Федак І.В.

XIV – XVIII Івано-Франківські обласні турніри юних математиків

Івано-Франківськ

2025

ББК: 22.1
УДК: 51(075.8)
Ф 57

Федак І. В. XIV – XVIII Івано-Франківські обласні турніри юних математиків. – Івано-Франківськ, 2025. – 108с.

Друкується за рішенням вченої ради факультету математики та інформатики Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника

Рецензенти:

Заторський Р. А. – доктор фізико-математичних наук, професор кафедри математики та інформатики і методики навчання.

Казмерчук А. І. – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри диференціальних рівнянь і прикладної математики.

Зібрані задачі XIV – XVIII Івано-Франківських обласних турнірів з математики 2018 – 2020, 2023 та 2024 років проведення та їх розв'язання чи окремі рекомендації до них.

Для учнів 9 – 11 класів ліцеїв, студентів, учителів математики, керівників математичних гуртків та всіх любителів нестандартних математичних задач.

Передмова

Всеукраїнські турніри юних математиків проводяться з 1998 року. Згодом їм було присвоєно ім’я Михайла Йосиповича Ядренка, який стояв у витоків як математичних олімпіад, так і турнірів в Україні, багато років був головою журі таких змагань. Автору цього посібника також пощастило бути членом журі шістнадцяти таких турнірів та головою журі математичних олімпіад на них.

Особливістю турнірів юних математиків є те, що учням потрібно не лише розв’язати задачі (можливо, з допомогою вчителів), а й запропонувати узагальнення до них і, що головне, відстояти їх у науковій дискусії з опонентом та рецензентом.

В Івано-Франківській області такі турніри проводяться з 2005 року. Для підготовки до кожного з них формуються варіанти із 20 задач, з якими учнів ознайомлюють за 3 – 4 місяці до проведення турніру. В основному такі варіанти базуються на завданнях, запропонованих МОН для проведення заключних етапів турніру. Виняток склали тільки завдання першого та вісімнадцятого турнірів, підготовлені повністю місцевими членами журі.

Крім того, оскільки у 2020 році обласний турнір був проведений, а Всеукраїнський відбувся аж у 2023 році, то з метою підготовки до нього завдання XVII обласного турніру частково повторюють задачі XVI турніру. Також у 2021-му та 2022-му роках не проводились ні обласний, ні Всеукраїнський турніри.

Матеріали перших тринадцяти обласних турнірів опубліковані автором цього посібника, незмінним головою журі таких турнірів, у книзі «Тринадцять турнірів юних математиків Прикарпаття (2005 – 2017 рр.)», яка є у вільному доступі в інтернеті.

Надіюсь, що разом з нею і нова книжка про Івано-Франківські обласні турніри з математики буде цікавою всім любителям нестандартних математичних задач..

XIV Івано-Франківський обласний турнір юних математиків 2018 року.

1. Робот придумав шифр для запису слів. Він замінив деякі букви алфавіту одноцифровими чи двоцифровими числами (різні букви – різними числами), використовуючи лише цифри 1, 2, 3. Спочатку він зашифрував себе: РОБОТ=3112131233. Потім записав своїм шифром слово МАТЕМАТИКА. Але дуже здивувався, що шифри слів КРОКОДИЛ та БЕГЕМОТ виявилися однаковими. Запишіть цим шифром слово АЛГЕБРА.

Розв'язання. Оскільки у шифрі слова РОБОТ 10 цифр, то коди всіх його букв є двоцифровими і визначаються однозначно. Запишемо у таблиці усі 12 можливих кодів і ті букви, коди яких ми уже знаємо:

1=	11=	21=	31=Р
2=	12=О	22=	32=
3=	13=Б	23=	33=Т

Оскільки шифри слів КРОКОДИЛ та БЕГЕМОТ співпали і Б=13, то К=1. Звідси маємо КРОКО…=13112112… . Читаючи це як початок слова БЕГЕМОТ і враховуючи, що Е не дорівнює 1, отримаємо Е=11. Тоді Г=2, бо інакше не виходить друге Е. Отже, М=2*. Крім того, маємо кінець цього слова …ОТ=…1233. Звідси випливає, що Л=3, И=23, а Д=*1. Оскільки Р=31, Е=11, то маємо єдину можливість Д=21, звідки М=22, і ми розкрили майже весь шифр:

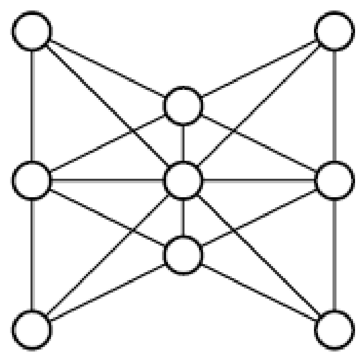
1=К	11=Е	21=Д	31=Р
2=Г	12=О	22=М	32=
3=Л	13=Б	23=И	33=Т

Враховуючи, що робот зумів записати слово МАТЕМАТИКА, отримуємо останній код А=32. Тому АЛГЕБРА=323211133132.

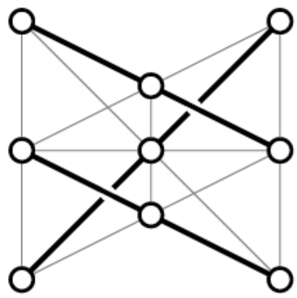
2. Оргкомітет XIV обласного турніру юних математиків відзначив переможця турніру в особистій першості зачарованою коробкою з чотирнадцятьма цукерками. Але, як тільки той забирав з коробки деяку кількість цукерок і клав їх до себе в сумку, частина цукерок із сумки (принаймні одна, можливо, й усі) миттєво поверталася назад у коробку. При цьому кожного разу кількості таких цукерок (чи покладених у сумку, чи повернутих з неї у коробку) мали були різними. Якщо ж на якомусь кроці дотриматися останньої вимоги не вдавалося, то коробка таємниче зникала разом з цукерками, які на цей момент у ній залишалися. Яка найбільша кількість цукерок може залишитися у сумці переможця турніру на момент зникнення чарівної коробки?

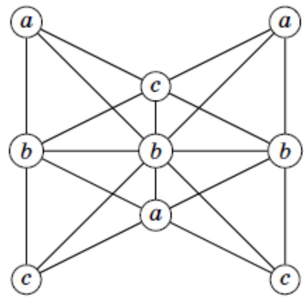
Розв'язання. Спочатку доведемо, що усі 14 цукерок залишитися у сумці переможця турніру не могли. Припустивши протилежне, отримаємо, що останнє переміщення цукерок відбулося з чарівної коробки у його сумку. У такому разі усіх переміщень була непарна кількість. Тому принаймні одна з можливостей від 1 до 14 ще не була реалізована і саме така кількість цукерок повернеться назад у чарівну коробку. Проте залишити собі 13 цукерок переможцеві вдасться. Наведемо приклад послідовності його дій, в якій ходи чарівної коробки у відповідь будуть вимушеними. Після кожного ходу у дужках записані кількості цукерок у сумці переможця: +2 (2) – 1(1) + 3 (4) – 4 (0) + 6 (6) – 5 (1) + 7 (8) – 8 (0) + 10 (10) – 9 (1) + 11 (12) – 12 (0) + 13 (13). Залишився лише хід 14, але він неможливий. Тому чарівна коробка зникає.

3. На столі лежать 9 яблук, утворюючи при цьому 10 рядів по три яблука як на малюнку справа. Юному математику відомо, що у дев'ятьох рядах сумарні маси трьох яблук однакові, а в одному – така маса яблук є більшою. У нього є терези з двома шальками без гир. Він може взяти зі столу довільну парну кількість яблук і, скориставшись терезами, повернути їх на стіл, кожне на своє попереднє місце. За яку найменшу кількість зважувань він гарантовано зуміє виявити ряд, в якому сумарна маса трьох яблук є найбільшою?



Розв’язання. Жодних зважувань не потрібно. Перед тим як користуватися терезами для зважування, трохи поміркуємо, виділивши три ряди яблук як на малюнку нижче зліва. У них сумарна маса усіх яблук дорівнює масі усіх дев’яти яблук, виставлених на столі. Таку ж сумарну масу отримаємо і у трьох вертикальних рядах. Оскільки принаймні 5 із цих шести мас у рядах по три яблука за умовою задачі є рівними, то й у шостому ряді сумарна маса трьох яблук є такою ж. Аналогічно доводимо, що й у інших похилих рядах сумарні маси яблук є однаковими. Тому відмінною від інших може бути лише сумарна маса яблук горизонтального ряду. Що така ситуація можлива, показано на малюнку нижче справа, де $2b \neq a + c$:





4. Площину розбили на одиничні квадратики й у кожен квадратик записали по одному натуральному числу. Після цього для кожного квадратика порахували різницю: добуток чисел, записаних у сусідніх з ним квадратиках зліва та справа, мінус добуток чисел, записаних у сусідніх з ним квадратиках знизу та зверху. Чи могло статися так, що усі такі різниці дорівнюють 11 ?

Розв’язання. Могло. Розглянемо узагальнену послідовність Фібоначчі, яка задається рівностями: $f_1 = a,\ f_2 = b$ та $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$ для всіх цілих n і скористаємося для неї узагальненою формулою Каталана: $f_{n-k} f_{n+k} - f_n^2 = (-1)^{n-k+1} \cdot \mu F_k^2$, де $\mu = a^2 + ab - b^2$ – характеристика такої послідовності, F_k – числа Фібоначчі.

Якщо a та b – натуральні числа такі, що $a \geq b$, то безпосередньо з означення випливає, що всі елементи узагальненої послідовності Фібоначчі будуть цілими числами, а її характеристика μ –

натуральним числом. Крім того, $f_n > 0$ для всіх натуральних n, бо суми натуральних чисел є натуральними числами.

Якщо $n = 2m+1, m \in \mathrm{Z}, k = 2$, то для всіх цілих чисел m отримаємо рівність $f_{2m-1} f_{2m+3} - f_{2m+1}^2 = \mu$. (*)

Доведемо, що всі елементи f_n з довільними непарними цілими індексами є натуральними числами.

Для натуральних n ми це вже отримали вище. Припустимо тепер, що $f_n \le 0$ для деякого від'ємного непарного цілого n. З усіх таких n виберемо найбільший і підставимо $f_n = f_{2m-1}$ у рівність (*). Оскільки усі інші елементи, які входять у цю рівність є додатними, то отримуємо суперечність – від'ємна її ліва частина не може дорівнювати додатному числу μ.

Заповнимо клітинки площини стовпчиками з однакових елементів цієї послідовності з непарними індексами. Три горизонтальні рядки такого заповнення наведено у таблиці нижче:

$\dots$	f_{-5}	f_{-3}	f_{-1}	f_1	f_3	f_5	$\dots$
$\dots$	f_{-5}	f_{-3}	f_{-1}	f_1	f_3	f_5	$\dots$
$\dots$	f_{-5}	f_{-3}	f_{-1}	f_1	f_3	f_5	$\dots$

Зі сказаного вище випливає, що всі елементи такої таблиці є натуральними числами, і для кожної клітинки різниця добутку чисел, записаних у сусідніх з нею квадратиках зліва та справа, мінус добуток чисел, записаних у сусідніх з нею квадратиках знизу та зверху, дорівнює μ. Для $a = 3,\ b = 2$ всі такі різниці дорівнюють 11.

Зауважимо, що у рядках цієї таблиці її елементи зв'язані між собою співвідношенням $a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n,\ n \in \mathrm{Z}$. Така рівність не є випадковою і не залежить від вибору $f_1 = a,\ f_2 = b$, бо

$$f_{2m-1} + f_{2m+3} = \left(f_{2m+1} - f_{2m}\right) + \left(f_{2m+1} + f_{2m+2}\right) = 2f_{2m+1} + \left(f_{2m+2} - f_{2m}\right) = 3f_{2m+1},\ m \in \mathrm{Z}.$$

5. Чи існують 2018 попарно різних натуральних чисел таких, що сума обернених до них чисел дорівнює 1.

Розв'язання. Існують. Наведемо два приклади наборів таких чисел, скориставшись рівністю $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$. Оскільки також $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{2^{2015}}+\frac{1}{2^{2015}}$, то достатньо останній доданок замінити на $\frac{1}{2\cdot 2^{2015}}+\frac{1}{3\cdot 2^{2015}}+\frac{1}{6\cdot 2^{2015}}$.

Можна було міркувати ще й так:

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{36}+\frac{1}{72}.$$

Тому, збільшуючи на кожному кроці кількість доданків на два, таку процедуру вдасться продовжити до отримання 2018 доданків.

6. Крива на площині у деякій декартовій системі координат є графіком функції $y=\sin x$. Чи може вона в іншій декартовій системі координат бути графіком функції $y=\sin^2 x$?

Розв'язання. Може. Підходить, наприклад, система координат, центр якої у старій системі має координати $\left(-\frac{\pi}{2};-1\right)$, а одиниця масштабу на кожній осі нової системи координат вдвічі більша у порівнянні зі старою. Справді, оскільки

$$\sin^2 t=\frac{1-\cos 2t}{2}=\frac{1+\sin\left(2t-\frac{\pi}{2}\right)}{2},$$

то при $x=2t-\frac{\pi}{2}$, $z=\frac{y+1}{2}$, тобто $y=2z-1$, отримуємо $z=\sin^2 t$.

7. Числа Фібоначчі визначаються рівностями: $F_1=F_2=1$, $F_{n+2}=F_n+F_{n+1}$, $n\geq 1$. Для кожного натурального числа n розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} F_n x+F_{n+1}y^2=F_{n+2}z^3, \\ F_n y+F_{n+1}z^2=F_{n+2}x^3, \\ F_n z+F_{n+1}x^2=F_{n+2}y^3. \end{cases}$$

Розв'язання. Будемо розв'язувати загальнішу циклічну систему рівнянь:

$$\begin{cases} mx + ky^2 = (m+k)z^3, \\ my + kz^2 = (m+k)x^3, \\ mz + kx^2 = (m+k)y^3, \end{cases} \quad m \in \mathrm{N},\, k \in \mathrm{N}.$$

Покладаючи $z = y = x$, отримаємо три її розв'язки:

$$(0,0,0),\ (1,1,1) \text{ та } \left(-\frac{m}{m+k}, -\frac{m}{m+k}, -\frac{m}{m+k}\right).$$

Далі доводимо, що інших розв'язків така система рівнянь не має.

Покладаючи, наприклад, $z = 0$, з третього рівняння отримуємо, що $y \ge 0$. Тоді, внаслідок другого рівняння, також $x \ge 0$. І, нарешті, з першого рівняння, маємо $y = x = 0$.

Нехай тепер $z > 0$. Тоді з третього рівняння отримуємо, що також $y > 0$. А з другого рівняння маємо, що й $x > 0$.

Припускаючи при цьому, що $z = \max\{x, y, z\}$, з першого рівняння системи отримуємо, що $z \le 1$, бо інакше $mx + ky^2 < mz^3 + kz^3 = (m+k)z^3$.

Так само для $z = \min\{x, y, z\}$ з першого рівняння системи отримуємо, що $z \ge 1$, бо інакше $mx + ky^2 > mz^3 + kz^3 = (m+k)z^3$.

Таким чином, $\max\{x, y, z\} = \min\{x, y, z\} = 1$, тобто $z = y = x = 1$.

І, нарешті, розглянемо випадок, коли $z < 0$. Тоді з першого рівняння отримуємо, що $x < 0$, а з другого рівняння маємо $y < 0$. Здійснивши при цьому заміну $x = -\frac{mu}{m+k}$, $y = -\frac{mv}{m+k}$, $z = -\frac{mw}{m+k}$, після очевидних спрощень отримаємо наступну, також циклічну систему рівнянь:

$$\begin{cases} mw^3 + kv^2 = (m+k)u, \\ mu^3 + kw^2 = (m+k)v, \\ mv^3 + ku^2 = (m+k)w, \end{cases} \quad m \in \mathrm{N},\, k \in \mathrm{N}.$$

Доведемо, що для додатних u, v, w вона має лише розв'язок $u = v = w = 1$.

Серед трьох таких чисел u, v, w принаймні два будуть не менші за 1, або принаймні два – не більші за 1. Вибираючи, у кожному з випадків у ролі таких двох, наприклад, числа v та w, з першого рівняння отримуємо, що також $u \geq 1$ чи $u \leq 1$ відповідно.

Далі, якщо кожне з чисел u, v, w не менше за 1, то покладаючи, наприклад, $u = \min\{u, v, w\}$, з першого рівняння отримаємо спочатку $u = 1$, а далі $v = w = 1$, бо інакше $mw^3 + kv^2 \geq mu^3 + ku^2 > (m+k)u$.

Якщо ж кожне з таких чисел не більше за 1, то аналогічно для $u = \max\{u, v, w\}$, з першого рівняння отримаємо спочатку $u = 1$, а далі $v = w = 1$, бо інакше $mw^3 + kv^2 \leq mu^3 + ku^2 < (m+k)u$.

Отже, відсутність інших розв'язків досліджуваної нами системи доведена.

Повертаючись до системи рівнянь з умови задачі, звідси як окремий випадок матимемо такі три її розв'язки:

$$(0,0,0),\ (1,1,1) \text{ та } \left(-\frac{F_n}{F_{n+2}}, -\frac{F_n}{F_{n+2}}, -\frac{F_n}{F_{n+2}}\right),\ n \in \mathrm{N}.$$

8. Нехай a, b, c – довільні додатні числа; (x, y, z) – деяка їх перестановка. Дослідіть, яких значень може набувати вираз

$$A = \frac{x}{a+b} + \frac{y}{b+c} + \frac{z}{c+a}.$$

Розв'язання. Зрозуміло, що для кожної перестановки

$$A > \frac{x}{a+b+c} + \frac{y}{b+c+a} + \frac{z}{c+a+b} = 1.$$

Розглянемо тепер 6 можливих різних перестановок:

$A_1 = \dfrac{c}{a+b} + \dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} \geq \dfrac{3}{2}$ – відома нерівність, тому $E(A_1) = \left[\dfrac{3}{2}; +\infty\right)$.

$$A_2 = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} > 1,\ A_3 = \frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a} > 1,\ A_2 + A_3 = 3.$$

Звідси отримаємо, що $E(A_2) = E(A_3) = (1; 2)$.

$$A_4 = \frac{c}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{a}{c+a},\ A_5 = \frac{b}{a+b} + \frac{a}{b+c} + \frac{c}{c+a},\ A_6 = \frac{a}{a+b} + \frac{c}{b+c} + \frac{b}{c+a}.$$

При цьому $E(A_4) = E(A_5) = E(A_6) = (1; +\infty)$.

Для обґрунтування записаних вище рівностей для множин значень необхідно у певному порядку замість a, b, c підставляти вирази t^2, t, 1 тощо і скористатися неперервністю отриманих виразів як функцій змінної t. Пропонуємо читачам зробити це самостійно.

9. У верхньому рядку та лівому стовпці таблиці 2018×2018 проставлено одиниці. Число у будь-якій іншій комірці таблиці дорівнює сумі усіх чисел, які стоять водночас ліворуч і вище від цієї комірки. Знайдіть усі комірки, числа в яких націло діляться і на свого сусіда зверху, і на свого сусіда ліворуч.

Розв'язання. З умови задачі випливає, що така таблиця симетрична відносно діагоналі, яка виходить з її лівого верхнього кута.

Доведемо, що для всіх $i,\ j$, більших за 1, справджується рівність

$$a_{i+1,j}=a_{i,j}+a_{i+1,j-1}.$$

Тут відлік i проводимо зліва направо, а відлік j – зверху вниз.

Наглядно доведення цієї рівності проілюстровано у наведеній нижче таблиці. Елемент $a_{i+1,j}$ в ній дорівнює сумі елементів у клітинках, позначених всіма чотирма кольорами. Елемент $a_{i,j}$ дорівнює сумі елементів у клітинках позначених синім і цегловим кольором, а елемент $a_{i+1,j-1}$ дорівнює сумі елементів у клітинках позначених синім і жовтим кольором. Оскільки, крім того, елемент $a_{i,j-1}$ у зеленій клітинці дорівнює сумі елементів у синіх клітинках, то звідси отримуємо рівність $a_{i+1,j}=a_{i,j}+a_{i+1,j-1}$.

$a_{1,1}$	$a_{2,1}$	…	$a_{i-1,1}$	$a_{i,1}$	…	…
$a_{1,2}$	$a_{2,2}$	…	$a_{i-1,2}$	$a_{i,2}$	…	…
…	…	…	…	…	…	…
$a_{1,j-1}$	$a_{2,j-1}$	…	$a_{i-1,j-1}$	$a_{i,j-1}$	$a_{i+1,j-1}$	…
1…	…	…	…	$a_{i,j}$	$a_{i+1,j}$	…
…	…	…	…	…	…	…

З міркувань симетрії для всіх $i,\ j$, більших за 1, правильною буде і рівність $a_{i,j+1}=a_{i,j}+a_{i-1,j+1}$.

Звідси випливає, що кожен елемент таблиці, крім елемента $a_{2,2}$ та елементів першого рядка зверху та першого стовпчика зліва, дорівнює сумі свого сусіда зверху та свого сусіда ліворуч. Тому може ділитися на обох із них, якщо вони рівні між собою.

Отже, всіма шуканими елементами є: $a_{2,3}$, $a_{3,2}$ та $a_{n,n}$, $n \geq 2$.

Фрагмент такої таблиці виглядає так:

1	1	1	1	1	1	…
1	**1**	**2**	3	4	5	…
1	**2**	**4**	7	11	16	…
1	3	7	**14**	25	41	…
1	4	11	25	**50**	91	…
1	5	16	41	91	**182**	…
…	**…**	**…**	**…**	**…**	**…**	**…**

У його межах наведені жирним і підкреслені елементи, які задовольняють умову задачі.

10. Алісі якось наснилися 2018 гномів, що стояли по колу. Кожен із гномів мав спочатку деяку парну (можливо, нульову) кількість цукерок. Далі сталося таке: усі гноми одночасно поділили свої цукерки на дві рівних частини та віддали одну частину своєму сусідові зліва, а іншу – своєму сусідові справа. У підсумку у деякого гнома опинилася 1 цукерка, у наступного за годинниковою стрілкою – 2 цукерки, у наступного – 3 цукерки і т. д.; в останнього (того, що стояв перед першим гномом) стало, відповідно, 2018 цукерок. Чи могло б таке статися насправді?

Розв'язання. Не могло. З умови задачі випливає, що у кожного гнома, а отже і загальна кількість цукерок, парна. Але сума чисел від 1 до 2018 є непарною.

Зауважимо, що до аналогічного висновку прийдемо і за довільної кількості гномів $n = 4k + 1$ та $n = 4k + 2$, де $k \in \mathrm{N}$.

Але, наприклад, для $n = 3$ описана тут ситуація можлива, якщо спочатку у першого гнома були 4 цукерки, у другого – 2 цукерки, а у третього – не було жодної.

Доведемо, що інших таких n немає. Справді, для $n = 4$ перший та третій гноми отримають порівну цукерок як від другого, так від четвертого гнома. Отже, у них не може виявитися одна та три цукерки відповідно.

Нехай тепер $n \geq 5$. Припустимо, що спочатку у гномів за годинниковою стрілкою було $2x_1$, $2x_2$, …, $2x_n$ цукерок відповідно. З умови задачі отримуємо таку систему рівнянь:

$$x_n + x_2 = 1,\ x_1 + x_3 = 2,\ x_2 + x_4 = 3,\ x_3 + x_5 = 4,\ ...,x_{n-2} + x_n = n-1,\ x_{n-1} + x_1 = n$$

Оскільки за умовою задачі виходить, що гном з номером n подарував на 2 цукерки більше, ніж гном з номером $n-4$, тобто $x_n \geq 2$. Але тоді з першого рівняння виходить, що $x_2 < 0$, чого бути не може.

11. Знайдіть усі натуральні числа p та q, які задовольняють рівняння $\operatorname{arctg}\frac{1}{p} + \operatorname{arctg}\frac{1}{q} = \frac{\pi}{4}$.

Розв'язання. Зрозуміло, що числа p та q повинні бути більші за 1. Тоді кожен доданок зліва виявиться меншим за $\frac{\pi}{4}$. Отже, їх сума буде меншою за $\frac{\pi}{2}$. Тому, застосувавши формулу тангенса суми $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$ до лівої частини рівності, приходимо до рівняння $\frac{p+q}{pq-1} = 1$, рівносильного початковому, яке можна переписати у вигляді $(p-1)(q-1) = 2$. Звідси знаходимо такі пари натуральних розв'язків: $p = 2,\ q = 3$ та $p = 3,\ q = 2$.

Як узагальнення, знайдемо також усі натуральні числа p, q, r, що задовольняють рівняння $\operatorname{arctg}\frac{1}{p} + \operatorname{arctg}\frac{1}{q} + \operatorname{arctg}\frac{1}{r} = \frac{\pi}{4}$.

Знову ж таки, числа p, q, r більші за 1. При цьому сума трьох доданків у лівій частині рівності буде меншою за $\frac{3\pi}{4}$. Тому з рівності тангенсів обох частин буде випливати і задана в умові рівність. Враховуючи, що вище ми вже отримали $\operatorname{arctg}\frac{1}{p} + \operatorname{arctg}\frac{1}{q} = \operatorname{arctg}\frac{p+q}{pq-1}$, за формулою тангенса суми приходимо до рівняння $\frac{p+q}{pq-1} + \frac{1}{r} = 1 - \frac{p+q}{pq-1} \cdot \frac{1}{r}$, яке можна переписати у вигляді

$$pqr+1=(pq+qr+rq)+(p+q+r).$$

Поділимо обидві його частини на pqr. У результаті отримаємо

$$1+\frac{1}{pqr}=\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\right)+\left(\frac{1}{pq}+\frac{1}{qr}+\frac{1}{rq}\right).$$

Не зменшуючи загальності, можна вважати, що $p\geq q\geq r$. Якщо при цьому $r\geq 4$, то ліва частина останньої рівності більша за 1, а права – не перевищує $\frac{3}{4}+\frac{3}{16}=\frac{15}{16}$, і така рівність не справджується.

Якщо ж $r=3$, то приходимо до рівняння, яке можна записати у вигляді $(p-2)(q-2)=5$. Для $p\geq q\geq r$ з нього маємо розв’язок $p=7,\ q=r=3$.

А якщо $r=2$, то отримуємо рівняння $(p-3)(q-3)=10$, з якого для $p\geq q\geq r$ знаходимо розв’язки: $p=13,\ q=4,\ r=2$ та $p=8,\ q=5,\ r=2$.

Інші шукані трійки (p,q,r) дістаємо, розглянувши всі можливі перестановки в отриманих вище розв’язках.

12. Нехай $x=2p$, $x+1=3q$, $x+n=2r$, $x+n+1=3s$, де $p,\ q,\ r,\ s$ – деякі прості числа, n – натуральне число. Доведіть, що $n\geq 12$.

Розв’язання. Зауважимо, що $x=5$ не задовольняє умову задачі, бо 5 – непарне число. Тому $q\geq 3$, а разом з ним і більші за нього прості числа p, r, s – також непарні. Оскільки при цьому $n=2(r-p)\,\vdots\,4$ та $n=3(s-q)\,\vdots\,3$, то $n\,\vdots\,12$. Отже, $n\geq 12$.

Цікаво, що значення $n=12$ може досягатися, наприклад, для простих чисел $p=15643,\ q=10429,\ r=15649,\ s=10433$. При цьому $x=31286$.

13. Доведіть, що $C_{30}^{20}+C_{31}^{20}+C_{32}^{20}+\ldots+C_{49}^{20}+C_{50}^{20}>2^{39}$, де $C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Розв’язання. Доведемо навіть сильнішу нерівність:

$$C_{30}^{20}+C_{31}^{20}+C_{32}^{20}+\ldots+C_{49}^{20}+C_{50}^{20}>C_{30}^{20}=\frac{50\cdot 49\cdot\ldots\cdot 31}{20!}=$$

$$=\frac{50\cdot 49\cdot 48\cdot 47\cdot 46}{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16}\cdot\frac{45\cdot 44\cdot 43\cdot 42\cdot 41}{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11}\cdot\frac{40\cdot 39\cdot 38\cdot 37}{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}\cdot\frac{36}{6}\cdot\frac{35}{5}\cdot\frac{34}{4}\cdot\frac{33}{3}\cdot\frac{32}{2}\cdot\frac{31}{1}>$$

$$>\left(\frac{5}{2}\right)^5\cdot 3^5\cdot 4^4\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 11\cdot 16\cdot 31=5^5\cdot 3^6\cdot 7\cdot 11\cdot 31\cdot 2^{11}=$$

$$=5^5\cdot 3^6\cdot 7\cdot 11\cdot 31\cdot 2^{11}=5437884375\cdot 2^{11}>4294967296\cdot 2^{11}=2^{32}\cdot 2^{11}=2^{43}>2^{39}.$$

14. Назвемо дві трійки $A=(a_1, a_2, a_3)$ та $B=(b_1, b_2, b_3)$ натуральних чисел еквівалентними, якщо $a_1+a_2+a_3=b_1+b_2+b_3$ та $a_1a_2a_3=b_1b_2b_3$. При цьому трійки, які відрізняються лише порядком розташування елементів, будемо вважати за одну й ту ж трійку. Доведіть, що існує нескінченна кількість пар різних еквівалентних трійок A та B таких, що жодна пара не утворюється з іншої пари множенням усіх шести елементів на одне й те ж число.

Розв'язання. Такими для кожного натурального $n\geq 2$ є, наприклад, трійки чисел: $A=(1, n(2n-1), n(2n-1))$, $B=\left(n, n, (2n-1)^2\right)$. При цьому маємо $a_1+a_2+a_3=b_1+b_2+b_3=4n^2-2n+1$, $a_1a_2a_3=b_1b_2b_3=n^2(2n-1)^2$.

Як узагальнення, знайдемо також усі натуральні числа M, для яких існують дві еквівалентні трійки натуральних чисел $a_1\leq a_2\leq a_3$ та $b_1\leq b_2\leq b_3$ такі, що $\max\{a_3,b_3\}=M$.

Покажемо, що шуканими є всі складені числа $M\geq 8$.

Насамперед доведемо, що дві еквівалентні трійки не можуть мати спільного елемента. Справді, припустивши протилежне, для пар інших двох елементів отримаємо рівність як їх сум (нехай b), так і їх добутків (нехай c), що з врахуванням теореми Вієта, вказує, що кожна така пара є розв'язком одного і того ж квадратного рівняння $x^2-bx+c=0$. А це означає, що ми маємо справу з однією, а не з двома різними трійками.

Доведемо тепер, що число M складене. Справді, якщо $M=p$ – просте число, то добуток чисел в одній з трійок ділиться на p. Тому рівний йому добуток чисел другої трійки також ділиться на p. А оскільки p – найбільше із цих шести чисел, то для цього число p повинно належати до другої трійки, що суперечить доведеному вище.

Далі, з врахуванням доведеного, простим перебором пар трійок вигляду $A=(2, 2, x)$, $B=(y, z, 4)$ та $A=(2, 3, x)$, $B=(y, z, 6)$ переконуємося, що для $M=4$ та $M=6$ шуканих різних еквівалентних трійок не існує.

Справді, для першої пари трійок з рівностей $x = y + z$ та $x = yz$ знаходимо $x = 4$, $y = z = 2$. А для другої пари – з рівностей $x = y + z + 1$ та $x = yz$ маємо $x = 6$, $y = 2$, $z = 3$.

Для інших складених $M \geq 8$ відповідно отримуємо:

1) Для $M = (2m+1)(2n+1)$, $m, n \in \mathrm{N}$, підходять такі пари трійок:

$$A = \big(1,\ (n+1)(2m+1),\ (m+1)(2n+1)\big),\ B = \big(m+1,\ n+1,\ (2m+1)(2n+1)\big).$$

Рівність добутків тут очевидна, а для кожної із сум отримуємо значення $4mn + 3(m+n+1)$.

2) Для $M = 2(2n+3)$, $n \in \mathrm{N}$, підходять такі пари трійок:

$$A = \big(2,\ 2n+3,\ 3(n+2)\big),\ B = \big(3,\ n+2,\ 2(2n+3)\big).$$

Рівність добутків також очевидна, а кожна сума дорівнює $5n+11$.

3) Для $M = 4(n+1)$, $n \in \mathrm{N}$, підходять такі пари трійок:

$$A = \big(2,\ 2(n+2),\ 3(n+1)\big),\ B = \big(3,\ n+2,\ 4(n+1)\big).$$

Тут так само рівність добутків сумніву не підлягає, а для кожної із сум маємо значення $5n+9$.

15. Знайдіть кількість непорожніх підмножин множини {1, 2,…, 1009} із сумою елементів, що ділиться на 2018.

Розв'язання. Розв'яжемо загальнішу задачу. Нехай p – довільне просте число вигляду $p = 4n+1$. Як відомо, кількість всіх підмножин множини $A = \{1,\ 2, \ldots,\ p\}$, включаючи і порожню множину, дорівнює 2^p.

Розіб'ємо всі ці множини на пари так, щоб множини кожної пари між собою не перетиналися, а їх об'єднання давало всю множину A. Таких пар буде 2^{p-1}. Виключимо з розгляду пару $(A, \varnothing)$, бо за умовою задачі потрібно розглядати лише не порожні підмножини, а сума всіх елементів множини A дорівнює $(4n+1)(2n+1)$ і не ділиться на $2p$.

Решту $2^{p-1} - 1$ пар згрупуємо таким чином, щоб у кожній групі з номером k, $1 \leq k \leq 2n$, були лише пари множин, які містять k та $p-k$ елементів відповідно.

Такі групи міститимуть $C_p^k = \frac{p(p-1)...(p-k+1)}{k!}$ пар. А оскільки p – просте число, то у кожній групі кількість елементів ділитиметься на p.

Розіб'ємо тепер кожну групу на підгрупи по p пар так, щоб у кожній підгрупі суми чисел множин, що складаються з k елементів, давали різні остачі при діленні на p. Це вдасться зробити, бо у всій групі таких сум з різними остачами порівну.

Тоді у кожній підгрупі виявиться рівно одна пара, суми елементів в обох множинах якої діляться на p. Але, оскільки сума елементів множини A при діленні на $2p$ дає остачу p, то лише в одній з цих множин сума елементів ділитиметься на $2p$.

Таким чином, для всіх простих чисел $p=4n+1$ кількість непорожніх підмножин множини $\{1, 2, \ldots, p\}$ із сумою елементів, що ділиться на $2p$, дорівнює $\frac{2^{p-1}-1}{p}$. У тому числі і для простого числа $p=1009=4\cdot 252+1$.

Зауважимо, що отримана відповідь залишиться справедливою і для простих чисел вигляду $p=4n-1$.

Відзначимо також, що внаслідок малої теореми Ферма число $\frac{2^{p-1}-1}{p}$ є натуральним для всіх простих чисел $p\geq 3$.

16. У прямокутній шоколадній плитці розміру 20×18 є дольки двох кольорів – білі й чорні. Ліва верхня долька завжди чорна, права нижня – завжди біла; кольори інших дольок задаються довільно. Ганнуся й Петрик почергово відрізають від шоколадки шматки Г-п

одібним ножем і з'їдають їх. Кожним ходом гравець забирає певну дольку і все з умовного прямокутника, в якому ця долька знаходиться у лівому верхньому куті. Починає гру Ганнуся. Програє той, хто перший з'їсть чорну дольку. Доведіть, що при довільному розфарбуванні шоколадки Ганнуся має виграшну стратегію.

Розв'язання. Фрагменти плитки, які утворюються після ходів Ганнусі та Петрика, будемо називати позиціями. Позицію, при якій гравець своїм ходом вимушений відрізати хоч одну чорну дольку, вважатимемо кінцевою. Зрозуміло, що вона є програшною для цього гравця, тобто кожен зроблений ним хід з такої позиції приводить до його поразки. Оскільки спочатку права нижня долька завжди є білою, яку можна вирізати, не програвши зразу, то стартова позиція (вся шоколадка) не є кінцевою.

Якщо в кінцеву позицію з деякої позиції можна за один хід попасти хоч одним способом відрізання, то природно таку позицію вважати виграшною.

Надалі програшними будемо називати позиції, з яких довільне допустиме відрізання веде у виграшну (для суперника) позицію. Відповідно, позиції, з яких хоч одним способом відрізання можна попасти у програшну (для суперника) позицію, вважатимемо виграшними.

Припустимо тепер, що для деякого розфарбування шоколадки розміру m на n у Ганнусі немає виграшної стратегії. Це означає, що така стартова позиція є для неї програшною, і будь-який зроблений нею хід приводить до виграшної для Петрика позиції. Зрозуміло, що він негайно цим скористається і залишить своїм ходом наступну програшну для неї позицію. Оскільки розміри шоколадки обмежені, то у такий спосіб Ганнуся, кожного разу займаючи програшні позиції, на деякому кроці опиниться у кінцевій позиції і програє.

Але уявімо собі, що гра одночасно відбувається на двох однакових шоколадках, причому на обох гру розпочинає Ганнуся.

Як же ж тепер діяти Ганнусі? Першим своїм ходом на одній з шоколадок вона вирізає праву нижню клітинку. Оскільки за припущенням виникла виграшна для Петрика позиція, то він матиме змогу зробити хід, який не приводить зразу до його поразки, і йому не залишається іншого вибору, як утворити програшну для Ганнусі позицію. Інакше своїм наступним ходом уже Ганнуся матиме змогу утворити програшну для Петрика позицію. Але при цьому у вирізаний ним умовний прямокутник обов'язково попаде уже вирізана права нижня клітинка.

Тоді Ганнуся на другій шоколадці першим своїм ходом утворює позицію, яка виникла на першій шоколадці після першого ходу Петрика. Дочекавшись його відповіді, вона повторює цей хід Петрика на першій шоколадці. Знову чекає на його відповідь і повторює хід Петрика на другій шоколадці, і так далі.

Зрозуміло, що за скінченне число таких повторень ходів гра на обох шоколадках закінчиться, причому на одній переможе Петрик, а на іншій Ганнуся. А це суперечить тому, що стартова позиція була для Ганнусі програшною. Таким чином, при довільних розмірах шоколадки й довільному її розфарбуванні Ганнуся має виграшну стратегію.

17. Під час шахової партії залишилося п'ять фігур (або пішаків) на клітинках a1, b1, b5, c2, c4. Ганнуся подивилася на шахівницю і запитала, чий хід. Отримавши відповідь, вона змогла визначити останній хід кожного із суперників. Наведіть приклад такої позиції.

Розв'язання. Потреба Ганнусі запитати, чий хід, означає, що в шуканій позиції мають бути можливими як хід білих, так і хід чорних.

Відповідь, яку отримає Ганнуся, має бути саме такою, за якої їй вдасться визначити останній хід кожного із суперників. Інакше Ганнуся зразу могла б сказати: якщо зараз хід білих, то останні ходи суперників були такими, а якщо хід чорних – то такими.

Доведемо тепер, що умови задачі задовольняє наступне розташування фігур на шаховій дошці: білі – Кр a1; чорні – Кр c2, С b1, К b5, К c4.

Якщо у відповідь на своє питання Ганнуся почула, що зараз *хід чорних*, то перед цим білий король не міг попасти на поле a1 з поля b2, бо воно зараз знаходиться під двома ударами чорних фігур.

Не міг він попасти на поле a1 і з поля b1, бо воно перед цим було або під ударом чорного короля, або його уже займав чорний слон.

Тому попасти на поле a1 білий король міг лише з поля a2 за єдиної умови, що перед цим чорні зробили хід b2- b1С.

А як же перед цим білий король опинився на полі a2? Він не міг попасти туди з поля a3, бо воно зараз перебуває під двома ударами чорних коней. Не міг попасти туди і з поля b3, бо воно межує з позицією чорного короля, яка в дальших діях не змінилася.

Тому передостанній хід білих міг бути лише таким: Кр a1-a2. А це означає, що перед останнім ходом білих на полі a1 не знаходилася жодна чорна фігура.

Таким чином, за такої відповіді останній хід чорних був b2-b1С, на що білі відповіли ходом Кр a2-a1.

Припустимо тепер, що у відповідь на своє питання Ганнуся почула би, що зараз *хід білих*, тобто на дошці виникла патова ситуація. Але у такому разі їй не вдалось би однозначно відновити останні ходи кожного із суперників.

Справді, якщо, наприклад, перед своїм останнім ходом король чорних знаходився би на полі c1, то позиція на дошці могла б виникнути таким чином:

1. …, b2-b1C
2. Кр a2-a1, Кр c1-c2.

Але вона могла би скластися на шаховій дошці і в такий спосіб:

1. …, Т b3-b1+
2. Ф h1:b1+, С a2:b1.

А це суперечить умові задачі, що Ганнуся змогла однозначно визначити останні ходи кожного із суперників. Отже, для виконання умов задачі підходить тільки перша з наведених відповідей – зараз хід чорних.

18. Нехай K, T – точки дотику вписаного та зовнівписаного кіл до сторони BC трикутника ABC, M – середина сторони BC. Побудуйте циркулем і лінійкою трикутник ABC за променями AK та AT (на них точки K, T не відмічено) та точкою M.

Розв'язання. 1. _Аналіз_. Насамперед зауважимо, що $AB \neq AC$, інакше точки K та T співпадали би. Надалі для конкретності будемо вважати, що $AB = c > AC = b$. Тоді $AK < AT$.

З рівності відрізків дотичних до кола отримаємо рівності: $BK = p - b$, $CK = p - c$, $BT = p - c$, $CT = p - b$. Звідси випливає, що точки K та T симетричні відносно точки M – середини сторони BC, причому $KT = c - b$.

Розглянемо тепер систему координат з центром у точці M і, враховуючи сказане вище, задамо координати деяких точок у цій системі: $A(s;q)$, $s > 0$, $q > 0$, $T(-d;0)$, $K(d;0)$, $d > 0$, $B(-x;0)$, $C(x;0)$, $x > 0$.

Внаслідок рівності $KT = c - b$ отримуємо рівняння

$$\sqrt{(s+x)^2 + q^2} - \sqrt{(s-x)^2 + q^2} = 2d .$$

Помноживши обидві його частини на вираз, спряжений до лівої частини, отримаємо також

$$\sqrt{(s+x)^2 + q^2} + \sqrt{(s-x)^2 + q^2} = \frac{2sx}{d} .$$

Додавши останні два рівняння, отримаємо

$$\sqrt{(s+x)^2 + q^2} = d + \frac{sx}{d} .$$

Звідси після піднесення до квадрату і очевидних спрощень приходимо до рівності:

$$\left(s^2-d^2\right)x^2=\left(s^2+q^2-d^2\right)d^2. \qquad (*)$$

Якщо $s^2-d^2>0$, то звідси отримуємо

$$x=\sqrt{\frac{s^2+q^2-d^2}{s^2-d^2}}\cdot d=\sqrt{\frac{AM^2-MK^2}{AQ^2-MK^2}}\cdot d,$$

де Q – проекція точки A на вісь ординат.

Проаналізуємо тепер інші випадки:

Якщо $s^2-d^2=0$, то з рівності (*) отримуємо, що $d=0$, тобто точки K та T співпадають, чого бути не може.

Якщо ж $s^2-d^2<0$, то у випадку $s^2+q^2-d^2>0$ рівність (*) неможлива, а у разі $s^2+q^2-d^2<0$ з неї отримуємо, що $x<d$, тобто вписане коло дотикається до сторони BC на її продовженні, чого також бути не може.

Таким чином, побудова трикутника ABC можлива лише за умови, що $s^2-d^2>0$, і точка M лежить між заданими променями.

2. <u>*Побудова*</u>.

Продовжуємо відрізок AM до точки D такої, що $AM=MD$, і проводимо через точку D прямі, паралельні до заданих променів. Далі з’єднуємо отримані точки перетину з цими променями між собою.

Якщо вважати, що не вказано, котрий саме з променів є променем AK, а котрий – променем AT, то ближчу з цих точок до вершини A позначаємо через K, а іншу – через T.

Якщо ж за умовою задачі вважати, що нам відомо, котрий з променів є променем AK, а котрий – променем AT, то у разі, коли ближча до вершини A точка попала на промінь AT, робимо висновок, що така побудова неможлива. Ця ситуація виникне у випадку, коли точка M знаходиться між променем AK і бісектрисою кута, утвореного цими променями.

Якщо ж вона попала на промінь AK, тобто точка M знаходиться між променем AT і бісектрисою кута, утвореного цими променями, то, як і вище позначаємо її через K, а іншу – через T.

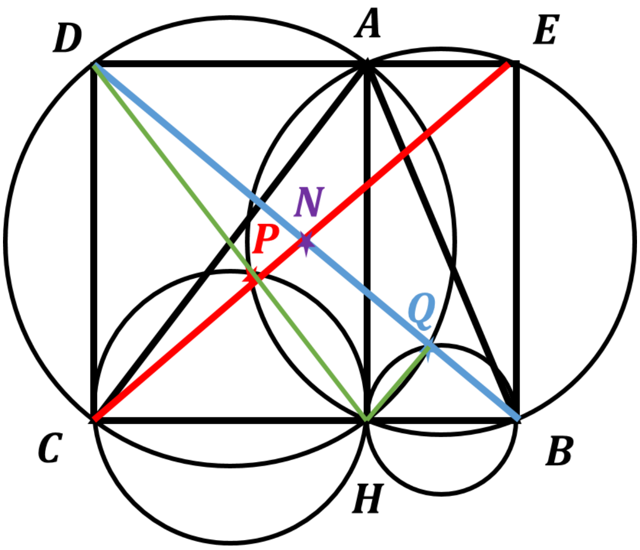
Далі проводимо пряму KT та перпендикуляр до неї у точці K. Якщо точки A та T не лежать по різні сторони від цього перпендикуляра, то такого трикутника не існує. В іншому разі продовжуємо побудову.

Для цього проводимо перпендикуляр до прямої KT у точці M і відкладаємо на ньому у тій же півплощині, в якій знаходиться точка A, точки R та S такі, що $KR = AQ$, $KS = AM$. Тоді з рівності (*) за теоремою Піфагора отримуємо, що $x = \frac{MS}{MR} \cdot MK$. Звідси випливає, що SC паралельна до RK.

Таким чином, у даному випадку вершину C на прямій KT ми зможемо побудувати. А вершину B отримуємо симетрією точки C відносно точки M.

19. У гострокутному трикутнику ABC провели висоту AH. На відрізках AB, BH, CH та AC як на діаметрах побудовані кола $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ та ω_4 відповідно. Окрім точки H, кола ω_1 та ω_3 перетинаються у точці P, а кола ω_2 та ω_4 – у точці Q. Прямі BQ та CP перетинаються у точці N. Доведіть, що ця точка лежить на середній лінії трикутника ABC, яка паралельна до BC.

Розв'язання. Побудуємо прямокутник $BCDE$ з висотою $CD = AH$ і з'єднаємо точку Q з його вершинами B та D і точкою H.



Оскільки точка Q лежить на колах ω_2 та ω_4, причому діаметром останнього, крім AC, є також DH, то кути BQH та DQH є прямими. Звідси випливає, що точка Q лежить на діагоналі BD прямокутника $BCDE$.

Аналогічно доводимо, що точка P лежить на діагоналі CE цього прямокутника. Тому точка N є точкою перетину його діагоналей.

Враховуючи також, що відрізок CE знаходиться лівіше діагоналі HE прямокутника $BHAE$, яка проходить через середину AB, а відрізок BD – правіше діагоналі HD прямокутника $CHAD$, яка проходить через середину AC, звідси отримуємо, що точка N лежить на середній лінії трикутника ABC, що паралельна до BC.

20. Дослідіть, чи для кожного скінченного набору точок у просторі існує незамкнена ламана без самоперетинів з вершинами в усіх цих точках (і тільки у них).

Розв'язання. Для кожної пари заданих точок розглянемо площину, перпендикулярну до прямої, яка проходить через ці дві точки. Зрозуміло, що таких площин буде скінченна кількість. Тому знайдеться пряма, яка не є паралельною до жодної з них. Розглянемо перпендикулярні проекції заданих точок на цю пряму. Вони утворюють впорядковану послідовність точок. Отже, залишається тільки послідовно з'єднати задані точки у тому порядку, в якому виявилися їхні проекції.

XV Івано-Франківський обласний турнір юних математиків 2019 року.

1. На участь у турнірі юних математиків подали заявки 16 команд. Оргкомітет планує провести турнір у чотири тури так, щоб у кожному турі у чотирьох групах змагалися по чотири команди, причому жодні дві команди-учасниці не зустрічалися між собою більше одного разу. Чи вдасться йому реалізувати свій задум?

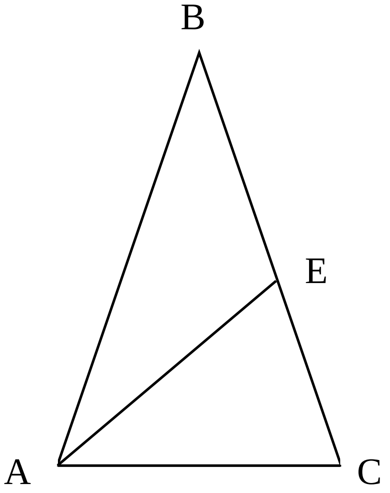
Розв'язання. Дотримуючись цих вимог, турнір можна провести не лише в чотири, а й у п'ять турів, причому кожна команда зустрінеться з кожною іншою рівно один раз. Занумеруємо команди-учасниці числами по рядках, як 1 – 4, 5 – 8, 9 – 12, 13 – 16 відповідно і сформуємо групи по турах таким чином:

I тур - (1, 2, 3, 4), (5, 6, 7, 8), (9, 10, 11, 12), (13, 14, 15, 16);
II тур - (1, 5, 9, 13), (2, 6, 10, 14), (3, 7, 11, 15), (4, 8, 12, 16);
III тур - (2, 7, 12, 13), (4, 5, 10,15), (1, 8, 11, 14), (3, 6, 9, 16);
IV тур - (4, 7, 9, 14), (1, 6, 12, 15), (2, 5, 11, 16), (3, 8, 10, 13);
V тур - (2, 8, 9, 15), (3, 5, 12, 14), (4, 6, 11, 13), (1, 7, 10, 16).

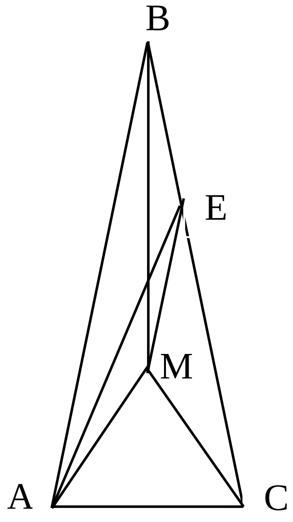
Відзначимо, що у перших двох турах ми формували групи по рядках та стовпчиках таблиці 4×4, а наступні три тури – за принципом так званих латинських квадратів, вибираючи різними способами в одну групу команди з різних рядків та різних стовпчиків такої таблиці.

2. Миколка стверджує, що може вибрати на бічній стороні BC рівнобедреного трикутника ABC, всі кути якого вимірюються цілим числом градусів, таку точку E, що $BE = AC$, і кут AEC також вимірюється цілим числом градусів. Доведіть, що такий трикутник існує. Чи знайдеться не подібний до нього рівнобедрений трикутник з такими ж властивостями?

Розв'язання. Трикутників з такими властивостями є принаймні два. Перший з них – трикутник з кутами 72°, 72° та 36°. Якщо AE – бісектриса цього трикутника (див. мал.1), то $BE = AE = AC$, і $\angle AEC = 72^\circ$.



Мал. 1



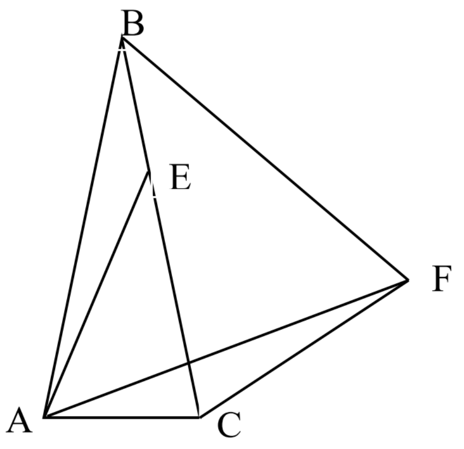
Мал. 2

Трикутник з кутами 80°, 80° та 20° також задовольняє вказані властивості. Для цього виберемо всередині трикутника ABC точку M таку, що $AM = MC = AC$ (див. мал. 2). Тоді $\Delta ABE = \Delta BAM$ (за двома сторонами і кутом 20° між ними). Отже, $\angle BAE = \angle ABM = 10^\circ$. Тому $\angle AEC = \angle ABE + \angle BAE = 20^\circ + 10^\circ = 30^\circ$.

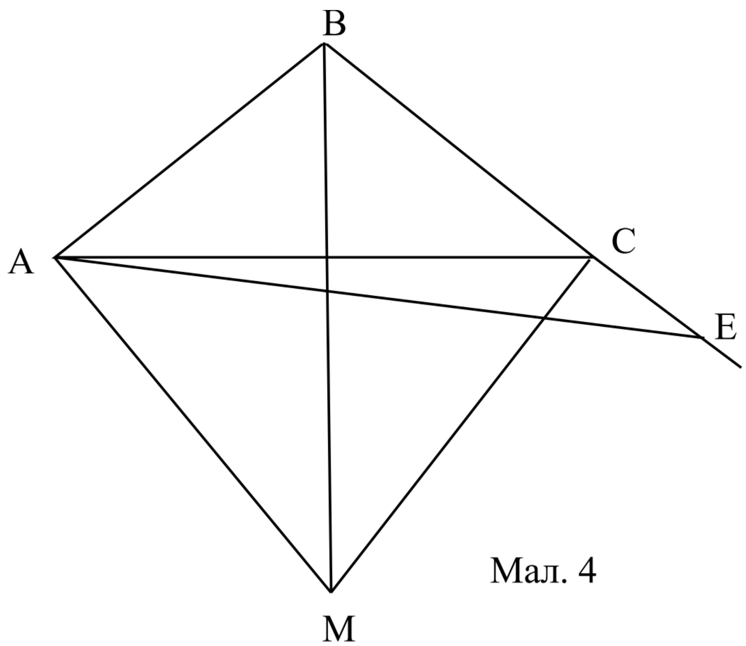
Зауважимо, що при доведенні можна було міркувати й інакше. Оскільки чотирикутник $ABEM$ виявився рівнобічною трапецією (рівні відповідно.

кути при основі AB та $AM = BE$), то $\angle MCE = \angle MEC = 20^O$. Тому $MA = MC = ME$. Отже, $M -$ центр описаного кола трикутника ACE. Значить, $\angle AEC = \frac{1}{2}\angle AMC = 30^O$. Чи, враховуючи, що $\angle AME = 160^O$, знайти $\angle AEC = \angle AEM + \angle CEM = 10^O + 20^O = 30^O$.

Будувати рівносторонній трикутник можна було і на стороні AB (див. мал. 3). Тоді $BC = BF$, тому . Оскільки $\Delta BAE = \Delta BFC$ (за двома сторонами і кутом 20^O між ними), то $\angle CBF = 40^O$ та $\angle BCF = 70^O$.



Мал. 3



Мал. 4

Як узагальнення розглянемо випадок, коли точка E знаходиться на продовженні сторони BC поза точку C у рівнобедреному трикутнику ABC з кутами 100^O, 40^O та 40^O (див. мал. 4). Виберемо точку M таку, що $AM = MC = AC$, і точки M та B знаходяться по різні сторони прямої AC. Тоді $\Delta ABE = \Delta BAM$ (за двома сторонами і кутом між ними). Отже, $\angle AEC = \angle AEB = \angle BMA = 30^O$.

Зауважимо, що покладаючи $\angle ABC = 2\beta$, $\angle AEC = \varphi$, і застосовуючи теорему синусів для трикутників BAE та AEC, ми отримаємо рівності $\dfrac{AB}{sin\varphi} = \dfrac{BE}{\sin(\varphi - 2\beta)}$ та $\dfrac{AB}{cos\varphi} = \dfrac{AC}{\sin 2\beta}$ відповідно.

Оскільки $BE = AC$, то приходимо до тригонометричного рівняння

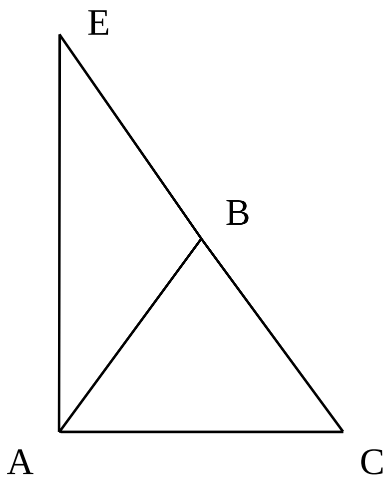
$$\sin 2\beta \cdot \sin\varphi = \cos\beta \cdot \sin(\varphi - 2\beta) \Leftrightarrow 2\sin\beta \cdot \sin\varphi = \sin(\varphi - 2\beta). \quad (*)$$

Нескладно переконатися, що його задовольняють пари кутів $2\beta = 36^{\circ}$, $\varphi = 72^{\circ}$ та $2\beta = 20^{\circ}$, $\varphi = 30^{\circ}$, які були знайдені нами вище.

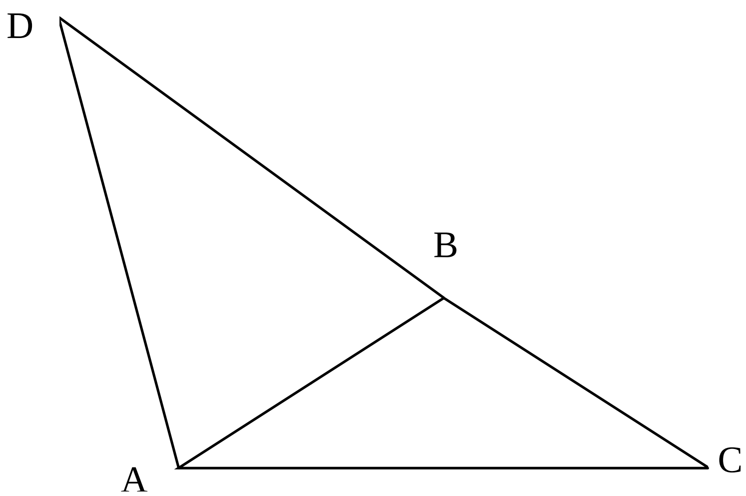
Для E на продовженні сторони BC поза точку C підійде й пара кутів $2\beta = 100^{\circ}$, $\varphi = 30^{\circ}$. (В рівняння (*) слід підставляти $\varphi = 150^{\circ}$).

Розглянемо також три випадки, коли $BE = AC$ для точки E на продовженні сторони BC поза точку B.

1). Для рівностороннього трикутника ABC (див. мал. 5) отримаємо $BE = AB = BC$. Тому кут CAE прямий, а $\angle AEC = 30^{\circ}$.

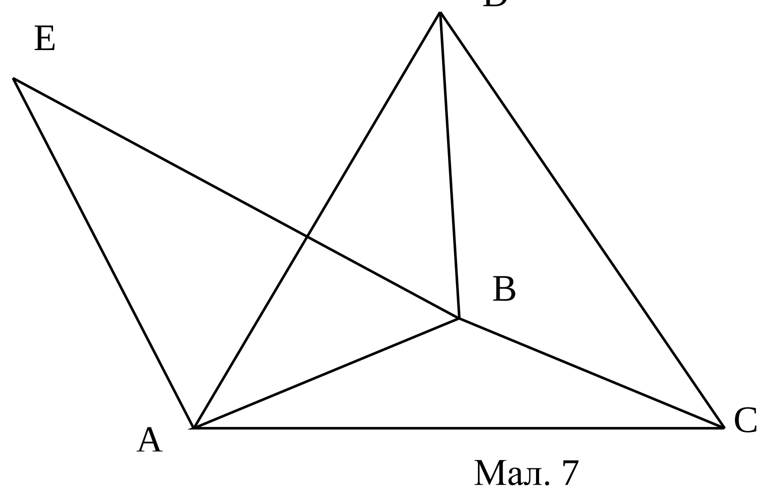


Мал. 5



Мал. 6

2). Для рівнобедреного трикутника ABC, в якому $\angle ABC = 108^{\circ}$, на продовженні сторони BC поза точку B розглянемо точку D таку, що $\angle ADC = \angle ACD = 36^{\circ}$ (див. мал. 6). Оскільки при цьому $\angle ADB = \angle ABD = 72^{\circ}$, то $BD = AD = AC = BE$, тобто точка E збігається з точкою D. Отже, $\angle AEC = 36^{\circ}$.



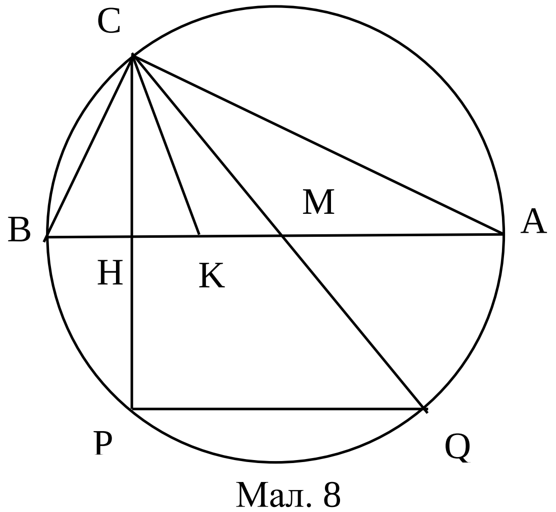
Мал. 7

3). Для рівнобедреного трикутника ABC, в якому $\angle ABC = 140^{o}$, доведемо, що $\angle AEC = 30^{o}$. Справді, якщо $ADC-$ рівносторонній трикутник (див. мал. 7), то трикутники ABE та BAD рівні за двома сторонами і кутом 40^{o} між ними. Тому $\angle AEC = \angle BDA = 30^{o}$.

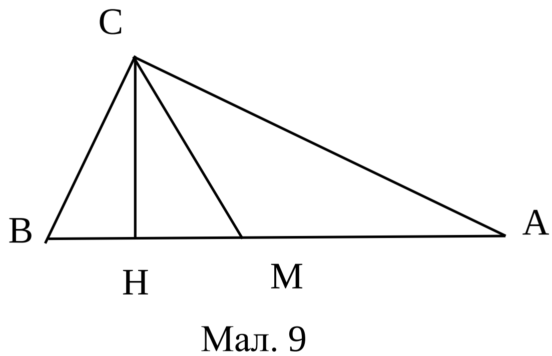
3. Висота CH, бісектриса CK та медіана CM трикутника ABC ділять кут C на чотири рівні частини. Знайдіть градусні міри всіх кутів такого трикутника.

Розв'язання. Розглянемо описане навколо трикутника ABC коло, і продовжимо висоту та медіану до перетину з цим колом у точках P та Q відповідно (див. мал. 8). З рівності кутів BCP та ACQ випливає, що $PQ||AB$ і $\angle CPQ = 90^{o}$. Отже, $CQ -$ діаметр, який проходить через точку $M-$ середину хорди AB. Оскільки AB та CQ не є перпендикулярними, то таке можливе лише за умови, що AB також є діаметром цього кола. Тому $\angle ACB = 90^{o}$.

Якщо $\angle BAC < \angle ABC$, то з рівностей $\angle MAC = \angle MCA = \frac{1}{3}\angle HCA$ та $\angle HAC + \angle HCA = 90^{o}$ маємо $\angle BAC = 22,5^{o}$. Тоді $\angle ABC = 67,5^{o}$.



Мал. 8



Мал. 9

Розглядаючи в плані узагальнення аналогічну задачу, зауважимо, що прямокутним буде і трикутник ABC, в якому лише висота CH та медіана CM ділять кут C на три рівні частини (див. мал. 9). Справді, якщо при цьому CM буде бісектрисою кута C прямокутного трикутника HCA, то, враховуючи рівності $BH = MH$ та $BM = MA$, вона поділить катет HA у відношенні $HM : MA = 1:2$. Тому за властивістю бісектриси також $HC : CA = 1:2$, тобто $\angle HAC = 30^{\circ}$. Тоді й $\angle BAC = 30^{\circ}$ та $\angle BCA = 3\angle BAC = 90^{\circ}$, $\angle ABC = 60^{\circ}$.

4. Доведіть, що рівняння $x^2 - xy - y^2 = 20^2 + 20\cdot 19 - 19^2$ має нескінченну кількість розв'язків у натуральних числах x та y, та вкажіть принаймні три пари взаємно простих натуральних чисел a та b, для яких розв'язки у натуральних числах x та y має рівняння $x^4 - x^2y^2 - y^4 = a^4 + a^2b^2 - b^4$.

Розв'язання. Будемо розв'язувати загальнішу задачу. А саме, доведемо, що для довільних натуральних чисел a та b рівняння $x^2 - xy - y^2 = a^2 + ab - b^2$ має нескінченну кількість розв'язків у натуральних числах x та y.

Нескладно переконатися, що пара чисел $x_1 = a + b,\ y_1 = b$ задовольняє це рівняння. Справді,

$$(a+b)^2 - (a+b)b - b^2 = a^2 + ab - b^2.$$

Далі, з врахуванням тотожності

$$(2x+y)^2 - (2x+y)(x+y) - (x+y)^2 \equiv x^2 - xy - y^2$$

отримуємо, що разом з парою розв'язків (x_n, y_n) розв'язком буде також пара $(x_{n+1}, y_{n+1}) = (2x_n + y_n, x_n + y_n)$, причому $x_{n+1} > x_n$, $y_{n+1} > y_n$.

Тому рівняння $x^2 - xy - y^2 = a^2 + ab - b^2$ має нескінченну кількість розв'язків у натуральних числах x та y для довільних натуральних чисел a та b.

Розглянемо тепер рівняння $x^4 - x^2y^2 - y^4 = a^4 + a^2b^2 - b^4$.

З наведених вище міркувань випливає, що для довільних натуральних чисел a та b його задовольняє пара дійсних чисел $x = \sqrt{a^2 + b^2}$, $y = b$. Тому залишається підібрати такі взаємно прості натуральні числа a та b, для яких $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ буде натуральним числом. Наприклад, достатньо покласти $a = 4n,\ b = 4n^2 - 1,\ n \in \mathrm{N}$. Тоді для кожного натурального числа n отримаємо розв’язок $x = 4n^2 + 1,\ y = 4n^2 - 1$.

Перші три з таких пар мають вигляд: $a = 4,\ b = 3;\ a = 8,\ b = 15;$ $a = 12,\ b = 35$.

5. Знайдіть принаймні три четвірки натуральних чисел таких, що добуток будь-яких двох чисел кожної з четвірок, збільшений на 1, є квадратом натурального числа. Чи існують такі 4 попарно різні додатні раціональні числа, жодне з яких не є натуральним числом, що добуток будь-яких двох із них, збільшений на 1, є квадратом раціонального числа?

Розв’язання. Доведемо, загальніше твердження: таких четвірок натуральних чисел є нескінченна кількість. Поклавши $a = n - 1$, $b = n + 1,\ c = 4n,\ d = 4n\left(4n^2 - 1\right),\ n \geq 2$, отримуємо:

$$ab + 1 = (n-1)(n+1) + 1 = n^2,$$

$$ac + 1 = (n-1)\cdot 4n + 1 = (2n-1)^2,$$

$$bc + 1 = (n+1)\cdot 4n + 1 = (2n+1)^2,$$

$$ad + 1 = (n-1)\cdot 4n\left(4n^2 - 1\right) + 1 = \left(4n^2 - 2n - 1\right)^2,$$

$$bd + 1 = (n+1)\cdot 4n\left(4n^2 - 1\right) + 1 = \left(4n^2 + 2n - 1\right)^2,$$

$$cd + 1 = 4n\cdot 4n\left(4n^2 - 1\right) + 1 = \left(8n^2 - 1\right)^2.$$

Зокрема, перші три такі четвірки мають вигляд:

$a = 1,\ b = 3,\ c = 8,\ d = 120;$

$a = 2,\ b = 4,\ c = 12,\ d = 420;$

$a = 3,\ b = 5,\ c = 16,\ d = 1008.$

Розглянемо тепер четвірки різних додатних раціональних чисел і доведемо, що їх також є нескінченна кількість. Для цього, зокрема, достатньо у записаних вище формулах четвірок натуральних чисел покласти $n = k + \frac{1}{3}$, де k – довільне натуральне число. У результаті отримуємо такі четвірки шуканих раціональних чисел:

$$a = k - \frac{2}{3},\ b = k + \frac{4}{3},\ c = 4\left(k + \frac{1}{3}\right),\ d = 4\left(k + \frac{1}{3}\right)\left(4\left(k + \frac{1}{3}\right)^2 - 1\right),\ k \in \mathrm{N}.$$

Для $k = 1$ ця четвірка виглядає так: $a = \frac{1}{3},\ b = \frac{7}{3},\ c = \frac{16}{3},\ d = \frac{880}{27}$.

Можна також вказати нескінченну кількість п’ятірок попарно різних додатних раціональних чисел таких, що добуток будь-яких двох із них, збільшений на 1, є квадратом раціонального числа?

У загальному випадку п’яте число знаходимо у вигляді

$$x = \frac{4u + 2v(w+1)}{(w-1)^2},$$

виразивши його через симетричні многочлени знайдених раніше чотирьох чисел:

$$u = abc + abd + acd + bcd = 48n^3\left(3n^2 - 1\right),$$

$$v = a + b + c + d = 2n\left(8n^2 + 1\right),$$

$$w = abcd = 16n^2\left(n^2 - 1\right)\left(4n^2 - 1\right).$$

Зокрема, для $n = \frac{4}{3}$ отримуємо $x = \frac{6924400560}{97831^2}$.

І, наприклад, маємо:

$$ax + 1 = \left(\frac{326973}{293493}\right)^2,\ bx + 1 = \left(\frac{481197}{293493}\right)^2,$$

$$cx + 1 = \left(\frac{646923}{293493}\right)^2,\ dx + 1 = \left(\frac{4365279}{880479}\right)^2.$$

6. Для всіх натуральних чисел n доведіть таку подвійну нерівність:

$$n^2 \le \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1}\right) < \frac{9}{8}n^2.$$

Розв’язання. Ліва частина цієї нерівності випливає з нерівності Коші між середніми арифметичним та геометричним:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1}\right) \ge n \cdot \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k}} \cdot n \cdot \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1}} = n^2.$$

Для обґрунтування правої частини спочатку доведемо загальнішу нерівність

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{x_k}\right) \le \frac{(a+b)^2}{4ab}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2, \quad (*)$$

в якій $a_k > 0, x_k \in [a,b]$, $0 < a < b$.

Для цього розглянемо функцію

$$f(x) = (a_1 x + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n)\left(\frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x_2} + \ldots + \frac{a_n}{x_n}\right) = a_1^2 + Ax + \frac{B}{x} + AB,$$

де $A = a_1\left(\frac{a_2}{x_2} + \ldots + \frac{a_n}{x_n}\right) > 0,$ $B = a_1(a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n) > 0,$ $x \in [a,b]$.

Її похідна $f'(x) = A - \frac{B}{x^2}$ зростає на $[a,b]$. Тому функція $f(x)$ набуває найбільше значення на відрізку $[a,b]$, якщо $x = a$ або $x = b$. Отже, $f(x_1) \le \max\{f(a), f(b)\}$.

Тепер розглядаємо функції

$$g(x) = (a_1 a + a_2 x + a_3 x_3 + \ldots + a_n x_n)\left(\frac{a_1}{a} + \frac{a_2}{x} + \frac{a_3}{x_3} + \ldots + \frac{a_n}{x_n}\right), \ x \in [a,b],$$

та

$$g(x) = (a_1 b + a_2 x + a_3 x_3 + \ldots + a_n x_n)\left(\frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{x} + \frac{a_3}{x_3} + \ldots + \frac{a_n}{x_n}\right), \ x \in [a,b],$$

і так само встановлюємо, що $g(x_2) \le \max\{g(a), g(b)\}$.

Міркуючи аналогічно для інших змінних, ми отримаємо, що вираз $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{x_k}\right)$ набуває найбільшого значення, якщо частина x_k дорівнює a, а решта змінних дорівнюють b.

Нехай $\sum_{x_k = a} a_k = C$, $\sum_{k=1}^{n} a_k = D$. Тоді для завершення доведення нерівності (*) достатньо показати, що

$$\left(Ca+(D-C)b\right)\left(\frac{C}{a}+\frac{D-C}{b}\right)\le\frac{(a+b)^2}{4ab}D^2.$$

Це справді так, бо остання нерівність рівносильна очевидній нерівності $(D-2C)^2(a-b)^2\ge 0$.

Покладаючи $x_k=\frac{k+1}{k}$, ми отримаємо, що всі $x_k\in[a;b]=[1;2]$.

Тому для завершення доведення другої заданої в умові задачі нерівності достатньо буде вибрати всі $a_k=1$, скористатися нерівністю (*) і врахувати, що для $n\ge 2$ не всі x_k дорівнюють 1 або 2.

Для $n=1$ така строга нерівність є очевидною.

Зауважимо, що доведену нами нерівність (*) можна використати і для обґрунтування нерівності

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{2k^2+k-1}{k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{2k^2-k}{k+1}\right)\le\frac{9}{8}n^4$$

заключного етапу XXII Всеукраїнського турніру юних математиків імені професора М.Й. Ядренка.

Для цього достатньо покласти $a_k=2k-1$ і скористатися рівністю $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2$, яку можна отримати за формулою для обчислення суми елементів арифметичної прогресії.

Насправді, вказана нерівність також буде строгою.

7. В шаховій партії за ходу білих виникла наступна позиція. Білі: Кр a1, пп. b5, b6, e4, e5, g3; чорні: Кр g8, пп. b7, e6, g4. З яким результатом закінчиться ця партія за правильної гри обох суперників?

Розв'язання. За правильної гри обох суперників ця партія закінчиться внічию. Наводимо таблицю відповідності полів (їхні номери виділені жирним шрифтом), які повинен займати чорний король, якщо білий знаходиться на полі з тим самим номером.

				12	**4**	**6**	**9**
	♟			**1**	**3**	**5**	**8**
	♙			♟		**7**	**10**
12	♙	1		♙		**11**	**2**
4	3	4	3	♙	2	♟	
6	5	6	5	7		♙	
9	8	9	8	10	11	10	11
6	5	6	5	7	2	7	2

У початковій позиції чорний король уже стоїть на відповідному полі з номером 6. Далі, дотримуючись вказаної вище відповідності, він не допустить прориву білого короля ні з поля c5, ні з поля f4.

Аналогічно можна проаналізувати результат гри як за інших початкових позицій королів, так і у випадку першого ходу чорними.

Зокрема, при початковій позиції чорного короля на полі h8 білі здобудуть перемогу. Наводимо основний варіант її досягнення (в інших варіантах білі можуть зробити прорив ще швидше):

1. Крa1-a2!! Крh8-h7 2. Крa2-b2! Крh7-g7

3. Крb2-b3! Крg7-g8 4. Крb3-c3! Крg8-f8

5. Крc3-c4! Крf8-f7 6. Крc4-d4!

Відповідно, у заданій в умові задачі позиції за першого ходу чорних білі переможуть, якщо вони, наближаючись до одного з полів прориву c5 чи f4, весь час займатимуть такі поля, щоб чорний король своїм наступним ходом не зміг попасти на поле з цим же номером.

8. Розташуйте на шаховій дошці туру і найбільшу кількість коней так, щоб жодна фігура не била іншу.

Розв'язання. Спочатку розглянемо задачу про розміщення на шаховій дошці максимальної кількості коней так, щоб жоден з них не бив іншого.

Розіб’ємо цю дошку на 8 прямокутників розмірами 4×2. Будь-які два коні, поставлені в такому прямокутнику тримають під ударом різні поля цього прямокутника. Тому помістити у ньому більше чотирьох коней не вдасться. Отже, на всій дошці можна за вказаних вимог розмістити не більше 32 коней.

Як доведено в [А. М. Яглом, И. М. Яглом. Неэлементарные задачи в элементарном изложении, сер. «Библиотека математического кружка», вып. 5. - М., Гостехиздат, 1954.], існують лише два варіанти такого розміщення: або всі коні стоять на чорних полях шахової дошки; або всі вони знаходяться на білих клітинках.

Обмежимося першим із них і доставимо на шахову дошку туру. При цьому доведеться зняти коней з тієї вертикалі та тієї горизонталі, де опинилася тура. У кожній з них стояли по 4 коні. Тому найменше коней, а саме 7, зможемо вилучити, якщо кінь стояв на їх перетині.

Приклад з розміщенням тури та 25 коней виглядає так: тура на полі a1, а коні – на всіх чорних клітинках вище першої горизонталі та лівої вертикалі. Зрозуміло, що він не єдиний.

Як узагальнення розглянемо аналогічну задачу про розміщення тури на максимальної кількості коней на дошках розмірами $n\times n$.

Якщо n – парне, то подібними міркуваннями отримаємо два способи розміщення на ній $n^2/2$ коней. А після виставлення тури на ця кількість зменшиться принаймні на $n-1$.

Якщо n – непарне, то спочатку максимальна кількість коней дорівнюватиме $\left(n^2+1\right)/2$ за умови, що всі вони стоятимуть на полях того кольору, що й кутова клітинка. Після виставлення тури при $n>1$ ця кількість зменшиться принаймні на $n-2$. Рівно настільки, якщо, наприклад, туру поставити на поле b2. А для $n=1$ місця для коней не залишиться взагалі.

9. Нехай m – натуральне число. Знайдіть усі пари додатних чисел a та b, для яких справедлива нерівність $\dfrac{a^{m+1}+b^{m+1}}{a^m+b^m}\geq\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$.

Розв'язання. Розглянемо загальнішу нерівність

$$\frac{a^{m+1}+b^{m+1}}{a^m+b^m} \ge \sqrt[k]{\frac{a^k+b^k}{2}}.$$

Для додатних чисел a та b задана нерівність рівносильна нерівності

$$2\left(a^{m+1}+b^{m+1}\right)^k \ge \left(a^k+b^k\right)\left(a^m+b^m\right)^k.$$

Враховуючи формулу $x^k - y^k = (x-y)\sum_{p=0}^{k-1} x^{k-1-p} y^p$, різницю між її лівою та правою частинами подамо у вигляді:

$$\left[\left(a^{m+1}+b^{m+1}\right)^k - b^k\left(a^m+b^m\right)^k\right] + \left[\left(a^{m+1}+b^{m+1}\right)^k - a^k\left(a^m+b^m\right)^k\right] =$$

$$= (a-b)a^m \sum_{p=0}^{k-1}\left(a^{m+1}+b^{m+1}\right)^{k-1-p} b^p \left(a^m+b^m\right)^p -$$

$$-(a-b)b^m \sum_{p=0}^{k-1}\left(a^{m+1}+b^{m+1}\right)^{k-1-p} a^p \left(a^m+b^m\right)^p =$$

$$= \sum_{p=0}^{k-1}\left(a^{m+1}+b^{m+1}\right)^{k-1-p}\left(a^m+b^m\right)^p a^p b^p (a-b)\left(a^{m-p}-b^{m-p}\right).$$

Для $k = 2m+1$ ця різниця матиме вигляд:

$$\sum_{p=0}^{2m}\left(a^{m+1}+b^{m+1}\right)^{2m-p}\left(a^m+b^m\right)^p a^p b^p (a-b)\left(a^{m-p}-b^{m-p}\right).$$

Її середній доданок, який відповідає $p = m$, дорівнює 0. Решту доданків згрупуємо у пари симетрично відносно нього і доведемо, що у кожній такій парі сума доданків є невід'ємною.

Справді, групуючи доданки, в яких $p = m-q$ та $p = m+q$, для кожного $q = \overline{1,m}$ отримаємо:

$$\left(a^{m+1}+b^{m+1}\right)^{m+q}\left(a^m+b^m\right)^{m-q} a^{m-q} b^{m-q} (a-b)\left(a^q-b^q\right) +$$

$$+\left(a^{m+1}+b^{m+1}\right)^{m-q}\left(a^m+b^m\right)^{m+q} a^{m+q} b^{m+q} (a-b)\left(a^{-q}-b^{-q}\right) =$$

$$= \left(a^{m+1}+b^{m+1}\right)^{m-q}\left(a^m+b^m\right)^{m-q} a^{m-q} b^{m-q} (a-b)\left(a^q-b^q\right)\cdot$$

$$\cdot\left[\left(a^{m+1}+b^{m+1}\right)^{2q}-\left(a^m+b^m\right)^{2q}a^qb^q\right].$$

Тому достатньо довести, що

$$\left(a^{m+1}+b^{m+1}\right)^{2q}-\left(a^m+b^m\right)^{2q}a^qb^q\ge 0$$

для всіх пар додатних чисел a та b.

Це дійсно так, бо

$$\left(a^{m+1}+b^{m+1}\right)^{2q}-\left(a^m+b^m\right)^{2q}a^qb^q=\left(\left(a^{m+1}+b^{m+1}\right)^2\right)^q-\left(\left(a^m+b^m\right)^2ab\right)^q=$$

$$=\left(\left(a^{m+1}+b^{m+1}\right)^2-\left(a^m+b^m\right)^2ab\right)\cdot\sum_{i=0}^{q-1}\left(\left(a^{m+1}+b^{m+1}\right)^2\right)^i\left(\left(a^m+b^m\right)^2ab\right)^{q-1-i}=$$

$$=\left(\left(a^{m+1}+b^{m+1}\right)^2-\left(a^m+b^m\right)^2ab\right)\cdot\sum_{i=0}^{q-1}\left(\left(a^{m+1}+b^{m+1}\right)^2\right)^i\left(\left(a^m+b^m\right)^2ab\right)^{q-1-i}=$$

$$=(a-b)\left(a^{2m+1}-b^{2m+1}\right)\cdot\sum_{i=0}^{q-1}\left(\left(a^{m+1}+b^{m+1}\right)^2\right)^i\left(\left(a^m+b^m\right)^2ab\right)^{q-1-i}.$$

Отже, для $k=2m+1$ задана нерівність є правильною для всіх пар додатних чисел a та b.

А оскільки за властивістю середніх для $k\le 2m+1$ справджується нерівність $\sqrt[k]{\frac{a^k+b^k}{2}}\le\sqrt[2m+1]{\frac{a^{2m+1}+b^{2m+1}}{2}}$, то вона є правильною для всіх натуральних $k\le 2m+1$.

Зокрема, вона буде правильною і для $k=2<3\le 2m+1$ для всіх натуральних чисел m, про що йшла мова в умові задачі

Зауважимо, що у загальному вигляді отриманий результат покращити не вдасться. Наприклад, для $m=1,\ k=4$ така нерівність не справджується для $a=1,\ b=2$:

$$2\left(1^2+2^2\right)^4=1250<1377=\left(1^4+2^4\right)\left(1^1+2^1\right)^4.$$

10. У Лототроні міститься 36 занумерованих кульок. Під час розіграшу лотереї випадає шість кульок. Гравець купує білет і записує в ньому номери шести кульок, які, на його думку, випадуть під час розіграшу. Чи може гравець купити 12 білетів і гарантовано, принаймні в одному з них, вгадати щонайменше два номери?

Розв'язання. Доведемо, що досить купити лише 10 білетів.

У перших шести з них виберемо номери 1 – 6, 7 – 12, 13 – 18, 19 – 24, 25 – 30 та 31 – 36 відповідно.

Якщо при цьому принаймні в одному з білетів вгадано не менше двох номерів, то бажаного результату досягнуто.

Якщо ж ні, то у кожному з цих шести білетів вгадано рівно по одному номеру. Тоді розглянемо перші два з них. Потрібні номери у них можуть знаходитися як у першій, так і в другій половині з шести номерів. Тому заповнимо ще 4 білети наступним чином: (1, 2, 3, 7, 8, 9), (1, 2, 3, 10, 11, 12), (4, 5, 6, 7, 8, 9), (4, 5, 6, 10, 11, 12).

При цьому принаймні в одному з десяти куплених білетів будуть вгадані щонайменше два номери.

Зауважимо, що при випаданні $2n$ із $4n^2$ кульок для вгадування принаймні раз двох номерів достатньо буде купити $2n+4$ білети.

Розглянемо також ще одне узагальнення для випадку, коли у Лототроні міститься $6k$ занумерованих кульок.

У перших k з куплених білетів відповідно запишемо номери від 1 до 6, від 7 до 12, …, від $6k-5$ до $6k$. Якщо $k \le 5$, то при цьому принаймні в одному з білетів буде вгадано не менше двох номерів.

Випадок $k=6$ ми вже розглянули.

А для $k \ge 7$, якщо зразу не вдалося досягнути бажаного вгадування, то знайдуться 6 із заповнених k білетів, в яких вгадано рівно по одному номеру. Обмежимося двома з них.

Вибрати 2 білети із k можна $\dfrac{k(k-1)}{2}$ способами. Тому, купимо додатково таку кількість білетів, помножену на 4, і заповнимо для кожної пари по 4 білети так, як описано вище для випадку $k=6$. При, якщо в жодному з перших k білетів не вгадано двох номерів, то в решті $C_6^2 = 15$ білетах буде вгадано щонайменше два номери.

11. Число 10 можна двома способами подати як суму двох простих чисел, перше з яких не більше від другого: $10=3+7$ та $10=5+5$. А чи існує натуральне число, яке таким чином можна представити не менше як десятьма способами?

Розв'язання. Спочатку доведемо таке загальне твердження: для кожного натурального числа m існує таке натуральне число N, яке можна подати як суму двох простих чисел не менше як m способами.

Доведення. Припустимо, що для деякого натурального числа m такого натурального числа N не існує.

Нехай $n>1$ – деяке натуральне число. Розглянемо всі пари $(p,\ q)$ простих чисел p, q, які не перевищують n. Кількість таких пар дорівнює $\left(\pi(n)\right)^2$, де функція $\pi(n)$ – кількість простих чисел, які не перевищують n.

Поділимо множину таких пар на класи – пара $(p,\ q)$ належить класу k, якщо $p+q=k$. Оскільки $p\le n$ та $q\le n$, то $k\le 2n$. За зробленим нами на початку припущенням у кожному такому класі буде менше ніж m різних пар. Оскільки ж таких класів менше ніж $2n$, то кількість пар $(p,\ q)$ менша ніж $2mn$, тобто $\left(\pi(n)\right)^2<2mn$.

Але, як відомо, $\pi(n)>\dfrac{n}{12\ln n}$. Тому для вказаного у припущенні числа m та всіх $n>1$ мала би справджуватися нерівність

$$\left(\frac{n}{12\ln n}\right)^2<2mn\Leftrightarrow 144m\ln^2 n>n.$$

З розкладу $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\ldots+\dfrac{x^n}{n!}+\ldots$ отримуємо, що $e^x>\dfrac{x^3}{6}$ для всіх $x\ge 0$. Підставляючи сюди $x=\ln n$, дістанемо $n>\dfrac{\ln^3 n}{6}$. Отже, для числа m та всіх $n>1$ отримуємо нерівність

$$144m\ln^2 n>\frac{\ln^3 n}{6}\Leftrightarrow 864m>\ln n.$$

Зрозуміло, що для жодного фіксованого m при достатньо великих n остання нерівність не буде правильною. Тому зроблене на початку доведення припущення було хибним. Отже, сформульоване нами твердження доведене.

Як приклад до питання, сформульованого безпосередньо в умові задачі, наведемо число 120, яке можна подати таким чином дванадцятьма способами:

$$120 = 7+113=11+109=13+107=17+103=19+101=$$
$$= 23+97=31+89=37+83=41+79=47+73=53+67=59+61.$$

Нижче наводимо також приклад числа, яке представляється сумою двох простих чисел аж 106-ма способами:

$$3600 = 7+3593=17+3583=19+3581=29+3571=41+3559=$$
$$= 53+3547=59+3541=61+3539=67+3533=71+3529=73+3527=$$
$$= 83+3517=89+3511=101+3499=109+3491=131+3469=$$
$$= 137+3463=139+3461=151+3449=167+3433=193+3407=$$
$$= 211+3389=227+3373=229+3371=239+3361=241+3359=$$
$$= 271+3329=293+3307=347+3253=349+3251=379+3221=$$
$$= 383+3217=397+3203=409+3191=419+3181=431+3169=$$
$$= 433+3167=463+3137=491+3109=521+3079=563+3037=$$
$$= 577+3023=599+3001=601+2999=631+2969=643+2957=$$
$$= 647+2953=661+2939=673+2927=683+2917=691+2909=$$
$$= 739+2861=743+2857=757+2843=797+2803=811+2789=$$
$$= 823+2777=881+2719=887+2713=941+2659=953+2647=$$
$$= 983+2617=991+2609=1009+2591=1021+2579=1049+2551=$$
$$= 1061+2539=1069+2531=1097+2503=1123+2477=1153+2447=$$
$$= 1163+2437=1201+2399=1229+2371=1249+2351=1259+2341=$$
$$= 1289+2311=1307+2293=1319+2281=1327+2273=1361+2239=$$
$$= 1439+2161=1447+2153=1459+2141=1471+2029=1487+2113=$$
$$= 1489+2111=1511+2089=1531+2069=1571+2029=1583+2017=$$
$$= 1601+1999=1607+1993=1613+1987=1621+1979=1627+1973=$$
$$= 1667+1933=1669+1931=1693+1907=1699+1901=1721+1879=$$
$$= 1723+1877=1733+1867=1753+1847=1777+1823=1789+1811.$$

Додатково доведемо й наступне загальне твердження до п. б) відповідної задачі Всеукраїнського етапу турніру: для кожного натурального числа n існує таке натуральне число N, яке можна подати як суму квадратів двох натуральних чисел не менше як n способами.

Нехай $N = \prod_{k=2}^{n+1} \left(k^2+1\right)^2$, $A_k = \frac{\sqrt{N}}{k^2+1}$. Тоді

$$N=\left(\left(k^2+1\right)A_k\right)^2=\left(\left(k^2-1\right)A_k\right)^2+\left(2kA_k\right)^2$$

для кожного натурального k від 2 до $n+1$.

12. Раціональне число $\frac{r}{s}=\frac{1}{2^2}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{4^2}+\ldots+\frac{35}{36^2}$ є сумою тридцяти п’яти дробів. Доведіть, що r ділиться на 37.

Розв’язання. Зразу будемо доводити загальніше твердження: для довільного непарного простого числа $p=q^2+1$ у раціональному числі $\frac{r}{s}=\frac{1}{2^2}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{4^2}+\ldots+\frac{p-2}{\left(p-1\right)^2}$, де $\frac{r}{s}$ – нескоротний дріб, чисельник r ділиться на p.

Запишемо цю суму у вигляді

$$\frac{r}{s}=\frac{1-1}{1^2}+\frac{2-1}{2^2}+\frac{3-1}{3^2}+\frac{4-1}{4^2}+\ldots+\frac{\left(p-1\right)-1}{\left(p-1\right)^2}=$$

$$=\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{p-1}\right)-\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{\left(p-1\right)^2}\right).$$

Групуючи в перших дужках доданки по два симетрично відносно середини, отримуємо

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{p-1}=$$

$$=p\cdot\left(\frac{1}{1\cdot\left(p-1\right)}+\frac{1}{2\cdot\left(p-2\right)}+\frac{1}{3\cdot\left(p-3\right)}+\ldots+\frac{1}{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{p+1}{2}}\right).$$

Тому для раціонального числа $\frac{m}{n}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{\left(p-1\right)^2}$ достатньо довести, що m ділиться на p.

Розглянемо подвоєну таку суму $\frac{2m}{n}$, в якій кожен записаний доданок входить двічі, і згрупуємо в ній доданки по два так, щоб у першому доданку знаменник дорівнював $k^2, 1\le k\le p-1$, а у другому

– дорівнював квадрату остачі від ділення qk на p. Внаслідок простоти числа p таким чином будуть враховані всі доданки такої подвоєної суми.

Оскільки $k^2+(qk)^2$ ділиться на p для всіх цілих чисел k, то у кожній такій парі після зведення до спільного знаменника чисельник буде ділитися на p. Тому $2m$, а з ним і m, діляться на p. Звідси маємо, що й r також ділиться на p.

Для $q=6$, тобто $p=37$, отримуємо як окремий випадок твердження пропонованої задачі.

Зауважимо, що вимога простоти числа $p=q^2+1$ є суттєвою. Бо, наприклад, для $q=8$, тобто $p=65$, отримуємо дріб

$$\frac{r}{s}=\frac{1}{2^2}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{4^2}+...+\frac{63}{64^2}=$$

$$=\frac{79150046430224360850844958910960026528441760844195261}{25413727004476294175336659010085214676345183380992000},$$

чисельник якого не ділиться не те щоб на 65, а й на 5.

Проте відзначимо, що правильним буде й таке ще загальніше твердження, яке наведемо тут без доведення: для довільного простого числа $p>3$ у нескоротному дробі $\frac{r}{s}=\frac{1}{2^2}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{4^2}+...+\frac{p-2}{(p-1)^2}$ чисельник r ділиться на p.

13. На площині довільним чином вибрали 4 різні точки. Доведіть, що їх можна позначити буквами A, B, C, D так, що для деякої точки M цієї площини правильною буде рівність $AM+BM=CM+DM$.

Розв'язання. Якщо не всі чотири вибрані точки лежать на одній прямій, то їх можна позначити буквами A, B, C, D так, щоб відрізки AC та BD не були паралельними. Нехай M – точка перетину серединних перпендикулярів до цих відрізків. Тоді $AM=CM$ та $BM=DM$. Додавши дві останні рівності, отримуємо потрібну рівність $AM+BM=CM+DM$.

Нехай тепер всі чотири вибрані точки лежать на одній прямій. Позначимо їх буквами A, B, C, D послідовно одна за одною (див. мал.10).

Мал. 10

Якщо при цьому M збігається з точкою A, то маємо $AM + BM < CM + DM$. А якщо M збігається з точкою D, то отримуємо нерівність $AM + BM > CM + DM$. Тому деякої точки M між A та D правильною буде рівність $AM + BM = CM + DM$.

Як узагальнення розглянемо аналогічну задачу з наборами $2n$ різних точок $A_1, A_2, ..., A_n$ та $B_1, B_2, ..., B_n$. На колі, всередині якого містяться всі ці точки, виберемо дві діаметрально протилежні точки P та Q. Якщо $\sum_{k=1}^{n} PA_k = \sum_{k=1}^{n} PB_k$, то беремо $M = P$.

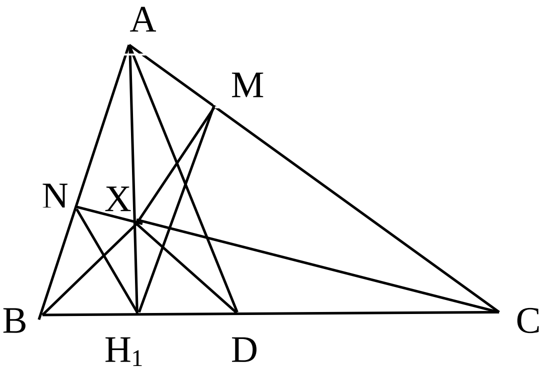
Якщо ні, то вважаємо для конкретності, що $\sum_{k=1}^{n} PA_k < \sum_{k=1}^{n} PB_k$, тобто $\sum_{k=1}^{n}\left(PA_k - PB_k\right) < 0$. Тоді $\sum_{k=1}^{n}\left(QA_k - QB_k\right) > 0$ та $\sum_{k=1}^{n} QA_k > \sum_{k=1}^{n} QB_k$.

Тому на цьому колі між точками P та Q знайдеться точка M така, що $\sum_{k=1}^{n} MA_k = \sum_{k=1}^{n} MB_k$.

14. На висоті AH_1 гострокутного трикутника ABC з попарно різними сторонами вибрали деяку точку X, з якої на сторони AB та AC опустили перпендикуляри XN та XM відповідно. Виявилося, що H_1A – бісектриса кута MH_1N. Доведіть, що X – точка перетину висот трикутника ABC.

Розв'язання. У чотирикутниках BH_1XN та CH_1XM (див. мал. 11) пари протилежних кутів прямі. Тому навколо цих чотирикутників можна описати кола. Отже, $\angle NBX = \angle NH_1X = \angle MH_1X = \angle MCX$.

Нехай точка D симетрична до точки B відносно H_1. Тоді маємо, що $\angle ADX = \angle ABX = \angle ACX$, тобто точка X лежить на колі, описаному навколо трикутника ADC. Оскільки таке коло може перетинати висоту AH_1 лише в одній точці, то вона є й єдиною точкою на цій висоті, для якої $\angle ABX = \angle ACX$.



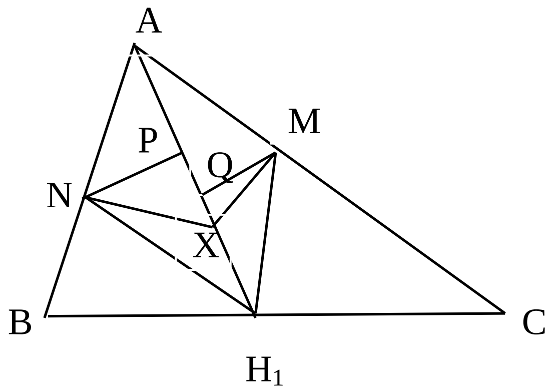
Мал. 11

Вона збігається з точкою H перетину висот трикутника ABC, бо $\angle ABH = 90^{\circ} - \angle BAC = \angle ACH$.

Додатково розглянемо дві аналогічні задачі:

1). Якщо точка X знаходиться на бісектрисі AH_1, то для будь-якого її розташування на ній H_1A буде бісектрисою кута MH_1N. Це випливає з рівності трикутників AMH_1 та ANH_1 за двома сторонами та кутом між ними при вершині A.

2). Якщо AH_1 – медіана, X – точка перетину медіан трикутника ABC, то встановимо необхідні та достатні умови для того, щоб H_1A була бісектрисою кута MH_1N.



Мал. 12

Опустимо з точок N та M перпендикуляри NP та MQ на цю медіану (див. мал. 12).

Нехай $H_1A = 3m$, $\angle NAX = \alpha$, $\angle MAX = \beta \neq \alpha$. Тоді

$$AX = 2m,\ AN = 2m\cos\alpha,\ NP = 2m\cos\alpha\sin\alpha = m\sin 2\alpha,$$

$$AP = 2m\cos^2\alpha,\ H_1P = m\left(3 - 2\cos^2\alpha\right) = m\left(2 - \cos 2\alpha\right),$$

$$\operatorname{tg}\angle NH_1A = \frac{NP}{H_1P} = \frac{\sin 2\alpha}{2 - \cos 2\alpha}.$$

Аналогічно отримуємо, що $\operatorname{tg}\angle MH_1A = \dfrac{MQ}{H_1Q} = \dfrac{\sin 2\beta}{2 - \cos 2\beta}$.

Якщо H_1A – бісектриса кута MH_1N, то маємо рівність

$$\frac{\sin 2\alpha}{2-\cos 2\alpha}=\frac{\sin 2\beta}{2-\cos 2\beta}.$$

Виконаємо послідовні рівносильні перетворення цієї рівності, враховуючи, що в різносторонньому трикутнику $\beta \neq \alpha$:

$$(2-\cos 2\beta)\sin 2\alpha=(2-\cos 2\alpha)\sin 2\beta,$$

$$2(\sin 2\alpha-\sin 2\beta)=\sin 2\alpha\cos 2\beta-\cos 2\alpha\sin 2\beta,$$

$$2(\sin 2\alpha-\sin 2\beta)=\sin 2(\alpha-\beta),$$

$$4\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)=2\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha-\beta),$$

$$2\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha-\beta),$$

$$2\cos\alpha\cos\beta-2\sin\alpha\sin\beta=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta,$$

$$\cos\alpha\cos\beta=3\sin\alpha\sin\beta.$$

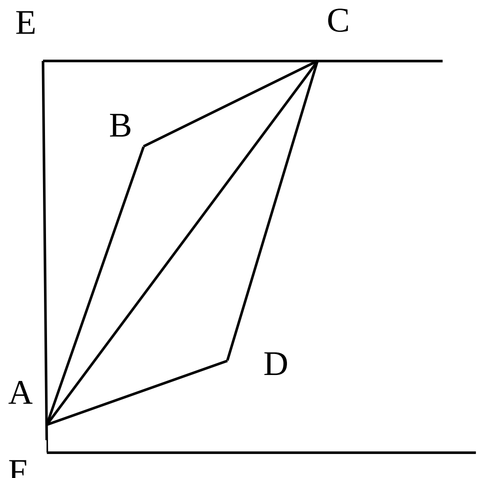
З останньої рівності випливає, що шуканою необхідною і достатньою умовою того, щоб для X – точки перетину медіан трикутника ABC – H_1A була бісектрисою кута MH_1N, є умова

$$\mathrm{ctg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\beta=3.$$

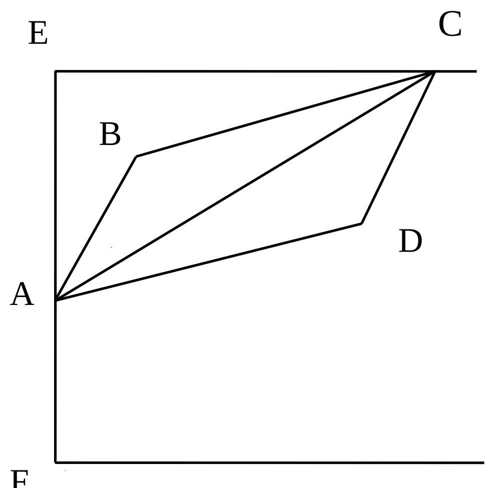
15. Петрик має однакові паралелограми з кутами 45° та 135° і довжинами сторін 1 та $\sqrt{2}$. Доведіть, що у прямокутнику розмірів 2×19 він не зможе помістити більше ніж 36 параллелограмів. Яку найбільшу кількість таких паралелограмів він зможе помістити у квадраті розмірами 4×4? Паралелограми можна довільним чином повертати чи перевертати, але не можна навіть частково накладати один на одного?

Розв'язання. Будемо розв'язувати загальнішу задачу для смуги розмірів $2\times n,\ n\geq 2$.

Доведемо, що більше $2n-2$ таких паралелограмів у цій смузі викласти не вдасться. Для цього проаналізуємо розміри площ тих частинок, які прилягають до лівого та правого країв смуги і не покриті жодним паралелограмом.



Мал. 13



Мал. 14

Для кожної з двох можливих форм паралелограмів $ABCD$ прилеглих до лівої та верхньої меж смуги, це буде площа чотирикутника $AECB$ (див. мал. 13, 14). Якщо б точки A чи C не лежали на межах смуги то паралелограм $ABCD$ ми перемістили би вліво чи вверх, і від цього непокрита площа тільки зменшилась би.

Нехай (див. мал. 13) $AB=\sqrt{2}$, $BC=1$, $\angle CAE=\alpha$.

Тоді, враховуючи, що площа паралелограма $ABCD$ дорівнює 1, а за теоремою косинусів діагональ $AC=\sqrt{5}$ і ділить цю площу пополам, отримаємо

$$S_{AECB}=S_{AEC}-S_{ABC}=\frac{1}{2}AC^2\sin\alpha\cos\alpha-\frac{1}{2}=\frac{5}{4}\sin 2\alpha-\frac{1}{2}. \quad (*)$$

Знайдемо, в яких межах може знаходитися величина α.

Найменше можливе значення для α будемо мати, якщо точка A збігається з точкою F. При цьому $EF=2$, $EC=1$ та $S_{AECB}=S_{AEC}-S_{ABC}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

Внаслідок (*) зі зростанням α до 45° ця площа також зростатиме до значення $S_{AECB}=\frac{5}{4}-\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$, а далі спадатиме аж поки точка B не опиниться на відрізку EC. Оскільки при цьому $\angle ABE=45^{\circ}$, то отримаємо $S_{AECB}=S_{ABE}=\frac{1}{2}$.

Отже, завжди $S_{AECB} \geq \frac{1}{2}$, причому рівність досягається лише для вказаних вище двох крайніх розташувань паралелограма $ABCD$. При цьому для кожного з цих двох крайніх випадків розмістити у заданій смузі ще один паралелограм так, щоб у прилеглих до EF двох одиничних квадратиків не було інших непокритих частинок не вдасться. Тому разом у першому випадку сумарна непокрита площа з лівої частини смуги виявиться більшою за $\frac{1}{2}$.

Так само (див. мал. 14), якщо $\angle ACE = \gamma$, отримаємо $S_{AECB} = \frac{5}{4}\sin 2\gamma - \frac{1}{2}$. Тут для $AE \geq AF$ ситуація аналогічна до попереднього випадку.

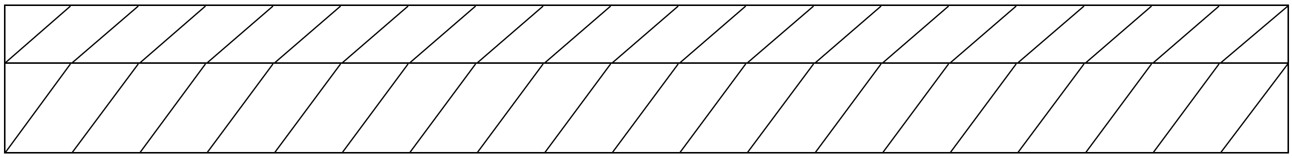
А далі (якщо $n \geq 3$) площа продовжить спадати аж поки точка B не опиниться на відрізку EC. Оскільки при цьому $\angle ABE = 45^{\circ}$, то отримаємо $S_{AECB} = S_{ABE} = \frac{1}{4}$. Отже, в такому підвипадку прилегла до точки E непокрита частина смуги матиме площу не меншу за $\frac{1}{4}$.

Але так само площу не меншу за $\frac{1}{4}$ тоді матиме і непокрита частина, яка прилягає до точки F. Отже, разом до EF прилягає непокрита площа не менша за $\frac{1}{2}$. При цьому у разі рівності цієї площі числу $\frac{1}{2}$ ми знову ж не зможемо помістити у заданій смузі ще один паралелограм так, щоб у прилеглих до EF двох одиничних квадратиків не було інших непокритих частинок. Тому, як і в першому випадку, разом сумарна непокрита площа з лівої частини смуги виявиться більшою за $\frac{1}{2}$.

Аналогічний висновок можна зробити і для непокритої площі біля правої межі смуги. Тому, остаточно, непокритою у вказаній смузі паралелограмами виявиться площа більша за 1. А оскільки така площа виражається цілим числом, то вона не менша за 2.

Тому більше $2n-2$ паралелограмів у такій смузі розмістити не вдасться.

Нескладно навести приклад розміщення рівно $2n-2$ таких паралелограмів у смузі розмірів $2\times n,\ n\ge 2$. Для цього достатньо у кожному рядку такої смуги викласти один за одним по $n-1$ паралелограмів так, щоб два сусідні мали спільну сторону довжиною $\sqrt{2}$. Наприклад, для $n=19$ отримаємо 36 таких паралелограмів:



Зауважимо, що у такий спосіб у прямокутнику розмірами $4\times n,\ n\ge 4,$ вдасться викласти $4n-4$ паралелограмів.

Зокрема, у квадраті 4×4 їх отримаємо 12.

16. На дошці відмічено n точок, які є вершинами правильного n-кутника. В одній із точок знаходиться фішка. Два гравці по черзі переміщують її в іншу відмічену точку і при цьому малюють відрізок, що їх сполучає. Якщо дві точки вже з'єднані відрізком, то такий хід заборонений. Гравець, який не зможе зробити хід, програє. Хто переможе за правильної гри обох суперників, якщо: а) $n=6$; б) $n=7$?

Розв'язання. Будемо розв'язувати загальнішу задачу для вершин довільного правильного n-кутника. При цьому позначати такі вершини буквами будемо у порядку першого попадання у них фішки.

Вершину, в якій фішка знаходилася спочатку, позначимо A_1. Вершину, в яку її перемістив перший гравець, – A_2, а вершину, в яку після цього пересунув фішку другий гравець, – A_3.

Далі опишемо виграшну стратегію першого гравця. Спочатку він переміщує фішку з вершини A_3 у вершину A_1.

Якщо $n=3$, то гра закінчилася його перемогою. В іншому разі другий гравець змушений перемістити фішку у ще не задіяну вершину, яку позначимо A_4. У відповідь перший гравець переміщує фішку у вершину A_2.

Якщо при цьому він ще не виграв, то у другого знову вимушений хід в нову не задіяну вершину A_5, на що перший відповідає ходом у вершину A_1.

Таким чином, чергуючи ходи у вершини A_1 та A_2, перший гравець змушує суперника кожного разу ходити у нову не задіяну досі вершину. Зрозуміло, що, яким би не було n, такі нові вершини колись вичерпаються, і на цьому гра закінчиться перемогою першого гравця.

Нескладно порахувати, що при цьому разом обома гравцями буде зроблено $2n-3$ ходи. Якщо n непарне, то гра закінчиться у вершині A_1, а якщо n парне, то вона фінішує у вершині A_2.

Зокрема, для $n=6$ та $n=7$ за описаної стратегії завершення гри відбудеться у вершинах A_2 та A_1 відповідно.

17. Задано чотири послідовні члени арифметичної прогресії a_1, a_2, a_3, a_4. Миколка і Ганнуся грають у таку гру. Вони по черзі (першою ходить Ганнуся) вибирають одне з чотирьох заданих чисел і записують його замість символу $*$ у вираз $*\cdot*-*\cdot*$. Після чотирьох ходів у виразі кожне із заданих чисел зустрічається по одному разу. Якщо значення виразу є від'ємним числом, то виграє Миколка. В іншому випадку виграє Ганнуся. Чи є у Ганнусі виграшна стратегія?

Розв'язання. Позначимо через a медіану, і для зручності – через $2d$ різницю цієї прогресії. Тоді $a_1=a-3d$, $a_2=a-d$, $a_3=a+d$, $a_4=a+3d$.

Якщо $d=0$, то всі елементи прогресії рівні, і значення отриманого виразу також буде дорівнювати 0, тобто виграє Ганнуся.

Нехай тепер $d>0$. Обчислимо різниці:

$$a_4a_3-a_1a_2=(a+3d)(a+d)-(a-3d)(a-d)=8ad,$$

$$a_4a_2-a_1a_3=(a+3d)(a-d)-(a-3d)(a+d)=4ad,$$

$$a_3a_2-a_1a_4=(a+d)(a-d)-(a-3d)(a+3d)=8d^2.$$

Звідси отримуємо, що за умови $a \geq 0$, тобто $a_1 + a_4 \geq 0$, Ганнуся переможе, якщо першим своїм ходом запише a_1 у праву частину виразу. А за умови $a < 0$, тобто $a_1 + a_4 < 0$, їй для перемоги достатньо своїм першим ходом записати у праву частину виразу a_4.

Випадок $d < 0$ зводиться до попереднього, якщо елементи заданої прогресії занумерувати в протилежному порядку, або ж просто поміняти ролями a_1 та a_4.

Як узагальнення розглянемо аналогічні ігри з чотирма послідовними елементами інших послідовностей:

а*). *Геометрична прогресія.

Нехай $a_1 = a$, $a_2 = aq$, $a_3 = aq^2$, $a_4 = aq^3$.

Випадки $a = 0$, $q = 0$ та $q = 1$ є тривіальними. Для них значення отриманого виразу буде дорівнювати 0, тобто перемагає Ганнуся.

Для інших a та q обчислимо різниці:

$$a_4a_3 - a_1a_2 = aq^3 \cdot aq^2 - a \cdot aq = a^2q\left(q^4 - 1\right),$$

$$a_4a_2 - a_1a_3 = aq^3 \cdot aq - a \cdot aq^2 = a^2q^2\left(q^2 - 1\right),$$

$$a_3a_2 - a_1a_4 = aq^2 \cdot aq - a \cdot aq^3 = 0.$$

Звідси випливає, що для перемоги Ганнусі достатньо своїм першим ходом записати:

a_1 у праву частину виразу, якщо $q > 1$;

a_4 у праву частину виразу, якщо $0 < q < 1$;

a_3 у ліву частину виразу, якщо $-1 \leq q < 0$;

a_2 у ліву частину виразу, якщо $q < -1$.

б*). *Послідовність чисел Фібоначчі.

Розглянемо послідовність чисел F_n, яка визначається рівностями: $F_1 = F_2 = 1$ та $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$, $n \in \mathrm{N}$. Нехай $a_1 = F_n$, $a_2 = F_{n+1}$, $a_3 = F_{n+2}$, $a_4 = F_{n+3}$ для деякого натурального числа n.

З врахування формул Кассіні для всіх $n \in \mathrm{N}$ отримуємо:

$$a_4a_3 - a_1a_2 = F_{n+3}F_{n+2} - F_nF_{n+1} =$$

$$=\left(F_{n+1}+F_{n+2}\right)F_{n+2}-\left(F_{n+2}-F_{n+1}\right)F_{n+1}=F_{n+2}^2+F_{n+1}^2>0,$$

$$a_4a_2-a_1a_3=F_{n+3}F_{n+1}-F_nF_{n+2}=\left(F_{n+2}+F_{n+1}\right)F_{n+1}-F_nF_{n+2}=$$

$$=F_{n+2}F_{n+1}+\left(F_{n+1}^2-F_nF_{n+2}\right)=F_{n+2}F_{n+1}+\left(-1\right)^n>0,$$

$$a_3a_2-a_1a_4=F_{n+2}F_{n+1}-F_nF_{n+3}=$$

$$=\left(F_{n+1}+F_n\right)F_{n+1}-F_n\left(F_{n+2}+F_{n+1}\right)=F_{n+1}^2-F_nF_{n+2}=\left(-1\right)^n.$$

Тому виграшна стратегія Ганнусі полягає в наступному: якщо n парне, то вона першим ходом записує $a_1=F_n$ у праву частину виразу; якщо ж n непарне, то вона першим ходом записує $a_4=F_{n+3}$ зліва.

Зауважимо, що для послідовності *чисел Люка*, які визначаються рівностями $L_1=1,\ L_2=3$ та $L_{n+2}=L_n+L_{n+1},\ n\in\mathrm{N}$, подібно отримаємо, що $a_4a_3-a_1a_2=L_{n+2}^2+L_{n+1}^2>0$, $a_4a_2-a_1a_3=L_{n+2}L_{n+1}-5\left(-1\right)^n>0$ та $a_3a_2-a_1a_4=5\left(-1\right)^{n+1}$. Тому тепер навпаки, Ганнусі для перемоги треба першим ходом записати $a_1=L_n$ у праву частину виразу, якщо n непарне, та записати першим ходом $a_4=L_{n+3}$ зліва, якщо n парне.

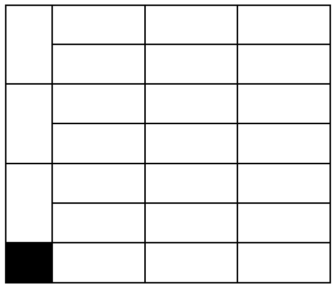
18. Двоє грають у таку гру. Перший називає будь-який натуральний дільник числа 1000000, а далі гравці по черзі множать або ділять останній названий дільник на просте число так, щоб отриманий результат був знову дільником числа 1000000, який не називався раніше. Гравець, який не зможе зробити хід, програє. Хто переможе за правильної гри обох суперників?

Розв'язання. Зразу будемо розв'язувати загальнішу задачу для гри з дільниками числа $p^{2m}q^{2n}$, де p, q – довільні різні прості, а m, n – довільні натуральні числа.

Геометрично таку задачу можна трактувати як блукання фішкою одиничними квадратиками, на які горизонтальними та вертикальними відрізками розбито прямокутник розмірами $\left(2m+1\right)\times\left(2n+1\right)$.

Вибір першим гравцем початкового дільника означає вибір стартового квадратика; множенню чи діленню на p відповідає рух до сусіднього квадратика справа чи зліва відповідно; а множенню чи діленню на $q-$ відповідні рухи до сусідніх квадратиків зверху чи знизу. При цьому лівий нижній квадратик відповідає дільнику 1, правий верхній – числу $p^{2m}q^{2n}$.

На прикладі $m=n=3$ проілюструємо виграшну стратегію першого гравця. Він вибирає дільник 1 - заштрихований квадратик. Інші квадратики розіб'ємо на пари, наприклад, лівий стовпчик у вертикальні, а решту у горизонтальні прямокутники 1×2, як у таблиці справа:



Як тільки другий гравець пересуває фішку в одну з клітинок такої пари, перший у відповідь пересуває цю фішку в другу клітинку цієї ж пари. Таким чином, у першого гравця завжди знайдеться хід у відповідь. А оскільки кількість пар клітинок скінченна, то на комусь кроці ходи другого гравця вичерпаються.

Для $p=2$, $q=5$, $m=n=3$ як окремий випадок отримуємо задачу на гру з дільниками числа 1000000.

Зауважимо, що описана стратегія природно переноситься на гру з дільниками числа $p^{2m}q^{2n}r^{2k}$, де $p, q, r-$ довільні попарно різні прості, а $m, n, k-$ довільні натуральні числа.

Геометрично вона зведеться до блукання одиничними кубиками паралелепіпеда розмірами $(2m+1)\times(2n+1)\times(2k+1)$, який розбили прямокутні паралелепіпеди розмірами $1\times1\times2$ та 1 одиничний кубик.

Для перемоги першому гравцеві достатньо спочатку стати в одиничний кубик, який не входить в жодну пару, а потім на кожен хід суперника відповідати переміщенням в другий із одиничних кубиків того ж паралелепіпеда, в якому перед цим опинився другий гравець.

19. Цар Сиракуз Гієрон мав 6 золотих злитків. На вигляд злитки схожі, проте маси у них різні (однакових мас немає). Архімеду видали терези зі стрілкою і бирки з номерами від 1 до n. Гієрон наказав Архімеду зважити ці злитки й на кожний приклеїти бирку так, щоб номери йшли за зростанням мас. При цьому Архімеду видають злитки по одному й одразу після зважування й наклеювання бирки його забирають (тобто змінити бирку вже не можна). Проте дозволяється, щоб номери йшли не за порядком: наприклад, можна, щоби найлегший мав номер 3, другий за масою – 8 тощо. Вкажіть хоч одне n, за якого Архімед зуміє впоратись із завданням?

Розв'язання. Зразу будемо розв'язувати загальнішу задачу для k золотих злитків і доведемо, що мінімальне значення n, за якого Архімед гарантовано впорається із завданням, дорівнює $2^k - 1$.

Для доведення введемо до розгляду два фіктивні злитки з масами $m_0 = 0$ та $m_\infty = \infty$ відповідно. Будемо вважати, що на ці злитки уже наклеєні номери 0 та 2^k.

На перший принесений Архімедові злиток він наклеює номер $n_1 = 2^{k-1}$ – середнє арифметичне номерів фіктивних злитків.

Далі, для кожного нового принесеного йому злитка з масою m Архімед встановлює між якими двома сусідніми масами з попередніх злитків (враховуючи й фіктивні) знаходиться маса принесеного злитку і наклеює на нього номер, який також дорівнює середньому арифметичному номерів таких двох злитків.

При цьому для проведення всього процесу нумерування йому вистачить бирок з номерами від 1 до $2^k - 1$, тобто маємо $n \geq 2^k - 1$.

Для $k = 1$ чи $k = 2$ це твердження очевидне. А якщо припустити, що воно правильне для всіх $k \leq m$, де $m > 1$, то для $k = m + 1$ після наклеювання першого номера $n_1 = 2^m$ як зліва, так справа від нього залишається необхідний запас у $2^m - 1$ номерів.

Меншої кількості бирок може й не вистачити. Наприклад, взяти $n_1 < 2^{k-1}$ не вдасться, якщо подані злитки йтимуть за спаданням мас. Водночас запаси номерів мають бути достатніми в обидві сторони, бо у кожен момент порядок чергування мас злитків може змінитися.

20. За допомогою мікроскопу вчені вивчають 5 мікроорганізмів, які є ідентичними між собою в усьому, крім розмірів та швидкості росту. Кожен мікроорганізм росте з певною лінійною швидкістю, яка для різних організмів може бути різною. Щохвилини вчені проводять спостереження: вони дивляться у мікроскоп та занотовують 5 чисел, що відповідають розмірам мікроорганізмів у даний момент часу (порядок чисел виявляється довільним, оскільки організми весь час рухаються). Доведіть, що існує таке число m, яке не залежить від набору мікроорганізмів, що після m спостережень вчені гарантовано зможуть вивести набір із 5 швидкостей, з якими ростуть мікроорганізми.

Розв'язання. Зразу будемо розв'язувати загальнішу задачу для довільного числа із n мікроорганізмів.

Зрозуміло, що у випадку $n=1$ достатньо буде двох вимірювань – на початку і через хвилину.

Нехай тепер $n \geq 2$. Розглянемо довільні два мікроорганізми з цього набору з початковими розмірами a, b та швидкостями росту u, v відповідно, причому $|a-b|+|v-u| \neq 0$. У момент часу t їхні розміри дорівнюватимуть $a+ut$ та $b+vt$. Якщо $u<v$, то, не залежно від a, b, у деякий момент часу t різниця їхніх розмірів $(b+vt)-(a+ut)$ стане додатною. А якщо $u=v$, то ця різниця не зміниться і дорівнюватиме $b-a \neq 0$.

Звідси випливає, що для довільного скінченного набору мікроорганізмів у деякий момент часу t їхні розміри виявляться попарно різними, і, крім того, вони будуть впорядковані у тому ж порядку, що й швидкості їхнього росту (за рівних швидкостей таке впорядкування відповідатиме їхнім початковим розмірам).

Якщо у цей момент часу записати n чисел, які відповідають розмірам мікроорганізмів, у порядку зростання $\left(s_1^t, s_2^t, \ldots, s_n^t\right)$ і так само повторити через хвилину, записавши набір чисел $\left(s_1^{t+1}, s_2^{t+1}, \ldots, s_n^{t+1}\right)$, то шуканий набір швидкостей росту буде: $\left(s_1^{t+1}-s_1^t, s_2^{t+1}-s_2^t, \ldots, s_n^{t+1}-s_n^t\right)$.

Відповідно, шукане число $m=t+2$.

XVI Івано-Франківський обласний турнір юних математиків 2020 року.

1. Марійка та Миколка зіграли дві різні ігри з такими правилами відповідно:

1). Миколка називає просте число p. Після цього Марійка записує на дошці натуральне число n. Тоді Миколка дописує до цього числа справа одну чи декілька цифр 3 і виграє, якщо отримане таким чином число ділиться на p. В іншому разі – перемагає Марійка;

2). Миколка записує на дошці натуральне число n, а цифри 3 справа до нього дописує Марійка і виграє, якщо у такий спосіб їй вдасться отримати складене число. В іншому разі – перемагає Миколка.

З яким рахунком закінчиться їхній спаринг за сумою двох ігор, якщо у кожній з них обоє прагнуть перемогти?

Розв'язання. Проаналізуємо кожну з ігор окремо.

1). Виграє Марійка. Якщо $p=2$ чи $p=5$, то немає значення, яке натуральне число n вона запише. Для $p=3$ їй для перемоги достатньо записати довільне натуральне число n, яке не ділиться на 3.

Нехай тепер просте число $p \geq 7$. Якщо при цьому число $p-1$ ділиться на 3, то Марійка запише натуральне число $n=\frac{p-1}{3}$, остача якого при діленні на p дорівнює $\frac{p-1}{3}$. Ця ж остача залишиться, якщо дописати до нього справа цифру 3. Справді, утворене таким чином число $10 \cdot \frac{p-1}{3}+3=3p+\frac{p-1}{3}$. Тому у такому разі Миколці не вдасться отримати число, кратне p.

Якщо ж число $p-1$ не ділиться на 3, то на 3 ділиться число $p+1$. При цьому Марійці для перемоги достатньо буде записати на дошці натуральне число $n=p-\frac{p+1}{3}=\frac{2p-1}{3}$, остача якого при діленні на p

дорівнює $\frac{2p-1}{3}$. Дописування справа до нього цифри 3 приводить до натурального числа $10\cdot\frac{2p-1}{3}+3=6p+\frac{2p-1}{3}$, остача якого при діленні на p також дорівнює $\frac{2p-1}{3}$. Отже, і в цьому разі Миколці отримати число, яке ділиться на p, не вдасться.

2). Доведемо, що не існує жодного натурального числа n, яке міг би записати Миколка для своєї перемоги.

Припустимо, що перше отримане Марійкою число p_1 є простим і розглянемо p_1+1 чисел вигляду 3, 33, 333, …, 33…3, для запису останнього з яких використано p_1+1 трійок. Оскільки різних остач при діленні на p_1 є лише p_1, то серед записаних лише трійками чисел знайдуться принаймні два числа, які при діленні на p_1 дають однакові остачі. Їх різниця – число вигляду 33…300…0 – буде ділитися на p_1.

Оскільки p_1 закінчується цифрою 3 і не ділиться ні на 2, ні на 5, то й деяке число, записане лише трійками, ділиться на p_1. Дописавши цю кількість трійок справа до p_1, Марійка отримає складене число.

Наприклад, для $n=2$ у послідовності чисел p_k, які може виписати Марійка, є нескінченна кількість чисел, кратних 23. Крім них, наприклад, складеними є також числа $p_6=2333333=19\cdot122807$ та $p_7=23333333=17\cdot1372549$.

Висновок. Їхній спаринг закінчиться перемогою Марійки з рахунком 2:0.

2. На площині розміщено 2020 точок, жодні три з яких не лежать на одній прямій. Шість гравців по черзі з'єднують ці точки відрізками, кожний олівцем свого кольору. За один раз дозволяється з'єднати довільні дві точки, які ще не були з'єднаними. Виграє той, хто першим отримає трикутник з вершинами у заданих точках, усі сторони якого мають однаковий колір. Кожен гравець прагне перемогти і при цьому намагається завадити здобути перемогу своїм суперникам. Чи обов'язково за цих умов вдасться виявити переможця такої гри?

Розв'язання. Обов'язково. Припустимо протилежне, тобто проведені всі можливі відрізки, але при цьому потрібного трикутника з трьома сторонами одного кольору не виявилося.

Зафіксуємо одну з точок та розглянемо 2019 відрізків, які виходять з неї. Принаймні 337 з них будуть одного кольору, який назвемо першим. Оскільки за припущенням потрібного трикутника не існує, то 337 точок, які є протилежними кінцями цих відрізків з'єднані між собою лише іншими п'ятьма кольорами.

Зафіксуємо одну з цих точок і розглянемо 336 відрізків, які виходять з неї до решти з них. Принаймні 68 таких відрізків будуть одного кольору, який вважатимемо другим. Внаслідок зробленого припущення 68 точок з'єднують між собою інші чотири кольори.

Фіксуємо одну з них і розглядаємо 67 відрізків, які виходять з неї до решти таких точок. Принаймні 17 з цих відрізків будуть третього кольору. Для з'єднання 17 точок маємо лише три кольори.

Міркуючи далі аналогічно, для 16 відрізків отримаємо принаймні 6 відрізків четвертого кольору, протилежні кінці яких з'єднані між собою лише двома останніми кольорами.

Розглянемо 6 таких протилежних кінців. Фіксуючи одну з цих точок, отримаємо, що принаймні 3 з п'яти відрізків, які виходять з неї, матимуть п'ятий колір, а для з'єднання їх протилежних кінців не можна використати жодний з перших п'яти кольорів.

Але й використання шостого, кольору також суперечить припущенню, тому зроблене припущення було хибним.

Таким чином, комусь з гравців пощастить здобути перемогу.

3. Натуральні числа x та y задовольняють умову $23+x^2=24y^2$. Доведіть, що множина усіх пар таких чисел є нескінченною.

Розв'язання. Запишемо подану в умові рівність у вигляді

$$(x-y)(x+y)=23\left(y^2-1\right). \qquad (1)$$

23 – просте число, тому на нього ділиться один із множників лівої частини рівності (1).

Нехай $x-y=23k,\ k\in \mathrm{N}\cup\{0\}$. Тоді $x+y=23k+2y$, і рівність (1) можна переписати у вигляді квадратного рівняння відносно y:

$$y^2-2ky-23k^2-1=0. \qquad (2)$$

Щоб воно мало розв'язки у цілих числах, необхідно, щоб його дискримінант був квадратом цілого числа. Покладаючи $\frac{D}{4} = k^2 + \left(23k^2 + 1\right) = 24k^2 + 1 = m^2,\ m \in \mathrm{N}$, приходимо до рівняння Пелля $m^2 - 24k^2 = 1$, розв'язком якого є пара чисел $m_0 = 1,\ k_0 = 0$.

Нескладно знайти й наступну таку пару $m_1 = 5,\ k_1 = 1$. А оскільки 24 не є квадратом цілого числа, то інші розв'язки цього рівняння у натуральних числах визначаться такими рекурентними співвідношеннями $m_{n+1} = m_1 m_n + 24k_1 k_n$ та $k_{n+1} = k_1 m_n + 24m_1 k_n$, тобто:

$$m_{n+1} = 5m_n + 24k_n, \quad k_{n+1} = m_n + 5k_n, \quad n \in \mathrm{N}.$$

Повертаючись тепер до рівняння (2) та рівності (1), знайдемо:

$$y_n = k_n + m_n, \quad x_n = 23k_n + y_n = 24k_n + m_n,\ n \in \mathrm{N} \bigcup \{0\}.$$

До того ж рівняння Пелля прийдемо, й покладаючи $x + y = 23k,\ k \in \mathrm{N}$. При цьому отримаємо ще одну множину пар розв'язків вихідного рівняння у натуральних числах:

$$y_n = -k_n + m_n, \quad x_n = 23k_n - y_n = 24k_n - m_n,\ n \in \mathrm{N}.$$

4. Число 20 записали 16 разів поспіль. Подайте отримане у такий спосіб 32-цифрове число як суму квадратів двох натуральних чисел та обґрунтуйте правильність свого представлення.

Розв'язання. Отримане число A дорівнює

$$20 \cdot \left(100^{15} + 100^{14} + \ldots + 100^1 + 1\right).$$

Тому його можна подати у вигляді

$$A = 4\left(2^2 + 1^2\right)\left(10^2 + 1^2\right)\left(\left(10^2\right)^2 + 1^2\right)\left(\left(10^4\right)^2 + 1^2\right)\left(\left(10^8\right)^2 + 1^2\right).$$

Скористаємося тотожністю

$$\left(a^2 + b^2\right)\left(c^2 + d^2\right) = \left(ac + bd\right)^2 + \left(bc - ad\right)^2.$$

Послідовно отримуємо:

$$\left(2^2 + 1^2\right)\left(10^2 + 1^2\right) = 21^2 + 8^2,$$

$$\left(21^2 + 8^2\right)\left(\left(10^2\right)^2 + 1^2\right) = 2108^2 + 779^2,$$

$$\left(2108^2 + 779^2\right)\left(\left(10^4\right)^2 + 1^2\right) = 21080779^2 + 7787892^2,$$

$$\left(21080779^2+7787892^2\right)\left(\left(10^8\right)^2+1^2\right)=$$

$$=2108077907787892^2+778789178919221^2.$$

Отже,

$$A=4\cdot\left(2108077907787892^2+778789178919221^2\right)=$$

$$=4216155815575784^2+1557578357838442^2.$$

Зауважимо, що таке представлення не єдине. Враховуючи також тотожність $\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)=\left(ac-bd\right)^2+\left(bc+ad\right)^2$ та комбінуючи ці дві тотожності, можна отримати принаймні 16 представлень числа A як суми квадратів двох натуральних чисел.

Наприклад, на першому кроці за другою тотожністю ми могли отримати ще й таку рівність: $\left(2^2+1^2\right)\left(10^2+1^2\right)=19^2+12^2$.

А оскільки $10001=73\cdot137=\left(8^2+3^2\right)\left(11^2+4^2\right)$, то отримаємо, що таких представлень не менше 32.

5. Назвемо елемент $k\in\left\{2^{20},\ 2^{20}+1,\ 2^{20}+2,\ ...,\ 2^{21}-1\right\}$ *особливим*, якщо в його записі у двійковій системі числення рівно 16 цифр не дорівнюють жодній із сусідніх з ними цифрам. Доведіть, що кількість особливих елементів такої множини ділиться на 17.

Розв'язання. Кожне число вказаної множини у двійковій системі числення записується 21-єю цифрою. Станемо у точку $A(0;0)$ і послідовно будемо аналізувати зліва направо цифри чисел k цієї множини, записаних у двійковій системі числення. Якщо така цифра не дорівнює жодній сусідній з нею, то переходимо з точки $(i;\ j)$ у точку $(i;\ j+1)$, в іншому разі – у точку $(i+1;\ j)$.

Для особливих чисел k і тільки для них після 21-го такого переходу опинимося у точці $B(5;16)$. Тому кількість особливих елементів такої множини дорівнює кількості шляхів по лініях координатної сітки вправо та вверх з точки $A(0;0)$ до точки $B(5;16)$, тобто дорівнює $C_{21}^{16}=C_{21}^{5}=\dfrac{21\cdot20\cdot19\cdot18\cdot17}{5!}=17\cdot1197$ і ділиться на 17.

6. Числа Фібоначчі визначаються рівностями: $F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$, $n \ge 1$. Доведіть, що $F_{17} > \sqrt{\dfrac{F_{15}F_{16}+1}{16}} + 15 \cdot \sqrt[16]{F_1F_2...F_{15}}$.

Розв'язання. Доведемо для всіх натуральних чисел n загальнішу нерівність $F_{n+2} \ge \sqrt{\dfrac{F_nF_{n+1}+1}{n+1}} + n \cdot \sqrt[n+1]{F_1F_2...F_n}$.

Для цього спочатку для невід'ємних чисел a_k та натуральних чисел m обґрунтуємо нерівність

$$\sum_{k=1}^{m} a_k \ge \frac{1}{\sqrt{m}} \sqrt{\sum_{k=1}^{m} a_k^2} + (m-1)\sqrt[m]{\prod_{k=1}^{m} a_k}. \qquad (*)$$

Внаслідок однорідності її достатньо довести для випадку $\prod_{k=1}^{m} a_k = 1$. При цьому (*) рівносильна нерівності

$$\sum_{k=1}^{m} a_k^2 + 2\sum_{1\le i<j\le m} a_i a_j \ge \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} a_k^2 + \frac{2(m-1)}{\sqrt{m}}\sqrt{\sum_{k=1}^{m} a_k^2} + (m-1)^2,$$

чи нерівності

$$(m-1)\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\sqrt{\sum_{k=1}^{m} a_k^2} - 1\right)^2 + 2\sum_{1\le i<j\le m} a_i a_j \ge m(m-1).$$

Оскільки

$$\sum_{1\le i<j\le m} a_i a_j \ge C_m^2 \cdot \sqrt[C_m^2]{\left(\prod_{k=1}^{m} a_k\right)^{m-1}} = C_m^2 = \frac{m(m-1)}{2},$$

то нерівність (*) доведена.

Нехай тепер $m = n+1$, $a_k = F_k$, $1 \le k \le n$, $a_{n+1} = 1$.

Використовуючи рівності $\sum_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$ та $\sum_{k=1}^{n} F_k^2 = F_nF_{n+1}$, з (*) отримуємо потрібну нам нерівність.

Покладаючи в ній $n = 15$, приходимо до нерівності з умови задачі. Зрозуміло, що така нерівність є строгою, бо у нерівності Коші рівність отримуємо лише для однакових елементів.

7. Для довільних натуральних чисел a, b, c, d розв'яжіть нерівність $x < \frac{ax+b}{cx+d}$.

Розв'язання. Якщо $\Delta = ad - bc = 0$, то нерівність набуває вигляду $x < \frac{a}{c}$ і має розв'язок $x \in \left(-\infty; -\frac{d}{c}\right) \cup \left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$.

Якщо ж $\Delta = ad - bc \neq 0$, то запишемо цю нерівність у вигляді $\frac{cx^2 + (d-a)x - b}{cx+d} < 0$ і розглянемо функцію $f(x) = cx^2 + (d-a)x - b$.

Її нулі

$$x_1 = \frac{a - d - \sqrt{(d-a)^2 + 4bc}}{2c} < 0 \text{ та } x_2 = \frac{a - d + \sqrt{(d-a)^2 + 4bc}}{2c} > 0,$$

між якими вона набуває від'ємних значень, а поза ними – додатних.

Позначимо через $x_0 = -\frac{d}{c}$ корінь рівняння $cx + d = 0$. Тоді

$$f(x_0) = c\left(-\frac{d}{c}\right)^2 + (d-a)\left(-\frac{d}{c}\right) - b = \frac{\Delta}{c}.$$

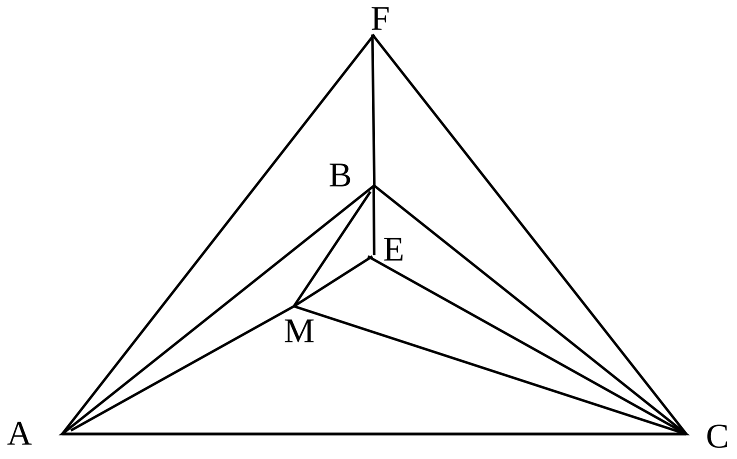
Звідси випливає, що у випадку $\Delta = ad - bc > 0$ початкова нерівність має розв'язок $x \in (-\infty; x_0) \cup (x_1; x_2)$, а у разі $\Delta = ad - bc < 0$ – розв'язок $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_0; x_2)$.

Відзначимо, що для $\Delta = ad - bc = 0$ розв'язок початкової нерівності може бути визначений за будь-якою з цих формул, оскільки при цьому $x_1 = x_0 = -\frac{d}{c}$, а $x_2 = \frac{a}{c}$.

8. У рівнобедреному трикутнику ABC з кутом 100° при вершині B вибрали точку M таку, що $\angle MAC = 30^\circ$, $\angle MCA = 20^\circ$. Знайдіть величину кута BMC.

Розв'язання. Нехай E – точка перетину бісектриси кута ABC та прямої AM (див. мал. нижче). $\angle EAC = \angle ECA = 30^\circ$, тому BE – бісектриса кута ABC. Отже, $\angle EMC = \angle EBC = 50^\circ$ та $\angle ECM = \angle ECB = 10^\circ$.

З рівності трикутників EMC та EBC зі спільною стороною EC отримуємо, що $MC = BC$. Оскільки $\angle BCM = 20^{o}$, то $\angle BMC = 80^{o}$.



Можна було також розглянути рівносторонній трикутник AFC і, внаслідок рівності трикутників ACM та FCB за рівними сторонами AC та FC і двома прилеглими до них кутами, які дорівнюють по 20 та по 30 градусів відповідно, отримати $MC = BC$.

Аналогічно обома цими способами розв'язується і така загальніша задача: Всередині рівнобедреного трикутника ABC, в якому $\angle ABC = 2\beta$, $30^{o} < \beta < 60^{o}$, вибрали точку M таку, що $\angle MAC = 30^{o}$, $\angle MCA = \beta - 30^{o}$. Знайти величину кута BMC.

Відповідь. $\angle BMC = 30^{o} + \beta$.

Для $\beta = 50^{o}$ отримуємо результат пропонованої задачі.

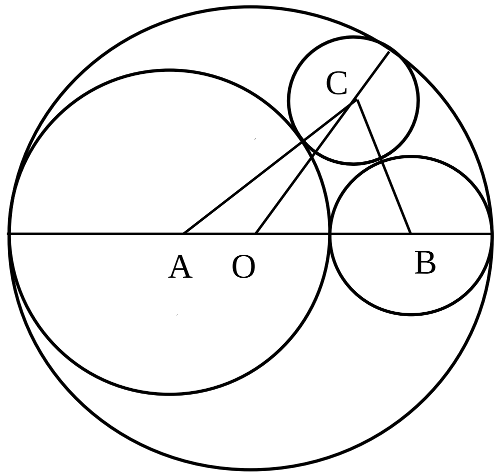
9. Два кола дотикаються зовнішнім чином. Коло радіуса R дотикається до обох із них у двох різних точках, які лежать на прямій, що проходить через їхні центри. Коло радіуса r дотикається до кожного з трьох попередніх кіл. Яких значень може набувати при цьому відношення $\dfrac{r}{R}$?

Нехай кола з центрами A та B мають радіуси a та b відповідно. Позначимо центр кола радіуса $R = a + b$ точкою O, а центр кола радіуса r – точкою C (див. мал. нижче). Тоді $AO = b$, $BO = a$,

$AC = a + r$, $BC = b + r$, $OC = R - r$. Якщо $\angle COB = \varphi$, то за теоремою косинусів для трикутників AOC та BOC отримаємо такі дві рівності:

$$\left(a + r\right)^2 = b^2 + \left(R - r\right)^2 + 2b\left(R - r\right)\cos\varphi,$$

$$\left(b + r\right)^2 = a^2 + \left(R - r\right)^2 - 2a\left(R - r\right)\cos\varphi.$$

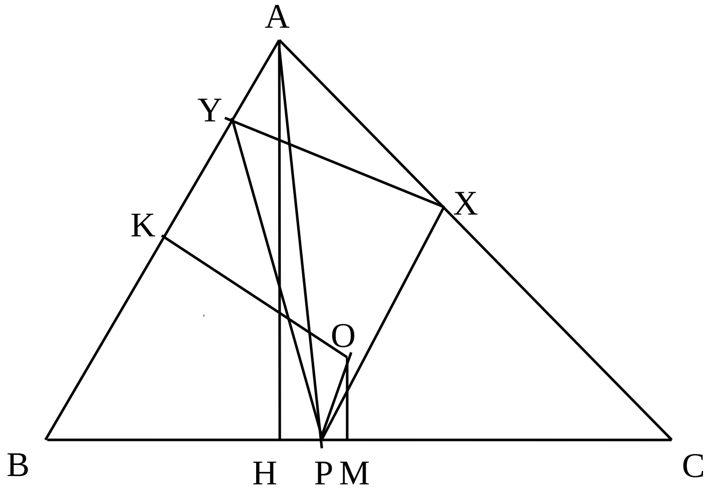


Додамо їх, помноживши першу на a, другу – на b. З отриманого при цьому рівняння знайдемо радіус $r = \dfrac{abR}{a^2 + ab + b^2}$.

Оскільки $\dfrac{R}{r} = \dfrac{a^2 + ab + b^2}{ab} = \dfrac{a}{b} + 1 + \dfrac{b}{a} \geq 3$, то $0 < \dfrac{r}{R} \leq \dfrac{1}{3}$. Рівність можлива лише за умови $a = b$. З міркувань неперервності отримуємо, що відношення $\dfrac{r}{R}$ може набувати всіх значень з проміжку $\left(0; \dfrac{1}{3}\right]$.

10. У гострокутному трикутнику ABC провели бісектрису AP та відмітили центр O описаного кола. Описане коло трикутника ABP вдруге перетинає пряму AC у точці X, описане коло трикутника ACP вдруге перетинає пряму AB у точці Y. Доведіть, що прямі XY та PO перпендикулярні.

Розв'язання. Введемо систему координат з початком у точці H – основі висоти AH.



Задамо у цій системі координати деяких точок: $A(0;h)$, $B(b;0)$, $C(c;0)$, $K\left(\frac{b}{2};\frac{h}{2}\right)$, $M\left(\frac{b+c}{2};0\right)$, $P(p;0)$. Щоб трикутник був гострокутним, додатково будемо вимагати, щоб виконувалися нерівності: $b<0$, $c>0$, $h^2+bc>0$. Крім того, оскільки у випадку $AB=AC$ як твердження задачі, так і обернене до нього твердження є очевидними, то будемо вважати, що $b+c>0$. Тоді $0<p<\frac{b+c}{2}$.

Оскільки описане коло трикутника ACP перетинає пряму AB у точці Y, то $\angle BYP=\angle BCA,\ \angle BPY=\angle BAC$. Отже, трикутники BPY та BAC подібні. Тому $\frac{BY}{BC}=\frac{BP}{AB}\Rightarrow\frac{BY}{AB}=\frac{BC\cdot BP}{AB^2}=\frac{(p-b)\cdot(c-b)}{b^2+h^2}$.

Тоді із співвідношень $\frac{x-b}{0-b}=\frac{(p-b)\cdot(c-b)}{b^2+h^2}=\frac{y}{h}$ отримуємо координати точки Y: $x_Y=b\left(1-\frac{(p-b)\cdot(c-b)}{b^2+h^2}\right)$, $y_Y=\frac{(p-b)\cdot(c-b)}{b^2+h^2}h$.

Аналогічно для координат точки X будемо мати:

$$x_X=c\left(1-\frac{(p-c)\cdot(b-c)}{c^2+h^2}\right),\ y_X=\frac{(p-c)\cdot(b-c)}{c^2+h^2}h.$$

Тому кутовий коефіцієнт прямої XY є таким:

$$k_1=\frac{y_Y-y_X}{x_Y-x_X}=\frac{\frac{(p-b)\cdot(c-b)}{b^2+h^2}h-\frac{(p-c)\cdot(b-c)}{c^2+h^2}h}{b\left(1-\frac{(p-b)\cdot(c-b)}{b^2+h^2}\right)-c\left(1-\frac{(p-c)\cdot(b-c)}{c^2+h^2}\right)}=$$

$$=\frac{(p-b)\left(c^2+h^2\right)+(p-c)\left(b^2+h^2\right)}{\left(b^2+h^2\right)\left(c^2+h^2\right)+b(p-b)\left(c^2+h^2\right)+c(p-c)\left(b^2+h^2\right)}h=$$

$$=\frac{(2p-b-c)h^2+(p-b)c^2+(p-c)b^2}{\left(h^2+bc\right)\left(h^2+bp+bc-bc\right)}h.$$

Оскільки кутовий коефіцієнт прямої AB дорівнює $\frac{h}{-b}$, то рівняння серединного перпендикуляра KO до сторони AB має вигляд: $y-\frac{h}{2}=\frac{b}{h}\left(x-\frac{b}{2}\right)$. Оскільки $x_O=\frac{b+c}{2}$, то $y_O=\frac{h}{2}+\frac{bc}{2h}=\frac{h^2+bc}{2h}$. Отже, кутовим коефіцієнтом прямої PO є число $k_2=\frac{y_O-y_M}{x_M-x_P}=\frac{h^2+bc}{(b+c-2p)h}$.

Тоді $k_1k_2=\frac{(2p-b-c)h^2+(p-b)c^2+(p-c)b^2}{(h^2+bp+bc-bc)(b-c-2p)}$.

Прямі XY та PO будуть перпендикулярними тоді і тільки тоді, коли $k_1k_2=-1$. З врахуванням попередньої рівності переконуємося, що це рівносильне умові $(2p-b-c)h^2=(2bc-bp-cp)p$.

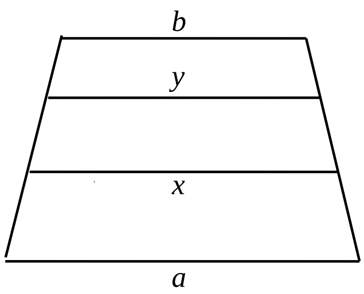
З іншого боку, AP є бісектрисою трикутника тоді і тільки тоді, коли $\frac{b^2+h^2}{(p-b)^2}=\frac{c^2+h^2}{(p-c)^2}$, що, також рівносильне цій же умові.

Отже, прямі XY та PO перпендикулярні тоді тільки тоді, коли $AP-$ бісектриса трикутника ABC.

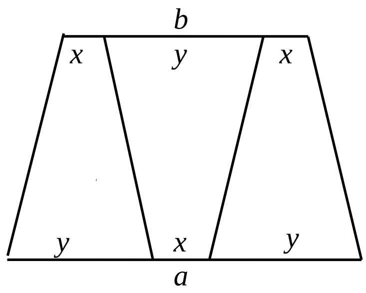
11. Розріжте рівнобічну трапецію на три подібні між собою трапеції всіма можливими способами. Для рівнобічної трапеції з основами a та b і бічною стороною $c=1$ з'ясуйте необхідні та достатні умови реалізації кожного способу розрізання.

Розв'язання. Розглянемо можливі способи розрізання рівнобічної трапеції з основами a та b і бічною стороною c на три подібні між собою трапеції. При цьому будемо вважати, що $a>b$.

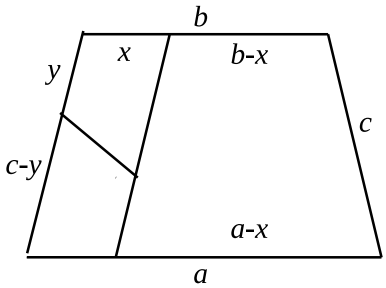
1. Нехай трапеція розбита на три подібні між собою трапеції двома паралельними до основ лініями. Тоді з відношень $\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{b}$ отримуємо $x^2=ay$, $y^2=bx$, звідки знаходимо $x=\sqrt[3]{a^2b}$, $y=\sqrt[3]{ab^2}$ при довільному значенні $c>0$.



2. Нехай трапеція розбита на три рівні між собою трапеції двома лініями, паралельними до бічних сторін. Тоді з системи рівнянь $\begin{cases} x+2y=a, \\ y+2x=b, \end{cases}$ при довільному значенні $c>0$ знайдемо $x=\dfrac{2b-a}{3}$, $y=\dfrac{2a-b}{3}$ за умови $a<2b$.



3. Нехай трапеція розбита на три подібні між собою трапеції двома лініями, одна з яких паралельна до бічної сторони, і при цьому дві менші трапеції рівні між собою. Тоді з відношень $\dfrac{y}{b-x}=\dfrac{c-y}{a-x}=\dfrac{x}{c}$ для відповідних сторін трапецій отримуємо $\begin{cases} cy=(b-x)x, \\ c(c-y)=(a-x)x. \end{cases}$



Звідси маємо квадратне рівняння $2x^2-(a+b)x+c=0$, коренями якого за умови $a+b>2\sqrt{2}c$ є:

$$x_1=\frac{a+b+\sqrt{(a+b)^2-8c^2}}{4}, \quad x_2=\frac{a+b-\sqrt{(a+b)^2-8c^2}}{4}.$$

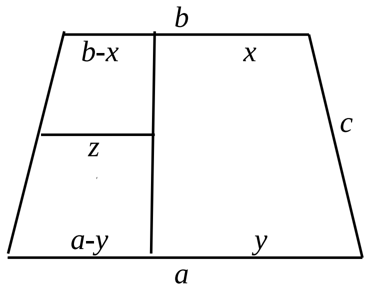
Нерівність $x_1<b \Leftrightarrow \sqrt{(a+b)^2-8c^2}<3b-a \Leftrightarrow b(a-b)<c^2$ за умови $3b-a\geq 0$. Зрозуміло, що за цієї ж умови також $x_2<x_1<b$.

А у випадку $3b-a<0$ отримаємо лише один розв’язок

$$x_2<b \Leftrightarrow \sqrt{(a+b)^2-8c^2}<a-3b \Leftrightarrow b(a-b)<c^2 .$$

Відповідно з першого рівняння записаної системи знайдемо $y_{1,2}=\dfrac{(b-x_{1,2})x_{1,2}}{c}$. При цьому за тих же умов, враховуючи друге рівняння системи та нерівність $a>b$, будемо мати $y_{1,2}<c$.

4. Нехай трапеція розбита на три подібні між собою прямокутні трапеції. Тоді з відношень $\frac{z}{a-y}=\frac{b-x}{z}=\frac{x}{y}$ для відповідних сторін трапецій отримуємо $\frac{b-x}{a-y}=\frac{x^2}{y^2}$. Таке співвідношення при довільному значенні $c>0$ має розв’язок, бо при $x\to 0$ його ліва частина більша за праву, а при $x\to b$ його права частина більша за ліву. При цьому $y=x+\frac{a-b}{2}$.

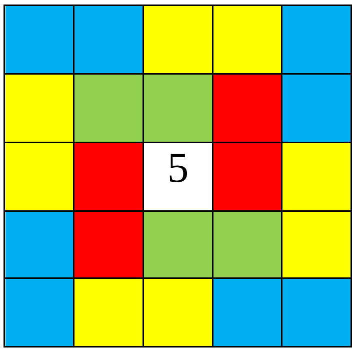


12. Чудний чоботар зшив 10 різних пар взуття, перемішав усі 20 чобіт між собою та розставив випадковим чином у ряд. Його педантична подруга переставляє взуття: за один раз вона може взяти будь-які два чоботи та обміняти їх місцями. За яку мінімальну кількість таких обмінів їй гарантовано вдасться досягти розташування, в якому кожна пара чобіт розташована поруч, причому ліворуч стоїть лівий чобіт пари, а праворуч – правий?

Розв’язання. Нехай таких пар чобіт було n. Для $n=1$ достатньо буде однієї перестановки, якщо чоботи зразу не були встановлені у потрібному порядку. Припустимо, що для деякого $n=k\geq 1$ вистачить $2k-1$ перестановок. Якщо доставити ще одну пару чобіт, то для їхнього впорядкування може знадобитися ще дві перестановки (за умови, що правий виявився крайнім зліва, а лівий – крайнім справа). Вилучивши цю впорядковану пару, зведемо проблему впорядкування до попереднього випадку. Тому для кожного n гарантовано вистачить $2n-1$ перестановок. Зокрема, для $n=10$ їх буде 19.

13. У клітинки квадрата 5×5 Петрик і Ганнуся по черзі (першим ходить Петрик) вписують цифри від 1 до 9. Квадрат називається *магічним*, якщо після заповнення всіх клітинок суми в усіх менших квадратах 3×3 належать діапазону [37; 53]. Петрик полюбляє магію і хоче зробити квадрат магічним. Чи вдасться Ганнусі йому завадити?

Розв'язання. Не вдасться. Петрик спочатку впише цифру 5 у центральну клітинку квадрата 5×5. Решту клітинок цього квадрата розіб'ємо на пари із двох сусідніх клітинок, позначених у таблиці справа одним кольором.



Якщо Ганнуся вписує цифру k в одну з клітинок такої пари, то Петрик записує в сусідню з нею клітинку цифру $10-k$. Таким чином, після заповнення всіх клітинок у виділеній парі сума записаних цифр дорівнюватиме 10.

Далі зауважимо, що кожен квадрат 3×3 містить центральну клітинку та принаймні три виділені пари клітинок 1×2 чи 2×1. При цьому у таких семи клітинках сума вписаних цифр дорівнює 35. Оскільки у решти двох клітинках суми записаних цифр не менші 2 та не більші 18, то, справді, суми в усіх менших квадратах 3×3 належать діапазону [37; 53].

14. Двоє гравців та суддя грають у таку гру. Суддя випадково вибирає один із натуральних дільників числа n та називає його, а далі гравці по черзі множать останній названий дільник на 2, або множать на 5, або ж ділять на 10 – так, щоб отриманий результат був знову дільником числа n, який не називався раніше. Гравець, який не може зробити хід, програв. Яка ймовірність, що за правильної гри виграє перший гравець, якщо $n=10^6$?

Розв'язання. Розглянемо таблицю розмірами 7 × 7 і заповнимо її дільниками числа $n=10^6$. При цьому у нижньому рядку зліва направо запишемо степені двійки 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, у кожному наступному рядку – числа у 5 разів більші ніж у рядку під ним. Таким чином, усі дільники числа $n=10^6$ будуть виписані. Множення на 2 будемо трактувати, як рух у цій таблиці на клітинку вправо, множення на 5 – як рух на клітинку вверх, а ділення на 10 – як по діагоналі вліво вниз. Зафарбуємо клітинки такої таблиці у два кольори, які позначимо номерами 1 та 2, так, щоб колір 2 мали ті і тільки ті клітинки, які знаходяться на перетині непарних рядків з непарними стовпчиками, а всі інші клітинки мали колір 1. Якщо суддя вказує на дільник, що знаходиться у клітинці кольору 1, то виграє перший гравець. В іншому разі – другий. Виграшна стратегія кожного з гравців полягає у тому, щоб кожного разу робити допустимий хід у клітинку, номер кольору якої не менший за номер кольору клітинки, в якій він знаходиться, і за кожної можливості ставати у клітинку кольору 2.

Оскільки всього клітинок є 49, а клітинок кольору 1 є 33, то ймовірність перемоги першого гравця дорівнює $33/49$.

Міркуючи аналогічно для гри з дільниками числа $n = 10^{2k}$, отримаємо, що шукана ймовірність становитиме $1 - \left(\frac{k+1}{2k+1}\right)^2$.

15. Неперервна функція f є *кусково-лінійною*, тобто для деяких чисел $x_1 < x_2 < \ldots < x_k$ вона є лінійною на кожному із проміжків $(-\infty; x_1]$, $[x_1; x_2]$, ... ,$[x_{k-1}; x_k]$, $[x_k; +\infty)$. Для $k = 3$ довести, що f можна єдиним чином подати у вигляді

$$f(x) = a_1|x - x_1| + a_2|x - x_2| + a_3|x - x_3| + a_4 x + a_5, \quad x \in \mathrm{R},$$

де a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 – деякі дійсні числа.

Розв'язання. Вказана функція однозначно визначається своїми значеннями у точках $x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4$. Нехай її значення у цих точках відповідно дорівнюють: $f(x_0) = y_0$, $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$, $f(x_3) = y_3$, $f(x_4) = y_4$. Визначник такої системи рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 має вигляд:

$$\Delta = \begin{vmatrix} |x_0 - x_1| & |x_0 - x_2| & |x_0 - x_3| & x_0 & 1 \\ 0 & |x_1 - x_2| & |x_1 - x_3| & x_1 & 1 \\ |x_2 - x_1| & 0 & |x_2 - x_3| & x_2 & 1 \\ |x_3 - x_1| & |x_3 - x_2| & 0 & x_3 & 1 \\ |x_4 - x_1| & |x_4 - x_2| & |x_4 - x_3| & x_4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Розкривши модулі, перепишемо його перший рядок без змін, а від кожного іншого рядка віднімемо попередній, від чого величина визначника не зміниться. У результаті, розкладаючи за п'ятим стовпчиком, отримаємо

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_0 - x_1 & x_2 - x_0 & x_3 - x_0 & x_0 & 1 \\ x_0 - x_1 & x_0 - x_1 & x_0 - x_1 & x_1 - x_0 & 0 \\ x_2 - x_1 & x_1 - x_2 & x_1 - x_2 & x_2 - x_1 & 0 \\ x_3 - x_2 & x_3 - x_2 & x_2 - x_3 & x_3 - x_2 & 0 \\ x_4 - x_3 & x_4 - x_3 & x_4 - x_3 & x_4 - x_3 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (x_1 - x_0)(x_2 - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_3) \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Для обчислення останнього визначника залишимо його четвертий рядок без змін, а від інших рядків віднімемо наступні за ними рядки.

Тоді $\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -8.$

Отже, $\Delta = -8(x_1 - x_0)(x_2 - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_3) \neq 0$. Тому і коефіцієнти a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, а з ними і функція $f(x)$ вказаного в умові задачі вигляду, визначаються однозначно.

Зауважимо, що, міркуючи так само для довільного натурального k для системи точок $x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_k < x_{k+1}$, ми отримали би значення аналогічного визначника рівним

$$\Delta = (-1)^{k+1}(-2)^k (x_1 - x_0)(x_2 - x_1)...(x_{k+1} - x_k) =$$
$$= -2^k (x_1 - x_0)(x_2 - x_1)...(x_{k+1} - x_k) \neq 0.$$

Відповідно, у загальному випадку таку неперервну кусково-лінійну функцію f можна єдиним чином подати у вигляді

$$f(x) = a_1|x - x_1| + a_2|x - x_2| + ... + a_k|x - x_3| + a_{k+1}x + a_{k+2}, \quad x \in \mathrm{R},$$

де $a_1, a_2, ..., a_k, a_{k+1}, a_{k+2}$ − деякі дійсні числа.

16. Числова множина A називається замкненою відносно операції множення, якщо добуток двох довільних елементів цієї множини також належить A. З тотожності Брамагупти $\left(x^2+ry^2\right)\left(z^2+rt^2\right)=\left(xz+ryt\right)^2+r\left(xt-yz\right)^2=\left(xz-ryt\right)^2+r\left(xt+yz\right)^2$ випливає замкнутість множини чисел вигляду x^2+ry^2. Нехай p, r, x, y – цілі числа. Для фіксованих p та r дослідіть на замкнутість відносно операції множення множини чисел вигляду px^2+ry^2.

Розв'язання. З тотожності Брамагупти зразу отримуємо такі пари шуканих p та r: $p=1,\ r\in \mathrm{Z}$.

З міркувань симетрії випливає, що підійдуть і пари: $p\in \mathrm{Z}$, $r=1$.

Також з тотожності $\left(px^2+ry^2\right)\left(pz^2+rt^2\right)=pu^2+rv^2$ випливає тотожність $\left(pk^2x^2+rk^2y^2\right)\left(pk^2z^2+rk^2t^2\right)=pk^2\left(ku\right)^2+rk^2\left(kv\right)^2$. Тому разом з $\left(p,r\right)$ для кожного $k\in \mathrm{Z}$ шуканою буде і пара $\left(pk^2,rk^2\right)$.

Звідси, враховуючи сказане вище, знаходимо ще й такі пари чисел p та r: $\left(k^2,mk^2\right)$ та $\left(mk^2,k^2\right)$, де m, k – довільні цілі числа.

Крім того, з рівності $\left(p\cdot 1^2+r\cdot 0^2\right)\left(p\cdot 0^2+r\cdot 1^2\right)=pr$ отримуємо, що обов'язково принаймні одне з чисел, p чи r, повинно бути квадратом цілого числа.

Нехай для конкретності $p=n^2$.

Якщо $n=0$, то з рівності $\left(0\cdot x^2+ry^2\right)\left(0\cdot z^2+rt^2\right)=rry^2t^2$ отримуємо, що r може і повинно бути квадратом деякого довільного цілого числа.

Якщо ж $n\neq 0$, то потрібно також розглядати і випадок, коли $r, \left|r\right|>p,$ не ділиться на p.

17. Доведіть, що існує безліч пар $\left(x,y\right)$ додатних раціональних чисел, що задовольняють рівняння $x^y=\left(2y\right)^x$.

Розв'язання. Будемо шукати розв'язки у вигляді $x = \frac{n+k}{n} y$, де $НСД\left(n,k\right) = 1$. Підставивши таке x у задану рівність, отримаємо:

$$\left(\frac{n+k}{n} y\right)^y = \left(2y\right)^{\frac{n+k}{n}y} \Leftrightarrow \frac{n+k}{n} y = \left(2y\right)^{\frac{n+k}{n}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{n+k}{n} y\right)^n = \left(2y\right)^{n+k} \Leftrightarrow y^k = \frac{1}{2^k}\left(\frac{n+k}{2n}\right)^n.$$

Таким чином, для отримання нескінченної кількості розв'язків заданого рівняння у додатних раціональних числах достатньо при кожному натуральному n покласти $k = 1$. При цьому отримаємо таку нескінченну кількість шуканих пар:

$$x = \left(\frac{n+1}{2n}\right)^{n+1},\ y = \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{2n}\right)^n,\ n \in \mathrm{N}.$$

Інший нескінченний набір розв'язків отримуємо, покладаючи $k = -1$ при кожному натуральному $n \ge 2$:

$$x = \left(\frac{2n}{n-1}\right)^{n-1},\ y = \frac{1}{2}\left(\frac{2n}{n-1}\right)^n,\ n \in \mathrm{N}.$$

Це не всі розв'язки, бо, крім них, наприклад, підходить і пара $x = 2, y = 8$.

18. Для усіх натуральних чисел n доведіть нерівність

$$\sqrt{1^3 + \sqrt{2^3 + \ldots + \sqrt{n^3}}} < 3.$$

Розв'язання. Оскільки для $k \ge 2$

$$k^6 - \left(k+1\right)^3 = \left(k^2 - \left(k+1\right)\right)\cdot\left(k^4 + \left(k+1\right) + \left(k+1\right)^2\right) > k \cdot k^2 = k^3,$$

то також $k^3 + \left(k+1\right)^3 < k^6$ для всіх $k \ge 2$.

Нехай

$$a_n = \sqrt{1^3 + \sqrt{2^3 + \ldots + \sqrt{n^3}}},\ n \ge 1,$$

$$b_n = \sqrt{1^3 + \sqrt{2^3 + \ldots + \sqrt{\left(n-1\right)^3 + \sqrt{n^6}}}},\ n \ge 2.$$

Тоді $a_1 < a_2 < \ldots < a_{n-1} < a_n < b_n < b_{n-1} < \ldots < b_2 = 3,\ n \ge 2$.

Отриману оцінку можна суттєво покращити. Наприклад,

$$a_1 < a_2 < ... < a_{n-1} < a_n < b_n < b_{n-1} < ... < b_5 = \sqrt{1^3 + \sqrt{2^3 + \sqrt{3^3 + \sqrt{4^3 + \sqrt{5^6}}}}} =$$

$$= \sqrt{1^3 + \sqrt{2^3 + \sqrt{3^3 + \sqrt{189}}}} < \sqrt{1^3 + \sqrt{2^3 + \sqrt{41}}} < \sqrt{1^3 + \sqrt{15}} < \sqrt{5}, \quad n \ge 5.$$

З іншого боку,

$$a_n > ... > a_5 > a_4 = \sqrt{1^3 + \sqrt{2^3 + \sqrt{3^3 + \sqrt{4^3}}}} =$$

$$= \sqrt{1^3 + \sqrt{2^3 + \sqrt{35}}} > \sqrt{1^3 + \sqrt{13{,}5}} > \sqrt{4{,}5}, \; n \ge 4.$$

19. Доведіть, що $\left(2^b - 2^a\right)\left(3^b - 3^a\right) < \dfrac{b-a}{2}\left(6^b - 6^a\right)$ для усіх $a < b$.

Розв'язання. Поділимо обидві частини заданої нерівності на 6^a і, позначивши $b - a = x > 0$, запишемо її у вигляді

$$2\left(2^x - 1\right)\left(3^x - 1\right) < x\left(6^x - 1\right).$$

Для доведення останньої нерівності врахуємо, що

$$\frac{n!}{(n-k)!(k+1)!} \le \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!k!} \Leftrightarrow k(n-1-k) \ge 0,$$

якщо $0 \le k \le n-1$, та $\ln 6 > 2\ln 2 \ln 3$, і скористаємося формулою Тейлора $a^x = 1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(x \ln a)^n}{n!}$ для $a = 2$, $a = 3$, $a = 6$.

У результаті отримаємо:

$$2\left(2^x - 1\right)\left(3^x - 1\right) = 2 \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x \ln 2)^n}{n!} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x \ln 3)^n}{n!} =$$

$$= 2 \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\ln 2)^{n-k} (\ln 3)^{k+1}}{(n-k)!(k+1)!} x^{n+1} =$$

$$= 2 \ln 2 \ln 3 \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{(n-k)!(k+1)!} (\ln 2)^{n-k-1} (\ln 3)^k \frac{x^{n+1}}{n!} <$$

$$< \ln 6 \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!k!} (\ln 2)^{n-k-1} (\ln 3)^k \frac{x^{n+1}}{n!} =$$

$$= \ln 6 \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\ln 2 + \ln 3\right)^{n-1} \frac{x^{n+1}}{n!} = x \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(x \ln 6\right)^n}{n!} = x\left(6^x - 1\right).$$

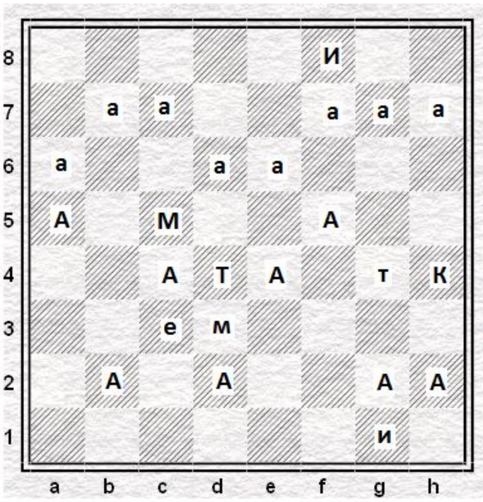
Зауважимо, що з початкової умови задачі принциповим у доведенні було використання нерівності $\ln 6 > 2\ln 2 \ln 3$.

Оскільки також $\ln 8 > 2\ln 2 \ln 4$, $\ln 10 > 2\ln 2 \ln 5$, $\ln 12 > 2\ln 2 \ln 6$, то, міркуючи аналогічно, можна для усіх $a < b$ довести і нерівності:

$$\left(2^b - 2^a\right)\left(4^b - 4^a\right) < \frac{b-a}{2}\left(8^b - 8^a\right), \qquad \left(2^b - 2^a\right)\left(5^b - 5^a\right) < \frac{b-a}{2}\left(10^b - 10^a\right),$$

$$\left(2^b - 2^a\right)\left(6^b - 6^a\right) < \frac{b-a}{2}\left(12^b - 12^a\right).$$

20. У шаховому ребусі «*МАТЕМАТИКА*» кожна літера відповідає певному типу фігури: 6 літер – 6 різних типів фігур. Великі літери – фігури одного кольору, малі – фігури іншого кольору. Визначте позицію та останній хід.



Королями може бути одна з літер “Мм”, “Тт” та “Ии”. Літера “Аа” - пішаки. Припустимо, що Великі літери – чорні фігури. Якщо “Ии”, “Тт”, “Мм” - королі, то можна отримати протиріччя. Отже, Великі літери – білі фігури.

Білий чорнопольний слон не присутній на дошці, а всі білі фігури на чорних полях. Але слон повинен бути на дошці, бо на дошці є всі шість літер, тому “е” – чорний чорнопольний слон.

Білий король не міг проникнути через ланцюг чорних пішаків на поле f8, тому залишається два можливі варіанти для королів “Мм” та “Тт”. Нехай “Тт” – королі, то король d4 під шахом, тому “Мм”- коні і король g5 під шахом від “К” (тура або ферзь). Протиріччя. Отже, “Мм”

– королі. Крс5 під шахом, тому “Т” – кінь. Останній хід був хід чорних d6d7+, тому біла тура не змогла би попасти на f8, “Ии” – ферзі, а “К” – тура.

XVII Івано-Франківський обласний турнір юних математиків 2023 року.

1. Дві однаково міцні кульки вціліють при падінні з деякої висоти $n \in N$ метрів, але розіб’ються, впавши з висоти 17 метрів. За яку найменшу кількість спроб вдасться гарантовано визначити найбільше можливе значення n, якщо за одну спробу можна опустити будь-яку з цих кульок з довільної висоти, але кульку, яка при падінні розбилася, повторно використовувати не дозволяється?

Розв’язання. За 5 спроб.

Насамперед відзначимо, що за умовою задачі жодна кулька не розіб’ється при падінні з висоти 1 м.

Далі скинемо першу кульку з висоти 6 м. Якщо вона розбилася, то другу кульку послідовно будемо скидати з висот 2, 3, 4 та 5 метрів. Якщо при цьому вона жодного разу не розбилася, то шуканою буде висота 5 метрів. Якщо ж на якомусь кроці друга кулька розбилася, то шуканою буде попередня висота, на якій вона вціліла.

Якщо ж при падінні з висоти 6 м перша кулька вціліла, то вдруге скидаємо її з висоти 10 м. Якщо вона розбилася, то другу кульку послідовно будемо скидати з висот 7, 8 та 9 метрів. Якщо при цьому вона жодного разу не розбилася, то шуканою буде висота 9 метрів. Якщо ж на якомусь кроці друга кулька розбилася, то шуканою буде попередня висота, на якій вона вціліла.

Якщо ж при падінні з висоти 10 м перша кулька знову вціліла, то втретє скидаємо її з висоти 13 м. Якщо вона розбилася, то другу кульку послідовно будемо скидати з висот 11 та 12 метрів. Якщо при цьому вона жодного разу не розбилася, то шуканою буде висота 12 метрів. Якщо ж на якомусь кроці друга кулька розбилася, то шуканою буде попередня висота, на якій вона вціліла.

Якщо ж і при падінні з висоти 13 м перша кулька знову вціліла, то вчетверте скидаємо її з висоти 15 м. Якщо вона розбилася, то другу кульку скидаємо з висоти 14 метрів. Якщо при цьому вона вціліла, то це і буде шукана висота 12 метрів. Якщо ж вона розбилася, то шуканою є висота 13 метрів.

І, нарешті, якщо перша кулька вціліла при падінні з висоти 15 м, то ще раз скидаємо її уже з висоти 16 м. Якщо вона розіб'ється, то шукана максимальна висота буде 15 метрів, а якщо вціліє, то така висота становитиме 16 метрів. Більшою вона бути не може, бо за умовою задачі при падінні з висоти 17 м обидві кульки розіб'ються.

2. Миколка записав на дошці 6 різних натуральних чисел і стверджує, що це довжини сторін та діагоналей опуклого чотирикутника.

а). Доведіть, що його слова можуть бути правдою.

б). Скінченною чи нескінченною є множина таких шісток, якщо жодна з них не утворюється множенням всіх чисел однієї з шісток на одне і те ж натуральне число?

Розв'язання.

***а*). Умови задачі задовольняють, наприклад, такі шість чисел: 25, 39, 52, 56, 60 та 65. Оскільки $25^2 + 60^2 = 39^2 + 52^2 = 65^2$, то розглянемо опуклий чотирикутник $ABCD$ зі сторонами $AB = 25$, $BC = 60$, $CD = 52$, $AD = 39$. Його прямі кути ABC та ADC спираються на діагональ $AC = 65$. Тому навколо нього можна описати коло. Внаслідок теореми Птоломея $AB \times CD + BC \times AD = AC \times BD$. Тоді з рівняння $25 \times 52 + 60 \times 39 = 65 \times BD$ знайдемо $BD = 56$.

***б*).** Доведемо, що множина таких шісток натуральних чисел є нескінченною. Зокрема, для всіх натуральних чисел $m > 1$ та $n > 1$ елементами такої множини можуть бути такі довжини відрізків:

$$AB = (m^2+1)(n^2-1),\ BC = 2n(m^2+1),\ AD = (m^2-1)(n^2+1),$$
$$CD = 2m(n^2+1),\ AC = (m^2+1)(n^2+1),$$
$$BD = 2m(n^2-1) + 2n(m^2-1).$$

При цьому маємо $AB^2 + BC^2 = AD^2 + CD^2 = AC^2$, а внаслідок теореми Птоломея знайдемо $BD = 2m(n^2-1) + 2n(m^2-1)$.

Надалі для спрощення досліджень обмежимося лише використанням різних парних натуральних чисел m та n**.** При цьому кожне непарне число AB, AD та AC не буде дорівнювати жодному з парних чисел BC, CD чи BD. Також очевидними є нерівності $AB < AC$

та $AD < AC$. У решті чотирьох можливих випадках порівняння теж отримуємо суперечності:

$$1).\ AB = AD \Leftrightarrow (m-n)(m+n) = 0;$$
$$2).\ BC = CD \Leftrightarrow (m-n)(mn-1) = 0;$$
$$3).\ BC = BD \Leftrightarrow 2 \times n = m \times (n^2 - 1);$$
$$4).\ CD = BD \Leftrightarrow 2 \times m = n \times (m^2 - 1).$$

Ще далі для простоти обмежимося лише $m = 2$ та довільними парними натуральними n, які закінчуються на 0, 4 чи 6. Внаслідок взаємної простоти чисел $n^2 - 1$ та $n^2 + 1$ найбільшим спільним дільником для $AB = 5(n^2 - 1)$ та $AC = 5(n^2 + 1)$ буде 5. А оскільки при цьому $AD = 3(n^2 + 1)$ не ділиться націло на 5, то при таких m та n найбільшим спільним дільником всієї цієї шістки чисел буде 1. Тому така шістка не могла утворитися з жодної іншої шістки множенням всіх її елементів на одне і те ж натуральне число. Тому побудована таким чином множина шісток різних натуральних чисел є нескінченною.

Зрозуміло, що вона не вичерпує всіх таких можливих шісток. Зокрема, вона не містить у собі шістки чисел, наведеної у пункті а).

3. Знайдіть усі пари натуральних чисел та таких, що .

Розв'язання. Запишемо подану в умові рівність у вигляді

$$(x-y)(x+y) = 23\left(y^2 - 1\right). \qquad (1)$$

23 – просте число, тому на нього ділиться один із множників лівої частини рівності (1).

Нехай $x - y = 23k,\ k \in \mathrm{N} \bigcup \{0\}$. Тоді $x + y = 23k + 2y$, і рівність (1) можна переписати у вигляді квадратного рівняння відносно y:

$$y^2 - 2ky - 23k^2 - 1 = 0. \qquad (2)$$

Щоб воно мало розв'язки у цілих числах, необхідно, щоб його дискримінант був квадратом цілого числа. Покладаючи $\frac{D}{4} = k^2 + \left(23k^2 + 1\right) = 24k^2 + 1 = m^2,\ m \in \mathrm{N}$, приходимо до рівняння Пелля $m^2 - 24k^2 = 1$, очевидним розв'язком якого є пара чисел $m_0 = 1,\ k_0 = 0$. Нескладно знайти й наступну таку пару $m_1 = 5,\ k_1 = 1$. А оскільки 24 не є квадратом цілого числа, то, як відомо, інші розв’язки цього рівняння у натуральних числах визначаються такими рекурентними співвідношеннями: $m_{n+1} = m_1 m_n + 24k_1 k_n$ та $k_{n+1} = k_1 m_n + 24 m_1 k_n$, тобто:

$$m_{n+1} = 5m_n + 24k_n, \quad k_{n+1} = m_n + 5k_n, \quad n \in \mathrm{N}.$$

Повертаючись тепер до рівняння (2) та рівності (1), знайдемо:

$$y_n = k_n + m_n, \quad x_n = 23k_n + y_n = 24k_n + m_n, \ n \in \mathrm{N} \cup \{0\}.$$

До того ж рівняння Пелля прийдемо, й покладаючи $x + y = 23k,\ k \in \mathrm{N}$. При цьому отримаємо ще одну множину пар розв’язків вихідного рівняння у натуральних числах:

$$y_n = -k_n + m_n, \quad x_n = 23k_n - y_n = 24k_n - m_n, \ n \in \mathrm{N}.$$

Зауважимо, що такі множини розв’язків можна подати і в явній формі. З отриманих рекурентних послідовностей дістаємо співвідношення $m_{n+2} = 10m_{n+1} - m_n$ та $k_{n+2} = 10k_{n+1} - k_n$. Тоді знаходимо числа $\lambda_1 = 5 + 2\sqrt{6} = \left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)^2$ та $\lambda_2 = 5 - 2\sqrt{6} = \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)^2$ – корені характеристичного рівняння $\lambda^2 - 10\lambda + 1 = 0$. Отже, m_n та k_n мають такий загальний вигляд: $m_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n$, $k_n = C_3\lambda_1^n + C_4\lambda_2^n$. Враховуючи тепер рівності $m_0 = 1$, $k_0 = 0$ та $m_1 = 5$, $k_1 = 1$, знайдемо $C_1 = C_2 = \dfrac{1}{2}$, $C_3 = -C_4 = \dfrac{1}{4\sqrt{6}}$.

Таким чином, остаточно отримаємо такі дві нескінченні послідовності пар розв’язків початкового діофантового рівняння у натуральних числах:

$$\begin{cases} x_n = \sqrt{6}\left(\lambda_1^n - \lambda_2^n\right) + \dfrac{1}{2}\left(\lambda_1^n + \lambda_2^n\right), \\ y_n = \dfrac{1}{4\sqrt{6}}\left(\lambda_1^n - \lambda_2^n\right) + \dfrac{1}{2}\left(\lambda_1^n + \lambda_2^n\right), \end{cases} \quad n \in \mathrm{N} \cup \{0\},$$

та

$$\begin{cases} x_n = \sqrt{6}\left(\lambda_1^n - \lambda_2^n\right) - \dfrac{1}{2}\left(\lambda_1^n + \lambda_2^n\right), \\ y_n = -\dfrac{1}{4\sqrt{6}}\left(\lambda_1^n - \lambda_2^n\right) + \dfrac{1}{2}\left(\lambda_1^n + \lambda_2^n\right), \end{cases} \quad n \in \mathrm{N}.$$

4. Неперервна функція f є *кусково-лінійною*, тобто для деяких чисел $x_1 < x_2 < \ldots < x_k$ вона є лінійною на кожному із проміжків $(-\infty; x_1]$, $[x_1; x_2]$, ... ,$[x_{k-1}; x_k]$, $[x_k; +\infty)$. Для $k = 3$ довести, що f можна єдиним чином подати у вигляді

$$f(x) = a_1|x - x_1| + a_2|x - x_2| + a_3|x - x_3| + a_4x + a_5, \quad x \in \mathrm{R},$$

де a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 – деякі дійсні числа.

Розв'язання. Див. розв'язання задачі 15 попереднього турніру.

5. Доведіть, що існує безліч пар (x, y) додатних раціональних чисел, що задовольняють рівняння $x^y = (2y)^x$.

Розв'язання. Див. розв'язання задачі 17 попереднього турніру.

6. Для усіх натуральних чисел n доведіть нерівність

$$\sqrt{1^3 + \sqrt{2^3 + \ldots + \sqrt{n^3}}} < 3.$$

Розв'язання. Див. розв'язання задачі 18 попереднього турніру.

7. Доведіть, що $(2^b - 2^a)(3^b - 3^a) < \dfrac{b-a}{2}(6^b - 6^a)$ для усіх $a < b$.

Розв'язання. Див. розв'язання задачі 19 попереднього турніру.

8. а). Нехай a та b − натуральні числа такі, що

$$a > b, \quad a^b + b^a = (4n - 1)^{2n-1}.$$

Доведіть, що a ділиться націло на $(2n - 1)^2$ при кожному натуральному n.

б). Нехай a та b − натуральні числа такі, що

$$a > b, \quad a^b + b^a = (2L_{3n} - 1)^{F_{3n-1} + F_{3n+1} - 1}.$$

Доведіть, що число $a \,/\, \left(\sum_{k=0}^{3n-2} L_k\right)^2$ також натуральне при кожному натуральному n.

(Числа Фібоначчі F_n та Люка L_n визначаються відповідно формулами: $F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_{n+1} = F_{n-1} + F_n$ та $L_0 = 2,\ L_1 = 1,$ $L_{n+1} = L_{n-1} + L_n$).

Розв'язання. ***а*)**. Зауважимо, що $(4n - 1)^{2n-1} \equiv 3(mod 4)$ для всіх натуральних чисел n. Тому числа a та b повинні бути різної парності. Якщо при цьому обидва з них більші за одиницю, то один з доданків a^b та b^a буде ділитися націло на 4, а другий при цьому даватиме остачу 1. Тому записана рівність можлива лише за умови, що одне з чисел a чи b дорівнює 1. Оскільки $a > b$, то $b = 1$,

$$a = (4n-1)^{2n-1} - 1 = \big((4n-1)-1\big)\sum_{k=0}^{2n-2}(4n-1)^k =$$

$$= 2(2n-1)\sum_{k=0}^{2n-2}(4n-1)^k.$$

Звідси, враховуючи, що $4n-1 = 2(2n-1)+1 \equiv 1\big(mod(2n-1)\big)$ при кожному натуральному n, отримуємо твердження задачі.

***б*).** За властивостями чисел Фібоначчі та Люка $F_{3n-1} + F_{3n+1} = L_{3n}$ і є парним натуральним числом при кожному натуральному n. Крім того,

$$\sum_{k=0}^{3n-2} L_k = L_{3n} - 1.$$

Позначивши $L_{3n} = 2p$, отримаємо для $a > b$ рівність

$$a^b + b^a = (4p-1)^{2p-1}.$$

А подільність a на $(2p-1)^2$ випливає із доведеного у пункті а).

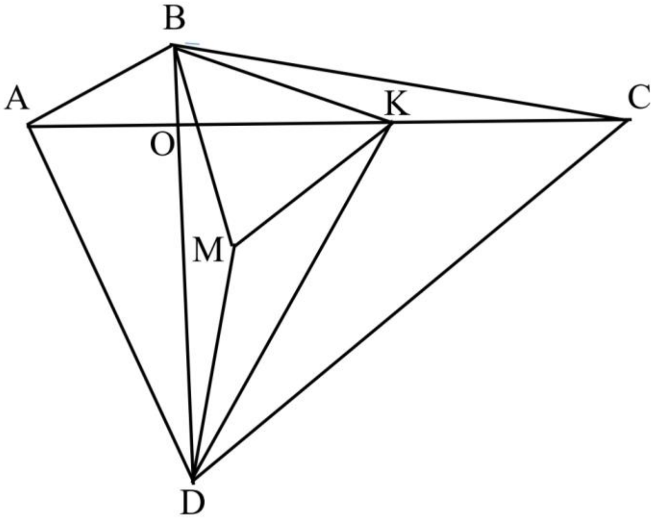
9. Розріжте рівнобічну трапецію на три подібні між собою трапеції всіма можливими способами. Для рівнобічної трапеції з основами a та b і бічною стороною $c = 1$ з'ясуйте необхідні та достатні умови реалізації кожного способу розрізання.

Розв'язання. Див. розв'язання задачі 11 попереднього турніру.

10. Використовуючи з тригонометричних формул лише означення тангенса гострого кута прямокутного трикутника як відношення протилежного катета до прилеглого, доведіть рівність $tg10^o tg50^o tg60^o tg70^o = 1$.

Розв'язання. Розглянемо опуклий чотирикутник $ABCD$, перпендикулярні діагоналі якого AC та BD перетинаються у точці O. Нехай кути BCO, CDO та $DA0$ дорівнюють 10^o, 50^o та 70^o відповідно. Доведемо, що кут $ABO = 60^o$. У трикутнику BCD кути при основі CD дорівнюють по 50^o.

Побудуємо всередині нього на його бічних



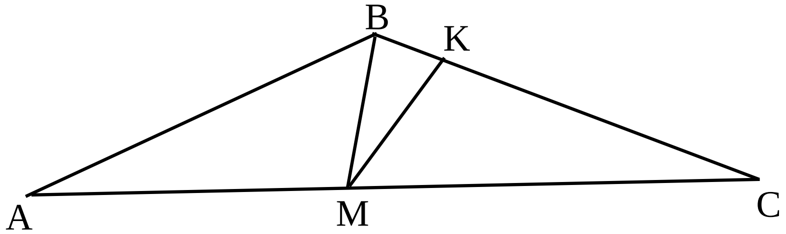
сторонах рівнобедрені трикутники BKC та BMD з кутами 10^o при основах $BC = BD$. Між ними отримаємо рівносторонній трикутник BMK та рівнобічну трапецію $DMKC$, в якій $DM = MK = KC$, а кути при основі CD дорівнюють 40^o. Отже, кути MDK, MKD та KDC рівні і дорівнюють 20^o. Тому кут $BDK = 30^o$. Але й кожен з кутів ADB та AKB дорівнює 20^o. Значить, навколо чотирикутника $ABKD$ можна описати коло. Звідси випливає, що кут BAK, як і кут BDK, дорівнює 30^o, тобто кут $ABO = 60^o$. Таким чином,

$$tg10^o tg50^o tg60^o tg70^o = \frac{BO}{CO} \times \frac{CO}{DO} \times \frac{AO}{BO} \times \frac{DO}{AO} = 1.$$

11. У трикутнику ABC кут C дорівнює 20^o. Відкладемо на стороні AC відрізок $MC = AB$, а на стороні BC – відрізок $CK = AM$. Знайдіть величину кута MKC, якщо кут BAC дорівнює:

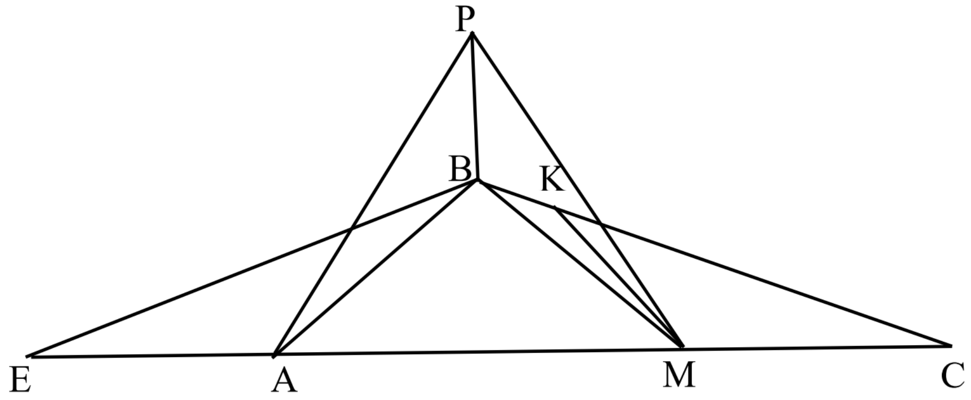
а) 20^o; б) 40^o; в) 60^o; г) 80^o.

***Розв'язання. а*).** Трикутники MCK та BAM рівні за двома сторонами та кутом 20^o між ними. Тому $MK = BM$.



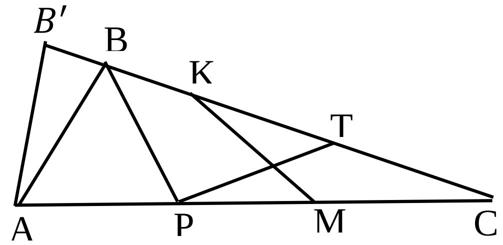
Але $MC = AB = BC$, то кути MKB, MBK та BMC рівні і дорівнюють 80^o. Отже, кут MKC дорівнює 100^o.

***б*).** Побудуємо рівносторонній трикутник APM і з'єднаємо його вершину P з точкою B. Оскільки трикутники MCK та BAP рівні за



двома сторонами та кутом 20^o між ними, то й кути MKC та BPA також рівні. Доведемо, що кут $BPA = 30^o$. Для цього відкладемо точку E на продовженні сторони AC поза точку A таку, що $AE = AB = MC$. З рівності трикутників BCM та BEA за двома сторонами та кутом 20^o між ними отримаємо, що $AB = BM$. Тому PB є бісектрисою кута APM, рівного 60^o. Отже, кут MKC дорівнює 30^o.

***в*).** Відкладемо на сторонах AC та BC точки P та T такі, що кути ABP та TPC дорівнюють 60^o та 20^o відповідно. Тоді з рівнобедрених трикутників TPC, BPT та рівностороннього трикутника BPK маємо $CT = PT = BP = AB = MC$.



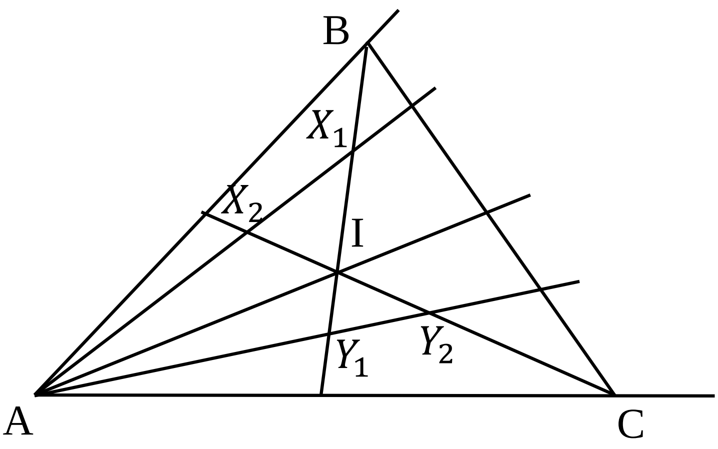
Також $PC = AC - AP = AC - AB = AC - MC = CK$. Внаслідок рівності трикутників MKC та TPC кут MKC також дорівнює 20^o.

г). Пункт г) зводиться до пункту в) розглядом трикутника $AB'C$, де $B'A = AB$.

Подібно випадки з кутами 100 та 120 градусів можуть бути зведені до задач з кутами 40 та 20 градусів відповідно.

12. У трикутнику ABC точка I – інцентр, точка I_a – центр зовні вписаного кола, яке дотикається сторони BC. З вершини A всередині кута BAC провели промені AX та AY. Промінь AX перетинає прямі BI, CI, BI_a, CI_a в точках X_1, …, X_4 відповідно, а промінь AY перетинає ці ж прямі в точках $Y_1,\ldots,$ Y_4 відповідно. Виявилося, що точки X_1, X_2, Y_1, Y_2 лежать на одному колі. Доведіть, що $\frac{X_1X_2}{X_3X_4} = \frac{Y_1Y_2}{Y_3Y_4}$.

Розв'язання. Спочатку знайдемо відношення $\frac{X_1X_2}{Y_1Y_2}$ для випадку, коли промені AX та AY знаходяться по різні сторони бісектриси кута A і утворюють з нею кути α та β відповідно. Оскільки точки X_1, X_2, Y_1, Y_2 лежать на одному колі, то з подібності трикутників IX_1X_2 та IY_2Y_1 отримаємо, що $\frac{X_1X_2}{Y_1Y_2} = \frac{IX_1}{IY_2}$. А з трикутників AIX_1 та AIY_2 за теоремою синусів внаслідок рівності кутів AX_1I та AY_2I знайдемо, що $\frac{IX_1}{IY_2} = \frac{sin\alpha}{sin\beta}$. Тому також $\frac{X_1X_2}{Y_1Y_2} = \frac{sin\alpha}{sin\beta}$. Аналогічний результат отримуємо і якщо промені AX та AY знаходяться по різні сторони бісектриси кута A.



Оскільки ж кути між бісектрисами внутрішніх та зовнішніх кутів трикутника прямі, то можна довести, що й інші чотири точки перетину з променями AX та AY також лежать на одному колі. Міркуючи аналогічно, отримаємо, що й $\frac{X_3X_4}{Y_3Y_4} = \frac{sin\alpha}{sin\beta}$. Отже, $\frac{X_1X_2}{Y_1Y_2} = \frac{X_3X_4}{Y_3Y_4}$ незалежно від розташування цих променів відносно бісектриси кута A. Звідси і випливає потрібна рівність.

13. У клітинки квадрата 5×5 Петрик і Ганнуся по черзі (першим ходить Петрик) вписують цифри від 1 до 9. Квадрат називається *магічним*, якщо після заповнення всіх клітинок суми в усіх менших квадратах 3×3 належать діапазону [37; 53]. Петрик полюбляє магію і хоче зробити квадрат магічним. Чи вдасться Ганнусі йому завадити?

Розв'язання. Див. розв'язання задачі 13 минулого турніру.

14. Двоє гравців та суддя грають у таку гру. Суддя випадково вибирає один із натуральних дільників числа n та називає його, а далі гравці по черзі множать останній названий дільник на 2, або множать на 5, або ж ділять на 10 – так, щоб отриманий результат був знову дільником числа n, який не називався раніше. Гравець, який не може зробити хід, програв. Яка ймовірність, що за правильної гри виграє перший гравець, якщо $n=10^6$?

Розв'язання. Див. розв'язання задачі 14 минулого турніру.

15. Миколка називає просте число p. Після цього Марійка записує на дошці натуральне число n. Тоді Миколка дописує до цього числа справа одну чи декілька цифр 3 і виграє, якщо отримане таким чином число ділиться на p. В іншому разі – перемагає Марійка. Хто з них виграє, якщо обоє прагнуть перемогти?

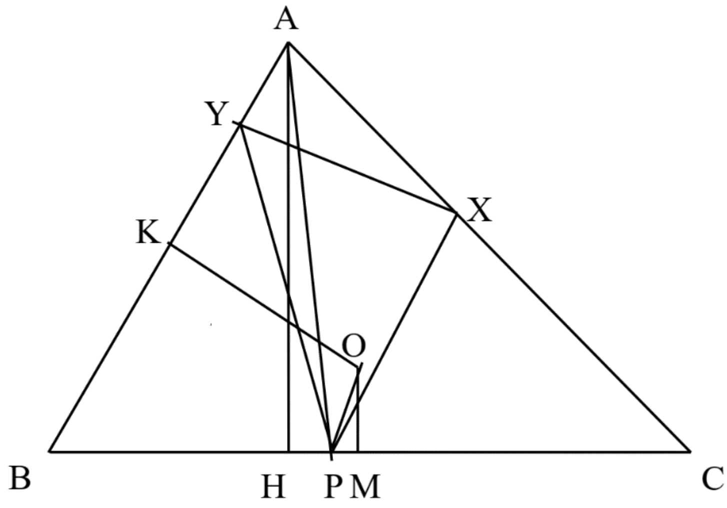
Розв'язання. Див. розв'язання задачі 1 минулого турніру (перша гра).

16. У гострокутному ABC провели чевіану AP та відзначили центр O описаного кола. Описане коло трикутника ABP вдруге перетинає пряму AC у точці X, а описане коло трикутника ACP вдруге перетинає пряму AB у точці Y. Доведіть, що прямі XY та PO перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли $P -$ основа бісектриси трикутника ABC.

Розв'язання. Введемо систему координат з початком у точці H – основі висоти AH.

Задамо у цій системі координати деяких точок: $A(0;h)$, $B(b;0)$, $C(c;0)$, $K\left(\frac{b}{2};\frac{h}{2}\right)$, $M\left(\frac{b+c}{2};0\right)$, $P(p;0)$. Щоб трикутник був гострокутним, додатково будемо вимагати, щоб виконувалися нерівності: $b<0$, $c>0$, $h^2+bc>0$. Крім того, оскільки у випадку

$AB = AC$ як твердження задачі, так і обернене до нього твердження є очевидними, то будемо вважати, що $b + c > 0$. Тоді $0 < p < \dfrac{b+c}{2}$.



Оскільки описане коло трикутника ACP перетинає пряму AB у точці Y, то $\angle BYP = \angle BCA,\ \angle BPY = \angle BAC$. Отже, трикутники BPY та BAC подібні. Тому

$$\frac{BY}{BC} = \frac{BP}{AB} \Rightarrow \frac{BY}{AB} = \frac{BC \cdot BP}{AB^2} = \frac{(p-b)\cdot(c-b)}{b^2 + h^2}.$$

Тоді із співвідношень $\dfrac{x-b}{0-b} = \dfrac{(p-b)\cdot(c-b)}{b^2+h^2} = \dfrac{y}{h}$ отримуємо координати точки Y: $x_Y = b\left(1 - \dfrac{(p-b)\cdot(c-b)}{b^2+h^2}\right),\ y_Y = \dfrac{(p-b)\cdot(c-b)}{b^2+h^2}h$.

Аналогічно для координат точки X будемо мати:

$$x_X = c\left(1 - \frac{(p-c)\cdot(b-c)}{c^2+h^2}\right),\ y_X = \frac{(p-c)\cdot(b-c)}{c^2+h^2}h.$$

Тому кутовий коефіцієнт прямої XY є таким:

$$k_1 = \frac{y_Y - y_X}{x_Y - x_X} = \frac{\dfrac{(p-b)\cdot(c-b)}{b^2+h^2}h - \dfrac{(p-c)\cdot(b-c)}{c^2+h^2}h}{b\left(1 - \dfrac{(p-b)\cdot(c-b)}{b^2+h^2}\right) - c\left(1 - \dfrac{(p-c)\cdot(b-c)}{c^2+h^2}\right)} =$$

$$= -\frac{(p-b)(c^2+h^2) + (p-c)(b^2+h^2)}{(b^2+h^2)(c^2+h^2) + b(p-b)(c^2+h^2) + c(p-c)(b^2+h^2)}h =$$

$$= -\frac{(2p-b-c)h^2 + (p-b)c^2 + (p-c)b^2}{(h^2+bc)(h^2+bp+cp-bc)}h.$$

Оскільки кутовий коефіцієнт прямої AB дорівнює $\frac{h}{-b}$, то рівняння серединного перпендикуляра KO до сторони AB має вигляд: $y-\frac{h}{2}=\frac{b}{h}\left(x-\frac{b}{2}\right)$. Звідси, враховуючи, що $x_O=\frac{b+c}{2}$, знайдемо

$$y_O=\frac{h}{2}+\frac{bc}{2h}=\frac{h^2+bc}{2h}.$$

Отже, кутовим коефіцієнтом прямої PO є число

$$k_2=\frac{y_O-y_M}{x_M-x_P}=\frac{h^2+bc}{(b+c-2p)h}.$$

Тоді

$$k_1k_2=-\frac{(2p-b-c)h^2+(p-b)c^2+(p-c)b^2}{(h^2+bp+cp-bc)(b+c-2p)}.$$

Прямі XY та PO будуть перпендикулярними тоді і тільки тоді, коли $k_1k_2=-1$. З врахуванням попередньої рівності переконуємося, що це рівносильне умові $(2p-b-c)h^2=(2bc-bp-cp)p$.

З іншого боку, AP є бісектрисою трикутника тоді і тільки тоді, коли $\frac{b^2+h^2}{(p-b)^2}=\frac{c^2+h^2}{(p-c)^2}$, що, також рівносильне цій же умові.

Отже, прямі XY та PO перпендикулярні тоді тільки тоді, коли $AP-$ бісектриса трикутника ABC.

17. а). Доведіть, що для всіх додатних раціональних чисел $r\neq 1$ існує єдина пара взаємно простих натуральних чисел a та b таких, що число r є коренем рівняння $x^4=(ax-b)/(bx-a)$.

б). Доведіть, що існує нескінченна кількість пар взаємно простих натуральних чисел a та b таких, що усі три дійсні корені рівняння $x^4=(ax-b)/(bx-a)$ є трьома різними раціональними числами.

Розв'язання.

***а*).** Зауважимо спочатку, що $a\neq b$, бо рівність $x^4=-1$ виконуватися не може при жодному дійсному x. Покладемо $r=p/q$, де p та $q-$ довільні різні взаємно прості натуральні числа, і підставимо число r у подане рівняння. У результаті отримаємо

$$\left(\frac{p}{q}\right)^4 = \frac{a \times \frac{p}{q} - b}{b \times \frac{p}{q} - a} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{b} = \frac{p^5 + q^5}{pq(p^3 + q^3)}.$$

Якщо $d-$ найбільший спільний дільник чисел $p^5 + q^5$ та $pq(p^3 + q^3)$, то $a = \frac{p^5+q^5}{d}$, $b = \frac{pq(p^3+q^3)}{d}$ $-$ шукані числа.

***б*).** $x = -1$ є коренем рівняння для довільних натуральних чисел a та b та разом з $x = p/q$ його коренем буде також $x = q/p$, візьмемо, наприклад, $p -$ довільне натуральне число, більше за 1, та $q = 1$ і покладемо $a = p^4 - p^3 + p^2 - p + 1$, $b = p(p^2 - p + 1)$. Оскільки

$a = pb - (p-1)$, $b = (p^2+1)(p-1) + 1$ і числа $p - 1$ та 1 взаємно прості, то за алгоритмом Евкліда числа a та b також будуть взаємно простими при кожному натуральному $p > 1$. Внаслідок доведеного вище для всіх таких a та b рівняння $x^4 = (ax - b)/(bx - a)$ матиме три різні раціональні корені $x = -1$, $x = p$ та $x = 1/p$. Залишилося лише переконатися, що інших дійсних коренів немає.

Справді, на проміжку $(-\infty; a/b)$ може бути не більше двох дійсних коренів, бо на ньому графіки функцій $y = x^4$ та $y = (ax - b)/(bx - a)$ мають різні напрями опуклості, а на проміжку $(a/b; +\infty)$ такі функції мають різну монотонність, тому на ньому не більше одного дійсного кореня.

18. Відомо, що натуральне число N менше за 10^6. Шукаємо таке натуральне M, що воно ділиться на N, а сума цифр числа M не перевищує числа k. Для якого найменшого k можна стверджувати, що таке число M в усіх випадках існує?

Розв'язання. Для $k = 54$. Достатньо взяти $M = N$, бо для чисел, кратних 999999, сума цифр не менша за 54. Зауважимо, що для всіх $N < 999999$ вистачило би і $k = 45$.

19. На площині розміщено мільйон точок, жодні три з яких не лежать на одній прямій. Дев'ять гравців по черзі з'єднують ці точки відрізками, кожний олівцем свого кольору. За один раз дозволяється з'єднати довільні дві точки, які ще не були з'єднаними. Виграє той, хто першим отримає трикутник з вершинами у заданих точках, усі сторони якого мають однаковий колір. Кожен гравець прагне перемогти і при цьому намагається завадити здобути перемогу своїм суперникам. Чи обов'язково за цих умов вдасться виявити переможця такої гри?

Розв'язання. Не може. Доведемо, що цього вистачило би навіть лише 986411 точок. Припустимо протилежне, тобто між ними проведені всі можливі відрізки, але при цьому потрібного трикутника з трьома сторонами одного кольору не виявилося.

Зафіксуємо одну з точок та розглянемо 986410 відрізків, які виходять з неї. Принаймні 109602 з них будуть одного кольору, який назвемо першим. Оскільки за припущенням потрібного трикутника не існує, то 109602 точки, які є протилежними кінцями цих відрізків можуть бути з'єднаними між собою лише іншими вісьмома кольорами.

Зафіксуємо одну з цих точок і розглянемо 109601 відрізків, які виходять з неї до решти з них. Принаймні 13701 з таких відрізків будуть одного кольору, який вважатимемо другим. Таким чином, внаслідок зробленого припущення 13701 точок доведеться з'єднувати між собою лише іншими сімома кольорами.

Фіксуємо одну з них і розглядаємо 13700 відрізків, які виходять з неї до решти таких точок. Принаймні 1958 з цих відрізків будуть третього кольору. Отже, для з'єднання 1958 точок матимемо право використовувати лише інші 6 кольорів.

Знову фіксуємо одну з таких точок і отримуємо 1957 відрізків, з яких принаймні 327 будуть четвертого кольору, і для з'єднання 327 точок залишиться лише 5 кольорів.

Фіксуємо одну з цих точок і отримуємо, що із 326 відрізків, які виходять з неї до решти з цих точок, принаймні 66 будуть мати п'ятий колір. Тому для з'єднання 66 протилежних їх кінців залишаються тільки 4 кольори.

Фіксуючи одну з цих точок, отримаємо, що із 65 відрізків, які виходять з неї до решти з таких точок, принаймні 17 матимуть шостий колір, а з’єднувати їх протилежні кінці можна лише трьома кольорами.

Міркуючи далі аналогічно, для 16 відрізків отримаємо принаймні 6 відрізків сьомого кольору, протилежні кінці яких допустимо з’єднувати лише двома останніми кольорами.

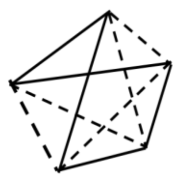
Розглянемо 6 таких протилежних кінців. Фіксуючи одну з цих точок, отримаємо, що принаймні 3 з п’яти відрізків, які виходять з неї, матимуть восьмий колір, а для з’єднання їх протилежних кінців не можна використати жодний з перших восьми кольорів.

Оскільки використання для цього останнього, дев’ятого, кольору також суперечить припущенню, то таке припущення було хибним.

Таким чином, у разі проведення всіх можливих відрізків знайдеться принаймні один трикутник з вершинами у заданих точках, всі сторони якого матимуть однаковий колір. Отже, не залежно від гри суперників, комусь з гравців пощастить здобути перемогу.

Звернемо увагу на отриманий нами у процесі розв’язування ланцюжок чисел: 986411, 109602, 13701, 1958, 327, 66, 17, 6, 3. Його будемо трактувати як мінімальну кількість точок, для яких гра не закінчиться внічию для 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2 та 1 гравців відповідно.

Менших кількостей точок може й не вистачити. Зокрема, для одного гравця очевидно, що двох точок буде замало для утворення трикутника. А для двох гравців відповідний приклад з п’ятьма точками без потрібного трикутника виглядає так:



Будемо розглядати наведені числа як значення функції $f(n)$ від кількості гравців $n \leq 9$. Нескладно побачити таку закономірність:

$$f(n) = \frac{f(n+1) - 2}{n+1} + 1, n \leq 8.$$

Зрозуміло, що ця закономірність залишиться справедливою і для всіх натуральних n. Звідси отримуємо рекурентне співвідношення

$$f(n+1) = (n+1)f(n) + (1-n).$$

Воно є окремим випадком такого лінійного різницевого рівняння першого порядку зі змінними коефіцієнтами:

$$f(n+1) = \varphi(n)f(n) + Q(n).$$

Як відомо з параграфа 6.8 книги: Федак І.В. «Функціональні рівняння», електронна версія якої наявна на сайті Всеукраїнських турнірів юних математиків імені професора М.Й. Ядренка, загальний розв'язок такого рівняння має вигляд:

$$f(n) = \prod_{k=0}^{n-1}\varphi(k)\left(C + \sum_{m=0}^{n-1}\frac{Q(m)}{\prod_{k=0}^{m}\varphi(k)}\right).$$

Оскільки у нашому випадку

$$\varphi(k) = k+1,\ Q(m) = 1-m,$$

$$\prod_{k=0}^{n-1}\varphi(k) = n!,\ \prod_{k=0}^{m}\varphi(k) = (m+1)!,$$

то такий загальний розв'язок набуде вигляду:

$$f(n) = n!\left(C - \sum_{m=0}^{n-1}\frac{m-1}{(m+1)!}\right).$$

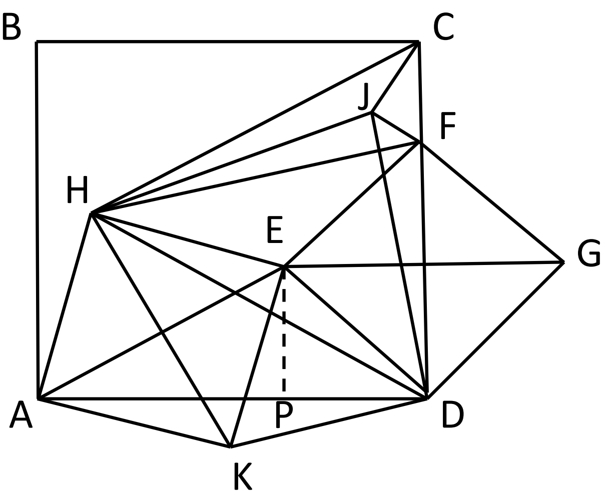
Враховуючи, що при цьому $f(1) = 3$, знайдемо значення $C = 2$ і остаточно будемо мати таку шукану формулу для знаходження мінімальної кількості точок, яка потрібна, щоб гра n гравців гарантовано не закінчилася внічию:

$$f(n) = n!\left(2 - \sum_{m=0}^{n-1}\frac{m-1}{(m+1)!}\right).$$

У випадку 9 гравців, як задано в умові задачі, отримаємо, що $f(9) = 986411 < 1000000$. Тому мільйона точок цілком вистачить.

20. На стороні *CD* квадрата *ABCD* обрано точку *F* та побудовано два рівні квадрати *DGFE* та *AKEH* (точки *E* і *H* лежать всередині квадрата). Нехай *J* – інцентр трикутника *CFH*. Доведіть, що точки *D*, *K*, *H*, *J*, *F* лежать на одному колі.

Розв'язання. Розглянемо описану в умові конструкцію на малюнку справа. Оскільки побудовані квадрати *DGFE* та *AKEH* рівні, то *E* точка рівновіддалена від точок *K*, *H*, *F*, *D*, які таким чином лежать на одному колі з центром *E*. Залишилось довести, що й точка J також належить цьому



колу. Зауважимо, що $AE = 2EP$. Тому $\angle DAE = 30^O$. Далі, простим підрахунком кутів переконуємося, що трикутник KED рівносторонній, а $\Delta HED = \Delta AKD$. Тоді трикутник HCD також буде рівностороннім. Точка J лежить на бісектрисі його кута C, тому $\Delta HCJ = \Delta DCJ$. Звідси отримуємо, що $\angle FDJ = \angle CHJ = \angle FHJ$, що й доводить належність точки J до цього кола.

XVIII Івано-Франківський обласний турнір юних математиків 2024 року.

1. На участь в турнірі юних математиків подали заявки 16 команд. Оргкомітет планує провести турнір так, щоб у кожному турі у чотирьох групах змагалися по чотири команди, причому жодні дві команди-учасниці не зустрічалися між собою більше одного разу. Чи вдасться йому реалізувати свій задум у випадку: а) чотирьох, б) п'яти турів?

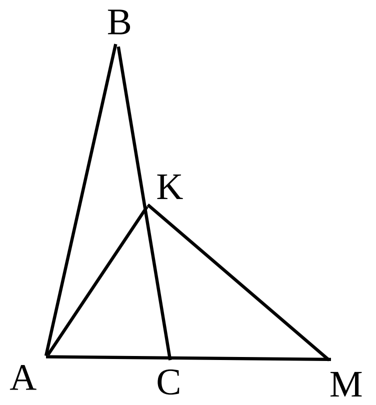
Розв'язання. Див. розв'язання задачі 1 турніру за 2019 рік.

2. а) Доведіть, що $8sin10^o sin50^o sin70^o = 1$.

б) Обґрунтуйте цю ж рівність, використовуючи з курсу тригонометрії лише означення синуса гострого кута прямокутного трикутника як відношення протилежного катета до гіпотенузи.

Розв'язання. Достатньо довести пункт *б*). Для цього розглянемо рівнобедрений трикутник ABC з кутом $B = 20^o$ та сторонами $AB = BC$. Відкладемо на стороні BC точку K таку, що $AK = BK$, а на продовженні сторони AC поза точку C візьмемо точку M таку, що

$KC = CM$. Трикутники AKC та AMK подібні за рівними відповідними кутами. Тому $\frac{MK}{KC} = \frac{AK}{AC}$. А оскільки кути AKB та KCM дорівнюють 140^o та 100^o відповідно, то $2sin10^o \times 2sin50^o \times 2sin70^o =$



$$= \frac{AC}{AB} \times \frac{MK}{KC} \times \frac{AB}{AK} = \frac{AC}{AB} \times \frac{AK}{AC} \times \frac{AB}{AK} = 1.$$

Таким чином, $8sin10^o sin50^o sin70^o = 1.$

Справедлива й загальніша формула

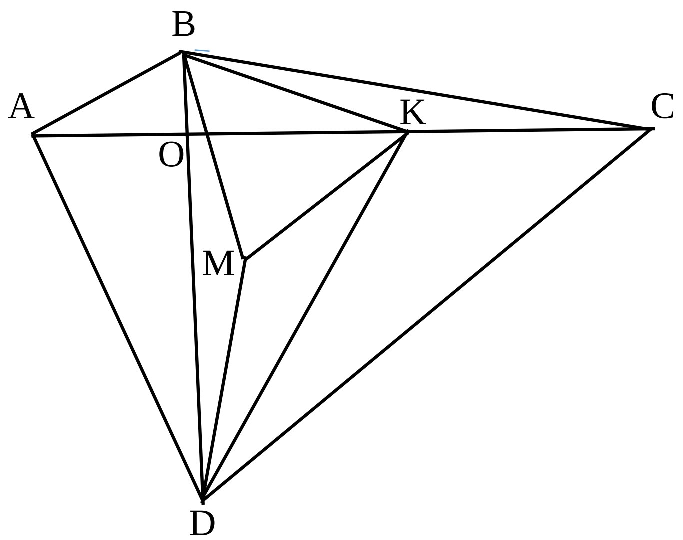
$$8 \cdot sin\alpha \cdot sin(60^o - \alpha) \cdot sin(60^o + \alpha) = 1.$$

3. а) Доведіть, що з чотирьох прямокутних трикутників з меншими гострими кутами 10^o, 20^o, 30^o, 40^o відповідно можна скласти опуклий чотирикутник з перпендикулярними діагоналями.

б) Як можна використати цей факт для доведення рівності

$$tg10^o tg50^o tg60^o tg70^o = 1\ ?$$

Розв'язання. Розглянемо опуклий чотирикутник $ABCD$, перпендикулярні діагоналі якого AC та BD перетинаються у точці O. Нехай кути BCO, CDO та $DA0$ дорівнюють 10^o, 50^o та 70^o відповідно. Доведемо, що кут $ABO = 60^o$. У трикутнику BCD кути при основі CD дорівнюють по 50^o. Побудуємо всередині нього на його бічних сторонах рівнобедрені



трикутники BKC та BMD з кутами 10^o при основах $BC = BD$. Між ними отримаємо рівносторонній трикутник BMK та рівнобічну трапецію $DMKC$, в якій $DM = MK = KC$, а кути при основі CD дорівнюють 40^o. Отже, кути MDK, MKD та KDC рівні і дорівнюють 20^o. Тому кут $BDK = 30^o$. Але й кожен з кутів ADB та AKB дорівнює 20^o. Значить, навколо чотирикутника $ABKD$ можна описати коло.

Звідси випливає, що кут BAK, як і кут BDK, дорівнює 30^o, тобто кут $ABO = 60^o$.

б). Таким чином,

$$tg10^o tg50^o tg60^o tg70^o = \frac{BO}{CO} \times \frac{CO}{DO} \times \frac{AO}{BO} \times \frac{DO}{AO} = 1.$$

4. Елементи послідовності (U_n) визначаються умовами: $U_0 = 0$, $U_1 = 1$, $U_{n+2} = pU_{n+1} + qU_n$, де p та q – цілі числа, $n \geq 0$. Доведіть, що число $U_{5^{2024}}$ ділиться націло на 5^{2024}, але не ділиться націло на 5^{2025}, якщо: а) $p = 1, q = 1$;   б) $p = 3, q = -1$.

Розв'язання. **а).** Зауважимо, що при $a = 1$, $b = 1$ елементи послідовності (U_n) є числами Фібоначчі, тобто $U_n = F_n$. Для них зразу будемо доводити загальнішу властивість: для кожного натурального числа n число F_{5^n} ділиться націло на 5^n, але не ділиться націло на 5^{n+1}.

Введемо позначення $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ та $p = 5^k$. Враховуючи рівність $\alpha\beta = -1$ та формулу Біне для чисел Фібоначчі $F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}$ та непарність числа p при кожному невід'ємному цілому k, отримаємо:

$$\frac{F_{5^{k+1}}}{F_{5^k}} = \frac{F_{5p}}{F_p} = \frac{\alpha^{5p} - \beta^{5p}}{\alpha^p - \beta^p} = \alpha^{4p} + \alpha^{3p}\beta^p + \alpha^{2p}\beta^{2p} + \alpha^p\beta^{3p} + \beta^{4p} =$$

$$= (\alpha^p - \beta^p)^4 + 5\alpha^p\beta^p(\alpha^p - \beta^p)^2 + 5\alpha^{2p}\beta^{2p} =$$

$$= (\alpha^p - \beta^p)^4 - 5(\alpha^p - \beta^p)^2 + 5 =$$

$$= 25F_{5^k}^4 - 25F_{5^k}^2 + 5 = 5\left(5F_{5^k}^4 - 5F_{5^k}^2 + 1\right).$$

Звідси випливає, що

$$F_{5^n} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{F_{5^{k+1}}}{F_{5^k}} = 5^n \prod_{k=0}^{n-1} \left(5F_{5^k}^4 - 5F_{5^k}^2 + 1\right).$$

А оскільки $F_{5^0} = 1$ і кожен множник, записаний у дужках такого добутку є цілим числом, яке не ділиться націло на 5, то для кожного натурального числа n число F_{5^n} ділиться націло на 5^n, але не ділиться націло на 5^{n+1}.

Зокрема, $F_{5^{2024}}$ ділиться націло на 5^{2024}, але не ділиться націло на 5^{2025}.

б). У загальному випадку формула Біне має вигляд $U_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{a^2+4b}}$, де $\alpha = \frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}$, $\beta = \frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}$, $\alpha\beta = -b$. Позначивши $p = 5^k$, отримаємо:

$$\frac{U_{5^{k+1}}}{U_{5^k}} = \frac{U_{5p}}{U_p} = \frac{\alpha^{5p}-\beta^{5p}}{\alpha^p-\beta^p} = \alpha^{4p} + \alpha^{3p}\beta^p + \alpha^{2p}\beta^{2p} + \alpha^p\beta^{3p} + \beta^{4p} =$$

$$= (\alpha^p - \beta^p)^4 + 5\alpha^p\beta^p(\alpha^p - \beta^p)^2 + 5\alpha^{2p}\beta^{2p}.$$

Якщо $a = 3$, $b = -1$, то $\alpha\beta = 1$, $\sqrt{a^2+4b} = \sqrt{5}$ та

$$(\alpha^p - \beta^p)^4 + 5\alpha^p\beta^p(\alpha^p - \beta^p)^2 + 5\alpha^{2p}\beta^{2p} =$$

$$= (\alpha^p - \beta^p)^4 + 5(\alpha^p - \beta^p)^2 + 5 =$$

$$= 25U_{5^k}^4 + 25U_{5^k}^2 + 5 = 5\left(5U_{5^k}^4 + 5U_{5^k}^2 + 1\right).$$

Звідси випливає, що

$$U_{5^n} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{U_{5^{k+1}}}{U_{5^k}} = 5^n \prod_{k=0}^{n-1}\left(5U_{5^k}^4 + 5U_{5^k}^2 + 1\right).$$

І таким чином твердження задачі також правильне.

Насправді послідовностей (U_n) з такою властивістю є нескінченна кількість. Нехай a та $b -$ довільні цілі числа, які не кратні 5, $a^2 + 4b = 5m$, де $m -$ довільне натуральне число. Тоді аналогічними до наведених вище міркуваннями отримаємо:

$$\frac{U_{5^{k+1}}}{U_{5^k}} = \frac{U_{5p}}{U_p} = \frac{\alpha^{5p}-\beta^{5p}}{\alpha^p-\beta^p} = \alpha^{4p} + \alpha^{3p}\beta^p + \alpha^{2p}\beta^{2p} + \alpha^p\beta^{3p} + \beta^{4p} =$$

$$= (\alpha^p - \beta^p)^4 + 5\alpha^p\beta^p(\alpha^p - \beta^p)^2 + 5\alpha^{2p}\beta^{2p} =$$

$$= (\alpha^p - \beta^p)^4 + 5(-b)^p(\alpha^p - \beta^p)^2 + 5b^{2p} =$$

$$= 25m^2U_{5^k}^4 + 25m(-b)^{5^k}U_{5^k}^2 + 5b^{2\cdot 5^k} =$$

$$= 5\left(5m^2U_{5^k}^4 + 5(-b)^{5^k}mU_{5^k}^2 + b^{2\cdot 5^k}\right).$$

$$U_{5^n} = \prod_{k=0}^{n-1}\frac{U_{5^{k+1}}}{U_{5^k}} = 5^n\prod_{k=0}^{n-1}\left(5m^2U_{5^k}^4 + 5(-b)^{5^k}mU_{5^k}^2 + b^{2\cdot 5^k}\right).$$

Наприклад, для $a = 4$, $b = 1$ знайдемо $\alpha\beta = -1$, $a^2 + 4b = 5 \cdot 4$.

Отже, внаслідок отриманої нами загальної формули

$$U_{5^n} = \prod_{k=0}^{n-1}\frac{U_{5^{k+1}}}{U_{5^k}} = 5^n\prod_{k=0}^{n-1}\left(80U_{5^k}^4 - 20U_{5^k}^2 + 1\right)$$

і ділиться націло на 5^n, але не ділиться націло на 5^{n+1}.

5. Площина розбита горизонтальними та вертикальними прямими на одиничні квадратики. Миколка стверджує, що у кожен з них можна вписати по одному натуральному числу від 1 до 16 включно так, щоб у довільному квадраті 4×4 цієї площини було по одному разові записане кожне з цих чисел, і всі 10 сум по рядках, стовпчиках та діагоналях такого квадрата дорівнювали 34.

а) Доведіть, що слова Миколки можуть бути правдою.

б) Чи обов’язково при цьому у довільному квадраті 2×2 сума чотирьох записаних у ньому чисел також дорівнює 34?

Розв’язання. Прикладом такого магічного квадрата, заповненого різними натуральними числами від 1 до 16, є квадрат

9	16	2	7
4	5	11	14
15	10	8	1
6	3	13	12

У ньому суми чисел кожного рядка, кожного стовпчика та на обох діагоналях дорівнюють 34. Проте з нього можна отримати і нетрадиційні магічні квадрати, заповнені різними натуральними числами з довільними іншими натуральними сумами $S > 34$:

9	$S-18$	2	7
4	5	$S-23$	14
$S-19$	10	8	1
6	3	13	$S-2\,2$

Зауважимо, що у кожному магічному квадраті 4×4 сума P чисел центрального квадратика 2×2 також дорівнюватиме S. Це легко довести, якщо до десяти таких сум додати ще 4 суми по горизонталях та вертикалях, які проходять через центральний квадратик 2×2. При цьому числа з центрального квадратика будуть пораховані по 5 разів, а всі інші – тричі. З рівняння $14S = 3 \times 4S + 2P$ знайдемо $P = S$.

Як наслідок звідси випливає, що й сума чисел у кутових клітинках магічного квадрата 4×4 також дорівнює S.

Поданий вище приклад магічного квадрата, заповненого різними натуральними числами від 1 до 16, характерний ще й тим, що у ньому сума чисел кожного квадратика 2×2 також дорівнює 34. Більше того, якщо ці магічні квадрати викласти у нескінченний рядок, а потім цими рядками заповнити всю площину, то на ній кожен квадрат 4×4 також буде магічним квадратом з такими ж властивостями.

6. Напередодні XVIII обласного турніру з математики 24 члени комісії МАН, кожен з яких був або лицарем, або брехуном, сиділи за круглим столом і вирішували питання щодо проведення XXIV Всеукраїнського турніру юних математиків. Після засідання всі вони висловили такі дві фрази: 1) «серед шести найближчих сусідів ліворуч від мене було порівну лицарів та брехунів», 2) «я проголосував за проведення турніру».

а) Скільки членів комісії насправді підтримали проведення турніру, якщо відомо, що лицар завжди каже правду, а брехун завжди бреше?

б) Якою могла би бути доля турніру, якщо б за нього голосувала аналогічна інша комісія у складі 28 осіб, висловивши ці ж дві фрази?

Розв'язання. **а**). Занумеруємо членів комісії по колу. Якщо перший з них лицар, то можна довести, що восьмий, п'ятнадцятий і т. д. через 7 також лицарі. Тому, замкнувши повний обхід у першому випадку отримаємо, що всі мали би бути лицарями, що суперечить умові. Отже, у першій комісії всі брехуни.

б). У другій комісії суперечності могло б і не виникнути, якщо послідовно сидітимуть 4 лицарі, 3 брехуни. І так 4 рази.

7. Розв'яжіть рівняння:

а) $4x(2x^2 - 1) = 1,$

б) $8x(2x^2 - 1)(8x^4 - 8x^2 + 1) = 1.$

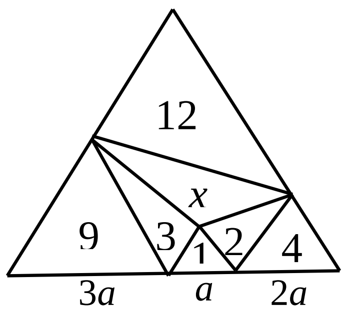
Вказівка до розв'язування. В обох рівняннях ефективною буде заміна $x = cost$ з наступним множенням на $sint$. У результаті приходимо до рівнянь $sin4t = sint$ та $sin8t = sint$. Не забути тільки виключити сторонні корені, отримані внаслідок такого множення.

Зауважимо, що перше рівняння можна розв'язати і без такої заміни, вгадавши один з коренів $x = -\frac{1}{2}$.

8. Три рівносторонні трикутники з площами 9, 1 та 4 розташовані послідовно один за одним так, що їхні основи лежать на одній прямій l, дотикаючись вершинами трикутників. Знайдіть площу трикутника, утвореного вершинами таких трикутників, які не лежать на цій прямій, якщо:

а) всі вони знаходяться по одну сторону від прямої l;

б) одна з вершин знаходиться по іншу сторону від l.



Розв'язання. **а**). Добудуємо конфігурацію до рівностороннього трикутника зі стороною, рівною сумі основ трьох заданих трикутників і врахуємо, що площі трикутників пропорційні добуткам двох сусідніх сторін. На малюнку справа всередині трикутників вказані їхні площі. Оскільки при цьому площа великого трикутника дорівнює 36, то $x = 36 - 12 - 9 - 1 - 4 - 2 - 3 = 5$.

б). Другий випадок аналізується аналогічно з врахуванням уже відомих площ з першого випадку.

9. Знайдіть усі значення параметра p, за яких сума дійсних коренів рівняння $sin\sqrt{px-x^2}=0$ дорівнює: а) рівно 100; б) рівно 2024.

Розв'язання. Врахуємо, що $px-x^2=\pi^2n^2$ для тих невід'ємних цілих n, для яких такі квадратні рівняння мають дійсні корені (невід'ємний дискримінант). Звідси маємо, $|p|\geq 2\pi n$. При кожному такому n сума дійсних коренів дорівнює p. А оскільки в обох пунктах сума коренів $p(n+1)$ додатна, то й $p>0$.

а). Якщо $p(n+1)=100$, то з нерівності $\frac{100}{n+1}\geq 2\pi n$ знаходимо $n\leq 3$. Для кожного з них отримуємо $p=\frac{100}{n+1}$. Але, чим більше p, тим більше n задовольняє нерівність $|p|\geq 2\pi n$. Тому умову задачі задовольняють лише $n=3$ та $p=25$.

б). Якщо $p(n+1)=2024$, то з нерівності $\frac{2024}{n+1}\geq 2\pi n$ знаходимо $n\leq 17$. Для $n=17$ отримуємо $p=\frac{2024}{18}=112\frac{4}{9}$.

10. З двох наступних тверджень про пряму, яка ділить навпіл як периметр, так і площу довільного трикутника, виберіть правильне (якщо на вашу думку таке існує) та обґрунтуйте свій вибір:

а) Ця пряма обов'язково проходить через точку перетину медіан трикутника.

б) Вона проходить через точку перетину бісектрис трикутника.

Вказівка до розв'язування. Справедливе таке твердження: пряма, яка проходить через точку перетину бісектрис трикутника, ділить його площу та периметр в однакових відношеннях. Для доведення потрібно з'єднати інцентр з вершинами трикутника. Відношення площ до основ у кожній отриманій частинці однакові, бо всі висоти дорівнюють радіусам вписаного кола.

Зокрема, якщо така пряма поділить площу пополам, то вона ділитиме навпіл і периметр трикутника.

Пропонуємо читачам самостійно довести, що така пряма існує, і жодна пряма, яка не проходить через інцентр трикутника, не може одночасно ділити і площу, і периметр пополам.

А для негативної відповіді до п. а) досить, наприклад, довести, що у прямокутному трикутнику зі сторонами 3, 4, 5 пряма, яка проходить через точки перетину бісектрис та медіан не ділить його площу та периметр навпіл.

11. Розв'яжіть рівняння

$$(a-x^2)(b-x)^2 = b^2x^2$$

а) при $a = 24, b = 1$;

б) при довільних дійсних значеннях параметрів a, b.

Вказівка до розв'язування.

а). Після перенесення доданка b^2x^2 у ліву частину рівняння, його ліву частину можна розкласти, наприклад, методом невизначених на два квадратичні множники з цілими коефіцієнтами.

б). Відповідь до б). $x_k = y_k + \frac{b}{2}$, де

$$y_{1,2} = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{a+b^2} \pm \sqrt{a-2b^2+2b\sqrt{a+b^2}}\right),$$

$$y_{3,4} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a+b^2} \pm \sqrt{a-2b^2-2b\sqrt{a+b^2}}\right).$$

12. Дослідіть, при яких значеннях параметра a для всіх $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ справджується нерівність

а) $tgx > sin\,x + a \cdot sin^3x$;

б) $tgx > sin\,x + a \cdot sin^2x$.

Розв'язання.

а). Помножимо обидві частини нерівності на $ctgx$ і запишемо нерівність у вигляді $1 > cos\,x + a \cdot cos\,x\,sin^2x$.

Очевидно, що вона правильна для всіх $a \le 0$.

Покладаючи $cos\,x = t$, отримаємо нерівність

$$at^3 - (1+a)t + 1 > 0.$$

Вона рівносильна нерівності

$$(t-1)(at^2 + at - 1) > 0.$$

Для $t < 1$ та $a > 0$ за властивостями квадратичних функцій буде необхідно і достатньо, щоб вираз у других дужках при $t = 1$ не був додатним. Остаточно знаходимо $a \le 1/2$.

б). Міркуючи аналогічно, запишемо нерівність у вигляді

$$1 > cos\,x + a\,cos\,x\,sin\,x.$$

Очевидно, що вона також правильна для всіх $a \leq 0$.

Розглянемо функцію $f(x) = 1 - cos\,x - a\,cos\,x\,sin\,x$.

Оскільки $f(0) = 0$, $f'(0) = -a < 0$ при $a > 0$, то умову задачі задовольняють лише $a \leq 0$.

13. Після першого кола чемпіонату з футболу, у якому беруть участь n команд, чотири команди з перших п'яти у турнірній таблиці набрали по 38 очок. Яку найбільшу можливу кількість очок могла набрати п'ята команда (у колі чемпіонату кожна команда грає з кожною один раз, за перемогу команда отримує 3 очки, за нічию – 1 очко, за поразку – 0 очок):

а) при $n = 16$?

б) при довільному натуральному $n \geq 13$?

Розв'язання.

Набрати 38 очок можна мінімум у 14 матчах (12 перемог, 2 нічиї). Тому обов'язково $n \geq 15$.

Якщо $n = 15$, то описана ситуація також неможлива, бо жодна з перших чотирьох команд програти не мала права, а з іншого боку кожна з них перемогла 12 інших, тобто не програти могли щонайбільше 3 команди.

Якщо $n = 16$, то п'ята команда також могла набрати 38 очок, якщо, наприклад, п'ять перших перемогли інші 11 команд, які між собою грали виключно унічию. При цьому таблиця особистих зустрічей у першій п'ятірці могла виглядати так:

Команда	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	-----	0	1	1	3
2	3	-----	0	1	1
3	1	3	-----	0	1
4	1	1	3	-----	0
5	0	1	1	3	-----

З іншого боку, якщо було n команд і рівно k матчів закінчилися перемогою однієї з них, а решта – внічию, то разом всіма командами було набрано $2\left(\frac{n(n-1)}{2} - k\right) + 3k = n(n-1) + k$ очок. Така сума, враховуючи умову задачі, не може перевищувати $38n$. Звідси маємо оцінку $0 \leq k \leq n(39 - n)$.

Тому $n \leq 39$. І для всіх таких $n \geq 17$ п'ята команда також зможе набрати 38 очок. Для наборів принаймні п'ятьма командами 38 очок у залежності від загальної кількості команд для них можливі такі комбінації перемог, нічиїх та поразок: $(12{,}2, n-15), (11{,}5, n-17)$,

$$(10{,}8, n-19), (9{,}11, n-21), (8{,}14, n-23), (7{,}17, n-25),$$
$$(6{,}20, n-27), (5{,}23, n-29), (4{,}26, n-31), (3{,}29, n-33),$$
$$(2{,}32, n-35), (1{,}35, n-37), (0{,}38, n-39).$$

Зрозуміло, що при цьому кількість поразок має бути невід'ємною, а кількість очок, здобутих командами нижче п'ятого місця, не має перевищувати 38.

14. Для деяких цілих чисел a, b система рівнянь

$$\begin{cases} x + ay + 2z = k \\ bx + 3y + 4z = l \\ 2x + y + 3z = m \end{cases}$$

при всіх цілих значеннях параметрів k, l, m має лише цілі розв'язки x, y, z.

а) Знайдіть хоч одну таку пару цілих чисел (a, b);

б) Знайдіть усі такі пари цілих чисел (a, b).

Розв'язання. Враховуючи формули Крамера, достатньою умовою буде рівність

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ b & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 8a + 2b - 3ab - 7 = \pm 1.$$

Доведемо, що ця умова і необхідна. Для цього розглянемо дві такі системи з правими частинами k, l, m та $k, l+n, m$ відповідно. Для різниць їх розв'язків – цілих чисел u, v, w - отримуємо таку систему рівнянь

$$\begin{cases} u + av + 2w = 0, \\ bu + 3v + 4w = n, \\ 2u + v + 3w = 0. \end{cases}$$

Оскільки $\Delta_v = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ b & n & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -n$, то Δ має бути дільником n при кожному цілому n, тобто дорівнювати ± 1.

Якщо $8a + 2b - 3ab - 7 = 1$, то маємо $b = \frac{8(a-1)}{3a-2}$. Звідси маємо пари: $a = 0, b = 4$; $a = 1, b = 0$; $a = 2, b = 2$; $a = -2, b = 3$.

А якщо $8a + 2b - 3ab - 7 = -1$, то маємо $b = \frac{2(4a-3)}{3a-2}$. Тут є ще дві пари: $a = 0, b = 3$; $a = 1, b = 2$.

Без Δ_v можна було безпосередньо із першого та третього рівнянь виразити $w = (1-2a)v$, $u = (3a-2)v$ і підставити у друге рівняння.

15. а) Залежно від значення параметра n знайдіть максимальну можливу кількість розв'язків рівняння

$$\left(\frac{1000}{n}\right)^x = log_{\frac{1000}{n}}(x).$$

б) Знайдіть максимальне натуральне значення параметра n, при якому рівняння з пункту а) має максимально можливу кількість розв'язків?

Розв'язання. Будемо вважати параметр n натуральним числом.

Функції $y = a^x$ та $y = log_a x$ взаємно обернені. Тому їх графіки симетричні відносно прямої $y = x$.

Якщо $a > 1$, то вони зростаючі. Тому рівняння $a^x = log_a x$ має ті і тільки ті корені, що й рівняння $a^x = x$, а отже, не більше двох.

Розглянемо функцію $f(x) = a^x - x$. Її похідна дорівнює $a^x lna - 1$ і дорівнює 0 у точці мінімуму $x_0 = log_a\left(\frac{1}{lna}\right) = \frac{ln\left(\frac{1}{lna}\right)}{lna}$.

При цьому $f(x_0) = \frac{1}{lna}\left(1 - ln\left(\frac{1}{lna}\right)\right) < 0$, якщо $ln\left(\frac{1}{lna}\right) > 1$. Звідси знаходимо $\frac{1}{lna} > e, \frac{1}{e} > lna, a < e^{\frac{1}{e}}$.

Для $a = \frac{1000}{n} > 1$ отримуємо $1 < \frac{1000}{n} < e^{\frac{1}{e}}$, тобто

$$1000 > n > \frac{1000}{e^{\frac{1}{e}}} \approx 692{,}200628.$$

Таким чином, для $1 \le n \le 692$ подане рівняння не має дійсних коренів, а для $693 \le n \le 999$ має два дійсні корені.

Для $n = 1000$ права частина рівняння невизначена.

І залишається розглянути випадок $0 < a < 1$, тобто $n > 1000$.

При цьому подане рівняння точно має принаймні 1 корінь, бо графіки таких двох спадних функцій перетинаються на прямій $y = x$.

Чи є ще? Треба досліджувати детальніше. Для цього розглянемо функцію $f(x) = a^x - log_a x,\ x > 0,$ і покладемо $a = e^{-k},\ k > 0$.

Її похідна дорівнює $\frac{xa^x ln^2 a - 1}{xlna}$ з від'ємним знаменником.

Нехай $g(x) = xa^x ln^2 a - 1$. Тоді

$$\lim_{x\to+0} g(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = -1 < 0.$$

Для її похідної маємо вираз $a^x ln^2 a(1 + xlna)$. Прирівнюючи до нуля, знаходимо $x_0 = -\frac{1}{lna} = 1/k$.

Тоді $g(x_0) = \frac{1}{k}(e^{-k})^{\frac{1}{k}}(-k)^2 - 1 = \frac{k}{e} - 1 > 0$, якщо $k > e$.

За цієї умови рівняння $a^x - log_a x = 0,\ a = e^{-k},$ матиме 3 корені.

При цьому $a = \frac{1000}{n} < e^{-e}$, тобто $n > 1000e^e \approx 15154{,}2622$.

Тому найбільшого n з найбільшою кількістю коренів 3 не існує, а найменшим таким є $n = 15155$.

Відповідно, для $1000 < n < 15155$ матимемо рівно 1 корінь такого рівняння.

Випадок довільних, ненатуральних, значень параметра n пропонуємо читачам проаналізувати самостійно.

16. З набору десяти перших натуральних чисел вибрали чотири попарно різних числа, які можуть бути довжинами сторін для деякої трапеції і тільки для неї.

а) Скількома способами це можна зробити?

б) Якого найбільшого значення може набувати площа трапеції у такому випадку?

Розв'язання. Трапецію з основами $x > y$ та бічними сторонами $t > z$ можна скласти тоді тільки тоді, коли існує трикутник зі сторонами $x - y, t, z$.

Нехай були вибрані числа $10 \geq a > b > c > d \geq 1$.

Розглянемо такі 6 варіантів можливості складання з них потрібних трикутників:

1). $a-b, c, d.$ $c+d>a-b>c-d;$

2). $a-c, b, d.$ $b+d>a-c>b-d;$

3). $a-d, b, c.$ $b+c>a-d>b-c;$

4). $b-c, a, d.$ $a+d>b-c>a-d;$

5). $b-d, a, c.$ $a+c>b-d>a-c;$

6). $c-d, a, b.$ $a+b>c-d>a-b.$

Можна зауважити, що з нерівностей 1) випливають нерівності 2), з нерівностей 2) – нерівності 3). Також з нерівностей 5) випливають нерівності 6), з нерівностей 3) – нерівності 3).

Крім того, права нерівність у 3) та ліва у 6) завжди правильні, а права нерівність у 4) виконуватися не може.

Тому для єдиності потрібної трапеції повинна виконуватися ліва нерівність 3) і не повинні виконуватися праві нерівності 2) та 6). Отже, до нерівностей $10 \geq a > b > c > d \geq 1$ додаються обмеження $b+c+d>a=b+c-d$. При цьому шукана трапеція матиме основи a, d та бічні сторони b, c.

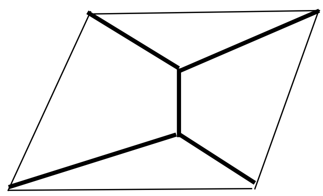
Повним перебором отримуємо 50 варіантів зі всіх 210 виборів чотирьох чисел із десяти. Найбільша площа у трапеції з основами 10 та 7 і бічними сторонами 9 та 8. Вона дорівнює $\frac{34\sqrt{35}}{3}$.

17. На земельній ділянці у вигляді ромба $ABCD$ з діагоналями 80 і 60 метрів, Петрик проклав доріжки загальної довжини l метрів таким чином, що з кожної вершини ромба можна пройти по цих доріжках у будь-яку іншу вершину ромба.

а) Чи зміг Петрик задовольнити оцінку $l < 135{,}5$?

б) Знайдіть найменше можливе значення l.

Розв'язання. Розглянемо ромб зі стороною a і гострим кутом α. Оскільки діагоналі ромба перпендикулярні і ділять його кути пополам та самі точкою перетину діляться пополам, то $tg\,\frac{\alpha}{2}=\frac{3}{4}$. Тоді $a=50$, $\sin\alpha=\frac{24}{25}$, $\cos\alpha=\frac{7}{25}$. Конфігурацію



доріжок у ньому виберемо як виділено жирним на малюнку справа. Тут на протилежних сторонах ромба побудовані трикутники з висотою h, а вертикальна зображена доріжка проходить через центр ромба. Враховуючи сказане, координати відповідних вершин ромба можна вважати такими: (0;0), (14;48), (64;48), (50;0). А центр ромба матиме координати (32;24). При цьому сума довжин таких п'яти доріжок

$$S(h) = 2\sqrt{32^2 + h^2} + 2\sqrt{18^2 + h^2} + (48 - 2h).$$

Нескладно порахувати, що для двох цілих значень h ця сума менша за 135,5:

$$S(13) \approx 135{,}486871, \quad S(14) \approx 135{,}464014.$$

Тому *для наведеної конфігурації доріжок* десь у районі $h = 14$ досягається мінімум.

18. Знайдіть найменший період послідовності $a_n = n^{n-1}\ (mod\ k)$
а) при $k = 10$;
б) при кожному значенні $k = 2{,}3 \ldots{,}9$.

Розв'язання.

а) $k = 10.\ T = 20.$
(1, 2, 9, 4, 5, 6, 9, 2, 1, 0, 1, 8, 1, 4, 5, 6, 1, 8, 1, 0), …
$(n + 20)^{n+19}\ (mod\ 10) \equiv\ n^{n-1}\ (mod\ 10).$

б) $k = 2.\ T = 2.$
(1, 0), …
$(n + 2)^{n+1}\ (mod\ 2) \equiv\ n^{n-1}\ (mod\ 2).$

$k = 3.\ T = 6.$
(1, 2, 0, 1, 1, 0), …
$(n + 6)^{n+5}\ (mod\ 3) \equiv\ n^{n-1}\ (mod\ 3).$

$k = 4.\ T = 2.$
1, 2, (1, 0), …
$(n + 2)^{n+1}\ (mod\ 4) \equiv\ n^{n-1}\ (mod\ 4), n \geq 3.$

$k = 5.\ T = 20.$
(1, 2, 4, 4, 0, 1, 4, 2, 1, 0, 1, 3, 1, 4, 0, 1, 1, 3, 1, 0), …
$(n + 20)^{n+19}\ (mod\ 5) \equiv\ n^{n-1}\ (mod\ 5).$

$k = 6. T = 6.$
(1, 2, 3, 4, 1, 0), …
$(n+6)^{n+5}\ (mod\ 6) \equiv\ n^{n-1}\ (mod\ 6).$

$k = 7. T = 42.$
(1, 2, 2, 1, 2, 6, 0, 1, 4, 6, 4, 3, 1, 0, 1, 1, 4, 2, 1, 6, 0,
1, 6, 5, 1, 5, 1, 0, 1, 4, 1, 4, 4, 6, 0, 1, 2, 2, 2, 6, 6, 0), …
$(n+42)^{n+41}\ (mod\ 7) \equiv\ n^{n-1}\ (mod\ 7).$

$k = 8. T = 2.$
1, 2, (1, 0), …
$(n+2)^{n+1}\ (mod\ 8) \equiv\ n^{n-1}\ (mod\ 8), n \geq 3.$

$k = 9. T = 18.$
1, 2, (0, 1, 4, 0, 1, 8, 0, 1, 7, 0, 1, 2, 0, 1, 7, 0, 1, 1), …
$(n+18)^{n+17}\ (mod\ 9) \equiv\ n^{n-1}\ (mod\ 9).$

Висловимо також деякі гіпотези для узагальнень:

1) $k = 2^m, T = 2$, починаючи з деякого номера.

2) $k = p^l, T = (p-1)p^l$, починаючи з деякого номера, якщо p – непарне просте число.

3) $k = 2^m p^l, T = (p-1)p^l$, починаючи з деякого номера, якщо p – непарне просте число. Наприклад,

$k = 12. T = 6.$
1, 2, (9, 4, 1, 0, 1, 8), …
$(n+6)^{n+5}\ (mod\ 6) \equiv\ n^{n-1}\ (mod\ 6).$

4) $k = pq, T = \frac{(p-1)(q-1)}{2}pq$, якщо p, q – різні прості числа.

19. Нехай задані натуральні числа $k < m,\ l < n$. Миколка пропонує Петрику зіграти у таку гру. З колоди, що містить m карт червоної масті та n карт чорної масті, Петрик випадковим чином вибирає $k + l$ карт. Петрик виграє, якщо виявиться рівно k карт червоної масті.

а) При якому найменшому значенні $m + n$ ймовірність його перемоги у такій грі дорівнює рівно ½?

б) Знайдіть усі натуральні значення m, n, при яких Петрик також вигpаватиме з ймовірністю ½.

Розв'язання. $k+l$ карт із $m+n$ штук можна вибрати C_{m+n}^{k+l} способами. Відповідно є $C_m^k C_n^l$ способів опинитися серед них k карт червоної масті та l карт чорної масті. Тому ймовірність перемоги Петрика

$$p = \frac{C_m^k C_n^l}{C_{m+n}^{k+l}}.$$

Залишилось знайти всі натуральні значення m, n, для яких існують натуральні числа $k < m,\ l < n$ такі, що $\frac{C_m^k C_n^l}{C_{m+n}^{k+l}} = \frac{1}{2}$.

Простим перебором знаходимо $\min(m+n) = 9$.

Досягається, наприклад, при $k = l = 1$ для $\mathrm{m} = 6, \mathrm{n} = 3$ чи $\mathrm{n} = 6, \mathrm{m} = 3$.

У загальному випадку для $k = l = 1$ маємо рівняння

$$4mn = (m+n)(m+n-1),$$

натуральними розв'язками якого, більшими за 1, при кожному натуральному $s > 1$ є такі пари чисел: $\frac{s(s+3)}{2} + 1,\ \frac{s(s+1)}{2}$.

При $s = 2$ маємо згаданий вище мінімум.

Те саме буде при $k = m-1,\ l = n-1$.

Пропонуємо читачам самостійно дослідити інші варіанти $k,\ l$.

20. Опуклий n-кутник M розрізали на 2024 трикутники з вершинами у вершинах многокутника M і в m точках, які розташовані всередині многокутника M.

а) Знайдіть найменше значення $m+n$;

б) Знайдіть усі можливі значення $m+n$.

Розв'язання. Сума кутів 2024 трикутників дорівнює 2024π і вона дорівнює $2\pi m + (n-2)\pi$. Звідси маємо $2m + (n-2) = 2024$. Тому $2m + n = 2026$, причому $n \geq 3$. Отже, $2m \leq 2023,\ m \leq 1011$. Найменшу суму $m+n$ отримаємо при найбільшому m, тобто при $m = 1011$. При цьому $n = 4$ і $m + n = 2015$.

Всі значення такої суми $m + n = 2026 - m$ набуваються для $0 \leq m \leq 2011$. При цьому отримуємо $2015 \leq m + n \leq 2026$.

Список рекомендованої літератури

1. Вибрані матеріали турнірів юних математиків України: Навчальний посібник / Укладач та загальний редактор К.В. Рабець. – Суми: СумДПУ ім. А.С. Макаренка, 2007. – 296 с.
2. Федак І.В. Обласні турніри юних математиків: 2005 – 2016 рр. – Івано-Франківськ: Голіней, 2016. – 160 с.
3. Федак І.В. Рекурентні послідовності. Числа Фібоначчі та Люка: Навчальний посібник. – Івано-Франківськ: ПНУ ім. Василя Стефаника. – Х.: Вид. група «Основа», 2018. – 92с. (Б-ка журналу «Математика в школах України»; Вип. 6 (186).
4. Федак І.В. Тринадцять турнірів юних математиків Прикарпаття (2005 – 2017 рр.). – Івано-Франківськ: ПНУ, 2017. – 196с.
5. Федак І.В. Турніри юних математиків та нерозв’язані проблеми математики. – Прикарпатський вісник НТШ. Число. – 2012. – 1(17) – С. 131 – 135.
6. Федак І.В. Функціональні рівняння: Навчальний посібник. – Івано-Франківськ: Голіней, 2017. – 144с.

http://www.tym.in.ua – сайт Всеукраїнських турнірів юних математиків імені професора М.Й. Ядренка.

Зміст