{-1} T^T y \begin{bmatrix} 0,8667 & -0,2 \\ -0,2 & 0,0571 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15,144 \\ 54,1045 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,3044 \\ 0,0606 \end{bmatrix}.$$

Рівняння тенденції розвитку продажу кави, за останніх 6 років, має вигляд:

$$\lg \hat{y}_t = 2,3044 + 0,0606t + \eta_t. \qquad (2.82)$$

Залежність (2.82) є лінійною, звідси маємо:

$$a_0 = N \lg 2,3044 = 201,5,$$

$$a_1 = N \lg 0,0606 = 1,15.$$

Запишемо оцінене рівняння

$$\hat{y}_t = 201,5 \cdot 1,15^t. \qquad (2.83)$$

Точковий прогноз для року $T = n + 1 = 7$ дорівнює:

$$\hat{y}_{T=7} = 201,5 \cdot 1,15^7 = 535,99 \text{ (кг.)}$$

Даний результат можна отримати з рівняння:

$$y^*_{T=7} = \begin{bmatrix} 1 & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lg a_0 \\ \lg a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2,3044 \\ 0,0606 \end{bmatrix} = 2,7286,$$

$$y^*_{T=7} = N \lg 2,7286 = 535,99 \text{ (кг.)}$$

Степенева функція тренду описується формулою:

$$\hat{y}_t = a_0 t^{a_1} e^{\xi_t}, \qquad (2.84)$$

або

$$\hat{y}_t = a_0 t^{a_1} 10^{\xi_t}. \qquad (2.85)$$

Подібно, як у випадку показникової функції, для оцінки параметрів потрібно перейти до лінійної функції, тобто прологарифмувати (2.84), або (2.85). Перетворимо (2.85) в лінійну, прологарифмувавши за допомогою десяткового логарифму, отримаємо:

$$\lg \hat{y}_t = \lg a_0 + a_1 \lg t + \eta_t. \qquad (2.86)$$

Матриця спостережень T, вектор пояснюючих змінних y та вектор оцінок параметрів мають такий вигляд:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & \lg 1 \\ 1 & \lg 2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \lg n \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} \lg y_1 \\ \lg y_2 \\ \vdots \\ \lg y_n \end{bmatrix}, \quad a = \begin{bmatrix} \lg a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}. \qquad (2.87)$$

Приклад 2.4. Вважаємо, що прогнозована змінна протягом останніх 10 років, набувала значень (в тис. кг.): 14,0; 16,6; 19,4; 19,8; 21,0; 21,6; 23,0; 23,3; 24,2; 24,6.

Використовуючи (2.86) отримаємо:

$$\lg \hat{y}_t = 1,146 + 0,25 \lg t. \qquad (2.88)$$

Запишемо модель (2.88) в вигляді степеневої функції:

$$\hat{y}_t = 14 t^{0,25} \qquad (2.89)$$

Зробимо точковий прогноз, для проміжку $T = 11$, використавши залежність:

$$y^*_{T=11} = \begin{bmatrix} 1 & \lg 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lg a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1,0414 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,146 \\ 0,25 \end{bmatrix} = 1,4064.$$

Оскільки, $N \lg 1,4064 = 25,5$, то точковий прогноз змінної y для $T = 11$ буде дорівнювати 25,5 (тис. кг.). Такий самий результат отриманий при використанні функції тренду вигляду (2.89).

$$y^*_{T=11} = 14 \cdot 11^{0,25} = 25,5 \text{ (тис. кг.)}.$$

Лінеаризувати степеневу, чи показникову моделі тренду можна за допомогою використання натуральних логарифмів. Процедура прогнозування в цьому випадку є аналогічною, як для десяткових логарифмів.

2.5. Моделі сезонних коливань в прогнозуванні

Сезонні коливання появляються кожного року, в одних і тих самих проміжках (місячних, квартальних, піврічних та ін.), мають регулярні випадкові зміни при перебігу масових явищ.

Характерними особливостями сезонних коливань є:

1. Річний цикл коливань, в рамках якого виділяють менші проміжки: місячні $(d = 12)$, квартальні $(d = 4)$ та піврічні $(d = 2)$;

2. Систематичне повторення кожного року.

Сезонними коливаннями характеризують, наприклад, такі явища як: обороти в торгівлі, туристичний рух, рослинна продукція та ін. Ці коливання провокують відхилення від ритмічного перебігу економічних процесів. Умовна регулярність випадкових змін, що виступають під час циклу коливань, уможливлює використання для їх вимірювання статистичних методів.

Показниками сезонних коливань є коефіцієнти сезонності та абсолютні рівні сезонних коливань. Коефіцієнти сезонності виражаються в процентах і стосуються коливань в часі для мультиплікативної моделі. Сезонні мультиплікативні коливання виступають завжди, коли в чергових підпроміжках циклу (місяцях, кварталах півріччі) досліджуване явище відхиляється від тенденції розвитку (відсоткового рівня). Наприклад, рівень продажу охолоджувальних напоїв у липні перевищив передбачений за допомогою тренду продаж на 5%.

Абсолютні рівні сезонних коливань за абсолютними величинами мають таке ж саме ім'я, як аналізоване явище (наприклад тис. грн.). Цей вид коливань інформує про сталі, відносно абсолютної величини, відхилення рівня досліджуваного явища в чергових підпроміжках сезонного циклу від прийнятого рівня, чи тренду (наприклад, споживання пива на одного мешканця в третьому кварталі кожного року більше в середньому на 10 л.).

Процедури виділення сезонності зумовлені амплітудою коливань та присутністю або нестачею тренду аналізованого явища.

У випадку часового ряду без виразної тенденції розвитку показником сезонності є коефіцієнти сезонності:

$$S_i = \frac{\overline{y}_i d}{\sum_{i=1}^{d} \overline{y}_i} \cdot 100, \tag{2.90}$$

де S_i- коефіцієнти сезонності в і-му підпроміжку циклу сезонності $\left(i = 1, 2, ..., d\right)$, $\overline{y}_i-$ середня величина змінної в і-му підпроміжку циклу сезонності.

Приклад 2.5. В магазині, що знаходиться в сільській місцевості, на протязі останніх п'яти днів спостережено кожного дня таку кількість клієнтів.

Тиждень	Кількість клієнтів						
	Понеділок	Вівторок	Середа	Четвер	П'ятниця	Субота	Неділя
1	60	65	65	70	130	110	50
2	62	62	69	72	128	106	46
3	58	66	72	74	126	112	48
4	59	63	68	70	134	108	54
5	56	64	66	74	132	109	52

Зауважимо, що кількість клієнтів магазину в чергових днях тижня є менш більш сталою (нестача тенденції розвитку). В часовому ряді присутня сезонність. Це вказує різна кількість клієнтів, що роблять покупки в різні дні тижня.

Проведемо обчислення, які стосуються коефіцієнтів сезонності:

$$\overline{y}_{\text{ïí}} = \frac{60+62+58+59+56}{5} = \frac{295}{5} = 59, \quad \overline{y}_{\text{âò}} = \frac{65+62+66+63+64}{5} = \frac{320}{5} = 64,$$

$$\overline{y}_{\text{ñð}} = \frac{65+69+72+68+66}{5} = \frac{340}{5} = 68, \quad \overline{y}_{\text{÷ò}} = \frac{70+72+74+70+74}{5} = \frac{360}{5} = 72,$$

$$\overline{y}_{\text{ïò}} = \frac{130+128+126+134+132}{5} = \frac{650}{5} = 130, \quad \overline{y}_{\text{ñá}} = \frac{110+106+112+108+109}{5} = \frac{545}{5} = 109,$$

$$\bar{y}_{\text{нд}} = \frac{50+46+48+54+52}{5} = \frac{250}{5} = 50,$$

$$\sum_{i=1}^{d} \bar{y}_i = 59+64+68+72+130+109+50 = 552.$$

Користуючись формулою (2.90), маємо:

$$S_{\text{пн}} = \frac{59\cdot 7}{552}100 = 74,82\%,\ \ S_{\text{вт}} = \frac{64\cdot 7}{552}100 = 81,16\%,\ \ S_{\text{ср}} = \frac{68\cdot 7}{552}100 = 86,23\%,$$

$$S_{\text{чт}} = \frac{72\cdot 7}{552}100 = 91,30\%,\ \ S_{\text{пт}} = \frac{130\cdot 7}{552}100 = 164,86\%,\ \ S_{\text{сб}} = \frac{109\cdot 7}{552}100 = 138,22\%,$$

$$S_{\text{нд}} = \frac{50\cdot 7}{552}100 = 63,41\%.$$

Сума процентних величин коефіцієнтів сезонності дорівнює $100d$. В нашому випадку $d = 7$, тобто сума повинна дорівнювати 700%. Коефіцієнти сезонності, які задовольняють умову сумовності називаються нестрогими (чистими), а ті які не задовольняють – строгими.

Якщо $\sum_{i=1}^{d} S_i \neq d$, то показники сезонності потрібно обчислити, ввівши кореляційний коефіцієнт (k),

$$k = \frac{d}{\sum_{i=1}^{d} S_i}. \tag{2.91}$$

Помноживши строгі показники сезонності на k, отримаємо чисті показники $\left({}_kS_i\right)$:

$${}_kS_i = k \cdot S_i, \quad i = 1,2,...,d. \tag{2.92}$$

В процесі прогнозування потрібно використовувати чисті показники сезонності. Якщо б не було сезонних коливань, то коефіцієнти сезонності для чергових днів дорівнювали б 1. З наших обчислень випливає, що в понеділок робить покупки в середньому 59 клієнтів, що становить 74,82% середньоденної кількості, що встановлена на основі всього спостереження. Іншими словами, в понеділок кількість клієнтів є на 25,18% менша від середньоденної $(100 - 74,82 = 25,18\%)$. У вівторок середня кількість клієнтів є меншою на 18,84%, а в п’ятницю більша на 64,86% від середньоденної.

Часові ряди можуть мати, як тенденцію розвитку (тренд), так і сезонні коливання. Сезонні коливання можуть, в залежності від їхньої амплітуди, накладатися на тренд двома різними способами, за допомогою додавання або множення. В першому випадку амплітуда сезонних коливань в абсолютному значенні повинна бути сталою, а в другому змінною. У зв’язку з цим вирізняють адитивну та мультиплікативну сезонність, які наведені на рис.2.3.

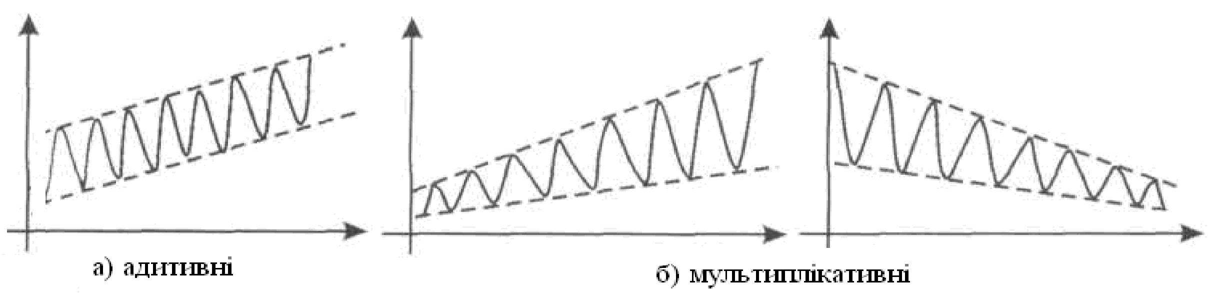

Рис. 2.3. Адитивні та мультиплікативні сезонні коливання

Показником адитивної сезонності є абсолютний рівень сезонних коливань:

$$g_i = \frac{1}{c}\sum_{c}\left(y_t - \hat{y}_t\right), \tag{2.93}$$

де: y_t – емпірична величина змінної в околі t, $\hat{y}_t$ – теоретична величина змінної в околі t, c – кількість різниць для однойменних околів.

Сума абсолютних рівнів сезонних коливань повинна бути рівна нулю:

$$\sum_{i=1}^{d} g_i = 0. \tag{2.94}$$

Говоримо про чисті (строгі) абсолютні рівні сезонних коливань. Якщо залежність (2.94) не виконується, то отримаємо чисті (строгі) показники.

З метою зведення строгих показників до абсолютних рівнів сезонних коливань зробимо поправки:

$$p = \frac{\sum_{i=1}^{d} g_i}{d}. \tag{2.95}$$

Застосувавши до строгих рівнів сезонних коливань поправки (2.95), отримуємо скориговані показники адитивної сезонності, вони інформують про вищий або нижчий рівень явища в даному підпроміжку циклу сезонності порівняно з рівнем, який виникає з тренду. Ця різниця спровокована відділенням сезонних коливань.

Приклад 2.6. Спосіб поведінки при виокремленню абсолютних рівнів сезонних коливань продемонструємо на прикладі даних, наведених в табл. 2.6.

Таблиця. 2.6.

Виплата відсотків від вкладень протягом 2005–2009 рр. (в тис. грн.)

Роки	Квартали	Виплати (емпіричні дані y_t)	t	Виплати (теоретичні рівні $\hat{y}_t$)	$y_t - \hat{y}_t$
2005	I	833	1	883,2	-50,2
	II	837	2	909,7	-72,2
	III	839	3	936,2	-97,2
	IV	910	4	962,7	-52,7
2006	I	891	5	989,2	-98,2
	II	986	6	1015,7	-29,7
	III	1053	7	1042,2	10,8
	IV	1256	8	1068,7	187,3
2007	I	1147	9	1095,2	51,8
	II	1135	10	1121,7	13,3
	III	1247	11	1148,2	98,8
	IV	1405	12	1174,7	230,3
2008	I	1319	13	1201,2	117,8
	II	1309	14	1227,7	81,3
	III	1270	15	1254,2	15,8
	IV	1293	16	1280,7	12,3
2009	I	1254	17	1307,2	-53,2
	II	1149	18	1333,7	-184,7
	III	1241	19	1360,2	-119,2
	IV	1320	20	1386,7	-66,7
		22694	210		

Лінійна функція тренду виплат відсотків від вкладень окремих кварталах 2005–2009 років має вигляд:

$$\hat{y}_t = 856,7 + 26,5t, \quad \sum t \neq 0.$$

Теоретичні, взяті з функції тренду, рівні виплат відсотків наведені в таблиці 2.4. Ці величини, в подальших обчисленнях є основою для виокремлення абсолютних рівнів сезонних коливань. Використаємо різницю $y_t - \hat{y}_t$ (шостий стовпець таблиці 2.4.) і формулу (2.93), отримаємо:

$$g_I = \frac{-50,2 - 98,2 + 51,8 + 117,8 - 53,2}{5} = \frac{-32}{5} = -6,4 \text{ (тис. грн.)}$$

$$g_{II} = \frac{-72,7 + 29,7 + 13,3 + 81,3 - 184,7}{5} = \frac{-192}{5} = -38,5 \text{ (тис. грн.)}$$

$$g_{III} = \frac{-97,2 + 10,8 + 98,8 + 15,8 - 119,2}{5} = \frac{-91}{5} = -18,2 \text{ (тис. грн.)}$$

$$g_{IV} = \frac{-52,7 + 187,3 + 230,3 + 12,3 - 66,7}{5} = \frac{310,5}{5} = 62,1 \text{ (тис. грн.)}$$

$$\sum_{i=1}^{4} g_i = -1,0 \text{ (тис. грн.)}$$

Сума абсолютних рівнів сезонних коливань не дорівнює нулю, тому виникає потреба ввести коригуючий показник (за формулою (2.95)):

$$p = \frac{-1}{4} = -0,25 \text{ (тис. грн.)}$$

Скориговані адитивні показники дорівнюють:

$${}_k g_I = -6,4 - (-0,25) = -6,15 \text{ (тис. грн.)}$$

$${}_k g_{II} = -38,5 - (-0,25) = -38,25 \text{ (тис. грн.)}$$

$${}_k g_{III} = -18,2 - (-0,25) = -17,95 \text{ (тис. грн.)}$$

$${}_k g_{IV} = 62,1 - (-0,25) = 62,35 \text{ (тис. грн.)}$$

$$\sum_{i=1}^{4} g_i = 0 \text{ (тис. грн.)}$$

Через вплив сезонності, виплати відсотків в кожному першому кварталі були нижчими, від виплат визначених лінійним трендом на 6,15 тис. грн. У всіх других і третіх кварталах, досліджених під впливом адитивних сезонних коливань, виплати відсотків за вкладами є меншими від виплат визначених за трендом на 38,25 тис. грн. та 17,95 тис. грн. відповідно тільки в четвертих кварталах виплати були на 62,35 тис. грн. більші порівняно з трендом.

Приклад 2.6. Для квартальних даних від $t = 1$ до $t = 5$ визначаємо функцію тренду вигляду: $\hat{y}_t = 3 + 2,2t, \quad \sum t = 0$. Абсолютні рівні сезонних коливань в чергових кварталах дорівнюють: $g_{II} = -1,7$ тис. грн., $g_{III} = -0,8$ тис. грн., $g_{IV} = -0,3$ тис. грн. Потрібно знайти сподівану величину явища в I кварталі року $T = n + 1$.

Для прогнозування використаємо дві складові адитивної моделі коливань в часі: тренд та абсолютні рівні сезонних коливань. Спочатку потрібно обчислити сподіваний рівень досліджуваного явища в першому кварталі $T = n + 1$ року. При виконанні умови $\sum t = 0$, квартал має номер 10,5. Маємо:

$$y_T^* = 3 + 2,2 \cdot 10,5 = 26,1 \text{ (тис. грн.)}$$

Даний прогноз потрібно скоригувати. Абсолютний рівень сезонних коливань для першого кварталу $g_I = 2,2$ тис. грн., його потрібно додати до прогнозу:

$$26,1 + 2,2 = 28,3 \text{ (тис. грн.)}$$

Якщо тенденція розвитку і адитивні сезонні коливання в прогнозованому проміжку не змінюються, то в першому кварталі року $T = n+1$ рівень досліджуваного явища повинен дорівнювати 28,3 тис. грн.

У випадку змінної амплітуди сезонних коливань (мультиплікативна сезонність), показником є коефіцієнт сезонності обчислюється з часового ряду за формулою:

$$S_i = \frac{1}{c}\sum_c \frac{y_t}{\hat{y}_t}. \quad (2.96)$$

де: y_t – емпірична величина змінної в околі t, $\hat{y}_t$ – теоретична величина змінної в околі t, c – кількість різниць для однойменних околів.

Застосуємо описаний вище метод до даних, з таблиці 2.7.

Приклад 2.7

Таблиця 2.7.

Продаж виробу X кварталах 2006–2009 роках (тис. грн.)

Роки	Квартали	Продаж (y_t)	t	$y_t t$	t^2	$\hat{y}_t$	$y_t / \hat{y}_t$
2006	I	116,3	1	116,3	1	169,575	0,686
	II	158,8	2	317,6	4	192,565	0,825
	III	278,3	3	834,9	9	215,555	1,291
	IV	238,0	4	952,0	16	238,545	0,998
2007	I	221,9	5	1109,5	25	261,535	0,848
	II	293,2	6	1759,2	36	284,525	1,030
	III	486,1	7	3402,7	49	307,515	1,581
	IV	346,9	8	2775,2	64	330,505	1,050
2008	I	235,7	9	2121,3	81	353,495	0,667
	II	312,4	10	3124,0	100	376,485	0,830
	III	536,8	11	5904,8	121	399,475	1,344
	IV	360,3	12	4323,6	144	422,465	0,853
2009	I	331,2	13	4305,6	169	445,455	0,744
	II	437,4	14	6123,6	196	468,445	0,934
	III	740,4	15	11106,0	225	491,435	1,507
	IV	378,3	16	6052,8	256	514,425	0,735
		5472,0	136	54329,1	1496		

Підставивши відповідні дані з таблиці 2.7. в систему рівнянь (2.10) отримаємо:

$$\begin{cases} 16a_0 + 136a_1 = 5472, \\ 136a_0 + 1496a_1 = 54329,1. \end{cases}$$

Розв’язком системи є $a_0 = 146,585$; $a_1 = 22,99$, а функція тренду має вигляд:

$$\hat{y}_t = 146,585 + 22,99t, \quad \sum t \neq 0.$$

В четвертому кварталі 2005 року величина продажу виробу X становила 146,585 тис. грн. і зростала з кварталу в квартал в середньому на 22,99 тис. грн.

З метою оцінки показників сезонності потрібно обчислити теоретичні величини $\hat{y}_t$. Використаємо дані з таблиці 2.5. і формулу (2.96) отримаємо:

$$S_I = \frac{0,686 + 0,848 + 0,667 + 0,744}{4} = \frac{2,945}{4} = 0,73625,$$

$$S_{II} = \frac{0,825 + 1,03 + 0,83 + 0,934}{4} = \frac{3,619}{4} = 0,90475,$$

$$S_{III} = \frac{1,291 + 1,581 + 1,344 + 1,507}{4} = \frac{5,723}{4} = 1,4075,$$

$$S_{IV} = \frac{0,998 + 1,05 + 0,853 + 0,735}{4} = \frac{3,636}{4} = 0,909.$$

Сума показників квартальної сезонності дорівнює:

$$\sum_{i=1}^{4} S_i = 3,98075.$$

Введемо коригуючий коефіцієнт, використавши (2.91):

$$k = \frac{4}{3,98075} = 1,0048357.$$

Помноживши строгі показники сезонності на коригуючий коефіцієнт, отримаємо:

$$S_I = 0,739; S_{II} = 0,909; S_{III} = 1,438; S_{IV} = 0,914.$$

Сума скоригованих показників сезонності дорівнює 4. Наприклад, показник для першого кварталу інформує, що під впливом сезонності рівень продажу виробу Х менший прогнозованого відносно тренду на 26,1% (100-73,9=26,1%), також менший рівень продажу виробу Х в другому і четвертому кварталах. Щодо третього кварталу, то там рівень продажу був на 43,8% більший від прогнозу визначеного за допомогою лінійного тренду.

Приклад 2.8. Споживання продукту А на одного мешканця (в кг.) протягом шести років описується річним трендом вигляду: $\hat{y}_t = 52 + 5t, \quad \sum t = 0.$

Показники сезонності споживання дорівнюють: $S_I = 90\%; S_{II} = 110\%; S_{III} = 140\%.$

Обчислити прогнозоване споживання в четвертому кварталі 7 року.

Прогнозоване споживання продукту А для 7 року на основі тренду має вигляд:

$$y_7^* = 52 + 5 \cdot 3,5 = 69,5 \text{ (кг.)}$$

Якщо б не сезонність, то в кожному кварталі 7 року спожиття дорівнювало б $\frac{69,5}{4} = 17,375$ (кг.). Показник сезонності для четвертого кварталу буде дорівнювати:

$$S_{IV} = 400\% - (90\% + 110\% + 140\%) = 60\%.$$

Коригуючи отриманий з тренду квартальний прогноз, показником $S_{IV} = 60\%$ отримаємо: $17,375 \cdot 0,6 = 10,425$ (кг.). Отже при умові, сталої тенденції розвитку і сталих сезонних коливань, прогнозований рівень споживання продукту А в четвертому кварталі 7 року повинен дорівнювати 10,425 кілограмів на одного мешканця.

В деяких випадках важко однозначно стверджувати, що в часовому ряді є присутні адитивні чи мультиплікативні сезонні коливання. Тоді для прогнозування можна використати або показники сезонності (мультиплікативна сезонність), або абсолютні рівні сезонних коливань (адитивна сезонність). Між цими показниками існує залежність:

$$g_i = S_i\overline{y} - \overline{y} = \overline{y}\left(S_i - 1\right) \quad (2.97)$$

та

$$S_i = \frac{g_i + \overline{y}}{\overline{y}}, \quad (2.98)$$

де g_i – абсолютні рівні сезонних коливань $\left(i = 1, 2, ..., d\right)$, S_i – показники сезонності $\left(i = 1, 2, ..., d\right)$, $\overline{y}$ – середня величина змінної для всього досліджуваного проміжку.

Приклад 2.9. Лінійна функція тенденції розвитку перевезень пасажирів (в тис. осіб) в послідовних кварталах протягом трьох років має вигляд: $\hat{y}_t = 100 + 50t$, $\left(\sum t = 0\right)$. Використавши абсолютний рівень сезонних коливань, оцінити величину перевезень пасажирів у IV кварталі 5 року, якщо $S_{IV} = 120\%$.

Оскільки, функція тренду оцінена при умові $\left(\sum t = 0\right)$, то $a_0 = \overline{y} = 100$ тис. осіб.

Використовуючи залежність (2.97), отримуємо: $g_{IV} = 100\left(1,2 - 1\right) = 20$ тис. осіб.

Величина перевезень в IV кварталі 5 року, при виконанні умови сталої тенденції розвитку і сталих сезонних коливань, матиме вигляд.

$$y^*_{IV,5} = \left(100 + 50 \cdot 13,5\right) + 20 = 795 \text{ тис. осіб}$$

2.6. Прогнозування на основі моделі, яка враховує випадкові коливання

Випадкові коливання відбуваються не регулярно і мають різну частоту. Для моделі коливань в часі випадкові коливання репрезентовані через залишки $\left(z_t\right)$, показником цього є стандартне відхилення залишків $s\left(z_t\right)$.

В адитивній моделі коливань в часі рівень індивідуальних випадкових коливань описується наступним чином:

$$z_t = y_t - \hat{y}_t - g_i, \quad (2.99)$$

де стандартне відхилення залишків обчислюється за формулою:

$$s\left(z_t\right) = \sqrt{\frac{\sum_t z_t^2}{n - d - \left(k + 1\right)}}, \quad (2.100)$$

де n – довжина часового ряду, d – кількість підпроміжків циклу сезонності, k – кількість оцінених параметрів функції тренду без вільного члена.

В мультиплікативній моделі коливань в часі рівень індивідуальних випадкових коливань знаходять за допомогою формули:

$$z_t = \frac{y_t}{\hat{y}_t S_i} \quad (2.101)$$

де $S_i, \left(i = 1, 2, ..., d\right)$, є показниками сезонності в під проміжках циклу сезонності. Стандартне відхилення залишків знаходять за формулою (2.100).

Якщо тенденція розвитку узагальнює механічний метод, то у формулах (2.99) і (2.101) $\hat{y}_t$ замінюється на середнє $\overline{y}_t$.

Приклад 2.10. Схема обчислень, які стосуються залишків та стандартного відхилення залишків, для адитивної моделі коливань в часі, що описує виплату відсотків від вкладів по кварталах протягом 2005–2009 наведено в таблиці 2.6.

Таблиця. 2.6.

Схема обчислень залишків

Роки	Квартали	t	(y_t)	$\hat{y}_t$	g_i	$z_t = y_t - \hat{y}_t - g_i$	z_t^2
2005	I	1	833	883,2	-6,15	-44,05	1940,4025
	II	2	837	909,7	-38,25	-34,45	1186,8025
	III	3	839	936,2	-17,95	-79,25	6280,5625
	IV	4	910	962,7	62,35	-115,05	13236,5025
2006	I	5	891	989,2	-6,15	-92,05	8473,2025
	II	6	986	1015,7	-38,25	8,55	73,1025
	III	7	1053	1042,2	-17,95	28,75	826,5625
	IV	8	1256	1068,7	62,35	124,95	15612,5025
2007	I	9	1147	1095,2	-6,15	57,95	3358,2025
	II	10	1135	1121,7	-38,25	51,55	2657,4025
	III	11	1247	1148,2	-17,95	116,75	13630,5625
	IV	12	1405	1174,7	62,35	167,95	28207,2025
2008	I	13	1319	1201,2	-6,15	123,95	15363,6025
	II	14	1309	1227,7	-38,25	119,55	14292,2025
	III	15	1270	1254,2	-17,95	33,75	1139,0625
	IV	16	1293	1280,7	62,35	-50,05	2505,0025
2009	I	17	1254	1307,2	-6,15	-47,05	2213,7025
	II	18	1149	1333,7	-38,25	-146,45	21447,6025
	III	19	1241	1360,2	-17,95	-101,25	10251,5625
	IV	20	1320	1386,7	62,35	-129,05	16653,9025
$\sum$		22694	210	210			179349,65

Залишки, які обчислені для всіх кварталів 2005–2008 років, інформують про силу впливу випадкових коливань на рівень досліджуваного явища. Наприклад, на основі першого рядка таблиці можемо стверджувати, що емпіричний рівень величини виплат відсотків в першому кварталі складається з: відсотків, які є результатом впливу головних причин ($\hat{y}_t = 833,2$); відсотків, які є результатом впливу сезонних коливань ($g_i = -6,15$); а також відсотків, які є результатом випадкових коливань ($z_t = -44,05$).

Підставивши дані з табл. 2.6 у формулу (2.100), отримаємо:

$$s(z_t) = \sqrt{\frac{179349,65}{20-4-(1+1)}} = 113,18 \text{ тис. грн.}$$

Отриманий результат означає, що сила випадкових коливань для всього ряду становить $\pm 113,18$ тис. грн. на квартал. Чим меншою є величина стандартного відхилення залишків, тим краще модель описує дійсність.

Випадкові коливання, виміряні стандартним відхиленням залишків, долучають до прогнозу зі знаком $\pm$, тобто відповідь записують так:

$$y_T^* \pm s(z_t). \tag{2.102}$$

Приклад 2.11. Тренд купівлі молока (в млн. літрів) в півріччях чотирьох років описується рівнянням вигляду: $\hat{y}_t = 2 + 0,1t, (t = 0,1,2,...)$. Абсолютний рівень сезонних коливань для другого півріччя дорівнює $-0,3$ млн. літрів. Варіація залишків моделі дорівнює 0,0004. Яку величину купівлі молока потрібно очікувати в першому півріччі п'ятого року?

Вважаємо, що тенденція розвитку і сезонні коливання не змінюються, прогноз визначений за трендом має вигляд: $y_{I,5}^* = 0,1 \cdot 8 + 2 = 2,8$ млн. літрів, абсолютний рівень сезонних коливань для першого півріччя 0,3 млн. літрів. Уточнений прогноз для першого півріччя дорівнює:

$$y_{I,5}^{*} = 2,8 + 0,3 = 3,1 \text{млн. літрів.}$$

Стандартне відхилення залишків рівне: $s(z_t) = \sqrt{0,0004} = 0,02.$

Остаточний прогноз купівлі молока в першому півріччі 5–го року, (враховуючи тренд, сезонні та випадкові коливання) дорівнює:

$$y_{I,5}^{*} = 3,1 \text{ млн. літрів} \pm 0,02 \text{ млн. літрів.}$$

2.7. Середньотермінові темпи змін, як інструмент прогнозування

Оцінка змін досліджуваного явища у визначеному часовому проміжку проводиться за допомогою середнього темпу змін, який тісно пов’язаний з середнім геометричним.

Середнє геометричне є коренем $n-$го степеня з добутку n змінних. Дане означення знаходить безпосереднє застосування у випадку зображення ланцюгових індексів:

$$\overline{y}_g = \sqrt[n-1]{\frac{y_2}{y_1}\frac{y_3}{y_2}\cdots\frac{y_{n-1}}{y_{n-2}}\frac{y_n}{y_{n-1}}} = \sqrt[n-1]{\prod_{i=2}^{n}\frac{y_i}{y_{i-1}}}. \tag{2.103}$$

Чинники, що знаходяться під коренем у формулі (2.103) є ланцюговими індексами, обчислені для n абсолютних величин: $y_1, y_2, ..., y_n$. З даного набору можна утворити $n-1$ ланцюгових індексів.

Якщо базуватися на інформації, яка дана у вигляді абсолютних величин, то середнє геометричне можна обчислити так:

$$\overline{y}_g = \sqrt[n-1]{\frac{y_n}{y_1}}. \tag{2.104}$$

З цієї залежності випливає, що середнє геометричне є коренем $n-1$ степеня з частки абсолютних рівнів досліджуваного явища останнього і першого проміжків (моментів).

У випадку, коли потрібно визначити середнє геометричне для множини проміжних (біжучих) індексів, використовуємо формулу:

$$\overline{y}_g = \sqrt[n-1]{\frac{\text{î ñòàí í ³é ³í äåêñ}}{\text{ï åðø èé ³í äåêñ}}} \tag{2.105}$$

Середній темп змін на проміжку, для якого побудований часовий ряд, в процентному вираженні, визначається як:

$$r_g = \left(\overline{y}_g - 1\right)\cdot 100. \tag{2.106}$$

З формули (2.106) випливає, що середній темп змін може бути як додатною так і від’ємною величиною. Якщо $\overline{y}_g > 1$, то середній темп змін означає зростання досліджуваного явища в наступному проміжку, якщо $\overline{y}_g < 1$, то говоримо про середній темп спадання явища, що досліджується.

Середній темп змін явища в часі можна використати короткотермінового прогнозування. Прийнявши до уваги умову, що середній темп змін у прогнозованому околі не піддається змінам, прогноз будується за формулою:

$$y_{n+k}^{*} = y_n \overline{y}_g^{k}, \tag{2.107}$$

де y_{n+k}^{*} – рівень явища в прогнозованому околі, y_n – рівень явища в останньому околі, $\overline{y}_g^{k}$ – середнє геометричне, k – горизонт прогнозу.

Приклад 2.12. Ціни на акції компанії X на біржі в останніх восьми сесіях котирувалися наступним чином: 195; 194; 183; 155; 162; 160; 145; 140. Вважаючи, що середній темп зміни ціни на акції не піддається зміні, обчислити ціну на акції компанії X в десятому котируванні.

З восьми абсолютних величин можна утворити сім ланцюгових індексів. Користуючись залежністю (2.103), маємо:

$$\overline{y}_g = \sqrt[7]{\frac{194}{195}\frac{183}{194}\frac{155}{183}\frac{162}{155}\frac{160}{162}\frac{145}{160}\frac{140}{145}} = \sqrt[7]{\frac{140}{195}} = 0,954 .$$

Середній темп змін має вигляд:

$$r_g = \left(0,954-1\right)100 = -4,6\%.$$

Прогнозований рівень ціни в десятому котируванні дорівнює:

$$y^*_{8+2} = 140 \cdot 0,954^2 = 127,42 \text{ грн.}$$

Приклад 2.13. Середньорічний темп випуску телевізорів 2005–2008 рр. дорівнював 4%. Яку кількість випуску потрібно очікувати в 2010 році, якщо в 2008 р. випущено 100 тис. штук?

Використавши формулу (2.107) отримаємо: $y^*_{2010} = 100 \cdot 1,04^2 = 108,16$ тис. шт.

Якщо середньорічний темп зростання випуску телевізорів з 2005–2008 рр. не змінюється, то в 2010 році потрібно сподіватися випуску на рівні 108,16 тис. штук.

Завдання для самостійного розв'язування

1. Протягом п'яти років середньо квартальна величина закупівлі овочів і фруктів дорівнювала 14,1 тис. тон. В цьому самому проміжку купівля зменшувалася кожного кварталу на 0,2 тис. тон. Показники сезонності закупівлі овочів і фруктів в окремих кварталах мають вигляд (в %): $S_I = 81$, $S_{II} = 162$, $S_{III} = 107$. Якого рівня покупки овочів і фруктів можна очікувати в окремих кварталах 7-го року, при незмінності тенденції розвитку і сезонних коливань?
2. Теоретична кількість замовлених місць в пансіонаті "Явір" в останніх п'яти роках дорівнює: 330; 335; 340; 345; 350. Обчислені на підставі емпіричних даних квартальні показники сезонності мають вигляд: $S_I = 40\%$, $S_{II} = 129\%$, $S_{IV} = 60\%$. Обчислити кількість замовлених місць в кожному кварталі 7-го року, при умові, що тенденція розвитку і сезонні коливання в прогнозованому проміжку не зазнають змін.
3. Тенденція розвитку перевезень пасажирів в місті X (в тис. осіб) за 15 років, описується лінійною функцією тренду $\hat{y}_t = 62,2 + 8,2t$, $\left(\sum t = 0\right)$. Сезонність перевезень пасажирів у досліджуваному проміжку характеризується наступними показниками: $S_I = 90\%$, $S_{II} = 110\%$, $S_{IV} = 130\%$. Вважаючи, що тренд і сезонні коливання є незмінними, обчислити прогнозований рівень перевезень в четвертому кварталі 16-го року.
4. Розвиток випуску електроенергії (в тис. кВт) протягом 11 років характеризує функція тренду: $\hat{y}_t = 32,4 + 2,8t$, $t = 0,1,2,...,10$. Сезонність характеризується показниками: $S_I = 110\%$, $S_{II} = 90\%$, $S_{IV} = 80\%$.Обчислити рівень випуску електроенергії у всіх кварталах 13-го року, при умові що тренд та сезонність є незмінними.
5. Тенденція розвитку випуску виробу X за 7 років утворює наступні дані (в тис. штук).

Роки	1	2	3	4	5	6	7
Теоретичний рівень продукції	170	190	210	230	250	270	290

Показник сезонності для першого півріччя дорівнює 120%. Обчислити прогнозовану величину випуску виробу X у двох півріччях 9-го року.

6. На основі емпіричних даних, які стосуються величини перевезень пасажирів авіаційним транспортом (в тис. осіб) отримано наступне рівняння тренду: $\hat{y}_t = 830 + 2t$, $\left(\sum t \neq 0\right)$. Передбачити кількість місць, якими повинні володіти авіалінії, в кожному місяці 2010 року, якщо місячні показники сезонності дорівнюють відповідно: I–51%, II–54%, III–80%, IV–84%, V–102%, VI–?, VII–163%, VIII–165%, IX–140%, X–67%, XI–97%, XII–95%. Відомо що обчислена теоретична величина перевезень, з рівняння тренду в 1995 році дорівнювала 858 тис. осіб. При яких умовах цей прогноз буде справджуватися?
7. Теоретичні дані, які стосуються продажу солодощів у магазині протягом 7 років, мають вигляд (в тис. грн.): 2,55; 2,8; 3,05; 3,3; 3,55; 3,8; 4,05. Сезонні коливання продажу солодощів характеризуються показниками сезонності: $S_I = 80\%$, $S_{II} = 120\%$, $S_{IV} = 80\%$. При умові сталої тенденції розвитку і сезонності, знайти величину продажу солодощів у четвертому кварталі 11-го року.
8. Певний банк подав інформацію, яка стосується депозитів за останні 7 років (в тис. грн.): 40; 50; 80; 150; 310; 420; 610. Яку величину депозитів слід очікувати, якщо тенденція розвитку вкладів описується показниковою функцією тренду?

9. Дані, що характеризують перельоти планерами в області Р протягом 7 років, мають наступний вигляд: 100; 300; 2000; 4000; 8000; 30000; 45000. Обчислити величину перельоту планерами 8-го року, якщо тенденція розвитку описується показниковою функцією тренду.
10. Протягом останніх трьох років покупка молока в області Х щоквартально зростала на 500 літрів. Середньоквартальна покупка в цьому проміжку дорівнює 40 тис. літрів. Показник сезонності покупки молока в четвертому кварталі дорівнює 80%. Спрогнозувати величину покупки молока в області Х у четвертому кварталі 4-го року.
11. Споживання сала (в кг. на одного мешканця) протягом 11 років має вигляд: 3,1; 3,5; 4,0; 4,7; 5,1; 4,9; 4,8; 4,7; 4,8; 5,0; 5,6. Обчислити рівень споживання сала в 12-му році, якщо досліджуване явище добре описується степеневою функцією тренду.
12. Інформація про кількість абонентів стаціонарних телефонів в місті М протягом 10 років має вигляд (в тис.): 5; 22; 85; 238; 426; 648; 959; 1295; 1698; 2078. Обчислити кількість абонентів в 14-му році, при використанні степеневої функції тренду.
13. Протягом 5 років споживання цукру зростало щоквартально на 20 тис. тон. Середньоквартальне споживання дорівнює 500 тис. тон. Знайти рівень споживання цукру в третьому кварталі 6-го року ($S_{III} = 140\%$).
14. Затрати підприємства на випуск виробу Х протягом 7 років (в грн. штуку) мають вигляд: 7,2; 9,1; 10,8; 11,4; 11,1; 10,0; 8,2. Користуючись функцією тренду (квадратичною параболою), знайти величину витрат у 8-му році. Чи отриманий результат є можливим до прийняття?
15. Середньоквартальний приріст випуску цементу за три роки становить 600 тон, а середньоквартальний випуск дорівнює 48 тис. тон. Знайти рівень випуску цементу в другому кварталі 4-го року ($S_{II} = 120\%$).
16. В останніх 15 роках продаж автомашин місті Х щокварталу зростав на 5,1. Середньоквартальний продаж в досліджуваному околі дорівнював 264,7. Коефіцієнт сезонності продажу автомашин для третього кварталу дорівнює 90%. Передбачити продаж автомашин в третьому кварталі 16-го року, при умові сталої тенденції розвитку і сезонності.
17. Для садового господарства квартальні показники сезонності купівлі фруктів, обчислені на основі числових даних за останні 5 років, мають вигляд: $S_I = 10,7\%$, $S_{II} = 73,3\%$, $S_{III} = 96,5\%$. Крім того, відомо що середньоквартальна закупівля дорівнює 1623 тони, а середньоквартальний приріст закупівлі – 65 тон. Вважаємо, що в 6-му році пропозиція фруктів доставлених до господарства не залежить від природних чинників. Знайти величину закупівлі в третьому кварталі 6-го року.
18. В області K продаж мінеральних добрив в роках $t = 1,2,3,4,5$ зростав щоквартально в середньому на 264 тони, при середньоквартальній продажі 6303 тони. Передбачити продаж мінеральних добрив в області K, в першому кварталі 6-го року, при умові що він має сезонний характер і в першому кварталі продаж на 17% більший від середньоквартального.
19. Рух закордонних туристів, що відвідують українські Карпати протягом 5 років характеризується наступною інформацією: а) середньоквартальна кількість туристів 100,4 тис осіб, б) квартальний приріст 89 тис. осіб. Знайти очікувану кількість туристів в третьому кварталі 6-го року, якщо $S_{III} = 200\%$.
20. Середньоквартальна кількість осіб, що відпочивають у санаторіях за останніх п’ять років дорівнює 140 тис., а середньоквартальний приріст – 5 тис. Знаючи, що найвищий показник сезонності припадає на третій квартал (186%), знайти кількість відпочиваючих в третьому кварталі 7-го року.

21. Споживання цукру (в тис. тон) за 11 років, описується лінійною функцією тренду вигляду: $\hat{y}_t = 500 + 90t, \quad \left(\sum t \neq 0\right)$. Знайти величину споживання цукру в окремих півріччях 14-го року, знаючи, що показник сезонності для другого півріччя дорівнює 120%.
22. Продаж риби (живої та замороженої) протягом 11 років (в тис. тон) характеризується так: 12,2; 14,6; 12,3; 10,5; 16,9; 12,6; 12,1; 17,8; 19,3; 24,1; 33,4. Визначити параболічну функцію тренду продажу риби та знайти передбачуваний рівень продажу в 12-му році.
23. На основі аналізу інформації, яка стосується останніх 10 років, визначено, що купівля меду зростала щокварталу в середньому на 0,1 тис. тон, середня закупівля за рік становила 50 тис. тон. Показники сезонності мають вигляд: $S_I = 60\%$, $S_{II} = 80\%$, $S_{III} = 60\%$, $S_{IV} = 200\%$. Знайти допустимий рівень закупівлі меду в кожному кварталі 11-го року: а) на основі тренду, б) на основі тренду і сезонності.
24. Величина випуску основної продукції в області Х (в тис грн.) за 5 років визначена квартальною функцією тренду: $\hat{y}_t = 18537{,}3 + 528{,}2t, \quad \left(\sum t \neq 0\right)$. Показники сезонності дорівнюють: $S_I = 60{,}8\%$, $S_{II} = 109{,}8\%$, $S_{III} = 127{,}6\%$, $S_{IV} = 101{,}8\%$. Вважаючи, що тренд і сезонність не змінні, знайти величину випуску продукції в кожному кварталі 7-го року.
25. З досліджень, проведених в компанії Х, встановлено середньорічний приріст закупівлі курячих яєць протягом останніх шести років дорівнював 2525 тис. штук, при середньорічній закупівлі 45970 тис. штук. Показники місячної сезонності дорівнюють відповідно (в %): 8; 37; 150; 272; 253; 147; 119; 110; 74; 22; 5; 3. Який рівень закупівлі можна сподіватися у всіх кварталах 7-го року, якщо тенденція розвитку та сезонність у прогнозованому проміжку є незмінними?
26. Середньоквартальний випуск м’ясних консерв на фабриці Х за 5 років становить 150,42 тон, а квартальний приріст випуску – 5,45 тон. Який випуск консерв буде в третьому кварталі 6-го року, якщо відомо, що $S_{III} = 93{,}25\%$?
27. На підставі інформації про величину закупівлі зерна за 5 років визначено тенденцію розвитку, показники сезонності та отримано наступні результати: а) середньорічна закупівля 27625 тон, б) середньорічний приріст закупівлі 1525 тон, в) показники місячної сезонності (в %) відповідно: 36,6; 58,4; 43,6; 14,1; 6,1; 8,6; 5,4; 320; 388,5; 164,7; 96,4; 57,6. Базуючись на даній інформації, визначити величину закупівлі зерна в 6-му році та місячну структуру закупівлі.
28. На основі квартальних даних випуску стаканів (в тис. шт.) протягом 4-х років складено лінійну модель тренду вигляду: $\hat{y}_t = 2847{,}52 + 25{,}9t, \quad \left(\sum t \neq 0\right)$. Абсолютні рівні сезонні коливань (тис. шт.) дорівнюють: $g_I = -1057$, $g_{II} = 584$, $g_{III} = 887$. Визначити точковий прогноз випуску на четвертий квартал 5-го року.
29. Місячна тенденція розвитку випуску виробу W (в тонах) за останні 5 років, описана функцією тренду: $\hat{y}_t = 119{,}21 + 3{,}45t, \quad \left(\sum t = 0\right)$. Варіація залишків дорівнює 229,87 (тон)^2. Якого рівня випуску виробу W треба сподіватися в 6-му році?
30. З метою планування величини запасів електричних лампочок, на складі проведено статистичне дослідження впливу різних чинників на динаміку розвитку даного явища. На основі даних за останніх 5 років, отримано таку інформацію: а) середньо квартальний приріст продажу лампочок: 0,114 тис. штук; б) теоретичний рівень продажу лампочок в останньому кварталі: 9,771 тис. штук; в) варіація залишків: 0,0064 (тис. штук)^2. Скільки лампочок має бути замовлено, щоб задовольнити попит в 6-му році?

31. Лінійна функція тренду (по півріччях) за останніх 5 років задана рівнянням: $\hat{y}_t = 3,6 + 1,2t,\ \ (t = 0,1,2,...)$. Передбачити рівень явища в другому півріччі 7-го року, якщо $S_I = 110\%$, а варіація залишків дорівнює 0,25.
32. Рівень явища (y_t) в роках від $t = 1$ до $t = 5$ описується так: 57,2; 58,9; 59,6; 60,2; 61,5. Оцінити параметри лінійної функції тренду при умовах: а) $\sum t = 0$, б) $\sum t \neq 0$. Використати отримані результати для побудови точкового прогнозу для $T = 7$. Який висновок можна зробити з отриманого прогнозу?
33. Динаміка квартальних оборотів (в тис. грн.) туристичної компанії описується функцією тренду вигляду: $\hat{y}_t = 2,5 + 0,2t + 0,01t^2,\ \left(\sum t \neq 0\right)$. Теоретична величина оборотів в третьому кварталі 2008 року дорівнювала 7,75 тис. грн., показник сезонності для третього кварталу – 115%, а варіація залишків 0,04 (тис. грн.)^2. Знайти величину оборотів в третьому кварталі 2010 року.
34. Після дослідження динаміки оборотів мінімаркетів (в тис. грн.) населеного пункту X за останні 5 років, складено тренд: $\hat{y}_t = 100 + 50t,\ \ \left(\sum t = 0\right)$. Квартальні абсолютні рівні сезонних коливань дорівнюють: $g_I = 6,\ g_{II} = -1,\ g_{III} = -21$. Якого рівня обороти потрібно сподіватися в кожному кварталі 6-го року?
35. Тенденція розвитку продажу масла (в тис. пачок по 0,25 кг.) в певному гіпермаркеті поквартально від $t = 1$ до $t = 6$ представлена функцією тренду вигляду: $\hat{y}_t = 45,2 + 0,45t$. Нехай сума одиниць часу дорівнює 300, а варіація залишків 6,25. Передбачити величину продажу масла в другому кварталі року $T = n + 1$.
36. Досліджено величину продажу (в тис. грн.) товару X на гуртовні споживчих товарів. Емпіричний часовий ряд (з піврічною сезонністю) описується за допомогою моделі коливань в часі:

$$\hat{y}_t = 50 - t;\ z_t: 2; -1,3; -2; 2; -4;\ S_I = 0,85;\ \sum_{t=1}^{n}\left(y_t - \hat{y}_t\right)^2 = 200.$$

Якого рівня продажу потрібно сподіватися в другому півріччю 1-го року прогнозу?

37. Динаміка інвестиційних вкладень (в тис. грн.) у всіх кварталах від $t = 1$ до $t = 8$ описується функцією тренду: $\hat{y}_t = 7,3284 + 0,4728t$. Сума квадратів залишків дорівнює 53,823. Якого рівня інвестиційних вкладень слід очікувати в кожному кварталі 9-го року?
38. Інформація про тенденцію і сезонність продажу (в тис. штук) товару X в кожному півріччі років $t = 1,2,3,4,5$ має вигляд: $\hat{y}_t = 60 + 2t$, $\left(\sum t = 0\right)$ $g_I = -10$ тис. штук. Якого рівня продажу товару X можна сподіватися в кожному півріччі 6-го року?
39. Тренд закупівлі фруктів (в тис. тон) по півріччях від $t = 1$ до $t = 5$ років записаний рівнянням $\hat{y}_t = 2 + 0,1t$, $(t = 0,1,2,...)$. Відомо, що величина закупівлі фруктів в кожному другому півріччі була більшою від середньої на 0,3 тис. тон. а сума квадратів залишків дорівнює 0,0024 (тис. тон)^2. Знаючи, що рівень закупівлі фруктів в році $T = 6$ дорівнював 5 тис. тон, перевірити чи статистичний прогноз закупівлі фруктів є допустимим.
40. В роках від $t = 1$ до $t = 5$ виробництво виробу А, зменшувалося кожного півріччя на 2000 штук. В кожному другому півріччі досліджуваного проміжку було меншим від середнього піврічного на 50 тис. штук або на 20%. Використавши абсолютний рівень сезонних коливань, визначити рівень продукції в першому півріччі 6-го року. Обчислити середню похибку прогнозу, якщо варіація залишків дорівнює 0,0625 (тис. штук)^2.

41. Споживання риби в кожному кварталі в роках від $t=1$ до $t=5$ зростало на 2 кг на особу. Загальне споживання риби в аналізованому періоді дорівнювало 200 кг. Відомо, що абсолютний рівень сезонних коливань для четвертого кварталу дорівнює 0,4 кг на особу, а варіація залишків 0,0196. За допомогою точкового прогнозу обчислити споживання риби (на одну особу) в четвертому кварталі року $T=n+1$. Знайти середню відносну похибку точкового прогнозу. Чи допустимим є побудований прогноз?
42. В кожному першому півріччі року від $t=1$ до $t=5$ випуск виробу X був на 20% меншим від середнього в півріччі, що дорівнював 50 тис. грн. Відомо, що випуск виробу спадав кожного півріччя на 1000 грн. Використавши абсолютний рівень сезонних коливань, спрогнозувати випуск виробу в другому півріччі року $T=n+1$. Варіація залишків дорівнює 0,0004 (тис. грн.)^2. Знайти середню відносну похибку точкового прогнозу.
43. Тенденція розвитку народжуваності (в тис. новонароджених) по всіх півріччя для років від $t=1$ до $t=3$ описується функцією тренду: $\hat{y}_t = 263 + 2t$, $\left(\sum t = 0\right)$. Знаючи, що показник сезонності для другого півріччя дорівнює 94%, знайти (використавши адитивну модель коливань в часі) рівень народжуваності в першому півріччі року $T=n+2$.
44. На яку кількість відпочиваючих в оздоровчому закладі А потрібно сподіватися в травні 2010 року, якщо відомо, що показник сезонності для травня дорівнює 90%, коефіцієнт напрямку лінійної функції тренду – 150 осіб (в місячній шкалі), а в січні 2006 року теоретична величина відпочиваючих дорівнює 18 тисяч?
45. Дано часовий ряд спостережень для змінної Y, що стосується останніх 15 років: 2; 4; 6; 9; 13; 16; 18; 22; 22; 24; 25; 25; 26; 28; 30. Знайти параметри лінійної функції тренду вигляду: $\hat{y}_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \varepsilon_t$, $\left(\sum t = 0\right)$. Знаючи, що випадковий складник має нормальний розподіл, побудувати (при ймовірності 0,95) граничний прогноз Y на окіл $T=17$. Знайти середню відносну похибку граничного прогнозу. Чи побудований прогноз є допустимим?
46. Часовий ряд, що стосується змінної Y: 4; 7; 10; 13; 16; 19; 22; 25; 28; 31; 34; 37; 40; 43; 46. Використавши лінійну функцію: $\hat{y}_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \varepsilon_t$, побудувати (при ймовірності 0,95) граничний прогноз для змінної Y в році $T=16$. Відомо, що розподіл випадкового складника є нормальним. Знайти середню відносну похибку граничного прогнозу. Чи побудований прогноз є допустимим?
47. Величина змінної Y у відповідній послідовності років має такий вигляд: 5; 8; 10; 15; 20; 21; 19; 20; 19; 31; 33; 38; 42; 46; 48. Відомо, що:

$$X^T X = \begin{bmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 280 \end{bmatrix} \text{ та } X^T y = \begin{bmatrix} 375 \\ 840 \end{bmatrix}$$

З ймовірністю 0,95 побудувати граничний прогноз для змінної Y на проміжок $T=17$. При умові нормальності розподілу випадкового складника визначити середню відносну похибку граничного прогнозу. Для побудови прогнозу використати функцію тренду вигляду: $\hat{y}_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \varepsilon_t$.

48. На багатогалузевому підприємстві випуск продукції в останніх шести роках зростав щорічно на 10 м^2 а в 6-му році дорівнював 5 тис. м^2. Записати модель тренду випуску продукції і побудувати точковий прогноз для $T=7$. Знайти середню відносну похибку граничного прогнозу. Чи побудований прогноз є допустимим?
49. На промисловому підприємстві, що виробляє деталі X протягом 10 років випущено таку кількість деталей (в тис. штук): 300; 240; 150; 80; 72; 55; 85; 145; 200; 240. На основі графічного аналізу вибрати аналітичний вигляд функції тренду, знайти

структурні параметри. Побудувати точковий прогноз для $T=11$ знайти середню похибку прогнозу.

50. На підставі числової квартальної інформації, що стосується останніх чотирьох років, отримано строгі показники сезонності: $S_I = 0,096$; $S_{II} = 1,376$; $S_{III} = 1,224$; $S_{IV} = 0,436$. Знайти нестрогі показники сезонності.
51. Величина випуску продукції (в тис. грн.) за останні 5 років на підприємстві Z описується річним трендом вигляду: $\hat{y}_t = 1130,2 + 210,72t$, $\left(\sum t = 0\right)$. Строгі показники квартальної сезонності дорівнюють: $S_I = 53\%$, $S_{II} = 108\%$, $S_{III} = 115\%$, $S_{IV} = 119\%$. Знайти рівень випуску продукції в четвертому кварталі 6-го року.
52. Квартальний тренд запропонованих робочих місць в торгівлі за 22 квартали має вигляд: $\hat{y}_t = 794,47 + 5,27t$, $\left(\sum t \neq 0\right)$. Абсолютний рівень сезонних коливань для трьох кварталів дорівнює: $g_I = 103,58$; $g_{II} = -140,69$; $g_{III} = -207,08$. Передбачити кількість вільних робочих місць в 26 і 28 кварталі.
53. Величина експорту (в тис. грн.) на проміжку від січня 2006 року до червня 2010 року описується наступною інформацією: $\hat{y}_t = 2265,099 + 67,975t$; $\left(\sum t \neq 0\right)$, $S_e^2 = 231797,3$; $D^2(a) = \begin{bmatrix} 17656,12 & -485,948 \\ -485,948 & 67,975 \end{bmatrix}$.

Взявши ймовірність прогнозу 0,95, побудувати граничний прогноз величини експорту в грудні 2010 року. Знайти середню відносну похибку граничного прогнозу. Чи побудований прогноз є допустимим?

54. На основі даних, що стосуються продажу молочних продуктів (в тис. тон) за 16 років, побудовано лінійну трендову модель вигляду: $\hat{y}_t = 773,3 - 28,4544t$; $\left(\sum t \neq 0\right)$. Чи зроблений за даною моделлю прогноз на рік $T = 18$ є допустимим, якщо похибка не може перевищувати 5%?
55. Ланцюгові індекси цін молочних продуктів за останніх 4 місяці дорівнюють: 103; 102; 101. При сталому темпі змін цін, знайти середню ціну в 6-му місяці. Відомо, що середня ціна молочних продуктів в останньому місяці досліджуваного проміжку дорівнювала 10,85 грн./кг.
56. Середньорічний темп випуску фотоапаратів в роках від $t=1$ до $t=3$ дорівнював 4%. Якої величини випуску потрібно очікувати в 4-му році, якщо в році $t=2$ випущено 10 тис. фотоапаратів?
57. На протязі 5-ти років випуск виробу X має зрости на 85%, а в останньому (тобто п'ятому) має дорівнювати 3200 тис. штук. Вважаючи, що середній темп змін є сталим, знайти величину випуску в році $T = n+2$.
58. Індекси середньомісячної заробітної плати для підприємств, у роках від $t=1$ до $t=9$ в порівнянні з першим роком (тобто $t=1$), дорівнюють (в %): 100; 147,6; 195,2; 290,5; 357,1; 437,6; 555,2; 612,9; 689,0. Відомо, що середньомісячна зарплата в році $t=9$ дорівнювала 1447 грн. Яка величина зарплати буде в 14-му році, якщо середній темп змін з років $t = 7,8,9$ не змінюється?
59. В роках від $t=1$ до $t=5$ кількість стоматологів була такою (в тис.): 20,6; 21,9; 22,2; 23,8; 24,4. При умові сталого темпу змін протягом всього періоду, знайти кількість стоматологів в році $T = n+2$.
60. Динаміка реальної заробітної плати у роках від $t=1$ до $t=5$ утворює множину ланцюгових індексів (в %): 104,7; 101,0; 100,7. Відомо, що в році $t=5$ реальна місячна зарплата дорівнювала 2600 грн. Вважаючи, що рівень середнього темпу змін є сталим, знайти величину заробітної плати в сьомому році?

Відповіді до задач

1. І квартал 14,418 тис. тон, ІІ – 29,16 тис. тон, ІІІ – 19,474 тис. тон, IV – 9,2 тис. тон.
2. І квартал 36 осіб, ІІ – 116 осіб, ІІІ – 154 особи, IV – 54 особи.
3. 22,365 тис. осіб.
4. І квартал 18,14 тис. кВт, ІІ – 14,85 тис. кВт, ІІІ – 13,2 тис. кВт, IV – 19,8 тис. кВт.
5. І півріччя 198 тис. штук, ІІ півріччя 132 тис. штук.
6. I – 37,74 тис., II – 39,96 тис., III – 59,20 тис., IV – 9,2 тис., V – 75,48 тис., VI – 75,48 тис., VII – 120,62 тис., VIII – 122,1 тис., IX – 103,6 тис., X – 49,58 тис., XI – 71,78 тис., XII – 70,3 тис.
7. 0,75 тис. грн.
8. 1785,85 тис. грн.
9. 577656 км.
10. 35,8 тис. літрів.
11. $\hat{y} = 3,16t^{0,22}$.
12. $\hat{y} = 4,52t^{2,726}$.
13. 1050 тис. тон.
14. -13,404грн./шт.
15. 63 тис. тон.
16. 314 автомашин.
17. 5345,9 тон.
18. 10617,75 тон.
19. 425,8 тис. осіб.
20. 413,85 тис. осіб.
21. 1056 тис. тон.
22. 86,9 тис. тон.
23. а) I – 14,55 тис., II – 14,65 тис., III – 14,75 тис., IV – 14,85 тис. б) I – 8,73 тис., II – 11,72 тис., III – 8,85 тис., IV – 29,70 тис.
24. I – 19299,3184 тис., II – 35433,009 тис., III – 41851,1412 тис., IV – 33926,7842 тис.
25. I – 8906,22 тис., II – 30692,19 тис., III – 13838,89 тис., IV – 1370,18 тис.
26. 203,79 тон.
27. Закупівля в 6-му році 32200 тон.
28. 2951,52 тис. штук.
29. 2920,92 тони.
30. 49,344 $\pm$ 0,08 тис. лампочок.
31. 9,72 $\pm$ 0,5.
32. а) 60,47 тис. штук, б) 60,47 тис. штук.
33. 13,32 $\pm$ 0,2 тис. грн.
34. I –68,5 тис. грн., II –61,5 тис. грн., III – 41,5 тис. грн., IV – 78,5 тис. грн.
35. 58,7 $\pm$ 2,5 тис. пачок.
36. 48,3 $\pm$ 7,07 тис. грн.
37. I – 11,5836 $\pm$ 3 тис. грн., II – 12,0564 $\pm$ 3 тис. грн., III – 12,5292 $\pm$ 3 тис. грн., IV – 13,002 $\pm$ 3 тис. грн.
38. І півріччя: 61 тис. штук, ІІ півріччя: 83 тис. штук
39. Прогноз 6,3 $\pm$ 0,02 тис. тон.
40. $y^*_{I,6} = 49$ тис. штук, $V_T = 0,62\%$.
41. $y^*_{IV,6} = 37,4$ кг. на особу, $V_T = 0,926\%$.
42. $y^*_{II,6} = 53,5 \pm 0,02$ тис. грн., $V_T = 1,077\%$.
43. 289,78 тис. новонароджених.
44. 23,22 тис. осіб.

45. $\hat{y}_t = 18 + 2t;$ $\left(\sum t = 0\right)$.

46. $\hat{y}_t = 25 + 3t;$

47. $\hat{y}_t = 26 + 3t;$

48. $\hat{y}_t = 4940 + 10t;$ $\left(\sum t \neq 0\right)$; $y_7^* = 5010$ м^2.

49. $\hat{y}_t = 420{,}1 - 122{,}72t + 10{,}69t^2;$ $\left(\sum t \neq 0\right)$; $y_{T=11}^* = 363{,}67$ тис. штук.

50. $S_I = 0{,}988$; $S_{II} = 1{,}359$; $S_{III} = 1{,}214$; $S_{IV} = 0{,}439$.

51. 554,72 тис. грн.

52. 791 і 1186 пропозицій

53. $5049{,}63 < Y < 7637{,}57$.

54. $V_T = 16{,}95\%$. Прогноз є недопустимим.

55. 11,29 грн./кг.

56. 10,816 тис. штук.

57. 4086,08тис. штук.

58. 2482,53 грн.

59. 26,54 тис.

60. 2715,66 грн.

Розділ 3

Equation Section (Next)

Прогнозування на основі адаптивних моделей

Використання класичних моделей для прогнозування тренду вимагає виконання припущень більшої точності досліджуваного механізму розвитку явищ. Досить часто вигляд аналітичних моделей, а також оцінки їх структурних параметрів призводить до дезактуалізації. Прогнози, засновані на дезактуалізованих моделях характеризуються великими помилками. У цій ситуації, процеси внеску в майбутнє, широко використовуються в адаптаційних моделях. Вони характеризуються високою гнучкістю і здатністю адаптуватися до тенденції нерегулярних змін напрямку тренду, а також до можливих спотворень сезонних коливань. Адаптивна модель найчастіше застосовується при побудові короткострокових прогнозів, вона не використовує ніяких апріорних припущень про аналітичний вигляд функції тренду чи її параметрів в досліджуваному часовому проміжку, При прогнозуванні за допомогою цих моделей ми припускаємо, що розвиток явищ може бути сегментним, тобто гладким тільки в певні проміжки часу.

Належне використання адаптивних моделей нездійснене без припущення про стаціонарність помилок прогнозу в часі. Оцінка достовірності прогнозу проводиться на основі похибок ex post.

Клас адаптивних моделей надзвичайно широкий. Розглянемо наступні методи прогнозування, що базуються на адаптивних моделях:

1. Наївні методи.
2. Методи середніх ковзних (прості і зважені).
3. Методи експоненціального згладжування.
4. Методи ковзного тренду з гармонічними вагами.

Ці методи будуть представлені в наступних розділах.

3.1. Наївні методи

Назва цієї групи методів випливає з їхньої простоти. Вони використовуються при короткострокових прогнозуваннях, найчастіше на один проміжок вперед $(T = n+1)$. Наївні підходи використовуються у випадку, коли прогнозувальник не має довгих часових рядів, що описують еволюцію прогнозованих змін у минулому (наприклад, коли компанія тільки починає діяльність). Основною підставою вважати методи наївними є те, що прогноз ґрунтується на спостереженнях за минулими тенденціями змінної (наприклад, рівень первинного попиту) без істотного врахування основних рушійних чинників. У цій ситуації прогнози повинні базуватися на найновішій доступній інформації. Така спрощена процедура виправдовує назву: наївні методи.

Наївний метод використовується при дотриманні наступних умов:

1. немає ніяких змін в механізмі, який застосовується для формування прогнозованої змінної.

2. прогноз є короткостроковим (як звичайно, на 1 крок вперед)

3. існують малі випадкові коливання в історичному розвитку прогнозованої змінної.

4. прогнозована змінна має малу дисперсію (при $V < 10\%$)

Згідно з основною моделлю наївних методів, майбутня величина прогнозованої змінної $T = n+1$ дорівнює останній спостережуваній величині. Таким чином, якщо часовий ряд має n виразів, то прогноз періоді $n+1$ має вигляд:

$$y^*_{n+1} = y_n \qquad (3.1)$$

де y^*_{n+1} – прогнозована величина змінної Y визначена на момент $n+1$,

y_n - попередня величина змінної прогнозованої Y на момент/період n.

Вважаємо, що цей метод використовується для короткострокового прогнозування (як правило, на один крок вперед), коли в часовому ряді систематична компонента виступає у вигляді сталого (середнього) рівня випадкових коливань.

Класифікацію найчастіше подають на практиці за допомогою рисунка

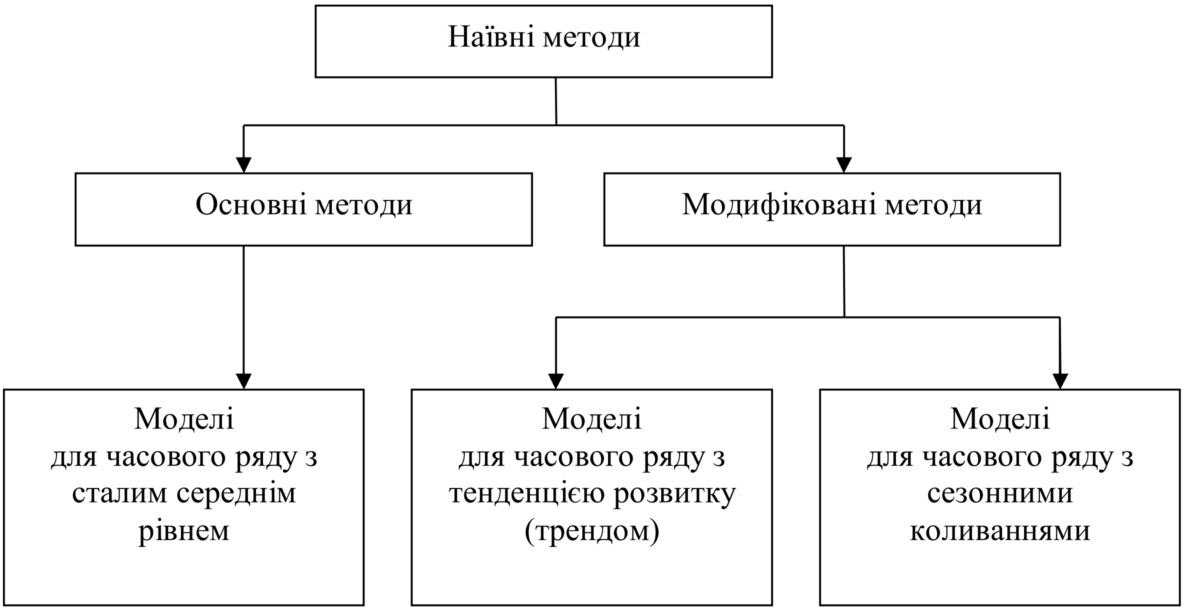

Рис. 3.1. Класифікація наївних методів

В випадках, коли в часовому ряді, крім випадкових коливань є слабо виражений тренд, модель (3.1) повинна бути модифікована. При побудові прогнозів на період $n+1$ використовується співвідношення:

$$y^*_{n+1} = y_n + \left(y_n - y_{n-1}\right) \qquad (3.2)$$

Як випливає зі співвідношення (3.2) при прогнозуванні змінна Y означає приріст величини прогнозної змінної.

Якщо часовий ряд містить випадкові коливання та визначає тенденцію змін в часі (зростаюча або спадна), то при побудові прогнозів можна зробити так:

а) якщо зміна величини прогнозованої змінної Y може бути виражена абсолютно:

$$y^*_{n+1} = y_n + \left(y_n - y_{n-1}\right) \qquad (3.3)$$

В цій моделі, ідентичній з (3.2) передбачається, що змінна Y в прогнозному періоді зростає (спадає) однаково з випадковою змінною в попередньому періоді

б) якщо прогноз зміни значень прогнозованої змінної Y може бути виражений у відносний спосіб, то:

$$y^*_{n+1} = y_n \cdot \frac{y_n}{y_{n-1}} \qquad (3.4)$$

Зміна Y в прогнозованому періоді зростає (спадає) на такий самий відсоток, як в попередньому періоді.

Характер змін (відносний/абсолютний) величини змінної Y може бути описаний на підставі змін або думок експертів.

Залежності (3.2)–(3.4) узагальнюють останні прирости прогнозованої змінної. В процесі прогнозування можна брати до уваги середній приріст змінної Y в попередньому періоді для розглянутих спостережень.

В такому випадку користуємося формулою:

$$y_{n+1}^{*} = y_n + \frac{1}{n-1}\sum_{t=1}^{n-1}\left(y_{t+1} - y_t\right) \tag{3.5}$$

Якщо часовий ряд показує сезонні коливання навколо сталого рівня, то класичний прогноз обчислюється за формулою:

$$y_{n+1}^{*} = y_{(n+1)-d} \tag{3.6}$$

де, d – кількість підперіодів циклу сезонності (d=12 при місячній сезонності, d=4 при квартальній, d=2 при піврічній)

З формули (3.6) випливає, що за прогноз приймають рівень останньої відомої реалізації досліджуваної змінної, яка взята з того ж самого сезону що $n+1$.

Перевагою наївного прогнозування є легкість використання методів, які потребують відносно небагато інформації про минуле, це уможливлює використання цих методів до побудови прогнозу тієї ж змінної за допомогою різних варіантів наївної моделі.

Недоліком наївного методу є великий вплив випадкових коливань на побудований прогноз та брак можливостей оцінки помилки ex ante.

Оцінки якості прогнозу визначені при використанні класичних методів проводиться на основі помилок ex post. Вони оцінені на основі так званих вигаслих прогнозів і перенесені на прогнозування величини змінної.

Якість прогнозів визначених за допомогою класичних методів є низькою. Методи використовуються для порівнянь точності побудованих за їхньою допомогою прогнозів, так і прогнозів побудованих при застосуванні інших більш складніших процедур.

В процесі прогнозування важливе значення має верифікація прогнозу. Вона ґрунтується на оцінці допустимості прогнозу. Допустимість описується після проходження часу, на який визначений прогноз, тобто ми говоримо про вигаслий прогноз.

Період часу, для якого визначаємо вигаслий прогноз, носить назву емпіричної межі верифікації прогнозу.

Під вигаслим ми розуміємо прогноз, визначений для проміжку, в якому є відомою дійсна істинна величина змінної Y. У випадку вигаслих прогнозів маємо справу з минулим часом, для досліджуваних проміжків будемо вживати символ t.

Ступінь допустимості кількісного аналізу вимірюється за допомогою похибок прогнозу ex post. Вони можуть бути розраховані для одного моменту чи проміжку $t > n$, так і для всієї емпіричної межі верифікації прогнозу $\left[n+1, n+2, ..., T\right]$. Існує можливість обчислення середніх похибок, що характеризують межу за допомогою одного числа.

Для точкової одиниці часу найчастіше використовується абсолютну похибку прогнозу ex post в часі t:

$$q_t = y_t - y_t^{*} \tag{3.7}$$

де y_t – дійсна величина змінної прогнозованої Y на момент/період t,

y_t^{*} – прогнозована величина змінної Y визначена на момент t.

Знак похибки (3.7) показує чи дійсна величина є більшою (+) чи меншою (–) від прогнозу. Абсолютна величина інформує про те, чи сильне було відхилення прогнозу на проміжку $t > n$ від справжньої величини змінної Y.

У випадку коли ми розпоряджаємося історичною і прогнозованою вибіркою величини прогнозованої змінної, існує можливість оцінки якості прогнозу за допомогою середньої абсолютної похибки прогнозу ex post в межах верифікації (середнього навантаження ex post). Використовуємо залежність:

$$\overline{u} = \frac{1}{m}\sum\left(y_t - y_t^*\right) \quad (3.8)$$

У випадку, коли $\overline{u} = 0$ говоримо про центрованість значень прогнозу. В протилежному випадку застосований метод прогнозування вказує на те, що спостерігається переоцінка ($\overline{u} < 0$) або недооцінка ($\overline{u} > 0$) прогнозу. Значне відхилення величини від 0 свідчить про невідповідність моделі прогнозування до даних. Величина $\overline{u}$ називається прогнозованою змінною.

Про розмір та напрям відносного відхилення (в %) інформує абсолютна похибка прогнозу ex post в часі:

$$\gamma = \frac{y_t - y_t^*}{y_t}100, t > n. \quad (3.9)$$

Абсолютна похибка прогнозу ex post інформує про відхилення прогнозу від реальної величини. Рівень допустимості можна записати наступним чином:

$$T = 100\% - \left|\gamma\right| \quad (3.10)$$

Подібно, як у випадку відносних похибок, для оцінки допустимості в межі емпіричної верифікації прогнозу, можна використати середню абсолютну похибку прогнозу ex post:

$$\Gamma = \frac{1}{m}\sum_t \left|\frac{y_t - y_t^*}{y_t}\right| \cdot 100 . \quad (3.11)$$

Середня абсолютна похибка прогнозу ex post інформує про те, який процент реальної величини прогнозованої змінної становить середнє відхилення прогнозу від фактичних даних в межах емпіричної верифікації прогнозу.

Для оцінки допустимості вигаслого прогнозу часто використовується середньоквадратична похибка прогнозу ex post в межах верифікації:

$$s^* = \sqrt{\frac{1}{m}\sum_{t \in Iep}\left(y_t - y_t^*\right)^2} . \quad (3.12)$$

Похибка (3.12) інформує про середнє відхилення прогнозу від реальних величин. Величина є вираженою в тих самих одиницях, що й прогнозована змінна Y .

З метою полегшення інтерпретації величини похибки отриманої з формули (3.12) використовується відносна квадратична похибка прогнозу ex post:

$$V_{s^*} = \frac{s^*}{\overline{y}_{t \in Iep}}100 , \quad (3.13)$$

де $\overline{y}_{t \in Iep}$ є середнім арифметичним реальних величин прогнозованої змінної обчислених на Iep – проміжку емпіричної верифікації прогнозу.

Відносна квадратична похибка прогнозу ex post описує який процент прогнозованої змінної становить середньоквадратичну похибку прогнозу.

З середньоквадратичною похибкою прогнозу ex post пов'язаний коефіцієнт J, що визначається так:

$$J^2 = \frac{\frac{1}{m}\sum_{t \in Iep}\left(y_t - y_t^*\right)^2}{\frac{1}{m}\sum_{t=1}^{n}\left(y_t - \overline{y}\right)^2} , \quad (3.14)$$

де n – довжина емпіричного часового ряду, m – довжина проміжку емпіричної верифікації прогнозу.

Коефіцієнт J повинен дорівнювати 1, якщо це не так, то прогнозування цим методом не має сенсу. У випадку коли $J^2 \leq 1$, то прогнозування цим методом є коректним.

Для оцінки допустимості прогнозу використовують коефіцієнт збіжності Тейла. Його перевагою є те, що він дає інформацію про джерело похибок прогнозу. Коефіцієнт збіжності Тейла обчислюється за формулою:

$$U^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(P_i - A_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} A_i^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} E_i^2}{\sum_{i=1}^{n} A_i^2}, \quad (3.15)$$

де P_i – прогноз на проміжок $i\left(i = 1,2,...,n\right)$, A_i – реалізація прогнозу (реальна величина) на проміжку $i\left(i = 1,2,...,n\right)$.

Близькість до нуля величин $\mathring{A}_i$, а також малі значення U^2 свідчать про високу точність прогнозу.

Квадратний корінь з виразу (3.15) інформує про середні відносні похибки прогнозу для n околів. Коефіцієнт Тейла приймає значення з проміжку $\left[0;1\right]$. Коли прогноз є ідеально точним, то коефіцієнт дорівнює нулю. Чим більша різниця між реальними і прогнозованими величинами прогнозованої змінної, тим вища величина коефіцієнта. Для інтерпретації коефіцієнта Тейла, в таблиці 3.1. наведено синтетичну оцінку його характеристичних величин.

Таблиця 3.1.

Інтерпретація величини Тейла

Величина	Інтерпретація
$U = 0$	Зміна прогнозованої величини повністю описується за допомогою прогнозованої моделі. Використаний метод прогнозування дозволяє отримати 100% достовірний прогноз.
$U = 1$	Використаний метод прогнозування дозволяє отримати такі самі результати, які дає наївний метод
$U < 1$	Використаний метод прогнозування дозволяє знайти кращі результати ніж наївні методи
$U > 1$	Використаний метод дає гірші результати ніж основна модель наївного методу. Нестача підстав для використання аналізованого методу

Коефіцієнт Тейла розпадається на три складники:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(P_i - A_i\right)^2 = \left(\overline{P} - \overline{A}\right)^2 + \left(S_P - S_A\right)^2 + 2S_P S_A\left(1 - r_{PB}\right) \quad (3.16)$$

де $\overline{P}$ – середня величина прогнозу $\left(\overline{P} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} P_i\right)$,

$\overline{A}$ – середня величина реальних величин прогнозованої змінної $\left(\overline{A} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} A_i\right)$,

S_p – стандартне відхилення прогнозу $\left(S_p = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(P_i - \overline{P}\right)^2}\right)$,

S_A – стандартне відхилення реалізації $\left(S_A = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(A_i - \overline{A}\right)^2}\right)$,

$r-$ коефіцієнт кореляції Пірсона між величинами прогнозу і реалізації прогнозованої змінної $r=\dfrac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(P_i-\overline{P}\right)\left(A_i-\overline{A}\right)}{S_P S_A}$.

Якщо існує різниця між прогнозами і реалізаціями $\left(\sum_{i=1}^{n}\left(P_i-A_i\right)^2\neq 0\right)$, то різницю можна записати в наступному вигляді:

$$U^M+U^S+U^C=1, \tag{3.17}$$

де

$$U^M=\frac{\left(\overline{P}-\overline{A}\right)^2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(P_i-A_i\right)^2} \tag{3.18}$$

$$U^S=\frac{\left(S_P-S_A\right)^2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(P_i-A_i\right)^2} \tag{3.19}$$

$$U^C=\frac{2S_P S_A}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(P_i-A_i\right)^2} \tag{3.20}$$

U^M – міра навантаження інформує про те, яка частина похибок прогнозу випливає з недостатньої придатності середніх величин P і A в Iep. Вважається, якщо величина U^M перевищує 0,2, то при прогнозуванні отримуємо систематичні похибки. У зв'язку з цим потрібно змінити застосований метод прогнозування.

U^S – міра еластичності, інформує про те, яка частина похибок прогнозу випливає з недостатньої придатності рівня різниць P_i і A_i в Iep.

U^C – міра напрямку виникає з недостатньої кількості зворотніх пунктів (недостатня природність напрямків змін прогнозів з реалізаціями).

Сума складників U^M, U^S, U^C дає в результаті 1 (або 100%). Найкращим є випадок коли $U^M=U^S=0$, а $U^C=1$. U^S є мірою несистематичної похибки, що породжується з багатовимірністю систематичної похибки $\left(U^M\right)$ та похибки варіації $\left(U^S\right)$.

Із розглянутих похибок прогнозу ex post тільки коефіцієнт Тейла задовольняє умову нормування. Нормування виконується застосуванням відносної середньої похибки ex post, в межах емпіричної верифікації прогнозу має вигляд:

$$\Theta=\frac{1}{m}\sum_{t\in Iep}\left|\frac{y_t-y_t^*}{\frac{\left(y_t-y_t^*\right)}{2}}\right|\cdot 100, \tag{3.21}$$

З формули (3.21) видно що похибка належить проміжку $\left[0\%, 200\%\right]$.

Абсолютна похибка прогнозу ex post має одиниці виміру прогнозованої змінної. Це утрудняє порівняння похибок прогнозів побудованих за різними методами прогнозування. Відносні похибки прогнозу ex post, виражаються у відсотках.

Якщо вибірка немає власних критеріїв допустимості прогнозу, то вважаємо, що якщо похибка прогнозу ex post:

- не перевищує 3%, те це є дуже добре,
- знаходиться в межах 3%–5% –добре,

- в межах 5%–10% – допустимо,
- перевищує 10% не допустимо.

Чергові кроки, які застовуються для визначення вигаслих прогнозів при використанні одного з наївних методів і обчислення похибок прогнозу ex post наведено в таблиці 3.2.

Приклад 3.1

Таблиця 3.2.

Прогнозування за допомогою використання наївних методів

Роки	t	Кошти y_t	$y_{n+1}^* = y_n$	q_t	q_t^2	$(y_t - \bar{y})^2$	$y_{n+1}^* = y_n + (y_n - y_{n-1})$	q_t	q_t^2
Спостереження			Прогнози та їхні похибки						
2000	1	10	–	–	–	19,36	–	–	–
2001	2	11	10	1	1	11,56	–	–	–
2002	3	10	11	-1	1	19,36	12	-2	4
2003	4	13	10	3	9	1,96	9	4	16
2004	5	14	13	1	1	0,16	16	-2	4
2005	6	16	14	2	4	2,56	15	1	1
2006	7	16	16	0	0	2,56	18	-2	4
2007	8	18	16	2	4	12,96	16	2	4
2008	9	17	18	-1	1	6,76	20	-3	9
2009	10	19	17	2	4	21,16	16	3	9
2010	11	144	19	9	25	98,41	21	1	51

Таблиця репрезентує прогнози та їхні похибки, обчислені за допомогою двох наївних методів (3.1) і (3.2). За першим методом визначено 9 вигаслих прогнозів та один властивий (для $T = 11$). За другим – вісім вигаслих і один властивий. Для проведення оцінки, який із застосованих методів є точнішим, обчислено похибки прогнозу ex post – середню $(\bar{u})$, середню квадратичну (s^*) та відносну квадратичну (V_{s^*}).

Використавши залежності (3.8), (3.12) і (3.13) для методу $y_{n+1}^* = y_n$ отримаємо:

$$\bar{u} = \frac{9}{9} \text{ грн., } s^* = \sqrt{\frac{1}{9}25} = 1,67 \text{ грн., } V_{s^*} = \frac{1,67}{14,89}100 = 11,22\%,$$

для методу $y_{n+1}^* = y_n + (y_n - y_{n-1})$:

$$\bar{u} = \frac{1}{8} = 0,13 \text{ грн., } s^* = \sqrt{\frac{1}{8}51} = 2,52 \text{ грн., } V_{s^*} = \frac{2,52}{14,89}100 = 16,92\%.$$

В обох випадках умова не завантаженості не виконана. Це означає, що вигаслий прогноз недооцінений. Середня квадратична та відносна квадратична похибки прогнозу ex post у першому методі є меншою, ніж в другому, але в обох випадках прогноз є недопустимим, оскільки $V_{s^*} > 10\%$. Отже для прогнозування потрібно використати інші методи.

За допомогою даних з табл. 3.2 знайдемо коефіцієнт J^2 для обох методів. Використаємо формулу (3.14) отримаємо:

$$J^2 = \frac{\frac{1}{9}25}{\frac{1}{10}98,4} = 0,283 \text{ та } J^2 = \frac{\frac{1}{8}51}{\frac{1}{10}98,4} = 0,648 .$$

Отримані результати свідчать про те, що обидва наївні методи прогнозування можна використовувати, оскільки $J^2 \le 1$, але точність прогнозування бажає бути кращою.

Для обчислення коефіцієнта розбіжності Тейла, як показника точності прогнозу ex post, потрібно знати реальні та прогнозні значення прогнозованої змінної.

Приклад 3.2. Нехай прогнозованою змінною буде продаж взуття (в тис. штук) в супермаркеті в кварталах 2007–2009 років. Прогнози визначені згідно з основною моделлю наївного методу. Це означає що майбутня величина прогнозованої змінної спостережена попередньому проміжку. Нашим завданням є визначення (за допомогою коефіцієнта Тейла) різниць між прогнозними і реальними значеннями досліджуваної змінної та опис причин розбіжності прогнозу. Дані для обчислення наведені в таблиці 3.3.

Таблиця 3.3.

Дані для обчислення коефіцієнта Тейла

Роки	Квартали	Продаж (y_t) A_i	P_i	A_i^*	$P_i - A_i$	$(P_i - A_i)^2$
2007	I	5,8	–	–	–	–
	II	5,1	5,8	26,01	0,7	0,49
	III	7,0	5,1	49,00	-1,9	3,61
	IV	7,5	7,0	56,25	-0,5	0,25
2008	I	6,8	7,5	46,24	0,7	0,49
	II	6,2	6,8	38,44	0,6	0,36
	III	7,8	6,2	60,84	-1,6	2,56
	IV	8,4	7,8	70,56	-0,6	0,36
2009	I	7,0	8,4	49,00	1,4	1,96
	II	6,6	7,0	43,56	0,4	0,16
	III	8,5	6,6	72,75	-1,9	3,61
	IV	8,8	8,5	77,44	-0,3	0,09
		79,7	76,7	590,09		13,94

Використавши формулу (3.15): $U^2 = \dfrac{13,94}{590,09} = 0,023624$, а $U = \sqrt{0,023624} = 0,1537$.

Середня відносна похибка продажу взуття дорівнює 0,1537 протягом 11 кварталів. Дана похибка є невеликою (близькою до нуля). З метою діагностування причин різниць між реальними і прогнозованими рівнями продажу розрізняють три складові рівності (3.16). Обчислення наведені в таблиці 3.4.

Таблиця 3.4.

Роки	Квартали	$P_i - \overline{P}$	$(P_i - \overline{P})^2$	$A_i - \overline{A}$	$(A_i - \overline{A})^2$	$(P_i - \overline{P})(A_i - \overline{A})$
2007	II	-1,17	1,3689	-2,13	4,5369	2,4921
	III	-1,87	3,4969	-0,23	0,0529	0,4301
	IV	0,03	0,0009	0,27	0,0729	0,0081
	I	0,53	0,2809	-0,43	0,1849	-0,2279
2008	II	-0,17	0,0289	-1,03	1,0609	0,1751
	III	-0,77	0,5929	0,57	0,3249	-0,4389
	IV	0,83	0,6889	1,17	1,3689	0,9711
	I	1,43	2,0449	-0,23	0,0529	-0,3289
2009	II	0,03	0,0089	-0,63	0,3969	-0,0189
	III	-0,37	0,1369	1,27	1,6129	-0,4699
	IV	1,53	2,3409	1,57	2,4649	2,4021
			10,9899		12,1299	4,9941

Використовуючи дані з табл. 3.3. і 3.4 обчислимо:

$$\overline{P}=\frac{76,7}{11}=6,97; \qquad \overline{A}=\frac{79,7}{11}=7,23; \qquad \left(\overline{P}-\overline{A}\right)^2=0,07; \qquad S_p=\sqrt{\frac{1}{11}10,9899}=1;$$

$$S_A=\sqrt{\frac{1}{11}12,1299}=1,05; \ \left(S_p-S_A\right)^2=0,0025, \ r_{PA}=\frac{\frac{1}{11}4,9941}{1\cdot 1,05}=0,43, \ 2S_PS_A\left(1-r_{PA}\right)=1,2.$$

За основі залежності (3.16) наближено отримаємо: $1,27\approx 0,07+0,0025+1,2$. Поділивши на 1,27 отримаємо: $1=0,055+0,002+0,943$, або у відсотках: 100% = 5,5% + 0,2% + 94,3%.

Звідси видно, що 5,5% похибки прогнозу випливає з навантаженості прогнозу (з неповного розкриття суті середньої величини прогнозованої змінної), 0,2% є результатом недостатньої еластичності (з нерозгаданості коливань прогнозованої змінної), а 94,4% похибки маємо з непридатності реального напрямку змін продажу (з неправильним вибором напрямку тенденції розвитку). Розклавши похибку на складники, ми можемо зробити висновок, що найбільшою є несистематична похибка.

Для часових рядів, в яких сезонні коливання спостерігаються для сталого середнього рівня, використовують модифіковану модель наївного методу, що описується формулою (3.6). Залежність (3.6) ґрунтується на тому, що величина прогнозованої змінної в майбутньому буде дорівнювати реальній величині цієї змінної в аналогічній фазі попереднього сезонного циклу.

Приклад 3.3. В кварталах 2008–2009 років продаж виробу Х (в штуках) мав вигляд: 500; 480; 470; 500; 520; 495; 480; 505. Побудувати прогноз продажу на всі квартали 2010 року, при використанні модифікованої моделі наївного методу для довжини сезонного циклу $d=4$. За формулою (3.6) обчислимо:

1	I квартал 2010 р.	$n=8$	$n+1=9$	$d=4$	$y_9^*=y_{9-4}=y_5=520$ шт.
2	II квартал 2010 р.	$n=9$	$n+1=10$	$d=4$	$y_{10}^*=y_{10-4}=y_6=495$ шт.
3	III квартал 2010 р.	$n=10$	$n+1=11$	$d=4$	$y_{11}^*=y_{11-4}=y_7=480$ шт.
4	IV квартал 2010 р.	$n=11$	$n+1=12$	$d=4$	$y_{12}^*=y_{12-4}=y_8=505$ шт.

Отримуємо прогнози, застосувавши запізнення в часі на один сезонний цикл для дійсних величин продажу виробу Х.

3.2. Методи середніх ковзних (прості і зважені)

Моделі середніх ковзних використовується до короткотермінового прогнозування, якщо в часовому ряді присутні сильні випадкові коливання при недостачі тренду (або в мало спостереженому тренді) і сезонних коливань. В цьому випадку прогноз змінної на момент (або проміжок) є простим середнім арифметичним або зваженим з k останніх спостережень в ряді. Величина k називається сталою згладжування і встановлюється прогнозувальником. При невеликій кількості k виразів часового ряду, для яких обчислюється ковзне середнє, більший вплив на визначення прогнозів мають випадкові коливання. З мірою зростання k, ковзне середнє дає кращий ефект згладжування, але вільне реагування на зміну рівня прогнозованої змінної. При виборі сталої згладжування k можна використовувати метод послідовних емпіричних наближень, або вибрати k на основі проведених у минулому досліджень. В певних умовах, з ціллю оптимального вибору параметра k, можна використати середню квадратичну похибку вигаслого прогнозу (3.12) чи (3.13). Серед багатьох значень величини k вибираємо те, для якого похибка є найменшою.

Для простого прогнозу ковзне середнє визначається згідно з формулою.

$$y_t^* = \frac{1}{k}\sum_{i=t-k}^{t-1} y_i,\ \text{äëÿ}\ t = k+1, k+2, ..., n. \tag{3.22}$$

Приклад 3.4. Виплата відсотків за шестимісячними вкладами в банку X за останніх 12 місяців має такий вигляд (в %): 4,16; 4,01; 4,06; 4,09; 4,07; 4,06; 4,13; 4,05; 4,02; 4,01; 4,08; 4,21. Зробити прогноз відсоткових виплат за допомогою моделі ковзного середнього, при умові, що стала згладжування $k = 3$.

Використавши формулу (3.22) маємо:

$$y_4^* = \frac{4,16+4,01+4,06}{3} = 4,08\%,\ \ y_5^* = \frac{4,01+4,06+4,09}{3} = 4,05\%,$$

$$y_6^* = \frac{4,06+4,09+4,07}{3} = 4,07\%,\ \ y_7^* = \frac{4,09+4,07+4,06}{3} = 4,07\%,$$

$$y_8^* = \frac{4,07+4,06+4,13}{3} = 4,09\%,\ \ y_9^* = \frac{4,06+4,13+4,05}{3} = 4,08\%,$$

$$y_{10}^* = \frac{4,13+4,05+4,02}{3} = 4,07\%,\ \ y_{11}^* = \frac{4,05+4,02+4,01}{3} = 4,03\%,$$

$$y_{12}^* = \frac{4,02+4,01+4,08}{3} = 4,04\%,\ \ y_{13}^* = \frac{4,01+4,08+4,21}{3} = 4,10\%.$$

Прогнози від y_4^* до y_{12}^* є вигаслими, а y_{13}^*– своєчасний. Його точність можна оцінити за допомогою відносної середньої похибки, в межах емпіричної верифікації прогнозу (див.(3.11)).

$$\Gamma = \frac{1}{9}\left(\left|\frac{4,09-4,08}{4,09}\right| + \left|\frac{4,07-4,05}{4,07}\right| + \left|\frac{4,06-4,07}{4,06}\right| + \left|\frac{4,13-4,07}{4,13}\right| + \left|\frac{4,05-4,09}{4,05}\right| + \right.$$

$$\left.\left|\frac{4,02-4,08}{4,02}\right| + \left|\frac{4,01-4,07}{4,01}\right| + \left|\frac{4,08-4,03}{4,08}\right| + \left|\frac{4,21-4,04}{4,21}\right|\right) = \frac{0,09325}{9} = 1,04\%$$

Прогнозуючи відсоткові виплати банку X на тринадцятий місяць можемо помилитися на 1%. Отриманий прогноз є допустимим.

У випадку, коли потрібно будувати прогноз на більш, ніж один проміжок, потрібно обчислити середній приріст для вигаслих прогнозів:

$$\overline{\Delta} = \frac{\sum\left(y_t^* - y_{t-1}^*\right)}{n-k-1} \tag{3.23}$$

а потім використати формулу:

$$y_t^* = y_n^* + \overline{\Delta}\left(T-n\right). \tag{3.24}$$

В нашому випадку маємо:

$$\overline{\Delta} = \frac{(4,05-4,08)+(4,07-4,05)+(4,07-4,07)+(4,09-4,07)+(4,08-4,09)}{12-3-1} +$$

$$+\frac{(4,07-4,08)+(4,03-4,07)+(4,04-4,03)}{12-3-1} = \frac{-0,04}{8} = -0,005.$$

В результаті отримаємо:

$$y_{14}^* = 4,04+(14-12)(-0,005) = 4,03\%,\ y_{15}^* = 4,04+(15-12)(-0,005) = 4,025\%.$$

Середня відносна похибка прогнозу не змінилася і дорівнює 1,04%.

Можна зауважити, що просте ковзне середнє узагальнює інформацію, на основі якої будується прогноз. Інформація оновлюється на кожному проміжку. При обчисленні ковзного середнього вся інформація береться до уваги і має однаковий вплив на прогноз, що і є основним недоліком.

Прогнозування на основі методу зваженого ковзного середнього узагальнює постачання інформації. Для найближчого майбутнього має значення найновіше спостереження, а не більш давніша інформація. Це означає, що старіша інформація має менший вплив ніж та, яка знаходиться найближче до проміжку прогнозування. В методі зваженого ковзного середнього прогноз на окіл t будується за допомогою формули:

$$y_t^* = \sum_{i=t-k}^{t-1} y_i w_{i-t+k+1}, \qquad (3.25)$$

де k є сталою згладжування, а $w_{i-t+k+1}$ – вагові коефіцієнти, які задовольняють умови: 1) знаходяться в межах від 0 до 1; 2) сума дорівнює 1; 3) кожен наступний коефіцієнт є більшим за попередній.

Визначаючи вагові коефіцієнти, прогнозист виходить з власного досвіду, тому різні експерти репрезентують визначення коефіцієнтів по-різному. Існують різні методики знаходження вагових коефіцієнтів, які мають назву:

1) лінійні ваги

$$w_j = \frac{2j}{k(k+1)}; \qquad (3.26)$$

2) гармонічні ваги

$$w_j = w_{j-1} + \frac{1}{k(k+1-j)}. \qquad (3.27)$$

Кількість вагових коефіцієнтів для прогнозованої змінної дорівнює кількості виразів, які беруться до уваги при обчисленні зваженого ковзного середнього. Наприклад, для $k = 3$ лінійні ваги дорівнюють:

$$w_1 = \frac{2\cdot 1}{3(3+1)} = 0{,}167;\ w_2 = \frac{2\cdot 2}{3(3+1)} = 0{,}333;\ w_3 = \frac{2\cdot 3}{3(3+1)} = 0{,}5;\ \sum w_j = 1.$$

Для $k = 3$ гармонічні ваги мають вигляд: $w_1 = 0 + \frac{1}{3(3+1-1)} = 0{,}111;$

$$w_2 = 0{,}111 + \frac{1}{3(3-2+1)} = 0{,}278;\ w_3 = 0{,}278 + \frac{1}{3(3-3+1)} = 0{,}611;\ \sum w_j = 1.$$

Розглянувши попередній приклад виплат відсотків банком X за останніх 12 місяців, отримуємо прогнози при використанні лінійних ваг для сталої згладжування $k = 3$:

$y_4^* = 4{,}16\cdot 0{,}167 + 4{,}01\cdot 0{,}333 + 4{,}06\cdot 0{,}5 = 4{,}06\%,$

$y_5^* = 4{,}01\cdot 0{,}167 + 4{,}06\cdot 0{,}333 + 4{,}07\cdot 0{,}5 = 4{,}06\%,$

$y_6^* = 4{,}06\cdot 0{,}167 + 4{,}09\cdot 0{,}333 + 4{,}07\cdot 0{,}5 = 4{,}07\%,$

$y_7^* = 4{,}09\cdot 0{,}167 + 4{,}07\cdot 0{,}333 + 4{,}06\cdot 0{,}5 = 4{,}07\%,$

$y_8^* = 4{,}07\cdot 0{,}167 + 4{,}06\cdot 0{,}333 + 4{,}13\cdot 0{,}5 = 4{,}09\%,$

$y_9^* = 4{,}06\cdot 0{,}167 + 4{,}13\cdot 0{,}333 + 4{,}05\cdot 0{,}5 = 4{,}08\%,$

$y_{10}^* = 4{,}13\cdot 0{,}167 + 4{,}05\cdot 0{,}333 + 4{,}02\cdot 0{,}5 = 4{,}05\%,$

$y_{11}^* = 4{,}05\cdot 0{,}167 + 4{,}02\cdot 0{,}333 + 4{,}01\cdot 0{,}5 = 4{,}02\%,$

$y_{12}^* = 4{,}02\cdot 0{,}167 + 4{,}01\cdot 0{,}333 + 4{,}08\cdot 0{,}5 = 4{,}05\%,$

$y_{13}^* = 4{,}01\cdot 0{,}167 + 4{,}08\cdot 0{,}333 + 4{,}21\cdot 0{,}5 = 4{,}13\%,$

Прогнози для дальших проміжків (наприклад $T = 14$ чи 15) будуємо (у випадку моделі простого ковзного середнього) за допомогою залежності (3.24).

Основною проблемою, яка виникає під час прогнозування за допомогою методу зваженого ковзного середнього, є аналогічний до методу простого ковзного середнього вибір сталої згладжування k.

3.3. Модель експоненціального згладжування

В цій групі моделей розглядаються методи прогнозування, особливістю яких є згладжування динамічного ряду за допомогою ковзного середнього з вагами, що описуються за допомогою експоненти. Підбір вагових коефіцієнтів здійснюється на основі, що цінність інформації змінюється експоненційно в часі, а вагові коефіцієнти експоненційно прямують до нуля. Це означає, що кожен попередній елемент часового ряду має менший вплив на прогноз.

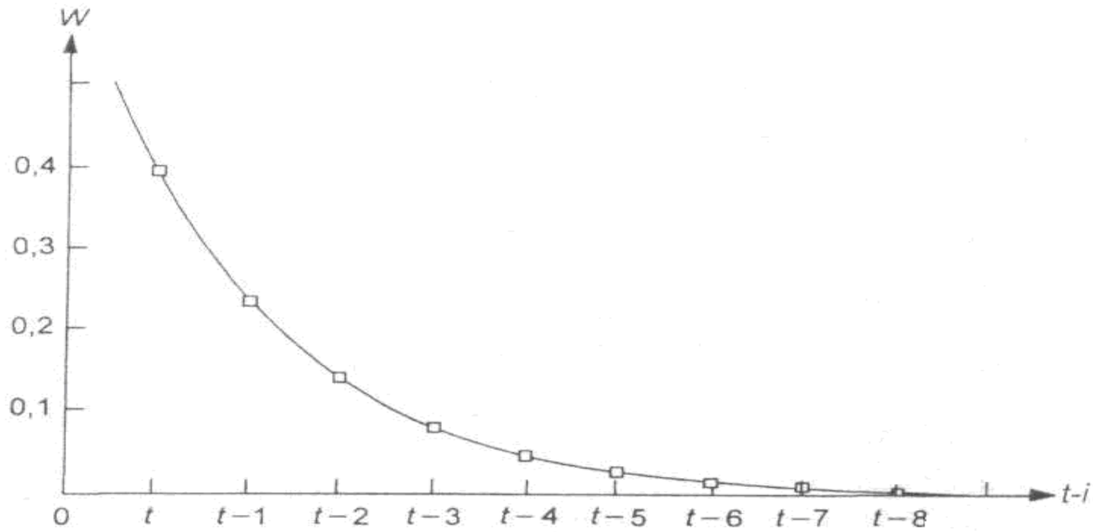

Рис. 3.1. Експоненційні вагові коефіцієнти

З рисунка випливає, що найбільшу вагу має біжуче спостереження (має найбільший вплив на величину прогнозу), а меншу вагу – попереднє спостереження і т.д. Ваги зменшуються з плином часу. Спостереження, на проміжку t (ваговий параметр) описується за допомогою рівняння:

$$w_t = \alpha(1-\alpha)^t,\ 0 < \alpha \le 1. \tag{3.28}$$

Величина α називається сталою згладжування. З цієї формули випливає, що α є ваговим коефіцієнтом найбільшого спостереження прогнозованої змінної. Якщо α близьке до 1, то величина розглянутого спостереження є значно (не порівняно) більшою від інших спостережень. Якщо α прямує до нуля, то всі спостереження мають однаковий внесок в прогноз. Зауважимо, якщо стала згладжування не перевищує 0,3, то зміни в часовому ряді є повільними, у випадку коли α є більшою 0,7, то можемо стверджувати, що часові ряди характеризуються динамічними змінами.

Приклад 3.5. Розглянемо 5 спостережень часового ряду $y_1,...,y_5$. Нехай $\alpha = 0,4$. Отримуємо такі вагові коефіцієнти:

Ваги	Спостереження
$w_1 = 0,4(1-0,4)^0 = 0,4$	$y_t \quad (y_5)$
$w_2 = 0,4(1-0,4)^1 = 0,24$	$y_{t-1} \quad (y_4)$
$w_3 = 0,4(1-0,4)^2 = 0,144$	$y_{t-2} \quad (y_3)$
$w_4 = 0,4(1-0,4)^3 = 0,0864$	$y_{t-3} \quad (y_2)$
$w_5 = 0,4(1-0,4)^4 = 0,05184$	$y_{t-4} \quad (y_1)$

В залежності від описаних умов, яким підлягають часові ряди, моделі показникового вирівнювання виступають в різних варіантах. Для прогнозування найчастіше використовують:

1. просте показникове вирівнювання Броуна
2. подвійне показникове вирівнювання Хольта
3. потрійне показникове вирівнювання Вінтерса.

3.4.1. Просте показникове вирівнювання Броуна

Модель застосовується тоді, коли в часовому ряді присутні сталий рівень прогнозування та випадкові коливання, а часовий ряд є стаціонарним (нестача тенденції розвитку).

Відправною точкою для прогнозування за допомогою цієї моделі є рівняння:

$$y_{t+1}^* = \alpha y_t + \alpha(1-\alpha) y_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2 y_{t-2} + \alpha(1-\alpha)^3 y_{t-3} + ... \tag{3.29}$$

Отримаємо залежність:

$$y_{t+1}^* = \alpha y_t + (1-\alpha) y_t^* \tag{3.30}$$

де y_t є реальна величина прогнозованої змінної на проміжку (моменті) t. а y_t^* – прогноз на час t.

Рівняння можна виразити так:

í àñòóï í èé ï ðî ãí î ç$=\alpha\cdot$ðåàëüí à âåëè÷èí à$+(1-\alpha)\cdot$ï ðî ãí î ç (3.31)

Величина прогнозу в часі $t+1$ є зваженим середнім арифметичним дійсної величини часового ряду в момент t і величини прогнозу для моменту t (обчисленої для $t-1$).

Просту модель показникового вирівнювання можна записати в наступному вигляді:

$$y_{t+1}^* = y_t + (1-\alpha)(y_t^* - y_t) \tag{3.32}$$

Різниця $(y_t^* - y_t)$ є похибкою прогнозу. Згідно з формулою, прогноз на проміжок $(t+1)$ є сумою величини прогнозованої змінної в t і величини похибки прогнозу.

Перед процедурою простого вирівнювання потрібно знайти початкову величину y_1^*. Найчастіше вважаємо, що $y_1^* = y_1$ або $y_1^* = \overline{y}$.

У другому випадку прогноз приймає значення середнього арифметичного часового ряду. Чим довший є часовий ряд, тим менший вплив на прогноз має початкова величина. Істотною проблемою в даному методі є вибір сталої згладжування. Для кожного часового ряду $y_1, y_2, ..., y_n$ можна визначити величину α. Критерієм оптимальності є мінімізація суми квадратів відхилень між спостережуваними та прогнозними величинами прогнозованої змінної. Стала згладжування α визначається за формулою:

$$\alpha = \frac{2}{n+1} \tag{3.33}$$

де n – кількість спостережень.

Приклад 3.6. Гіпермаркет електротоварів в кварталах протягом трьох останніх років мав такий продаж електролампочок (в тис. шт.): 36; 33; 34; 35; 34; 37; 33; 34; 36; 37; 35; 34. Зробити прогноз продажу лампочок на перший квартал наступного року, при умові, що: а) $\alpha = 0{,}1$; б) $\alpha = 0{,}9$. Який з прогнозів є точнішим?

Величина коефіцієнта зміни дорівнює:

$$V = \frac{s}{\overline{x}} \cdot 100 = \frac{1{,}34}{34{,}83} \cdot 100 = 3{,}84\%.$$

Мала величина коефіцієнта змінності, вказує на те, що аналізований часовий ряд має також і систематичну складову (нестачу тренду) та випадкові коливання. Для прогнозування можна використати простий показниковий метод вирівнювання Броуна.

Візьмемо $y_1^* = \overline{y} = 34,83$ та використавши формулу (3.30) при $\alpha = 0,1$ отримаємо:

y_t^*	$\left(y_t - y_t^*\right)^2$
$y_1^* = 34,83$	1,3689
$y_2^* = 0,1 \cdot 36 + 0,9 \cdot 34,83 = 34,947$	3,7908
$y_3^* = 0,1 \cdot 33 + 0,9 \cdot 34,947 = 34,752$	0,5655
$y_4^* = 0,1 \cdot 34 + 0,9 \cdot 34,752 = 34,677$	0,1043
$y_5^* = 0,1 \cdot 35 + 0,9 \cdot 34,677 = 34,709$	0,5027
$y_6^* = 0,1 \cdot 34 + 0,9 \cdot 34,709 = 34,638$	5,579
$y_7^* = 0,1 \cdot 37 + 0,9 \cdot 34,638 = 34,874$	3,5119
$y_8^* = 0,1 \cdot 33 + 0,9 \cdot 34,874 = 34,687$	0,472
$y_9^* = 0,1 \cdot 34 + 0,9 \cdot 34,874 = 34,687$	1,9099
$y_{10}^* = 0,1 \cdot 36 + 0,9 \cdot 34,618 = 34,756$	5,0355
$y_{11}^* = 0,1 \cdot 37 + 0,9 \cdot 34,756 = 34,98$	0,0004
$y_{12}^* = 0,1 \cdot 35 + 0,9 \cdot 34,98 = 34,982$	0,9643
$y_{13}^* = 0,1 \cdot 34 + 0,9 \cdot 34,982 = 34,884$	$\sum = 22,4363$

Використовуючи формулу (3.12) отримаємо величину середньої квадратичної похибки вигаслого прогнозу на рівні:

$$s^* = \sqrt{\frac{22,4363}{12}} = 1,367 \text{ тис. шт.}$$

Визначаючи прогноз при, $\alpha = 0,9$ отримуємо:

y_t^*	$\left(y_t - y_t^*\right)^2$
$y_1^* = 34,83$	1,3689
$y_2^* = 0,9 \cdot 36 + 0,1 \cdot 34,83 = 35,883$	8,3117
$y_3^* = 0,9 \cdot 33 + 0,1 \cdot 34,947 = 33,288$	0,5069
$y_4^* = 0,9 \cdot 34 + 0,1 \cdot 33,288 = 33,929$	1,147
$y_5^* = 0,9 \cdot 35 + 0,1 \cdot 33,929 = 34,893$	0,0079
$y_6^* = 0,9 \cdot 34 + 0,1 \cdot 34,893 = 34,089$	5,2487
$y_7^* = 0,9 \cdot 37 + 0,1 \cdot 34,089 = 36,709$	13,7567
$y_8^* = 0,9 \cdot 33 + 0,1 \cdot 36,709 = 33,371$	0,3956
$y_9^* = 0,9 \cdot 34 + 0,1 \cdot 33,371 = 33,937$	4,256
$y_{10}^* = 0,9 \cdot 36 + 0,1 \cdot 33,937 = 35,794$	1,4544
$y_{11}^* = 0,9 \cdot 37 + 0,1 \cdot 35,794 = 36,879$	3,5306
$y_{12}^* = 0,9 \cdot 35 + 0,1 \cdot 36,879 = 35,188$	1,4113
$y_{13}^* = 0,9 \cdot 34 + 0,1 \cdot 35,188 = 34,119$	$\sum = 41,3957$

В цій версії побудови прогнозу середня квадратична похибка вигаслого прогнозу дорівнює:

$$s^* = \sqrt{\frac{41,3957}{12}} = 1,857 \text{ тис. шт.}$$

Вигаслі прогнози для $\alpha = 0,1$ точніші, ніж прогнози для $\alpha = 0,9$, а отже більш допустимим є прогноз продажу електричних лампочок в першому кварталі $y_{13}^* = 34,884$ тис. шт.

Визначений прогноз продажу на перший квартал наступного року, є прогнозом на один проміжок вперед (горизонт прогнозу). Для довших горизонтів прогноз будуємо на підставі формули:

$$y_T^* = y_n^* + (T-n)\overline{\Delta}, \tag{3.34}$$

де $\overline{\Delta}$ означає середній приріст вигаслого прогнозу.

Використавши числові дані вище наведеного прикладу, побудуємо прогноз для IV кварталу наступного року (при $\alpha = 0,1$). Середній приріст вигаслих прогнозів дорівнює:

$$\overline{\Delta} = \frac{(34,947-34,83)+(34,752-34,947)+(34,677-34,752)+(34,709-34,677)}{11}+$$
$$+\frac{(34,638-34,709)+(34,874-34,638)+(34,687-34,872)+(34,618-34,687)}{11}+$$
$$+\frac{(34,756-34,618)+(34,98-34,756)+(34,982-34,98)}{11} = \frac{0,152}{11} = 0,014.$$

Прогноз для $T = 16$ (IV квартал наступного року) дорівнює (див. (3.34))

$y_{16}^* = 34,982 + 0,014(16-12) = 35,038$ тис. шт.

$$V_{s^*} = \frac{1,367}{35,038} \cdot 100 = 3,9\%$$

Оскільки V_{s^*} невелике, то прогноз $y_{16}^* = 35,038$ тис. шт. є допустимим.

3.4.2. Подвійне показникове вирівнювання Хольта

Подвійне показникове вирівнювання Хольта застосовується у випадку присутності в часовому ряді випадкових коливань або систематичної складової, яка має вигляд лінійного тренду. Модель використовується для побудови короткотермінових прогнозів для одного чи декількох проміжків. Горизонт прогнозування визначають відносно невизначеності. Подвійне показникове вирівнювання Хольта описується за допомогою трьох рівнянь:

1) рівняння, що служить для визначення вирівняної (згладженої) величини часового ряду на проміжку t:

$$F_t = \alpha y_t + (1-\alpha)(F_{t-1} + S_{t-1}); \tag{3.35}$$

2) рівняння, яке описує згладжену величину тренду на момент/ проміжок t:

$$S_t = \beta(F_t + F_{t-1}) + (1-\beta)S_{t-1}; \tag{3.36}$$

3) рівняння, що служить для побудови прогнозу:

$$y_t^* = F_{t-1} + S_{t-1}. \tag{3.37}$$

Модель Хольта має рекурентний характер. Якщо хронологічний ряд має n виразів, то прогноз на проміжок $n+1$ будується на основі залежності:

$$y_{n+1}^* = F_n + S_n, \tag{3.38}$$

де

$$F_n = \alpha y_n + (1-\alpha)(F_{n-1} + S_{n-1}), \tag{3.39}$$

$$S_n = \beta(F_n + F_{n-1}) + (1-\beta) S_{n-1}. \tag{3.40}$$

Прогноз для $T > n$ визначаємо за формулою:

$$y_T^* = F_n + (T-n) S_n. \tag{3.41}$$

В модель Хольта входять два параметри (дві сталих) згладжування: α і β, які належать проміжку $(0, 1)$ і мають вплив як на величину прогнозу так і на його похибку. Параметри α і β підбираються експериментально. Вдалий підбір параметрів згладжування мінімізує середню квадратичну похибку вигаслих прогнозів.

Застосування моделі Хольта можливе тоді, коли відомі початкові значення F_1 і S_1, їх можна визначити наступним чином:

1) $F_1 = y_1$, $S_1 = 0$;

2) $F_1 = y_1$, $S_1 = y_2 - y_1$;

3) $F_1 = a_0$, $S_1 = a_1$, де a_0 та a_1 оцінки вільного члена та напрямного коефіцієнта лінійної функції тренду, оцінених на основі кількох початкових спостережень.

Точність прогнозу, визначається так само, як у випадку простого показникового згладжування Броуна (за допомогою s^* чи V_{s^*}).

Приклад 3.7. Спостережена за останніх 7 років величина транспортних послуг (в тис. грн.) фірми X має такі значення: 139,8; 138,4; 151,1; 172,9; 182,9; 189,2; 191,7. Побудувати, використавши метод Хольта, прогноз величини послуг фірми у 8-му та 9-му роках та оцінити точність прогнозу.

При побудові прогнозу візьмемо:

$F_1 = y_1 = 139,8$; $S_1 = y_2 - y_1 = 138,4 - 139,4 = -1,4$; $\alpha = 0,4$; $\beta = 0,7$.

При таких умовах, використавши формули (3.35) та (3.36), маємо:

$F_2 = 0,4 \cdot 138,4 + 0,6(139,8 - 1,4) = 138,4$,

$S_2 = 0,7(138,4 - 139,8) + 0,3(-1,4) = -1,4$,

$y_2^* = 139,8 - 1,4 = 138,4$,

$F_3 = 0,4 \cdot 151,1 + 0,6(138,4 - 1,4) = 142,64$,

$S_3 = 0,7(142,64 - 138,4) + 0,3(-1,4) = 2,55$,

$y_3^* = 139,8 - 1,4 = 138,4$,

$F_4 = 0,4 \cdot 172,9 + 0,6(142,64 + 2,55) = 156,27$,

$S_4 = 0,7(156,27 - 142,64) + 0,3 \cdot 2,55 = 10,31$,

$y_4^* = 142,64 + 2,55 = 145,19$,

$F_5 = 0,4 \cdot 182,99 + 0,6(156,27 + 10,31) = 173,11$,

$S_5 = 0,7(173,11 - 156,27) + 0,3 \cdot 10,31 = 14,88$,

$y_5^* = 156,27 + 10,31 = 266,34$,

$F_6 = 0,4 \cdot 189,2 + 0,6(173,11 + 14,88) = 188,47$,

$S_6 = 0,7(188,47 - 173,11) + 0,3 \cdot 14,88 = 15,22$,

$y_6^* = 173,11 + 14,88 = 187,99$,

$F_7 = 0,4 \cdot 197,7 + 0,6\left(188,4 + 15,22\right) = 201,29$,

$S_7 = 0,7\left(201,29 - 188,47\right) + 0,3 \cdot 15,22 = 13,54$,

$y_7^* = 188,47 + 15,22 = 203,69$.

Середня квадратична похибка вигаслих прогнозів дорівнює:

$$s^* = \sqrt{\frac{\left(138,4-138,4\right)^2 + \left(151,1-137\right)^2 + \left(172,9-145,19\right)^2 + \left(182,9-166,58\right)^2}{6}} +$$

$$+\sqrt{\frac{\left(189,2-187,99\right)^2 + \left(197,7-203,69\right)^2}{6}} = \sqrt{\frac{1270,33}{6}} = 14,55 \text{ òèñ.ãðí}.$$

Прогнози перевезень фірмою X для 8-го і 9-го років дорівнюють:

$y_8^* = 201,29 + 13,54\left(8-7\right) = 214,83$ тис. грн.

$y_9^* = 201,29 + 13,54\left(9-7\right) = 228,37$ тис. грн.

Відносні середні похибки прогнозів знаходяться на рівні:

$V_8^* = \dfrac{14,55}{214,83} \cdot 100 = 6,8\%$, $V_9^* = \dfrac{14,55}{228,37} \cdot 100 = 6,4\%$.

Обидва прогнози є допустимими.

3.4.3. Потрійні показникові вирівнювання Вінтерса

Модель Вінтерса використовується тоді, коли в часовому ряді крім випадкових коливань і тренду присутні сезонні коливання, тому можна стверджувати, що модель Вінтерса є розширенням моделі Хольта. Як відомо, сезонність має адитивний або мультиплікативний характер, тому існує два різновиди моделі Вінтерса.

Адитивна модель має вигляд:

$$F_t = \alpha\left(y_t - C_{t-r}\right) + \left(1-\alpha\right)\left(F_{t-1} + S_{t-1}\right), \tag{3.42}$$

$$S_t = \beta\left(F_t - F_{t-1}\right) + \left(1-\beta\right)S_{t-1}, \tag{3.43}$$

$$C_t = \gamma\left(y_t - F_t\right) + \left(1-\gamma\right)C_{t-r}, \tag{3.44}$$

$$y_t^* = F_n + S_n\left(t-n\right)C_{t-r}, \ t > n, \tag{3.45}$$

де $F_1 -$ вирівняна величина прогнозованої змінної в моменті/околі/ t; $S_1 -$згладжена величина приросту тренду на момент/окіл/ t; $C_t -$ оцінка абсолютного рівня сезонних коливань на момент/окіл/ t; $r -$ кількість підпроміжків циклу сезонності ($r = 2$ при піврічній сезонності, $r = 4$ при квартальній, $r = 12$ при місячній), при чому $C_1 + C_2 + ... + C_r = 0$; $\alpha, \beta, \gamma ... -$ параметри моделі, які набувають значення з $\left(0, 1\right)$.

Параметри α, β, γ вибираємо так, щоб мінімізувати середню квадратичну похибку вигаслих прогнозів. Параметр α впливає на згладжену оцінку середньої величини на момент t, $\beta -$ інформує про величину приросту лінійного тренду часового ряду на момент t, $\gamma -$ впливає на згладжені оцінки величин абсолютних рівнів сезонних коливань. У випадку, коли складові часового ряду швидко змінюються, параметри α, β, γ потрібно брати близькими до одиниці. В протилежному випадку вони повинні бути близькими до нуля.

Потрійні показникові вирівнювання Вінтерса ґрунтується на встановлених початкових величинах $F_1, S_1, C_1, C_2, ..., C_r$. За значення F_1 вибирають перше значення прогнозованої змінної $(F_1 = y_1)$ або середнє значення $(F_1 = \overline{y})$, обчислене на основі всього спостереження, або а першому циклі сезонності. За S_1 беремо різницю між другим і першим значеннями прогнозованої змінної (тобто: $S_1 = y_2 - y_1$) або нуль. Величина С в підпроміжках першого циклу сезонності, як правило, набуває значення одиниці ($C_1 = C_2 = ... = C_r = 1$).

Приклад 3.8. Розглянувши квартальні дані, які стосуються рівня безробіття (в %) за останні 6 років: 10,4; 9,6; 9,6; 10,4; 12; 11,6; 12,1; 13,1; 14; 13,6; 14; 15,1; 16,1; 15,9; 16,3; 17,5; 18,2; 17,4; 17,6; 18,1; 20,6; 19,7; 19,4; 20,2. Побудувати (використовуючи адитивну модель Вінтерса) вигаслі прогнози, обчислити для них середню квадратичну похибку та побудувати прогноз для першого кварталу 7-го року.

Обчислимо початкові величини:

1) $F_{1+r} = F_5 = y_5 = 12,$

2) $S_{1+r} = S_5 = \frac{1}{4}(y_5 + y_6 + y_7 + y_8) - \frac{1}{4}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) =$

$= \frac{12 + 11,6 + 12,1 + 13,1}{4} + \frac{10,4 + 9,6 + 9,6 + 10,4}{4} = \frac{48,8}{4} - \frac{40}{4} = 2,2.$

3) $C_1 = y_1 - \frac{1}{4}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) = 10,4 - 10 = 0,4\%,$

$C_2 = y_2 - \frac{1}{4}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) = 9,6 - 10 = -0,4\%,$

$C_3 = y_3 - \frac{1}{4}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) = 9,6 - 10 = -0,4\%,$

$C_4 = y_4 - \frac{1}{4}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) = 10,4 - 10 = 0,4\%,$

4) $\alpha = 0,97;\ \beta = 0,84;\ \gamma = 0.$ Умова нульової величини параметру γ означає, що не скоректовані абсолютні рівні сезонних коливань.

Проведемо наступні розрахунки:

$F_6 = 0,97(11,6 + 0,4) + 0,03(12 + 2,2) = 12,066 \approx 12,1;$

$S_6 = 0,84(12,1 - 12) + 0,16 \cdot 2,2 = 0,436 \approx 0,4;$

$C_6 = -0,4;$

$y_6^* = F_5 + S_5 + C_2 = 12 + 2,2 - 0,4 = 13,8;$

$F_7 = 0,97(12,1 + 0,4) + 0,03(12,1 + 0,4) = 12,5;$

$S_7 = 0,84(12,5 - 12,1) + 0,03 \cdot 0,4 = 0,4;$

$C_7 = -0,4;$

$y_7^* = F_6 + S_6 + C_3 = 12,1 + 0,4 - 0,4 = 12,1;$ і т.д.

Таблиця 2.5 відображає обчислення, які необхідні для побудови прогнозу

Таблиця 2.5.

Обчислення для побудови прогнозу за допомогою адитивної моделі Вінтерса

t	y_t	F_t	S_t	C_t	y_t^*	$y_t - y_t^*$	$\left(y_t - y_t^*\right)^2$
1	10,4	-	-	0,40	-	-	-
2	9,6	-	-	-0,40	-	-	-
3	9,6	-	-	0,40	-	-	-
4	10,4	-	-	0,40	-	-	-
5	12,0	12,0	2,2	0,40	-	-	-
6	11,6	12,1	0,4	-0,40	13,8	-2,2	4,84
7	12,1	12,5	0,4	-0,40	12,1	0	0
8	13,1	12,7	0,2	0,40	13,3	-0,2	0,04
9	14,0	13,6	0,8	-0,40	13,4	0,6	0,36
10	13,6	14,0	0,5	-0,40	13,9	-0,3	0,09
11	14,0	14,4	0,4	-0,40	14,1	-0,1	0,01
12	15,1	14,7	0,3	0,40	15,2	-0,1	0,01
13	16,1	15,7	0,9	0,40	15,4	0,7	0,49
14	15,9	16,3	0,7	-0,40	16,1	0,2	0,04
15	16,3	16,7	0,4	-0,40	16,6	-0,3	0,09
16	17,5	17,1	0,4	0,40	17,6	-0,1	0,01
17	18,2	17,8	06	0,4	17,9	0,3	0,09
18	17,4	17,8	0,1	-0,40	18,0	-0,6	0,36
19	17,6	18,0	0,2	-0,40	17,6	0	0
20	18,1	17,7	-0,2	0,40	18,6	-0,5	0,25
21	20,6	20,1	2,0	0,40	17,9	2,7	7,29
22	19,7	20,2	0,4	-0,40	21,7	-2,0	4,00
23	19,4	19,8	-0,2	-0,40	20,1	-0,7	0,49
24	20,0	19,6	-0,2	0,40	20,0	0	0
$\sum$	X	X	X	X	X	X	18,46

Середня квадратична похибка вигаслих прогнозів дорівнює:

$$s^* = \sqrt{\frac{1}{m}\sum_{t\in Iep}\left(y_t - y_t^*\right)^2} = \sqrt{\frac{184,6}{19}} = 0,99\%.$$

Відносна середня похибка має вигляд: $V_{s^*} = 100\frac{s^*}{\overline{y}_{t\in Iep}} = \frac{0,99}{16,33}\cdot 100 = 6,1\%.$

Оскільки величина абсолютної середньої похибки є невеликою, то застосований метод прогнозування є допустимим.

Побудувати вигаслі прогнози можна також і за такою формулою:

$$y_t^* = F_{t-1} + S_{t-1} + C_{t-r}, \tag{3.46}$$

для біжучих прогнозів застосовується формула (3.45).

Прогнозуючи рівень безробіття для I кварталу 7-го року за формулою (3.45), отримаємо: $y_{T=25}^* = 19,6 + \left(-0,2\right)\left(25-24\right) + 0,4 = 18,8\%$.

Мультиплікативна модель Вінтерса має вигляд:

$$F_t = \alpha\frac{y_t}{C_{t-r}} + \left(1-\alpha\right)\left(F_{t-1} + S_{t-1}\right), \tag{3.47}$$

$$S_t = \beta\left(F_t - F_{t-1}\right) + \left(1-\beta\right)S_{t-1}, \tag{3.48}$$

$$C_t = \gamma\frac{y_t}{F_t} + \left(1-\gamma\right)C_{t-r}. \tag{3.49}$$

Рівняння прогнозу на момент/проміжок/ $t > n$ записується так:

$$y_t^* = \left[F_n + S_n\left(t-n\right)\right]C_{t-r}, \tag{3.50}$$

де n довжина часового ряду прогнозованої змінної, інші складові мають теж саме значення, що і в формулах (3.42)–(3.45).

Застосування мультиплікативної моделі Вінтерса для прогнозування проілюструємо на прикладі.

Приклад 3.9

Таблиця 3.6.

Побудова прогнозу за допомогою мультиплікативної моделі Вінтерса

Роки	Квартали	t	y_t	F_t	S_t	C_t	y_t^*	$\left(y_t - y_t^*\right)^2$
2004	I	1	500			1,33		
	II	2	350			0,93		
	III	3	250			0,67		
	IV	4	400			1,07		
2005	I	5	450	450	-50	1,27		
	II	6	350	388,17	-61,24	0,92	372,0	484,00
	III	7	200	312,81	-74,05	0,66	217,08	291,73
	IV	8	300	260,01	-53,87	1,08	254,68	2053,90
2006	I	9	350	241,23	-20,53	1,30	261,11	7901,43
	II	10	200	218,19	-22,92	0,93	204,65	21,62
	III	11	150	211,06	-7,91	0,67	129,11	436,39
	IV	12	400	286,06	70,85	1,15	220,24	32313,66
2007	I	13	550	389,43	101,74	1,33	465,24	7184,26
	II	14	350	434,73	48,13	0,90	454,41	10901,45
	III	15	250	427,69	-4,28	0,65	324,05	5483,40
	IV	16	550	451,48	22,38	1,16	485,63	4143,50
2008	I	17	550	444,43	-5,57	1,31	627,99	6082,44
	II	18	400	441,36	-3,19	0,90	395,48	20,43
	III	19	350	486,76	42,96	0,67	286,47	4036,06
	IV	20	600	523,22	36,78	1,16	615,11	228,31
2009	I	21	750	566,75	43,20	1,3.1	732,33	312,23
	II	22	500	582,08	16,72	0,89	550,29	2529,08
	III	23	400	599,33	17,22	0,67	399,31	0,48
	IV	24	650	588,85	-9,09	1,15	714,14	4113,94
$\sum$		X	X	X	X	X	X	88538,31

Приймаються наступні початкові умови:

1) за F беремо величину емпіричного часового ряду, що відповідає першій фазі другого циклу, тобто $F_{r+1} = y_{t+1} = y_5$, $\left(F_5 = 450\right)$,

2) за S візьмемо різницю середніх величин другого і першого циклу, тобто:

$$S_{1+r} = S_5 = \frac{1}{4}\left(y_5 + y_6 + y_7 + y_8\right) - \frac{1}{4}\left(y_1 + y_2 + y_3 + y_4\right) =$$

$$\frac{450+350+200+300}{4} - \frac{500+350+250+400}{4} = 325 - 375 = -50,$$

3) за C (для послідовних фаз першого циклу) беремо:

$$C_1=\frac{y_1}{\frac{1}{4}(y_1+y_2+y_3+y_4)}=\frac{500}{0,25\cdot 1500}=1,33,\quad C_2=\frac{y_2}{\frac{1}{4}(y_1+y_2+y_3+y_4)}=\frac{350}{0,25\cdot 1500}=0,93,$$

$$C_3=\frac{y_3}{\frac{1}{4}(y_1+y_2+y_3+y_4)}=\frac{250}{0,25\cdot 1500}=0,67,\qquad C_4=\frac{y_4}{\frac{1}{4}(y_1+y_2+y_3+y_4)}=\frac{400}{0,25\cdot 1500}=1,07,$$

$r=C_1+C_2+C_3+C_4=1,33+0,93+0,67+1,07=4.$

4) сталі згладжування приймаються: $\alpha=0,5$; $\beta=0,95$; $\gamma=0,2$.

Використовуючи дані з табл.3.6. та мультиплікативну модель Вінтерса, отримаємо:

$$F_6=0,5\frac{350}{0,93}+0,5(450-50)=388,17;\quad S_6=0,95(388,17-450)+0,05(-50)=-61,24;$$

$$C_6=0,2\frac{350}{388,17}+0,8\cdot 0,93=0,92;\quad y_6^*=(F_5+S_5)C_{t-r}=(450-50)0,93=372,$$

бо біжучий прогноз визначають з формули:

$$y_t^*=(F_{t-1}+S_{t-r})C_{t-r}. \tag{3.51}$$

Результати обчислень відображені в таблиці 3.6. Середня квадратична похибка вигаслих прогнозів дорівнює: $s^*=\sqrt{\frac{88538,31}{19}}=68,26$.

Поділивши на середню арифметичну величину y_t, обчислену на проміжку емпіричної верифікації прогнозу, отримуємо: $V_{s^*}=\frac{68,26}{413,16}\cdot 100=16,52\%$.

Очевидно, що відносна похибка прогнозу є дуже великою, то потрібно обов'язково змінити або метод прогнозування, або початкові умови.

Для дидактичної мети використаємо мультиплікативну модель Вінтерса для побудови властивих прогнозів для чотирьох кварталів 2010 року. Використавши залежність (3.50) отримуємо:

для першого кварталу: $y_{25}^*=1,31(588,85-9,09)=759,5$;

для другого кварталу: $y_{26}^*=0,89(588,85+2(-9,09))=507,9$;

для третього кварталу: $y_{27}^*=0,67(588,85+3(-9,09))=376,3$;

для четвертого кварталу: $y_{28}^*=1,15(588,85+4(-9,09))=635,4$.

Величина прогнозованої змінної в чотирьох кварталах 2011 дорівнює відповідно 759,5; 507,9; 376,3; 635,4 одиниць.

3.5. Модель ковзного тренду з гармонічними вагами

При прогнозуванні за допомогою класичної моделі тенденції розвитку обов'язково потрібно враховувати умову динамічного "статусу кво". Ця умова стосується незмінності механізму розвитку досліджуваних явищ в прогнозованому проміжку. Вона ігнорується під час прогнозування на основі ковзного тренду з гармонічними вагами. Ковзний тренд (інколи називають сегментний) є адаптаційною моделлю, яка служить для побудови короткотермінових прогнозів. Цей метод найчастіше вживається тоді, коли часовий ряд прогнозованої змінної характеризується значною нерегулярністю і переломами тенденції розвитку.

Прогнозування за допомогою даного методу складається з двох етапів:

1) вирівнювання часового ряду ковзним трендом,

2) побудова прогнозу при використанні гармонічних ваг.

Для вирівнювання часового ряду потрібно вибрати сталу згладжування $k\ (k<n)$, а потім оцінити параметри лінійної функції тренду на основі послідовних фрагментів ряду.

Для хронологічного ряду $y_1, y_2, ..., y_n$ і сталої згладжування k послідовними фрагментами ряду є:

$$\begin{aligned} &y_1, ..., y_k; \\ &y_2, ..., y_{k+1}; \\ &\dots\dots\dots\dots \\ &y_{n-k+1}, ..., y_n. \end{aligned} \tag{3.52}$$

Лінійна функція тренду для кожного сегменту набуває вигляду:

$$\begin{aligned} &\hat{y}_1 = a_1 + b_1 t, \quad 1 \le t \le k, \\ &\hat{y}_2 = a_2 + b_2 t, \quad 2 \le t \le k+1, \\ &\dots\ \dots\ \dots\ \dots \\ &\hat{y}_{n-k+1} = a_{n-k+1} + b_{n-k+1} t, \quad n-k+1 \le t \le n. \end{aligned} \tag{3.53}$$

Наступний крок – оцінка за допомогою методу найменших квадратів, параметрів функції на кожному сегменті. В загальному випадку сегментних функцій буде: $n-k+1$.

З кожного рівняння сегментного тренду визначаються теоретичні величини прогнозованої змінної, підставивши значення t до відповідних функцій тренду. Кожній одиниці часу відповідають $p(t)$ теоретичних величин:

$$p(t) = \begin{cases} t, & t = 1, 2, ..., k-1, \\ k, & t = k, k+1, ..., n-k+1, \\ n-t+1, & t = n-k+2, n-k+3, ..., n. \end{cases} \tag{3.54}$$

Остаточне згладжування (вирівнювання) часового ряду y_t отримуємо, обчисливши середнє арифметичне на основі теоретичних величин ($\overline{y}_t$). Обчисливши пункти $(t, \overline{y}_t)$ отримаємо ковзний тренд.

З метою екстраполяції моделі на майбутнє обчислюють прирости ковзного тренду:

$$w_{t+1} = \overline{y}_{t+1} - \overline{y}_t, \quad t = 1, 2, ..., n-1. \tag{3.55}$$

В процесі прогнозування велике значення має новіша інформація, ніж старіша. Ця умова реалізується на основі гармонічних ваг. Вагові коефіцієнти належать відрізку $[0,1]$, їхня сума дорівнює 1, вони визначаються за формулою:

$$C_{t+1}^n = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{t}\frac{1}{n-i}, \qquad t = 1, 2, ..., n-1. \tag{3.56}$$

Гармонічні ваги служать для опису середніх приростів:

$$\overline{w} = \sum_{t=1}^{n-1} C_{t+1}^n w_{t+1}, \tag{3.57}$$

та стандартного відхилення приростів:

$$S_w = \sqrt{\sum_{t=1}^{n-1} C_{t+1}^n \left(w_{t+1} - \overline{w}\right)^2}. \tag{3.58}$$

Точковий прогноз на проміжок/момент/$T\ (t>n)$ визначається згідно з формулою:

$$y_T^* = \overline{y}_n + (T-n)\,\overline{w}. \tag{3.59}$$

При ймовірності прогнозу $1-\alpha$ побудуємо межу прогнозу:

$$P\left\{y_T^* - r_\tau S_w < y_T < y_T^* + r_\tau S_w\right\} = 1-\alpha\,, \tag{3.60}$$

де $\tau = T - n$.

Коефіцієнт r_τ обчислюється наступним чином:

$$r_\tau = u\sum_{t=1}^{T-n} C_{n-i+1}^{n} \,. \qquad (3.61)$$

Якщо випадкова складова моделі має нормальний розподіл, а вибірка є великою, то величину u отримуємо з таблиць нормального розподілу згідно умови: $F(u) = 1 - \frac{\alpha}{2}$.

Якщо випадкова складова моделі має нормальний розподіл, а вибірка є малою, то величину u отримуємо з таблиць розподілу $t-$Стюдента, для рівня надійності α та $n-2$ ступені свободи.

У випадку, коли випадковий складник не розподілений нормально, або ми не маємо жодних відомостей про розподіл, то:

$$u = \sqrt{\frac{1}{1-(1-\alpha)}} = \sqrt{\frac{1}{\alpha}}. \qquad (3.62)$$

Якщо ймовірність прогнозу дорівнює $1-\alpha = 0,95$, то:

$$u = \sqrt{\frac{1}{1-0,95}} = 4,472.$$

Якщо розподіл випадкової складової є нормальним, то величина u є меншою, ніж та, яку дістаємо за формулою (3.62). Отже, отримуємо точнішу межу прогнозу.

Використання ковзного тренду і гармонічних ваг для побудови прогнозу проілюструємо прикладом.

Приклад 3.10. Величина споживання молока на одну особу в 1995–2009 роках (в літрах): 352; 359; 379; 400; 408; 410; 413; 412; 400; 392; 411; 436; 440; 440; 440. За сталу згладжування вибираємо $k = 5$.

Можемо оцінити $n-k+1 = 15-5+1 = 11$ лінійних моделей тренду. Оцінимо параметри лінійного тренду, для першого сегменту маємо:

t	y_t	t^2	ty_t
1	352	1	352
2	359	4	718
3	379	9	1137
4	400	16	1600
5	408	25	2040
15	1898	55	5847

Застосуємо метод найменших квадратів, одержимо:

$$\begin{cases} 5a_0 + 15a_1 = 1898, \\ 15a_0 + 55a_1 = 5847. \end{cases}$$

Розв'язавши систему рівнянь, дістанемо: $\hat{y}_1 = 333,7 + 15,3t,$ для $t = 1,2,3,4,5.$

Лінійний тренд для другого сегменту $(t = 2,3,4,5,6)$ визначають наступним чином:

t	y_t	t^2	ty_t
2	359	4	718
3	379	9	1137
4	400	16	1600
5	408	25	2040
6	410	36	2460
20	1956	90	7955

$$\begin{cases} 5a_0 + 20a_1 = 1956, \\ 20a_0 + 90a_1 = 7955. \end{cases}$$

Отримаємо: $\hat{y}_2 = 338,8 + 13,1t$ для $t = 2,3,4,5,6$.

Наступні результати, мають такий вигляд. $\hat{y}_3 = 363 + 7,8t$ для $t = 3,4,5,6,7$,

$\hat{y}_4 = 391,6 + 2,9t$ для $t = 4,5,6,7,8$, $\hat{y}_5 = 418,1 - 1,3t$ для $t = 5,6,7,8,9$,

$\hat{y}_6 = 444,2 - 4,9t$ для $t = 6,7,8,9,10$, $\hat{y}_7 = 427,6 - 2,4t$ для $t = 7,8,9,10,11$,

$\hat{y}_8 = 343 + 6,7t$ для $t = 8,9,10,11,12$, $\hat{y}_9 = 279,6 + 12,4t$ для $t = 9,10,11,12,13$,

$\hat{y}_{10} = 274 + 12,5t$ для $t = 10,11,12,13,14$, $\hat{y}_{11} = 353,7 + 6,1t$ для $t = 11,12,13,14,15$.

Для кожного t $(t = 1,2,3,...,15)$ визначаємо згладжені величини прогнозованої змінної. Спочатку встановлюємо величину t для відповідних функцій тренду. Остаточне згладжування часового ряду y_t отримуємо, обчисливши середнє арифметичне для кожного рядка табл. 3.7.

Таблиця 3.7.

Обчислення згладжених величин часового ряду

t	$\hat{y}_1$	$\hat{y}_2$	$\hat{y}_3$	$\hat{y}_4$	$\hat{y}_5$	$\hat{y}_6$	$\hat{y}_7$	$\hat{y}_8$	$\hat{y}_9$	$\hat{y}_{10}$	$\hat{y}_{11}$	$\overline{y}_t$
1	349,0											349,0
2	364,3	365,0										364,7
3	379,6	378,1	386,4									381,4
4	394,9	391,2	394,2	403,2								395,9
5	410,2	404,3	402,0	406,1	411,6							406,8
6		417,4	409,8	409,0	410,3	414,8						412,3
7			417,6	411,9	409,0	409,9	410,8					411,8
8				414,8	407,7	405,0	408,4	396,6				406,5
9					406,4	400,1	406,0	403,3	391,2			401,4
10						395,2	403,6	410,0	403,6	399,0		402,3
11							401,2	416,7	416,0	411,5	420,8	413,2
12								423,4	428,4	424,0	426,9	425,7
13									440,8	436,5	433,0	436,8
14										449,0	439,1	444,1
15											445,2	445,2

Розрахунки, які стосуються середнього приросту ковзного тренду та стандартного відхилення приростів, наведені в таблиці 3.8.

Таблиця 3.8.

Обчислення середнього приросту і стандартного відхилення приростів

t	$\overline{y}_t$	w_{t+1}	C_{t+1}^n	$C_{t+1}^n w_{t+1}$	$w_{t+1} - \overline{w}$	$C_{t+1}^n \left(w_{t+1} - \overline{w}\right)^2$
1	349,0	-	-	-	-	-
2	364,7	15,7	0,005	0,0785	10,2816	0,5286
3	381,4	16,7	0,011	0,1837	11,2816	1,4000
4	395,9	14,5	0,017	0,2465	9,0816	1,4021
5	406,8	10,9	0,023	0,2507	10,4816	2,5269
6	412,3	5,5	0,031	0,1705	0,0816	0,0002
7	411,8	-0,5	0,038	-0,0190	-5,9184	1,3310
8	406,5	-5,3	0 047	-0,2491	-10,7184	5,3996
9	401,4	-5,1	0,057	-0,2907	-10,5184	6,3063
10	402,3	0,9	0,069	0,0621	-4,5184	1,4087
11	413,2	10,9	0 083	0,9047	5,4816	2,4940
12	425,7	12,5	0,101	1,2625	7,0816	5,0651
13	436,8	11,1	0,125	1,3875	5,6816	4,0351
14	444,1	7,3	0 161	1,1753	1,8816	0,5700
15	445,2	1,1	0,232	0,2552	-4,3184	4,3265
				$\overline{w} = 5,4184$		36,7941

Гармонічні ваги реалізують постулат, що інформація з дальших проміжків має менший вплив, ніж актуальна. За формулою (3.56) обчислимо вагові коефіцієнти:

$$C_{1+1}^{15} = \frac{1}{15-1}\frac{1}{15-1} = 0,005,\;\; C_{2+1}^{15} = C_3^{15} = \frac{1}{15-1}\left(\frac{1}{15-1} + \frac{1}{15-2}\right) = 0,011,$$

$$C_4^{15} = \frac{1}{15-1}\left(\frac{1}{15-1} + \frac{1}{15-2} + \frac{1}{15-3}\right) = 0,017,\;\; C_5^{15} = \frac{1}{15-1}\left(\frac{1}{15-1} + \frac{1}{15-2} + \frac{1}{15-3} + \frac{1}{15-3}\right) = 0,023.$$

Аналогічно обчислюємо наступні значення:

$C_6^{15} = 0,031,\; C_7^{15} = 0,038,\; C_8^{15} = 0,047,\; C_9^{15} = 0,057,\; C_{10}^{15} = 0,069,$

$C_{11}^{15} = 0,083,\; C_{12}^{15} = 0,101,\; C_{13}^{15} = 0,125,\; C_{14}^{15} = 0,161,\; C_{15}^{15} = 0,230.$

Стандартне відхилення приростів ковзного тренду дорівнює (3.58):

$S_w = \sqrt{36,7941} = 6,0658$ літрів.

Точковий прогноз на проміжок $T = 17$ зробимо за допомогою формули (3.59):

$y_{17}^{*} = 445,2 + 5,4184(17-15) = 456$ літрів

З метою визначення межі прогнозу вважаємо, що ймовірність прогнозу $1-\alpha = 0,95$ та випадкова складова розподілена за нормальним законом. Використовуючи формулу (3.60), отримуємо:

$$456 - 2,16(0,232 + 0,161)6,0658 < y_T < 456 + 2,16(0,232 + 0,161)6,0658,\;\; 451 < y_T < 461.$$

У випадку побудови прогнозу за допомогою ковзного тренду з гармонічними вагами є можливість обчислити середню похибку прогнозу ex post:

$$S_w^{*} = \sqrt{\sum w_{t+1}\left(y_t - \hat{y}_t\right)^2},$$

де $\hat{y}_t$ – величина ковзного тренду в момент t.

В нашому випадку маємо:

t	y_t	$\hat{y}_t$	w_{t+1}	$\left(y_t - \hat{y}_t\right)^2$	$w_{t+1}\left(y_t - \hat{y}_t\right)^2$
1	352	349,0	-	-	-
2	359	364,7	15,7	32,49	510,093
3	379	381,4	16,7	5,76	96,192
4	400	395,9	14,5	16,81	243,745
5	408	406,8	10,9	1,44	15,696
6	410	412,3	5,5	5,29	29,095
7	413	411,8	-0,5	1,44	-0,720
8	412	406,5	-5,3	30,25	-160,325
9	400	401,4	-5,1	1,96	9,996
10	392	402,3	0,9	106,09	95,481
11	411	413,2	10,9	4,84	52,756
12	436	425,7	12,5	106,09	1326,125
13	440	436,8	11,1	10,24	113,664
14	440	444,1	7,3	16,81	122,713
15	440	445,2	1,1	27,04	29,744
					2484,255

Величина середньої похибки точкового прогнозу дорівнює:

$S_w = \sqrt{2484,255} = 49,84$ літрів.

Відносна середня похибка прогнозу дорівнює:

$$V_{S_w^{*}} = \frac{S_w^{*}}{y_T^{*}} \cdot 100 = \frac{49,84}{456} \cdot 100 = 10,9\%.$$

З обчислень видно, що похибка прогнозу досить велика, прийняття чи відхилення прогнозу залежить від рішення людини, що робить прогноз.

Середня похибка прогнозу ex ante граничного прогнозу має вигляд:

$$S_w^* = \frac{\text{âåðõí ÿ ì åæà ï ðî ãí î çó-í èæí ÿ ì åæà ï ðî ãí î çó}}{2} = \frac{461-451}{2} = 5 \text{ літрів.}$$

Відносна середня похибка межового прогнозу дорівнює:

$$V_{S_w^*} = \frac{5}{456} \cdot 100 = 3,3\%.$$

Середнє приростів $\overline{w}$, необхідне для визначення прогнозу, знайдемо за формулою:

$$\overline{w} = \frac{1}{n-1}\sum_{t=1}^{n-1}\frac{\overline{y}_n - \overline{y}_t}{n-t} = \frac{1}{n-1}\left(\frac{\overline{y}_n - \overline{y}_1}{n-1} + \frac{\overline{y}_n - \overline{y}_2}{n-2} + \ldots + \frac{\overline{y}_n - \overline{y}_{n-1}}{1}\right).$$

Результати необхідних обчислень наведено в таблиці 3.9.

Таблиця 3.9.

Обчислення середнього приросту ковзного тренду

t	$\overline{y}_n$	$\overline{y}_n - \overline{y}_t$	$\dfrac{\overline{y}_n - \overline{y}_t}{n-t}$
1	349,0	96,2	6,8714
2	364,7	80,5	6,1923
3	381,4	63,8	5,3167
4	395,9	49,3	4,4818
5	406,8	38,4	3,8400
6	412,3	32,9	3,6556
7	411,8	33,4	4,1750
8	406,5	38,7	5,5286
9	401,4	43,8	7,3000
10	402,3	42,9	8,5800
11	413,2	32,0	8,0000
12	425,7	19,5	6,5000
13	436,8	8,4	4,2000
14	444,1	1,1	1,1000
15	445,2	-	-
			75,7414

Для $n-1 = 15-1 = 14$ маємо $\overline{w} = \dfrac{75,7414}{14} = 5,4101$.

При обчисленні $\overline{w}$ за допомогою гармонічних ваг C_{t+1}^n отримали $\overline{w} = 5,4184$. Невелика різниця між попередньою та середніми величинами середнього приросту ковзного тренду випливає з заокруглень.

Задачі для самостійного розв’язування

1. Протягом двох останніх років квартальне використання миючих засобів в готелі X сформувалося наступним чином (в кг): 107; 100; 102; 99; 107; 103; 97; 104. Використовуючи наївні методи, зробити прогноз використання миючих засобів у I кварталі наступного року. Оцінити точність прогнозу, якщо реальний рівень використання в третьому кварталі наступного дорівнював 100 кг. Обчислити відносну похибку прогнозу.
2. Спостережені за 12 місяців значення змінної Y дорівнюють: 120; 124; 122; 123; 125; 128; 129; 127; 129; 128; 130; 132. Використовуючи 4-місячне зважене ковзне середнє (перші три вагові коефіцієнти дорівнюють відповідно 0,1; 0,2; 0,3), визначити прогноз змінної Y на 13-тий місяць. Чи вигаслі прогнози є недооціненими або переоціненими?
3. Продаж автомобільних вогнегасників (в тис. шт.) протягом 12 місяців мав такий вигляд: 56; 54; 66; 50; 68; 66; 70; 60; 66; 70; 54; 58. Використовуючи просте ковзне середнє $(k=3)$, побудувати вигаслі прогнози, визначити їхню середнюквадратичну похибку. Зробити прогноз для $T=n+1$.
4. Продаж мультимедійних програм, для вивчення англійської мови (в шт.) за 12 місяців (від січня до грудня) виглядав так: 64; 63; 64; 65; 63; 64; 65; 62; 62; 63; 62; 64. Застосувавши п’ятиелементне просте ковзне середнє, визначити вигаслі прогнози (заокругливши до цілих чисел) продажу мультимедійних програм від жовтня до грудня аналізованого року.
5. Споживання продукту X (в кг. на особу) за 12 років репрезентовано рядом: 8; 7,6; 7,7; 8; 7,7; 8,3; 8,6; 7,8; 7,8; 7,7; 8,2; 8,4. Визначити сподівану величину споживання продукту в році $T=n+1$, при застосуванні 3-елементного зваженого ковзного середнього ($w_1=0,1$; $w_2=0,2$).
6. Різниці між вигаслими прогнозами на основі 5-елементного простого ковзного середнього і реальними величинами мають вигляд: -1; -2; -2; 1; 3; -3; 2; 2; 0. Обчислити середню квадратичну похибку.
7. Продаж виробу X (в тис. шт.) в кварталах протягом трьох років дорівнював: 41; 38; 39; 40; 39; 42; 38; 39; 41; 42; 40; 39. Визначити рівень продажу виробу X в I кварталі четвертого року, при використанні 3-елементного та 5-елементного простого ковзного середнього.
8. На основі даних: 8; 7,6; 7,7; 8; 7,7; 8,3; 8,6; 7,8; 7,8; 7,7; 8,2; 8,4. Використавши зважене ковзне середнє ($k=3$; $w_1=0,1; w_2=0,7$), побудувати вигаслі прогнози та властивий прогноз для $T=n+1$. Обчислити відносну похибку прогнозу для $T=n+1$.
9. На підставі числової інформації (в тис. грн.): 37,56; 36,02; 36,16; 36,99; 39,99; 46,83; 55,82; 68,22; 78,58; 83,3. побудувати вигаслі прогнози та властивий прогноз для $T=n+1$, використовуючи зважене ковзне середнє ($k=2$; $w_1=0,1; w_2=0,9$).
10. Продаж виробу X (в тис. шт.) на протязі 12 років дорівнював: 8; 7,6; 7,7; 8; 7,7; 8,3; 8,6; 7,8; 7,8; 7,7; 8,2; 8,4. Якого рівня продажу потрібно сподіватися в 13-му році, якщо при прогнозуванні використаємо 3-елементне зважене ковзне середнє $(w_1=0,1; w_2=0,2)$? Визначити середню квадратичну похибку для вигаслих прогнозів.
11. Інвестиційні витрати фірм споживчої галузі за останніх 10 років мають вигляд: 37,56; 36,02; 36,16; 36,99; 39,99; 46,83; 55,82; 68,22; 78,58; 83,3. Використавши метод простого ковзного середнього $(k=2)$, побудувати прогноз на проміжок $T=n+1$.
12. На основі динамічного ряду (в грн.): 99,9; 100,2; 100,4; 99,9; 100,2; 100,3; 100,2; 100 використавши метод простого ковзного середнього $(k=3)$ та зважене ковзне середнє $\left(w_1=1/6;\ w_2=1/3;\ w_3=1/2\right)$, побудувати прогноз для $T=n+1$.

13. Використовуючи метод показникового вирівнювання Броуна, побудувати точковий прогноз для $T=n+1$, взявши $\alpha=0,6$ та $y_1^*=\frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3)$. Емпіричні величини прогнозованої змінної дорівнюють: 41; 38; 39; 40; 39; 42; 38; 39; 41; 42; 40; 39.
14. Дані, які стосуються продажу комп'ютерів (в тис. шт.) мають такий вигляд: 57; 58; 60; 54; 56; 53; 55; 59; 62; 57; 50; 48; 52; 55; 58; 61. За допомогою показникового вирівнювання Броуна, побудувати прогноз продажу, взявши $\alpha=0,6$ та $\alpha=0,8$. Яка з величин α дає точніший прогноз?
15. Квартальний випуск дерев'яних вікон протягом трьох років (в шт.) сформувався наступним чином: 36; 33; 34; 35; 34; 37; 33; 34; 36; 37; 35; 34. Визначити при $\alpha=0,9$ прогноз випуску вікон на I квартал наступного року. Обчислити відносну середню похибку прогнозу. За y_1^* взяти середнє арифметичне трьох початкових елементів часового ряду.
16. Експорт фірми Z за останні 17 місяців (в тис. грн.) становив: 51,2; 52; 52,3; 53,4; 52; 55,2; 55,6; 61,4; 62,3; 62,8; 64,3; 74,9; 78; 89,2; 92,1; 95,3; 95,5. Зробити прогноз величини експорту на два наступні місяці. Використати модель Хольта з такими припущеннями: $\alpha=0,908$; $\beta=0,248$; $F_1=51,2$; $S_1=52-51,2=0,8$.
17. Прогнозист, на основі даних за 10 днів, визначив, при використанні моделі Хольта, сподівану величину попиту на товар X (в тонах) і отримав: $\alpha=0,1$; $\beta=0,5$; $F_{10}=5$; $S_{10}=0,2$. Визначити прогноз і середню відносну похибку прогнозу на 11-й день.
18. На основі інформації, яка стосується величини продажу (в тис. грн.) в супермаркеті за останні 15 місяців: 15,4; 18,9; 19,3; 20,5; 21,4; 18; 19; 17,5; 19,6; 15,3; 16,4; 17,2; 18,5; 19,6; 21,7. Використовуючи ковзний тренд $(k=7)$ та метод гармонічних ваг, побудувати граничний прогноз для $T=18$ при ймовірності $1-\alpha=0,95$. Вважаючи, що випадкова складова має нормальний розподіл, обчислити відносну середню похибку прогнозу.
19. Задані рівняння лінійних сегментних трендів, які визначені 5-елементного хронологічного ряду: $\hat{y}_{1t}=2t+3$ при $t=1,2,3$; $\hat{y}_{2t}=2t+1$ при $t=2,3,4$; $\hat{y}_{3t}=3t-1$ при $t=3,4,5$. Методом гармонічних ваг визначити точковий прогноз для $T=n+2$.
20. Витрати на виріб X на протязі 9-ти років (в тис. грн.) мали такий вигляд: 20; 18,5; 13; 9,5; 9; 8,8; 8,8; 9; 8,5. Побудований за допомогою показникового вирівнювання Броуна вигаслий прогноз (для $t\geq 3$) записаний наступним чином: 13,6; 10,2; 9,5; 9,1; 9,2; 9,4; 8,9. Який можна зробити висновок?
21. Для 7-елементного часового ряду побудовано три сегментні тренди вигляду: $\hat{y}_{1t}=2t+2$ при $t=1,2,3,4,5$; $\hat{y}_{2t}=2t-2$ при $t=2,3,4,5,6$; $\hat{y}_{3t}=2t+2$ при $t=3,4,5,6,7$. За умови, що прирости згладжених величин ряду мають нормальний розподіл, побудувати при ймовірності $1-\alpha=0,9$ граничний прогноз для $T=9$.
22. На основі 7 спостережень, взятих у формі хронологічного ряду, складено рівняння ковзних трендів: $\hat{y}_{1t}=2t+2$ для $t=1,2,3,4,5$; $\hat{y}_{2t}=2t-2$ для $t=2,3,4,5,6$; $\hat{y}_{3t}=2t+2$ для $t=3,4,5,6,7$. При ймовірності 0,95 побудувати граничний прогноз для $T=9$. Відомо, що $S_w=10,49$; гармонічні ваги дорівнюють: 0,028; 0,061; 0,103; 0,158; 0,242; 0,408; а випадкова складова має нормальний розподіл.
23. Задано рівняння ковзного тренду $\hat{y}_t=0,23t+42,5$ з сталою згладжування $k=3$. Сегментні тренди визначено на основі квартальних даних за 2007–2009 роки. Відомо, що середній приріст величини прогнозованої змінної дорівнює 0,304, а варіація приростів–3,8416. При ймовірності 0,95 ($t_\alpha=2,228$), побудувати граничний прогноз змінної Y для III кварталу 2010 року. Чи побудований прогноз є допустимим?

24. Витрати на випуск одиниці деякого виробу за 9 років (в грн.) дорівнювали: 20; 18,5; 13; 9,5; 9; 8,8; 8,8; 9; 8,5. Побудований вигаслий прогноз (для $t \geq 3$) має вигляд: 13,6; 10,2; 9,5; 9,1; 9,2; 9,4; 8,9. Оцінити на скільки еластичність прогнозованих даних відрізняється від реальних змін прогнозованої змінної.
25. Квартальний випуск виробу X за 6 років (в тис. шт.) мав вигляд: 500; 350; 250; 400; 450; 350; 200; 300; 350; 200; 150; 400; 550; 350; 250; 550; 550; 400; 350; 600; 750; 500; 400; 650. Використовуючи модель Вінтерса, побудувати прогноз випуску виробу X на чотири квартали 7-го року, при умові, що: $\alpha = 0,5$; $\beta = 0,95$; $\gamma = 0,2$. Початкові величини дорівнюють: $F_5 = 450$; $S_5 = -50$; $C_1 = 1,33$; $C_2 = 0,93$; $C_3 = 0,67$; $C_4 = 1,07$.
26. В таблиці наведено квартальну інформацію, яка стосується продажу молока (в літрах) за 6 років:

Роки / Квартали	1	2	3	4	5	6
I	820	770	670	870	870	1070
II	670	670	520	670	720	820
III	570	520	470	570	670	720
IV	720	620	720	870	920	970

Використавши мультиплікативну модель Вінтерса, визначити величину продажу молока для чотирьох кварталів 7-го року. Обчислити середню відносну похибку прогнозу на I квартал 7-го року. В обчисленнях використати: $\alpha = 0,1$; $\beta = 0,9$; $\gamma = 0,4$. За початкові величини взяти $F_5 = 450$; $S_5 = -50$; $C_1 = 1,33$; $C_2 = 0,93$; $C_3 = 0,67$; $C_4 = 1,07$.

27. Для 10-елементного часового ряду визначено ковзний тренд і отримано наступні результати: $\overline{w} = 2$, $\hat{y}_n = 10$. Сформулювати точкові прогнози на наступні три проміжки.

Відповіді

1. 104 кг. $V = 5,47\%$
2. $y_{13}^* = 130,3$ тис. шт.
3. $y_{13}^* = 60,7$ тис. шт.; $s^* = 7,77$ тис. шт.
4. $y_X^* = y_{XI}^* = y_{XII}^* = 63$
5. $y_{n+1}^* = 8,1$ кг/особу (просте ковзне середнє), $y_{n+1}^* = 8,29$ кг/особу (зважене ковзне середнє)
6. $s^* = 2$ шт.
7. $y^* = 40,33$ тис. шт. (3-елементне просте ковзне середнє), $y^* = 40,2$ тис. шт. (5-елементне просте ковзне середнє),
8. 4,8%
9. $y_{n+1}^* = 82,83$
10. $y_{13}^* = 8,293$ тис. шт.; $s^* = 0,402$ тис. шт.
11. $y_{n+1}^* = 80,94$ тис. грн.
12. $y_{13}^* = 100,17$ грн. та $y_{13}^* = 100,2$ грн.
13. $y_{13}^* = 39,61$
14. Обидві моделі однаково ефективні
15. $y_{13}^* = 34,12$ шт. $V = 5,8\%$
16. $y_{18}^* = 99,4$ тис. грн.; $y_{19}^* = 102,9$ тис. грн.
17. $y_{11}^* = 5,2$ тони $V = 2,9\%$
18. $20,688 < Y_T < 22,120$; $V_T' = 3,3\%$
19. $y_7^* = 19,962$
20. $I_1^2 = 0,0024051$
21. $y_9^* = 5,2$
22. $36,652 < Y_T < 38,712$
23. $43,565 < Y_T < 48,727$; $V_T' = 5,6\%$
24. $I_2^2 = 0,0000529$
25. $y_{25}^* = 788,85$ тис. шт., $y_{26}^* = 527,41$ тис. шт., $y_{27}^* = 388,1$ тис. шт., $y_{28}^* = 653,44$ тис. шт.
26. $y_{25}^* = 1152$ літрів, $y_{26}^* = 898$ літрів, $y_{27}^* = 772$ літрів, $y_{28}^* = 1067$ літрів.
27. $y_1^* = 12$; $y_2^* = 14$; $y_3^* = 16$.