І.В. Федак

Івано-Франківські обласні олімпіади з математики

2016-2020 рр.

м. Івано-Франківськ
2020

ББК: 22.1
УДК: 51(031)
Ф 45

Федак І. В. Івано-Франківські обласні олімпіади з математики 2016 – 2020 рр.: Навчальний посібник. – Івано-Франківськ: ПНУ ім. Василя Стефаника, 2020. – 60с.

Друкується за рішеннями вченої ради факультету математики та інформатики ДВНЗ «Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника»

Рецензенти:

доктор фіз.-мат. наук, завідувач кафедри диференціальних рівнянь і прикладної математики Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника ***Заторський Р. А.***,

кандидат фіз.-мат. наук, доцент кафедри диференціальних рівнянь і прикладної математики Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника ***Казмерчук А. І.***

Зібрані задачі Івано-Франківських обласних олімпіад з математики за 2016–2020 роки. Наведені відповіді та вказівки до розв'язування задач.

Для учнів 7–11 класів загальноосвітніх шкіл, гімназій та ліцеїв, професійно-технічних навчальних закладів, учителів математики, керівників математичних гуртків та всіх любителів нестандартних математичних задач.

Передмова

Математичні олімпіади школярів проводяться в Україні з 1961-го року, в якому була проведена перша Республіканська олімпіада юних математиків. Від неї беруть свій відлік Всеукраїнські олімпіади юних математиків, яким передують змагання юних талантів у всіх регіонах України.

У пропонованому вашій увазі навчальному посібнику зібрані завдання III етапу Всеукраїнських математичних олімпіад 2016 – 2020 років в Івано-Франківській області та наведені їх лаконічні розв’язання.

Автор посібника – доцент кафедри математичного і функціонального аналізу Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника, Відмінник освіти України, Соросівський учитель, відомий в Україні популяризатор олімпіадного руху та турнірів юних математиків.

Федак І. В. з 1990 року є членом журі IV етапу Всеукраїнських учнівських олімпіад з математики, з 2006 року – членом журі Всеукраїнських турнірів юних математиків. Він – автор посібників «Розв’язування задач підвищеної складності з математики», «Готуємося до олімпіади з математики», «Тринадцять турнірів юних математиків Прикарпаття», кількох збірників задач Івано-Франківських обласних олімпіад з 1987 по 2015 роки та ще понад п’ятдесяти інших публікацій на олімпіадну та турнірну тематику, автор багатьох задач математичних олімпіад та турнірів.

Нова книга Івана Васильовича стане цінним подарунком всім любителям математики до 60-річчя проведення математичних олімпіад на загальнодержавному рівні.

Завідувач кафедри диференціальних
рівнянь і прикладної математики
ДВНЗ «Прикарпатський національний
університет імені Василя Стефаника»,
доктор фіз.-мат. наук, професор Р.А. Заторський

УМОВИ ЗАДАЧ

2016 рік

7 клас

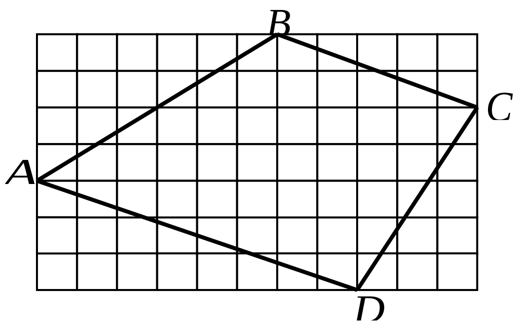
1. Дідусь, тато та онук пробігли дистанцію від дому до крамниці та назад. При цьому онук туди і назад біг з однаковою швидкістю. Дідусь туди біг удвічі швидше, а назад у 3 рази повільніше за онука. Тато біг туди удвічі повільніше, а назад у 3 рази швидше за онука. В якому порядку вони повернуться додому?

2. З 22-х карток, на яких записані числа 1, 2, ..., 22, склали 11 дробів (перегортати картки не можна). Яка найбільша кількість цілих чисел може виявитись серед отриманих дробів?

3. У таблиці 4×4, що показана на малюнку, справа, треба у 4 комірки поставити по одній зірочці таким чином, щоб ця розстановка задовольняла такі умови: у кожному стовпчику та кожному рядку не повинно бути більше однієї зірочки, жодні дві зірочки не мають стояти у сусідніх по діагоналі комірках. У яких полях можуть стояти зірочки? Вкажіть усі можливі відповіді.

1				
2				
3				
4				
	а	б	в	г

4. Чому дорівнює площа чотирикутника $ABCD$, що зображений на малюнку нижче, якщо сторона малого квадратика дорівнює 1 см?



8 клас

1. Скільки існує трицифрових чисел з ненульовими цифрами, які мають таку властивість: при будь-якій перестановці цифр отримаємо трицифрове число, що ділиться націло на 4?

2. Знайдіть принаймні одну пару натуральних чисел (x, y), що задовольняє рівність: $\frac{1}{2}\left(x^2 - y^3\right) = 2016$.

3. Андрій, Богдан та Олеся йшли однією дорогою від будинку до школи. Андрій йшов зі швидкістю a км/год протягом $(2-b)$ годин, Богдан йшов зі швидкістю b км/год протягом $(2-c)$ годин, Олеся йшла зі швидкістю c км/год протягом $(2-a)$ годин, де a, b, c – деякі, не обов'язково цілі, числа. Яка відстань між будинком та школою, якщо відомо, що вона вимірюється цілою кількістю кілометрів?

4. Чи можна рівносторонній трикутник розрізати на:

а) три однакових чотирикутники;

б) три однакових п'ятикутники?

Чотирикутники та п'ятикутники не обов'язково опуклі.

5. В опуклому чотирикутнику $ABCD$ справджуються рівності: $\angle ABC = \angle BCD$ та $2AB = CD$. На стороні BC вибрана така точка X така, що $\angle BAX = \angle CDA$. Доведіть, що $AX = AD$.

9 клас

1. Скільки існує трицифрових чисел з ненульовими цифрами, які мають таку властивість: при будь-якій перестановці цифр отримаємо трицифрове число, що ділиться націло на 4?

2. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} x^2 + xy + xz = y, \\ y^2 + yz + yx = z, \\ z^2 + zx + zy = x. \end{cases}$$

3. Знайдіть усі натуральні n, для яких число $11^n - 1$ ділиться націло на $10^n - 1$.

4. Вершини куба деяким чином перенумеровані числами $1; 2; ...; 8$. Петрику повідомили для трьох з шести граней куба номери вершин, що їм відповідають: $\{1; 4; 6; 8\}$, $\{1; 2; 6; 7\}$, $\{1; 2; 5; 8\}$. Чи зможе Петрик за цими даними сказати, який номер має вершина, що найбільш віддалена від вершини з номером 5?

5. На сторонах AB та AD квадрата $ABCD$ вибрані точки N та P відповідно таким чином, що $PN = NC$, точка Q – точка на відрізку AN, для якої $\angle NCB = \angle QPN$. Доведіть, що $\angle BCQ = \frac{1}{2}\angle PQA$.

10 клас

1. Близнюки Петрик та Остап посварилися і стали ходити з дому до школи різними шляхами. Петрик спочатку йде 210 метрів на південь, а далі 70 метрів на схід і потрапляє до школи. Остап спочатку йде певний час на північ, а далі по прямій до школи. Скільки саме метрів Остап йде на північ, якщо близнюки ходять з однаковою швидкістю і приходять до школи одночасно?

2. Є 12 стільців, розташованих в одну лінію та перенумеровані зліва направо числами $1; 2; ...; 12$. Федір може стрибати по цих стільцях за такими правилами: зі стільця з номером k він може стрибнути на стілець з номером n тоді і тільки тоді, коли $|k-n|=5$ або $|k-n|=8$. Відомо, що Федір, розпочавши з деякого стільця, зміг пострибати по них так, що побував на кожному стільці рівно один раз. Із стільця з яким номером Федір мав почати стрибати?

3. Квадратний тричлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ з цілими коефіцієнтами для кожного цілого значення x ділиться націло на натуральне число N. Чи обов’язково на N ділиться кожний з коефіцієнтів цього тричлена, якщо:

а) $N = 2016$; б) $N = 2017$?

4. На сторонах AB та AD квадрата $ABCD$ вибрані точки N та P відповідно таким чином, що $PN = NC$, точка Q – точка на відрізку AN, для якої $\angle NCB = \angle QPN$. Доведіть, що $\angle BCQ = \frac{1}{2}\angle PQA$.

5. Для додатних чисел a, b, c таких, що $a+b+c=1$, доведіть нерівність:

$$\frac{a}{a+b^2} + \frac{b}{b+c^2} + \frac{c}{c+a^2} \le \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

11 клас

1. Порівняйте числа: $A=11$, $B=\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot\ldots\cdot\log_{2015} 2016$ та $C=\log_3 2\cdot\log_4 3\cdot\log_5 4\cdot\ldots\cdot\log_{2016} 2015$.

2. Квадратний тричлен $f(x)=ax^2+bx+c$ з цілими коефіцієнтами для кожного цілого значення x ділиться націло на 2017. Чи обов'язково на 2017 ділиться націло кожний з коефіцієнтів цього тричлена?

3. Знайдіть усі трійки додатних чисел a, b, c, які задовольняють умови:

$$ab\left(1-\frac{c^2}{(a+b)^2}\right)=bc\left(1-\frac{a^2}{(b+c)^2}\right)=ca\left(1-\frac{b^2}{(c+a)^2}\right).$$

4. У трикутнику ABC проведена бісектриса AD, E – точка дотику вписаного кола до сторони BC, I – центр вписаного кола ΔABC. Точка A_1 на описаному колі ΔABC така, що $AA_1 \parallel BC$. Позначимо через T – другу точку перетину прямої EA_1 та описаного кола ΔAED. Доведіть, що $IT=IA$.

5. Для яких натуральних $n\ge 3$ можна за скінченну кількість кроків з набору чисел $1; 2; \ldots; n$ отримати набір з n однакових чисел, якщо за один крок можна вибирати два довільних числа та збільшити кожне з них на довільне однакове натуральне число?

2017 рік

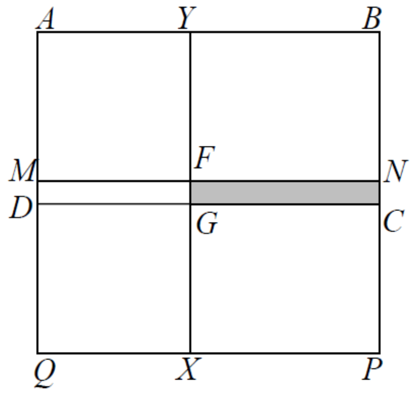
7 клас

1. На дошці записують послідовність цифр за таким правилом: якщо останні цифри, записані на дошці, дорівнюють a та b, то за ними записується остання цифра добутку ab. Знайдіть 2017-ту виписану цифру послідовності, якщо вона почалася з цифр $3; 4$. Відповідь обґрунтуйте.

2. У компанії друзів кожному подобалася або математика, або інформатика. Відомо, що ті, кому подобалась математика, мали середній вік 15 років, а ті, кому подобалась інформатика, мали

середній вік 25 років. Одного дня Андрійкові перестала подобатись інформатика, та стала подобатись математика. Внаслідок цього середній вік тих, кому подобалась інформатика, а також тих, кому подобалась математика, став більшим на 1. З'ясуйте, скільки всього було друзів у цій компанії та наведіть відповідний приклад, що така ситуація можлива.

3. Три однакових прямокутники $ABCD$, $MNPQ$ та $BPXY$ розташовані так, як це зображено на рисунку. Прямокутник $NCGF$ спільний для усіх цих трьох прямокутників і має площу 17. Визначте довжини сторін однакових прямокутників, якщо відомо, що вони є натуральними числами. Відповідь обґрунтуйте.



4. У чемпіонаті взяли участь 8 команд. Чемпіонат проходив в одне коло, тобто кожна команда зіграла з кожною рівно один раз. При цьому грали кожного дня по турах, тобто у кожному турі грали усі команди, що були розбиті на пари. Після туру публікувалася таблиця, де команди розставлялися по місцях (з 1-го по 8-е) відповідно набраних очок. Після якого туру найшвидше могло виявитись, що усі команди набрали різну кількість очок, якщо це був чемпіонат з баскетболу, де за перемогу нараховується 1 очко, за поразку очок не нараховується, а нічиїх не буває? Відповідь обґрунтуйте.

8 клас

1. По колу розставлені 8 кружечків. Чи можна записати у цих кружечках числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 таким чином, щоб сума чисел, що записані у будь-яких двох сусідніх кружечках, не ділилася ні на 3, ні на 5, ні на 7?

2. У чемпіонаті взяли участь 8 команд. Чемпіонат проходив в одне коло, тобто кожна команда зіграла з кожною рівно один раз. При цьому грали кожного дня по турах, тобто у кожному турі грали усі команди, що були розбиті на пари. Після туру публікувалася таблиця,

де команди розставлялися по місцях (з 1-го по 8-е) відповідно набраних очок. Після якого туру найшвидше могло виявитись, що усі команди набрали різну кількість очок, якщо:

а) це був чемпіонат з баскетболу, де за перемогу нараховується 1 очко, за поразку очок не нараховується, а нічиїх не буває?

б) це був чемпіонат з гандболу, де за перемогу нараховується 2 очки, за нічию – 1 очко, за поразку очок не нараховується?

3. Добуток трьох чисел $\overline{abc}\cdot\overline{ab}\cdot a = 3****7$ є шестицифровим числом з першою цифрою 3 та останньою цифрою 7. Цифри не обов'язково різні. Чому може дорівнювати цей добуток? Наведіть усі можливі відповіді.

4. У трапеції $ABCD$ з основами BC та AD бісектриса кута DAB перетинає бісектриси кутів ABC та CDA у точках P та S відповідно, а бісектриса кута BCD перетинає бісектриси кутів ABC та CDA у точках Q та R відповідно. Доведіть, що якщо $PS \parallel RQ$, то $AB = CD$.

5. Знайдіть усі пари (a,b) цілих чисел a та b, які задовольняють умову $a^2 + b^2 = a + b + ab$.

9 клас

1. Знайдіть найбільший спільний дільник набору з 2017 таких чисел: $2017+1,\ 2017^2+1,\ 2017^3+1, \ldots,\ 2017^{2017}+1$.

2. У чемпіонаті з гандболу взяли участь 8 команд. За перемогу нараховується 2 очки, за нічию – 1 очко, за поразку очок не нараховується. Чемпіонат проходив в одне коло, тобто кожна команда зіграла з кожною рівно один раз. При цьому грали кожного дня по турах, тобто у кожному турі грали усі команди, що були розбиті на пари. Після туру публікувалася таблиця, де команди розставлялися по місцях (з 1-го по 8-е) відповідно набраних очок. Команди, що на даний момент або наприкінці турніру набрали однакову кількість очок, розподіляються по місцях по додаткових показниках (особиста зустріч, різниця м'ячів тощо). В деякий момент після чергового туру виявилось, що усі команди набрали різну

кількість очок. Чи зможе наприкінці чемпіонату посісти перше місце команда, що у той момент була на 8-му місці?

3. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} \left(x^2+1\right)y = z^2+1, \\ \left(y^2+1\right)z = x^2+1, \\ \left(z^2+1\right)x = y^2+1. \end{cases}$$

4. Є набір з десяти карток, на яких записано по одній цифрі: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Андрій та Олеся по черзі (розпочинає Андрій) вибирають по одній картці та складають їх послідовно зліва направо так, що у кожного утворюється п'ятицифрове число (картку з цифрою 0 на своєму першому кроці жоден з гравців вибирати не може). Перемагає той, у кого число, що утворилося, ділиться націло на 9. Якщо у обох число ділиться на 9, або у обох не ділиться на 9, то вважається, що гра завершилась внічию. Кожен з гравців прагне перемогти. Чи може хтось із них забезпечити собі перемогу?

5. У трикутнику ABC проведені медіани BB_1 та CC_1, які перетинаються у точці M. Доведіть, що у чотирикутник AC_1MB_1 можна вписати коло тоді і тільки тоді, коли $AB = AC$.

10 клас

1. Знайдіть найбільше дев'ятицифрове натуральне число, що задовольняє умови: усі його цифри різні, кожні дві сусідні цифри числа відрізняються не менше ніж на 2 та воно кратне 3.

2. У чемпіонаті взяли участь 8 команд. Чемпіонат проходив в одне коло, тобто кожна команда зіграла з кожною рівно один раз. При цьому грали кожного дня по турах, тобто у кожному турі грали усі команди, що були розбиті на пари. Після туру публікувалася таблиця, де команди розставлялися по місцях (з 1-го по 8-е) відповідно набраних очок. Після якого туру найшвидше може виявитись, що усі команди набрали різну кількість очок, якщо:

а) це був чемпіонат з баскетболу, де за перемогу нараховується 1 очко, за поразку очок не нараховується, а нічиїх не буває.

б) це був чемпіонат з футболу, де за перемогу нараховується 3 очки, за нічию – 1 очко, за поразку очок не нараховується.

3. Заданий квадрат $ABCD$. Нехай точка M – середина сторони BC, а H – основа перпендикуляра з вершини C на відрізок DM. Доведіть, що $AB = AH$.

4. Знайдіть двоцифрове натуральне число $N = \overline{ab},\ b \neq 0$, для якого у послідовності чисел $m_n = \overline{a\underbrace{0...0}_{n}b}$

а) усі члени кратні N; б) жодний член не кратний N; в) є нескінченна кількість членів, які кратні N, а також, нескінченна кількість членів, які не кратні N.

5. Для невід'ємних чисел $x,\ y,\ z$ доведіть нерівність:

$$3\left(x^2 + y + z\right)\left(x + y^2 + z\right)\left(x + y + z^2\right) \geq \left(x + y + z\right)^4.$$

11 клас

1. Знайдіть найбільше дев'ятицифрове натуральне число, яке задовольняє умови: усі його цифри різні, кожні дві сусідні цифри числа відрізняються не менше ніж на 2 та воно кратне 3.

2. Добуток $\overline{abc} \cdot \overline{bca} \cdot \overline{cab} = 3{*}{*}{*}{*}{*}{*}1$ є восьмицифровим числом з першою цифрою 3 та останньою цифрою 1. Цифри попарно різні. Чому може дорівнювати цей добуток? Наведіть усі можливі відповіді.

3. Доведіть, що при будь-якому значенні параметра a рівняння

$$x^4 + a^2x^3 + 2ax^2 + 3a^2x + a - 1 = 0$$

має принаймні один дійсний розв'язок.

4. У футбольному чемпіонаті грали команд n в одне коло, тобто кожна команда з кожною зіграла рівно 1 раз. За перемогу нараховується 3 очки, за нічию – 1 очко, за поразку очок не нараховується. За підсумками чемпіонату виявилось, що усі команди набрали різну кількість очок, при цьому у команд, що посіли сусідні місця, набрані очки відрізняються рівно на 1. Скільки мінімум очок могла набрати команда, яка посіла останнє місце, і при якому найменшому n це могло відбутися.

5. У трикутнику ABC проведена бісектриса AD. Коло k проходить через вершину A та дотикається до сторони BC у точці D. Доведіть, що описане коло трикутника ABC дотикається до кола k у точці A.

2018 рік

7 клас

1. Андрій написав чотирицифрове число. Олеся викреслила у ньому останню цифру і виявилося, що різниця початкового і отриманого чисел дорівнює 2018. Яке число написав Андрій? Вкажіть усі можливі відповіді.

2. Відомо, що на книжкову полицю можна поставити 9 однакових товстих книг, але десята така книга вже не поміститься. Так само на неї можна поставити 15 однакових тонких книг, але на шістнадцяту тонку книгу місця не вистачить. Чи можливо, щоб на полиці помістилися одночасно: а) 6 товстих та 5 тонких книг? б) 7 товстих та 5 тонких книг?

3. У клубі присутні декілька джентльменів. Кожні двоє – або друзі, або вороги. Відомо, що у кожного з джентльменів рівно 4 вороги. Крім того, для кожного з них ворог його друга є його ворогом. Яка кількість джентльменів може бути присутня в клубі?

4. У чотирикутнику $ABCD$ точка E – середина сторони AB, точка F – середина сторони BC, точка G – середина AD. Виявилося, що відрізок GE перпендикулярний до AB, а відрізок GF – до відрізка BC. Знайдіть величину кута GCD, якщо $\angle ADC = 70^\circ$.

8 клас

1. Для натуральних чисел m та n порівняйте два числа:
$A = m^{526} + n^{526}$ та $B = (m+n)(m^2+n^2)(m^4+n^4)(m^8+n^8)\ldots(m^{128}+n^{128})$.

2. Вчитель писав на дошці цифри 123...9123...9123... доки не утворилося 2018-цифрове число. Після цього Андрій та Олеся грали у таку гру. По черзі (розпочинає Андрій) вони викреслювали по дві цифри таким чином: або дві перші цифри числа, що залишилося після попереднього ходу, або дві останні цифри, або першу та останню

цифри того числа. Гра закінчується, коли залишилося двоцифрове число. Перемагає Олеся, якщо це число ділиться на 3, інакше перемагає Андрій. Хто переможе за правильної гри обох гравців?

3. У рівнобедреному трикутнику ABC з вершиною у точці B проведені висоти BH та CL. Точка D така, що $BDCH$ – прямокутник. Знайдіть величину кута DLH.

4. Відомо, що на книжкову полицю можна поставити 9 однакових товстих книг, але десята така книга вже не поміститься. Так само на неї можна поставити 15 однакових тонких книг, але на шістнадцяту тонку книгу місця не вистачить. Чи можливо, щоб на полиці помістилися одночасно 7 товстих та 5 тонких книг?

5. Про натуральне число A відомо, що воно має рівно 2018 натуральних дільників (включаючи 1 та саме число A) та ділиться націло на 2018. Доведіть, що число A не ділиться націло на 2018^2.

9 клас

1. Розв'яжіть у натуральних числах x, y, z систему рівнянь:

$$\begin{cases} x^3 - 6y^2 + 27z = 132, \\ y^3 - 9z^2 + 3x = 125, \\ z^3 - 3x^2 + 12y = -68. \end{cases}$$

2. Вчитель писав на дошці цифри 123...8123...8123... доки не утворилося 2018-цифрове число. Після цього Андрій та Олеся грали у таку гру. По черзі (розпочинає Андрій) вони викреслювали по дві цифри таким чином – перші дві цифри числа, що залишилося після попереднього ходу, або останні дві цифри, або першу та останню цифри того числа. Гра закінчується, коли залишилося двоцифрове число. Перемагає Олеся, якщо це число ділиться на 4, інакше перемагає Андрій. Хто переможе за правильної гри обох гравців?

3. Доведіть для додатних чисел x, y, z нерівність

$$\frac{y}{2x+y} + \frac{z}{2y+z} + \frac{x}{2z+x} \geq 1 .$$

4. Знайдіть усі пари натуральних чисел $x,\ y$, які задовольняють систему рівнянь:

$$\begin{cases}[x,y]+(x,y)=2018,\\ x+y=2018,\end{cases}$$

де через $[x,y]$ та (x,y) позначені НСК та НСД чисел $x,\ y$.

5. Задане коло Γ з центром у точці O та діаметром AB. $OBDE$ – квадрат, F – друга точка перетину прямої AD та кола Γ, C – середина відрізка AF. Знайдіть величину кута OCB.

10 клас

1. Розв'яжіть у цілих числах $x,\ y$ систему рівнянь:

$$\begin{cases}x^4+4y^3+6x^2+4y=-137,\\ y^4+4x^3+6y^2+4x=472.\end{cases}$$

2. Для яких натуральних n квадрат $n\times n$ можна повністю покрити без накладання деякою кількістю прямокутників 4×1 та одним квадратиком 1×1?

3. Про натуральне число A відомо, що воно має рівно 2018 натуральних дільників (включаючи 1 та саме число A) та ділиться націло на 2018. Доведіть, що число A не ділиться націло на 2018^2.

4. Дано трикутник ABC. Серединний перпендикуляр до сторони AC перетинає бісектрису трикутника AK у точці P, M – така точка, що $\angle MAC=\angle PCB$, $\angle MPA=\angle CPK$, і точки M та K лежать по різні боки від прямої AC. Доведіть, що пряма AK ділить відрізок BM навпіл.

5. Для натуральних чисел m та n порівняйте два числа:

$$A=m^{525}+n^{525} \text{ та } B=(m+n)(m^2+n^2)(m^4+n^4)(m^8+n^8)...(m^{128}+n^{128}).$$

11 клас

1. Чи існує таке значення $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, для якого числа $\sin x$, $\cos x$ та $\operatorname{tg} x$ утворюють геометричну прогресію?

2. Знайдіть усі пари натуральних чисел $x,\ y$, які задовольняють систему рівнянь:

$$\begin{cases} [x, y] + (x, y) = 2018, \\ x + y = 2018, \end{cases}$$

де через $[x, y]$ та (x, y) позначені НСК та НСД чисел $x,\ y$.

3. Для яких натуральних n квадрат $n \times n$ можна повністю покрити без накладання деякою кількістю прямокутників $k \times 1$ та одним квадратиком 1×1, де: а) $k = 4$; б) $k = 8$?

4. У чотирикутнику $ABCD$ діагональ AC є бісектрисою кута BAD та $\angle ADC = \angle ACB$. Точки X, Y – основи перпендикулярів, що проведені з точки A на прямі BC, CD відповідно. Доведіть, що ортоцентр трикутника AXY лежить на прямій BD.

5. $x,\ y,\ z$ – додатні дійсні числа такі, що $x + y + z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$. Доведіть, що $xy + yz + zx \geq 3$.

2019 рік

7 клас

0. Пара цілих чисел (x, y) задовольняє рівність $(x-1)^2 + y^2 = 0$. Яке значення може набувати число y:

а) 0; ***б)*** 10; ***в)*** 100; ***г)*** 2019?

(В роботі треба написати лише пункт правильної відповіді без пояснень).

1. Чи існує пара правильних нескоротних дробів, різниця яких дорівнює їх добутку і знаменник одного з яких дорівнює 2019? Якщо існує, то знайдіть принаймні дві пари таких дробів.

2. З точки O проти руху годинникової стрілки проведені n променів $OA_1, OA_2, \ldots, OA_n$, при цьому $\angle A_1OA_n < 180^{\circ}$. Для якого найменшого n могло статися, що серед кутів $\angle A_iOA_j$, $1 \leq i < j \leq n$, буде пара кутів величиною 60°, пара кутів величиною 45° та пара кутів величиною 30°.

3. Натуральні числа a, b, c, d задовольняють умову $a < b < c < d$. Чи може найменше спільне кратне чисел a та b бути більшим найменшого спільного кратного чисел c та d?

4. У виразі $\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm ... \pm 2018$ Андрій обирає один із знаків перед кожним числом. Скільки різних додатних значень може при цьому вийти як результат обчислення значення виразу з обраними знаками?

8 клас

0. Пара цілих чисел (x, y) задовольняє рівність $(x-1)^4 + y^4 = 0$. Яке значення може набувати число y:

а) 0; ***б)*** 100; ***в)*** 1000; ***г)*** 2019?

(В роботі треба написати лише пункт правильної відповіді без пояснень).

1. Розглянемо на декартовій площині сукупність прямих $y = (k+n)x + k - n$, де k, n – довільні цілі числа. Чи існує точка з цілими координатами, через яку не пройде жодна з таких прямих?

2. На дошці записане число 2019. Катя та Микола по черзі (розпочинає Катя) роблять такі ходи: вони вибирають будь-який дільник d записаного на дошці числа N і записують на дошці замість числа N число $N - (2d - 1)$, якщо воно є натуральним. Програє той, хто напише на дошці число 1. Хто може перемогти у цій грі, якщо кожний прагне перемогти?

3. У трикутнику ABC відомо, що $2AC = AB$ та $\angle A = 2\angle B$. У цьому трикутнику провели бісектрису AL і позначили точку M – середину сторони AB. Виявилося, що $CL = ML$. Доведіть, що $\angle B = 30^{\circ}$.

4. Яке найменше значення набуває вираз $x^6 + x^4y^2 + x^2y^4 + y^6$, якщо добуток дійсних чисел x, y дорівнює 1?

5. У виразі $\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm ... \pm 2018$ Андрій обирає один із знаків перед кожним числом. Скільки різних додатних значень може при цьому вийти як результат обчислення значення виразу з обраними знаками?

9 клас

0. Чому дорівнює в градусах величина найменшого кута прямокутного трикутника, якщо один з його кутів дорівнює 60°:

а) 30°; ***б)*** 90°; ***в)*** 180°; ***г)*** 2019°?

(В роботі треба написати лише пункт правильної відповіді без пояснень).

1. Розглянемо на декартовій площині сукупність парабол $y = kx^2 + (k-n)x + k + n$, де k, n – довільні цілі числа. Чи існує точка з цілими координатами, через яку не пройде жодна з таких парабол?

2. У прямокутному трикутнику ABC довжини катетів задовольняють умову $BC = \sqrt{2}AC$. Доведіть, що медіани AN та CM перпендикулярні.

3. На довгій паперовій смужці без пробілів записані одне за одним три числа 2^{100}, 3^{100} та 5^{100} так, що утворилося багатоцифрове число N. Арсеній стверджує, що може замінити останню цифру числа N так, що утвориться степінь числа 13. Чи правда це?

4. Для додатних чисел x, y, z, a, b, c, які задовольняють умову $x + y + z = a + b + c$, доведіть нерівність

$$\frac{x}{a+b} + \frac{y}{b+c} + \frac{z}{c+a} + \frac{a}{x+z} + \frac{b}{x+y} + \frac{c}{y+z} > 2.$$

5. У виразі $\pm 1 \pm 2 \pm 2^2 \pm 2^3 \pm \ldots \pm 2^{2019}$ Андрій обирає один із знаків перед кожним числом. Скільки різних додатних значень може при цьому вийти як результат обчислення значення виразу з обраними знаками?

10 клас

0. Чому дорівнює в градусах величина найменшого кута паралелограма, якщо один з його кутів дорівнює 150°:

а) 30°; ***б)*** 180°; ***в)*** 360°; ***г)*** 2019°?

(В роботі треба написати лише пункт правильної відповіді без пояснень).

1. Розв’яжіть рівняння

$$\frac{\sqrt{x}+2}{\cos 2x + 3} = \frac{\sqrt{x}+1}{\cos 2x + 1}.$$

2. На дошці записане число 2019. Катя та Микола по черзі (розпочинає Катя) роблять такі ходи: вони вибирають будь-який дільник d записаного на дошці числа N і записують на дошці замість числа N число $N-(4d-1)$, якщо воно є натуральним. Програє той, хто не зможе зробити хід за правилами. Хто може перемогти у цій грі, якщо кожний прагне перемогти?

3. Назвемо прямокутний трикутник ABC *особливим*, якщо довжини всіх його сторін є цілими числами та на кожній зі сторін є така точка X, відмінна від вершин трикутника ABC, для якої довжини відрізків AX, BX та CX – цілі числа. Знайдіть принаймні один особливий трикутник.

4. Скількома способами можна покрити квадрат 4×4, що складається з 16 квадратиків 1×1, п’ятьма прямокутниками 3×1 так, щоб рівно один квадратик 1×1 лишився непокритим?

5. Для додатних чисел x, y, z, t доведіть нерівність:

$$\frac{x^8+1}{x^4}+\frac{y^8+1}{y^4}+\frac{z^8+1}{z^4}+\frac{t^8+1}{t^4}\geq 2\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{t}+\frac{t}{x}\right).$$

11 клас

0. Скільки усього вершин у правильній 2018-кутній піраміді:

а) 2019; ***б)*** 19; ***в)*** 10; ***г)*** 2?

(В роботі треба написати лише пункт правильної відповіді без пояснень).

1. Знайдіть усі розв’язки рівняння

$$\frac{2\cos 2x}{6-3\cos 3x}=\frac{\cos 2x+1}{\cos 3x+2},$$

якщо $-\pi\leq x\leq\pi$.

2. У гострокутному трикутнику ABC, в якому $AB<AC$, точка M – середина сторони BC, K – середина ламаної BAC. Доведіть, що $\sqrt{2}KM>AB$.

3. Розглянемо таблицю $m\times n,\ m\geq 2, n\geq 2$ (m рядків, що занумеровані числами $1, 2, \ldots, m$, та n стовпчиків, що занумеровані числами $1, 2, \ldots, n$), яка заповнена натуральними числами. Нехай

b_i – НСК (найменше спільне кратне) усіх чисел, що стоять в i -му рядку, $1 \le i \le m$, і визначимо число B – НСД (найбільший спільний дільник) чисел $(b_1, b_2, ..., b_m)$. Також нехай c_j – НСД усіх чисел, що стоять в j-му стовпчику, $1 \le j \le n$, та визначимо число C – НСК чисел $(c_1, c_2, ..., c_n)$. Чи можна стверджувати, що обов'язково або B ділиться націло на C, або, навпаки, C ділиться націло на B?

4. Для додатних чисел x, y, z, добуток яких дорівнює 1, доведіть нерівність:

$$\frac{x^6+2}{x^3}+\frac{y^6+2}{y^3}+\frac{z^6+2}{z^3} \ge 3\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right).$$

5. *Полігоном* назвемо зв'язну по стороні фігуру, що складається з квадратиків 1×1. Відомо, що прямокутник, відмінний від квадрата, можна розрізати на 8 попарно різних полігонів. Полігони вважаються однаковими, якщо їх можна сумістити шляхом зсувів, повертань чи перевертань. Яку найменшу площу може мати цей прямокутник?

2020 рік

7 клас

1. Додатне число a на 20% менше числа b. На скільки відсотків число b більше, ніж число a?

2. Миколка хвалиться, що він знайшов натуральне число, добуток цифр якого у 2020 разів більший, ніж їх сума. Чи можуть його слова бути правдою? Якщо так, то вкажіть це число.

3. Визначте, за якого найменшого значення n можна викласти квадрат, використавши по n квадратиків розмірами 3×3 та 4×4.

4. О 9.00 командир роти відправив поштового голуба з повідомленням до штабу. Після цього рота стала рухатися у напрямі штабу зі швидкістю 6 км/год., а її розвідник – у протилежному напрямі зі швидкістю 4 км/год. Голуб полетів до штабу, передав повідомлення і, не затримуючись, повернувся до командира роти о 9.30. Знову не затримуючись, він полетів наздоганяти розвідника. О котрій годині голуб був у штабі та о котрій годині він наздожене розвідника, якщо швидкість його польоту становить 10 км/год.?

5. На березі озера круглої форми ростуть, чергуючись одна з одною, яблуні та груші. Батько та син вирушили вдовж озера від однієї з груш у протилежних напрямах і зустрілися біля іншої груші. По дорозі батько нарахував вдвічі більше яблунь, ніж син. Продовжуючи рухатися у тих же напрямах, вони знову зустрілися біля груші. І знову батько нарахував вдвічі більше яблунь, ніж син. Аналогічна ситуація повторилася і третій раз. Доведіть, що третя їхня зустріч відбулася біля тієї груші, від якої вони починали свій рух.

8 клас

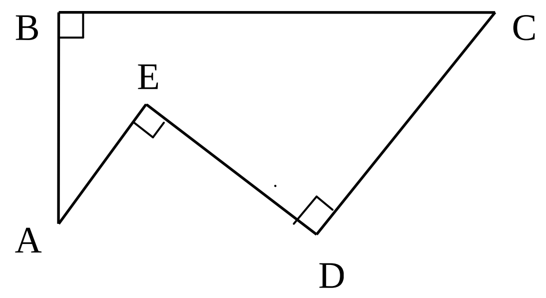
1. Вкажіть хоч один спосіб, як двома відрами місткістю 5 та 8 літрів відповідно відміряти рівно 1 літр води.

2. Знайдіть остачу та частку від ділення $8^{2020}+4^{2020}$ на $8^{2018}+4^{2017}$.

3. Квадрат зі стороною 8см поділений на 64 квадратики зі стороною 1см. Сім таких квадратиків зафарбовані в чорний колір, решта – білі. Яку найбільшу площу в цьому квадраті може гарантовано (не залежно від розташування чорних квадратиків) мати прямокутник, який складається лише з білих квадратиків?

4. На березі озера круглої форми ростуть, чергуючись одна з одною, яблуні та груші. Батько та син вирушили вдовж озера від однієї з груш у протилежних напрямах і зустрілися біля іншої груші. По дорозі батько нарахував вдвічі більше яблунь, ніж син, та втричі більше яблук на них. Продовжуючи рухатися у тих же напрямах, вони знову зустрілися біля груші. І знову батько нарахував вдвічі більше яблунь, ніж син, та втричі більше яблук на них. Так само при третій їхній зустрічі під грушею батько також нарахував вдвічі більше яблунь, ніж син. Хто з них на третьому етапі нарахував більше яблук і в скільки разів?

5. У п’ятикутнику $ABCDE$ (див. мал. нижче) відомі довжини чотирьох його сторін: $AB=4$, $CD=5$, $DE=4$, $AE=3$. Знайдіть довжину сторони BC.



9 клас

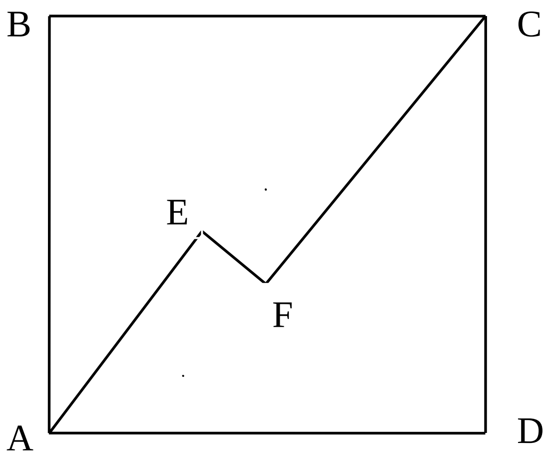
1. Знайдіть усі значення параметра a, за яких рівняння $ax^2 - 2x + 1 = 0$ не має двох різних дійсних коренів.

2. Серед 2020 однакових на вигляд монет одна монета фальшива, вона легша за інші. Марійка збирається виявити фальшиву монету, порівнюючи при кожному зважуванні маси двох купок з однаковою кількістю монет. Як їй гарантовано вдасться в такий спосіб виявити фальшиву монету за 7 зважувань?

3. Трицифрове натуральне число $\overline{abc} = a! + b! + c!$. Знайдіть це число і доведіть, що інших трицифрових чисел з такою властивістю не існує. (Нагадуємо, що $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n;\ 0! = 1$).

4. Для дійсних чисел a та b таких, що $a + b = 2$, доведіть нерівність $\left(a^2 - a + 1\right)\left(b^2 + b + 1\right) \geq 3$ та вкажіть усі пари таких чисел, для яких у ній досягається рівність.

5. У квадраті $ABCD$ вибрали точки E та F такі, що $AE = 3$, $EF = 1$, $CF = 4$ та відрізок EF перпендикулярний до відрізків AE і CF (див. мал. справа). Знайдіть довжину сторони цього квадрата.



10 клас

1. Знайдіть усі трійки послідовних натуральних чисел, сума квадратів яких дорівнює 2020.

2. Скільки існує різних чотирицифрових чисел, добуток цифр яких у 20 разів більший, ніж їх сума?

3. На березі озера круглої форми ростуть, чергуючись одна з одною, яблуні та груші. Батько та син вирушили вдовж озера від однієї з груш у протилежних напрямах і зустрілися біля іншої груші. По дорозі батько нарахував в n разів більше яблунь, ніж син, та в $n+1$ разів більше яблук на них. Продовжуючи рухатися у тих же напрямах, вони знову зустрілися біля груші. І знову батько нарахував в n разів більше яблунь, ніж син, та в $n+1$ разів більше яблук на них. Аналогічна ситуація повторилася n разів. Для яких n могло статися так, що на наступному етапі батько знову нарахував в n разів більше яблунь, ніж син, але яблук на них вони нарахували порівну?

4. Всередині квадрата $ABCD$ вибрали точку E таку, що $AE=1$, $DE=2$, $CE=3$. Знайдіть у градусах величину кута AED.

5. Для додатних чисел a, b, c таких, що $a+b+c=3$, доведіть, що $\frac{a^2}{a+2}+\frac{b^2}{b+2}+\frac{c^2}{c+2}\geq 1$. Для яких a, b, c досягається рівність?

11 клас

1. Доведіть, що для катетів AC та BC і висоти CH, проведеної до гіпотенузи AB прямокутного трикутника, виконується рівність

$$\frac{1}{AC^2}+\frac{1}{BC^2}=\frac{1}{CH^2}.$$

2. Шахову дошку покрили двадцять одним прямокутником розмірами 3×1 та одним квадратом зі стороною 1. Доведіть, що квадрат не може прилягати до краю дошки.

3. Миколка розставив замість * знаки «+» та «–» у виразі $2019^2 * 2018^2 * 2017^2 * \ldots * 3^2 * 2^2 * 1^2$ і стверджує, що в результаті цього отримав 2020. Чи можуть його слова бути правдою?

4. Бісектриси AA_1, BB_1 та CC_1 трикутника ABC перетинаються в точці I. Доведіть, що $\frac{AI}{IA_1}\cdot\frac{BI}{IB_1}\cdot\frac{CI}{IC_1}\geq 8$. Для яких трикутників досягається рівність?

5. Доведіть, що число $\frac{2\sin 10^\circ+\sin 50^\circ}{2\sin 80^\circ-\sqrt{3}\sin 50^\circ}$ є ірраціональним.

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

2016 рік

7 клас

1. Позначимо через t час, затрачений онуком на дорогу від дому до крамниці. Тоді шлях в обидва боки онук подолає за час $2t$, тато – за час $2t+\frac{t}{3}$, а дідусь – за час $\frac{t}{2}+3t$. Оскільки $2t<2t+\frac{t}{3}<\frac{t}{2}+3t$, то додому вони повернуться у такому порядку: онук, тато, дідусь.

2. Прості числа 13, 17, 19 можуть дати ціле число лише за умови, що вони стоять у чисельнику, а у них в знаменнику стоятиме 1. Тому принаймні один дріб не буде цілим числом, наприклад $\frac{17}{19}$. Інші 10 дробів, які є цілими числами, можна отримати, наприклад, так:

$$\frac{13}{1},\frac{10}{2},\frac{21}{3},\frac{20}{4},\frac{15}{5},\frac{12}{6},\frac{14}{7},\frac{16}{8},\frac{18}{9},\frac{22}{11}.$$

3. Якщо зірочка розташована в клітині «б2», то у сусідніх з нею восьми клітинках інших зірочок бути не може. Тому для решти трьох зірочок залишаються лише стовпчик «г» та рядок «4». Але тоді принаймні дві зірочки опиняться в одному рядку чи в одному стовпчику, що суперечить умові задачі. Тому в клітині «б2» зірочки немає. Аналогічно доводимо, що зірочок немає в клітинках «б3», «в2», «в3». Нехай тепер зірочка знаходиться в клітині «а1». З умови задачі та доведеного вище випливає, що у квадраті з діагоналлю «а1» - «в3» інших зірочок немає. А розміщення їх трьох у стовпчику «г» та рядку «4» знову приводить до протиріччя. Тому в клітині «а1» зірочки немає. Аналогічно доводимо відсутність зірочок в інших кутових клітинках: «а4», «г1», «г4». Таким чином, для розміщення зірочок залишаються решта 8 клітинок таблиці. Нескладно переконатися, що при цьому умову задачі задовольняють лише такі два варіанти їх розміщення: («а2», «б4», «в1», «г3») або («а3», «б1», «в4», «г2»).

4. Оскільки діагональ прямокутника розбиває його на два трикутники однакової площі, то площа прямокутного трикутника дорівнює половині добутку його катетів. Поза чотирикутником $ABCD$ у намальованому прямокутнику знаходяться 4 прямокутні трикутники з гіпотенузами AB, BC, CD та DA відповідно, сума площ яких дорівнює $0,5\cdot 4\cdot 6+0,5\cdot 5\cdot 2+0,5\cdot 5\cdot 3+0,5\cdot 8\cdot 3=36,5$. Віднімаючи цю суму від площі $S=11\cdot 7=77$ всього прямокутника, отримаємо $S_{ABCD}=77-36,5=40,5$.

8 клас

1. Очевидно, що всі цифри числа – парні, бо на останній позиції може стояти лише парна цифра. Якщо серед чисел є одна із цифр 2 або 6, то таке число умову не задовольняє, бо на 4 діляться лише числа із закінченням $12, 32, ..., 92$ та $16, 36, ..., 96$. Тому число має складатися лише з цифр 4 або 8. Всі 8 таких чисел: 444, 448, 484, 488, 844, 848, 884, 888 – умову задачі задовольняють.

2. Перепишемо умову задачі таким чином:

$$x^2-y^3=2\cdot 2016=64\cdot 63=64\cdot(64-1)=64^2-4^3.$$

Звідси випливає, що рівність задовольняють числа $x=64$ та $y=4$.

Така пара не єдина. Підходить, наприклад, ще й пара чисел $x=69$ та $y=9$.

3. Нехай шукана відстань дорівнює S км. Тоді

$$S=a(2-b),\ S=b(2-c),\ S=c(2-a).$$

Отже,

$$S^3=abc(2-a)(2-b)(2-c)=a(2-a)\cdot b(2-b)\cdot c(2-c).$$

З нерівності $x(2-x)\le 1 \Leftrightarrow \left(x-1\right)^2\ge 0$ для $a,b,c\in\left(0;2\right)$ отримуємо, що $S^3\le 1$. А оскільки число S є натуральним, то $S=1$, і відстань до школи становить 1 км.

4. Доведемо, що в обох випадках відповідь «так». Нехай ABC – рівносторонній трикутник, M, N, K – середини його сторін, відрізки AN, BK та CM перетинаються в точці O.

а). Для розбиття на однакові чотирикутники достатньо розглянути, наприклад, чотирикутники $AMOK$, $BNOM$ та $CKON$.

б). Позначимо тепер середини відрізків OM, ON та OK через P, R та Q відповідно. Шуканими п'ятикутниками є $ABROP$, $BCQOR$ та $CAPOQ$.

5. Нехай K – середина сторони CD. Тоді $CK = DK = AB$, та оскільки $\angle ABC = \angle BCD$, то $ABCK$ – рівнобічна трапеція. Отже, $AK \parallel BC$ та $\angle AKD = \angle BCD$. $\Delta ABX = \Delta DKA$ (за стороною $AB = DK$ та прилеглими до неї кутами), тому й $AX = AD$.

9 клас

1. Очевидно, що всі цифри числа – парні, бо на останній позиції може стояти лише парна цифра. Якщо серед чисел є одна із цифр 2 або 6, то таке число умову не задовольняє, бо на 4 діляться лише числа із закінченням $12, 32, ..., 92$ та $16, 36, ..., 96$. Тому число має складатися лише з цифр 4 або 8. Всі 8 таких чисел: 444, 448, 484, 488, 844, 848, 884, 888 – умову задачі задовольняють.

2. Запишемо задану систему рівнянь у вигляді:

$$\begin{cases} x(x+y+z) = y, \\ y(x+y+z) = z, \\ z(x+y+z) = x. \end{cases}$$

Якщо $x + y + z = 0$, то звідси зразу отримуємо $x = y = z = 0$.

Якщо ж $x + y + z \neq 0$, то додамо ці рівняння. Тоді $(x+y+z)^2 = x + y + z$, звідки маємо $x + y + z = 1$. З врахуванням рівнянь системи отримуємо рівності $x = y$, $y = z$, $z = x$. Отже, знаходимо ще один розв'язок $x = y = z = \frac{1}{3}$.

3. Таких натуральних n не існує. Справді, для кожного n натуральному $10^n - 1$ ділиться на 3, тому й $11^n - 1$ повинно ділитися на 3, що можливо лише для парних n. Але для таких n числа $10^n - 1$ діляться на 11, а числа $11^n - 1$ не діляться на 11 при жодному n.

4. Зможе. Наявність одиниці у трьох названих множинах номерів вершин свідчить, що ці три грані сходяться в одній вершині з номером 1. Наявність пар однакових номерів у названих множинах свідчить про те, що з цієї вершини виходять ребра 1 – 2, 1 – 6 та 1 – 8, причому вершина з номером 6 є протилежною по великій діагоналі куба до четвертої вершини грані, три з вершин якої мають номери 1, 2, 8, тобто до вершини з номером 5. Тому найбільш віддаленою від вершини з номером 5 є вершина з номером 6.

5. З умов задачі випливає, що $\angle BCP = \angle CPQ$. Проведемо перпендикуляри CK та PS до сторін PQ та CB відповідно. $\triangle CPK = \triangle PCS$ (за спільною гіпотенузою CP та відповідними гострими кутами). Тому $CK = PS = AB = BC$, отже, $\triangle QBC = \triangle QKC$ (за рівними катетами і спільною гіпотенузою). Звідси, враховуючи, що чотирикутник $KCBQ$ – вписаний, отримуємо потрібну рівність $\angle BCQ = \angle KCQ = \frac{1}{2}\angle BCK = \frac{1}{2}\angle PQA$, що й завершує доведення.

10 клас

1. Позначимо точки таким чином: домівка – D, місце школи – S, точка де Петрик повертає на схід – B, точка, де повертає Остап, – N. Тоді за умовою $DB = 210$, $BS = 70$, $DN = x$, $NS = y$. За теоремою Піфагора $BN^2 + BS^2 = NS^2$ або $(210 + x)^2 + 70^2 = y^2$. Оскільки, крім того, за умовою $x + y = 280$, то $(210 + x)^2 + 70^2 = (280 - x)^2$. Звідси знаходимо $x = 30$, тобто Остап йде на північ 30 метрів.

2. Зауважимо, що існують лише два стільці (за номерами 5 та 8), стрибнути на які чи зістрибнути з яких можна єдиним способом. Тому стрибки Федора обов’язково повинні розпочинатися з одного з них та закінчуватися на іншому. При цьому однозначно отримуємо два варіанти стрибків, які задовольняють умови задачі. Це:

$$5 \to 10 \to 2 \to 7 \to 12 \to 4 \to 9 \to 1 \to 6 \to 11 \to 3 \to 8$$

та у зворотному напрямі

$$8 \to 3 \to 11 \to 6 \to 1 \to 9 \to 4 \to 12 \to 7 \to 2 \to 10 \to 5.$$

3. а). Не обов’язково. Наприклад, квадратний тричлен $f\left(x\right)=1008x^2+1008x+2016=1008x(x+1)+2016$ для кожного цілого значення x ділиться націло на 2016, бо для цілих x добуток $x(x+1)$ завжди парний.

б). Обов’язково. Маємо

$$f(0)=c\,\vdots\,2017;\ f(1)=a+b+c\,\vdots\,2017\Rightarrow a+b\,\vdots\,2017;$$

$$f(-1)=a-b+c\,\vdots\,2017\Rightarrow a-b\,\vdots\,2017.$$

Але тоді на 2017 діляться також числа $2a=\left(a+b\right)+\left(a-b\right)$ та $2b=\left(a+b\right)-\left(a-b\right)$. Оскільки ж число 2017 непарне, то всі коефіцієнти тричлена повинні ділитися на 2017.

4. З умов задачі випливає, що $\angle BCP=\angle CPQ$. Проведемо перпендикуляри CK та PS до сторін PQ та CB відповідно. $\Delta CPK=\Delta PCS$ (за спільною гіпотенузою CP та відповідними гострими кутами). Тому $CK=PS=AB=BC$, отже, $\Delta QBC=\Delta QKC$ (за рівними катетами і спільною гіпотенузою). Звідси, враховуючи, що чотирикутник $KCBQ$ – вписаний, отримуємо потрібну рівність $\angle BCQ=\angle KCQ=\frac{1}{2}\angle BCK=\frac{1}{2}\angle PQA$, що й завершує доведення.

5. Розглянемо такі перетворення:

$$\frac{a}{a+b^2}=\frac{a}{a(a+b+c)+b^2}=\frac{a}{a^2+b^2+ab+ac}\le\frac{a}{2ab+ab+ac}=\frac{1}{3b+c}.$$

З нерівності $\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{b}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(b+b+b+c\right)\ge 4\sqrt[4]{\frac{1}{b^3c}}\cdot 4\sqrt[4]{b^3c}=16$ маємо $\frac{1}{3b+c}\le\frac{1}{16}\left(\frac{3}{b}+\frac{1}{c}\right)$. Додавши цю та дві аналогічні нерівності, отримаємо:

$$\frac{a}{a+b^2}+\frac{b}{b+c^2}+\frac{c}{c+a^2}\le\frac{1}{3b+c}+\frac{1}{3c+a}+\frac{1}{3a+b}\le$$

$$\le\frac{1}{16}\left(\frac{3}{b}+\frac{1}{c}\right)+\frac{1}{16}\left(\frac{3}{c}+\frac{1}{a}\right)+\frac{1}{16}\left(\frac{3}{a}+\frac{1}{b}\right)=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

11 клас

1. Кожен множник числа C додатний і менший за 1, тому $C<1$. Кожен множник числа B більший за 1, тому $B>1$. І, нарешті, скориставшись формулою $\log_a b = \dfrac{\log_2 b}{\log_2 a}$, отримуємо:

$$B = \log_2 3 \cdot \frac{\log_2 4}{\log_2 3} \cdot \frac{\log_2 5}{\log_2 4} \cdot \ldots \cdot \frac{\log_2 2016}{\log_2 2015} = \log_2 2016 < \log_2 2048 = 11.$$

Отже, $C < B < A$.

2. Див. розв'язання задачі 3 б), 10 клас.

3. Зауважимо, що у всіх трьох дужках вирази одного знака. Вони додатні, бо для додатних чисел a, b, c не можуть одночасно виконуватися нерівності: $c \ge a+b$, $a \ge b+c$, $b \ge c+a$.

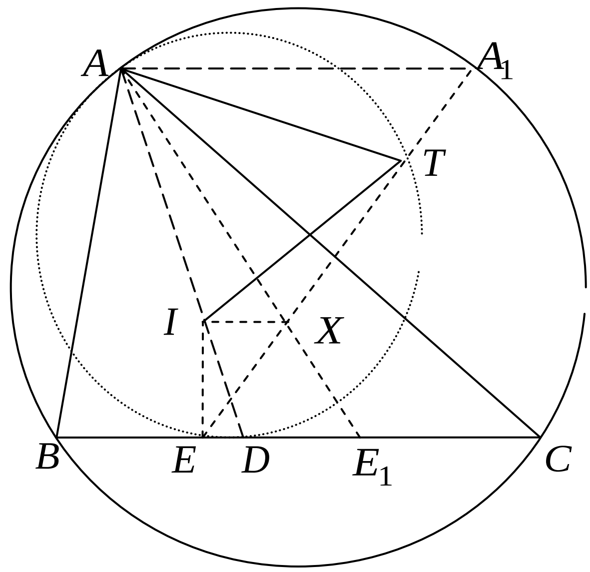
Припустимо, що $a<b$. Тоді

$$0 < ca < bc,\ \frac{a}{b+c} < \frac{b}{a+c},\ 0 < 1 - \frac{b^2}{(c+a)^2} < 1 - \frac{a^2}{(b+c)^2},$$

отже, друга з рівностей умови задачі не справджується. Аналогічно доводимо хибність припущення $a>b$. Тому $a=b$. Так само встановлюємо рівності $b=c$ та $c=a$. Остаточно отримуємо: $a=b=c=t$, де t − довільне додатне число.

4. Нехай $\angle B > \angle C$ як на малюнку справа. За властивістю вписаних кутів маємо

$\angle TAI = \angle TAD = \angle TED = \angle IXE.$



Тому чотирикутник $IATX$ – вписаний. Проведемо пряму IX таку, що $IX \parallel BC$, $X \in EA_1$, і позначимо через E_1 точку перетину прямих AX та BC. Тоді $\angle ATI = \angle AXI = \angle AE_1D$. Отже, далі достатньо буде довести рівність $\angle XE_1E = \angle XEE_1$.

Трикутники AA_1X та E_1EX, AIX та ADE_1 подібні. Тому, враховуючи властивості точки поділу бісектрис, маємо:

$$\frac{AA_1}{EE_1} = \frac{AX}{XE_1} = \frac{AI}{ID} = \frac{AC+AB}{BC}.$$

Звідси, з послідовним врахуванням рівнобічності трапеції BAA_1C та теореми косинусів для трикутника ABC, одержимо

$$EE_1 = \frac{AA_1 \cdot BC}{AC+AB} = \frac{\left(BC - 2AB\cos\angle B\right)\cdot BC}{AC+AB} = \frac{AC^2 - AB^2}{AC+AB} = AC - AB.$$

З рівності відрізків дотичних, проведених з вершин трикутника до вписаного кола, випливає, що $AC - AB = CE - BE$. Оскільки $EE_1 = CE - CE_1$, то звідси дістаємо, що $BE = CE_1$. Отже, пари точок A, A_1 та E, E_1 симетричні відносно серединного перпендикуляра до сторони BC, тому $XE = XE_1$ та $\angle XE_1E = \angle XEE_1$. Таким чином, $\angle ATI = \angle TAI$, звідки $IT = IA$.

5. Якщо $n = 4k-1$ чи $n = 4k$, то проробимо заміни:

$$(1;\,3) \to (2;\,4),\ (5;\,7) \to (6;\,8),\ \ldots,\ (4k-3;\,4k-1) \to (4k-2;\,4k).$$

Далі, вибираючи пари $(2;\,2)$, $(4;\,4)$, …, $(4k-2;\,4k-2)$, зробимо всі числа набору рівними $4k$. Якщо $n = 4k+1$, то після виконання описаних вище операцій отримаємо $4k$ чисел, які дорівнюють $4k$, та одне число $4k+1$. Залишається, обираючи пари $(4k;\,4k)$, зробити всі числа набору рівними $4k+1$.

І, нарешті, доведемо, що для $n = 4k+2$ вирівняти всі числа не вдасться. Справді, сума

$$1 + 2 + \ldots + \left(4k+2\right) = \frac{1}{2}(4k+2)(4k+3) = (2k+1)(4k+3)$$ непарна,

а сума $4k+2$ однакових чисел – парна. Кожного разу ми збільшуємо суму на парне число, тому отримати наприкінці з непарної суми парну не зможемо.

2017 рік

7 клас

1. Випишемо кілька перших елементів послідовності, поки деяка пара цифр не повториться: $3; \left[4; 2; 8; 6; 8; 8;\right] 4; 2; \ldots$. Таким чином, періодично буде повторюватися група із шести цифр, записаних у квадратних дужках, причому цифра 3 знаходиться поза періодом. Оскільки 2017 при діленні на 6 дає остачу 1, то на 2017-му місці виявиться цифра 8, яка була записана на 7-му місці цієї послідовності.

2. Нехай тих, хто полюбляв математику, було m, а тих, хто полюбляв інформатику, було n. Тоді, порахувавши сумарний вік усіх друзів двома способами, отримаємо рівність

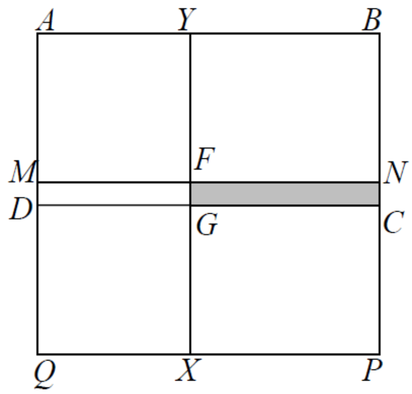
$$15m + 25n = 16(m+1) + 26(n-1),$$

з якої випливає, що кількість друзів у цій компанії $m + n = 10$.

Покажемо, що така ситуація можлива. Дійсно, нехай спочатку було 4 любителі математики віком по 15 років, 5 любителів інформатики віком 26 років, а вік Андрійка становив x років. Умови задачі будуть виконані, якщо одночасно справджуються рівності $\frac{4 \cdot 15 + x}{5} = 16$ та $\frac{5 \cdot 26 + x}{6} = 25$. Легко бачити, що при цьому $x = 20$.

3.Нехай $AB = BP = a$, $BC = NP = PX = b$. Тоді $FN = b$, $NC = 2b - a$.

Тому $(2b-a)b = 17$. 17 – просте число, отже, можливі лише два випадки:



1). $2b - a = 1,\ b = 17$, звідки маємо $a = 33$;

2). $2b - a = 17,\ b = 1 \Rightarrow a = -15$, що, звісно, умову задачі не задовольняє.

4. Найменші кількості очок, що могли набрати команди, такі: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 та 7. Таке могло трапитись не раніше як після 7 турів у разі, коли кожна команда, що посіла в підсумковій таблиці вище місце, виграла у команди, що посіла місце нижче.

8 клас

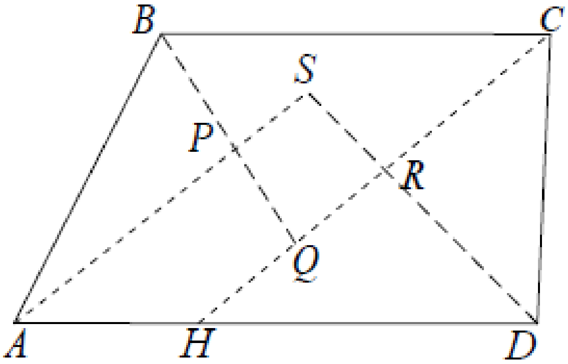
1. Не можна. Дотримуючись умов задачі, поряд з числом 2 вдасться записати лише одне число 6.

2. а) Після семи турів. Див. розв’язання задачі 7.4;

б). Найменші кількості очок, що могли набрати команди, є такими: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 та 7. Оскільки за 3 тури щонайбільше можна набрати 6 очок, то необхідно не менше чотирьох турів. Що цього достатньо, випливає з можливої турнірної таблиці після четвертого туру (див. нижче розв’язання задачі 9.2).

3. Оскільки добуток закінчується на 7, то усі цифри непарні і не дорівнюють 5. Враховуючи нерівності $911 \cdot 91 \cdot 9 = 746109 > 399997$ та $399 \cdot 39 \cdot 3 = 46683 < 300007$, отримуємо, що $a = 7$. Отже, добуток bc повинен закінчуватися цифрою 1. Отже, можливі лише такі чотири випадки множення вказаних трьох чисел: $799 \cdot 79 \cdot 7 = 441847$, $773 \cdot 77 \cdot 7 = 416647$, $737 \cdot 73 \cdot 7 = 376607$ та $711 \cdot 71 \cdot 7 = 353367$. Умову задачі задовольняють тільки два останні добутки.

4. Оскільки за умовою задачі $BC \parallel AD$, то половини сум кутів при сторонах AB та CD дорівнюють 90° (див. малюнок).



Звідси випливає, що кути APB та CRD, а з ними і кути SPQ та SRQ є прямими. Оскільки, крім того, $PS \parallel RQ$, то чотирикутник $SRQP$ є прямокутником. Тому $\angle ASD = 90^\circ$, і сума кутів при основі AD трапеції дорівнює 180°. Отже, також $AB \parallel CD$, тобто $ABCD$ є паралелограмом, і в ньому $AB = CD$.

5. Помноживши обидві частини рівності на 2, запишемо її як

$$(a-b)^2 + (a-1)^2 + (b-1)^2 = 2.$$

Розглянувши тепер три можливі випадки

$$1).\ a-b=0,\ |a-1|=1,\ |b-1|=1;$$

$$2).\ |a-b|=1,\ a-1=0,\ |b-1|=1;$$

$$3).\ |a-b|=1,\ |a-1|=1,\ b-1=0,$$

отримаємо в кожному з них по дві пари (a,b) розв'язків: $(2,2)$, $(0,0)$; $(1,2)$, $(1,0)$ та $(2,1)$, $(0,1)$ відповідно.

Зауважимо, що можна було би також розглядати задану рівність як квадратне рівняння відносно a. Оскільки його дискримінант $D=4-3(b-1)^2$ невід'ємний лише при цілих значеннях $b=0$, $b=1$ та $b=2$, то достатньо буде розв'язати три квадратні рівняння.

9 клас

1. Усі задані числа парні, то їх найбільший спільний дільник – парне число, яке є дільником числа 2018. Враховуючи рівність

$$2017^2+1=(2018-1)^2+1=2018^2-2\cdot 2018+2,$$

отримуємо, що він є також дільником числа 2, отже, дорівнює 2.

2. Як ми вже встановили при розв'язуванні задачі 8.2 б) ситуація з різною кількістю очок могла вперше виникнути після четвертого туру. При цьому за 4 тури команди разом наберуть 32 очки.

Команда, яка на цей момент була 8-ою, не могла мати й одного очка, інакше загальна сума очок виявилась би не меншою за $1+2+...+8=36>32$. З аналогічних міркувань 5-та команда не могла мати більше трьох очок.

Оскільки, крім того, у 1-ої команди на цей момент не більше 8 очок, то 4-та команда не може мати менше 5 очок. Таким чином, очки команд від 1-ої до 8-ої можуть бути лише такими: 8, 7, 6, 5, 3, 2, 1, 0.

За три тури, які залишилися до закінчення турніру, 8-ма після четвертого туру команда може набрати не більше 6 очок, отже, не підніметься вище третього місця. Можливість отримати його принаймні за додатковими показниками ілюструє наступна турнірна таблиця:

Команди	1	2	3	4	5	6	7	8	Очки після 4-го туру	Очки після 7-го туру	Місце після 7-го туру
1		**2**	**2**	**2**	2	2	2	2	8	14	1
2	**0**		**2**	1	**2**	2	2	2	7	11	2
3	**0**	**0**		1	1	**0**	2	2	6	6	3-4
4	**0**	1	1		**0**	1	**0**	2	5	5	5-7
5	0	**0**	1	**2**		1	1	**0**	3	5	5-7
6	0	0	**2**	1	1		**0**	**0**	2	4	8
7	0	0	0	**2**	1	**2**		**0**	1	5	5-7
8	0	0	0	0	**2**	**2**	**2**		0	6	3-4

Жирним шрифтом виділені очки команд, отримані ними в трьох останніх турах.

3. З умов задачі випливає, що x, y, z додатні. Перемноживши ці рівняння, приходимо до висновку, що $xyz = 1$. Вважаючи для конкретності $x \geq \max\{y, z\}$, звідси маємо, що $x \geq 1$.

Якщо $x = 1$, то отримуємо очевидний розв'язок $x = y = z = 1$.

Якщо ж $x > 1$, то з другого рівняння системи випливає, що $z \geq 1$, і внаслідок рівності $xyz = 1$ маємо $y < 1$. Але такі три нерівності суперечать третьому рівнянню заданої системи.

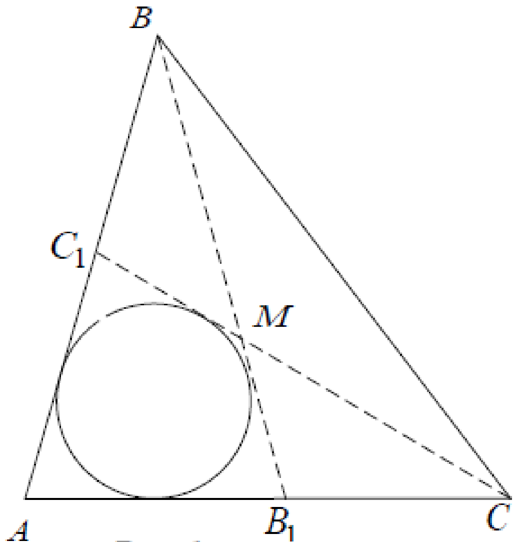
4. Гра завжди закінчуватиметься внічию. Справді, сума всіх цифр, записаних на картках, дорівнює 45 і ділиться на 9. Тому сума довільних п'яти з них може ділитися на 9 лише тоді, коли сума решти п'яти цифр ділиться на 9. Отже, або обидва утворені гравцями числа кратні 9, або кожне з них на 9 не ділиться.

5. Якщо $AB = AC$, то чотирикутник AC_1MB_1 симетричний відносно прямої AM. Отже, суми його протилежних рівні, тому в нього можна вписати коло.

Навпаки, нехай у цей чотирикутник можна вписати коло. Тоді суми його протилежних сторін рівні, що запишемо у вигляді

$$\frac{c}{2}+\frac{m_b}{3}=\frac{b}{2}+\frac{m_c}{3}\Leftrightarrow\frac{3c}{2}+m_b=\frac{3b}{2}+m_c.$$

Далі зауважимо, що таке коло є одночасно вписаним у трикутники ABB_1 та ACC_1 (див. малюнок).



Оскільки площі кожного з них дорівнюють половині площі трикутника ABC, то їхні периметри також рівні, тобто

$$\frac{b}{2}+c+m_b=\frac{c}{2}+b+m_c.$$

Віднявши цю рівність від попередньої, отримаємо $\frac{c}{2}-\frac{b}{2}=\frac{b}{2}-\frac{c}{2}$, тобто $c=b$, що й треба було довести.

10 клас

1. З умови подільності на 3 випливає, що незадіяною повинна бути цифра, кратна 3. Зрозуміло, що при цьому доцільно, щоб нею був 0, або принаймні 3. Будемо виписувати цифри числа, використовуючи на кожному кроці найбільшу з них, допустиму умовами задачі. Тоді перші 5 цифр числа матимуть вигляд 97586. На перший погляд може здатися, що наступною слід записати цифру 4. Але у кожному з трьох наступних варіантів – 97586420., 97586413., 97586402. – завершити запис шуканого дев’ятицифрового числа без суперечностей з умовами задачі не вдасться. Тому шостою запишемо цифру 3. Оскільки при цьому цифра 0 не буде задіяна, то однозначно отримуємо число 975863142.

2. а). Після семи турів. Див. розв’язання задачі 7.4;

б). Найменші кількості очок, що могли набрати команди, є такими: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 та 7. Оскільки за 2 тури щонайбільше можна набрати 6 очок, то треба не менше трьох турів. Що цього достатньо, випливає з можливої турнірної таблиці після третього туру:

Команди	1	2	3	4	5	6	7	8	Очки
1		-	-	3	-	-	3	3	9
2	-		-	1	-	-	3	3	7
3	-	-		-	1	1	-	3	5
4	0	1	-		-	3	-	-	4
5	-	-	1	-		1	1	-	3
6	-	-	1	0	1		-	-	2
7	0	0	-	-	1	-		-	1
8	0	0	0	-	-	-	-		0

3. Побудуємо коло радіуса AB з центром в A. Нехай воно перетинає відрізок MD у точці K. При цьому $AK = AB$. Позначимо $AB = a$, $\angle MDC = \varphi$. Тоді $\angle MDA = \frac{\pi}{2} - \varphi$, і з рівності $AK = AD$ випливає, що $KD = 2a\sin\varphi$. Оскільки також

$$HD = a\cos\varphi = 2a\sin\varphi \cdot \frac{1}{2}\mathrm{ctg}\varphi = KD \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{CD}{MC} = KD,$$

то точки K та H збігаються. Отже, $AH = AK = AB$.

4. Шуканими будуть, наприклад, такі числа:

а) 15. Справді, усі числа вигляду 10…05 діляться на 3 і на 5;

б) 12. Кожне число вигляду 10…02 не ділиться на 4;

в) 11. За ознакою подільності на 11 усі числа вигляду 10…01 з парною кількістю нулів діляться на 11, а з непарною – ні.

5. Використавши двічі нерівність Коші-Буняковського (нерівність Шварца), маємо такі оцінки для добутків множників:

$$3\left(x^2+y+z\right)=\left(1^2+1^2+1^2\right)\left(x^2+\left(\sqrt{y}\right)^2+\left(\sqrt{z}\right)^2\right)\ge\left(x+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^2$$

$$\left(x+y^2+z\right)\left(x+y+z^2\right)=\left(\left(\sqrt{x}\right)^2+y^2+\left(\sqrt{z}\right)^2\right)\left(\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(\sqrt{y}\right)^2+z^2\right)\ge$$

$$\ge\left(x+y\sqrt{y}+z\sqrt{z}\right)^2.$$

І, на завершення, ще раз за цією ж нерівністю отримуємо

$$\left(x+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^2\left(x+y\sqrt{y}+z\sqrt{z}\right)^2=$$

$$=\left(\left(\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(\sqrt{\sqrt{y}}\right)^2+\left(\sqrt{\sqrt{z}}\right)^2\right)\left(\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(\sqrt{y\sqrt{y}}\right)^2+\left(\sqrt{z\sqrt{z}}\right)^2\right)\right)^2\ge$$

$$\ge\left(x+y+z\right)^4.$$

11 клас

1. 975863142. Див. розв'язання задачі 10.1.

2. Оскільки шуканий добуток закінчується цифрою 1, то усі цифри його множників непарні і не дорівнюють 5. Серед них немає і цифри 9, бо $913\cdot139\cdot391=49620637>30000007$. Тому залишається переглянути лише такі два варіанти: $713\cdot137\cdot371=36239651$ та $731\cdot317\cdot173=40088771$. Умову задачі задовольняє тільки 36239651.

3. Позначимо через $f\left(x\right)$ вираз у лівій частині рівняння. Оскільки $f\left(0\right)=a-1$, $f\left(-1\right)=-4a^2+3a$, то

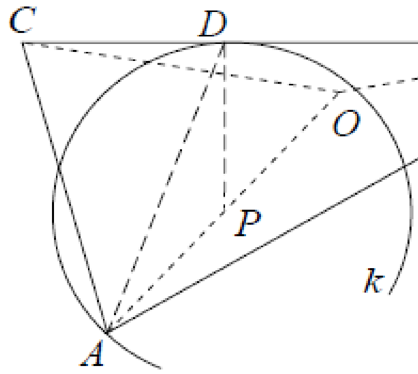
$$f\left(0\right)+f\left(-1\right)=-4a^2+4a-1=-\left(2a-1\right)^2\le0.$$

Звідси, внаслідок неперервності функції $f\left(x\right)$, і випливає твердження задачі.

4. Зрозуміло, що $n\ge2$. Нескладно переконатися, що для $n=2$ та $n=3$ описана в умові задачі ситуація неможлива. Якщо ж $n=4$, то загальна кількість набраних командами очок знаходиться у межах від 12 (усі зустрічі завершилися внічию) до 18 (нічиїх не було взагалі). Оскільки $1+2+3+4<10$, а $12<2+3+4+5<18$, то в останньої команди не може бути менше двох очок. Для $n=4$ цей мінімум

досягається якщо, наприклад, перша команда переможе другу, друга – четверту, а решта ігор завершаться унічию.

5. Твердження задачі очевидне, якщо $\angle ACB = \angle ABC$. Далі для конкретності будемо вважати, що $\angle ACB > \angle ABC$ (див. малюнок).



Використаємо для кутів трикутника ABC стандартні позначення α, β, γ. Крім того, позначимо $\angle PAD = \varphi$. Тут P – центр кола k, також O – центр описаного кола трикутника ABC.

Тоді $\angle CAP = \dfrac{\alpha}{2} + \varphi$, бо AD – бісектриса кута A; $\angle CAO = \dfrac{\pi}{2} - \beta$, бо $OA = OC$, $\angle COA = 2\beta$. Оскільки також $\angle PDA = \varphi$ та $\angle CDA = \dfrac{\pi}{2}$, то за властивістю зовнішнього кута при вершині D трикутника ABD отримуємо рівність $\dfrac{\pi}{2} - \varphi = \dfrac{\alpha}{2} + \beta$, з якої маємо $\angle CAP = \angle CAO$. Тому точки A, P, O лежать на одній прямій.

Оскільки дотична до кола k у точці A перпендикулярна до радіуса AP, то вона також перпендикулярна до AO, отже збігається з дотичною у точці A до описаного кола трикутника ABC. Таким чином, вказані два кола дотикаються у точці A.

2018 рік

7 клас

1. Нехай Андрій написав число $\overline{abcd}$. Тоді $\overline{abcd} - \overline{abc} = 2018$, тобто $9 \cdot \overline{abc} + d = 9 \cdot 224 + 2$. Оскільки a, b, c, d – цифри, то звідси отримуємо $\overline{abc} = 224$, $d = 2$. Таким чином, $\overline{abcd} = 2242$.

2. а). З умови задачі випливає, що одна товста книга займає не більше дев'ятої, а одна тонка – не більше п'ятнадцятої частини полиці. Тому 6 товстих та 5 тонких книг помістити вдасться, бо разом вони займуть не більше $6 \cdot \frac{1}{9} + 5 \cdot \frac{1}{15} = 1$ полиці.

б). Не вдасться. Одна товста книга займає не менше десятої, а одна тонка – не менше шістнадцятої частини полиці. Разом вони займуть не менше $7 \cdot \frac{1}{10} + 5 \cdot \frac{1}{16} = \frac{81}{80} > 1$ полиці.

3. Нехай у клубі присутні n джентльменів. Оскільки у кожного з джентльменів рівно 4 вороги, то і друзів у них теж порівну – по $n-5$.

Позначимо конкретного джентльмена буквою A, а одного з його чотирьох ворогів – буквою B. В останнього, крім A, є ще рівно три вороги. Враховуючи, що кожен друг A є ворогом B, звідси отримуємо, що A може мати не більше трьох друзів.

Розглянемо кожен з можливих при цьому випадків окремо:

1). В A є 3 друзі. Тоді $n = 8$. Розіб'ємо цих джентльменів на 2 групи по 4. Умову задачі задовольняє ситуація, коли у кожній групі джентльмени дружать між собою, а з різних груп – ворогують.

2). В A є 2 друзі. Тоді $n = 7$. При цьому 4 вороги A є й ворогами його друзів. Між собою ці четверо повинні мати по 2 друзі та по одному ворогу. Це не можливо, бо обидва друзі котрогось з них мали би бути ворогами його ворога. Але у такому разі останній не мав би друзів взагалі.

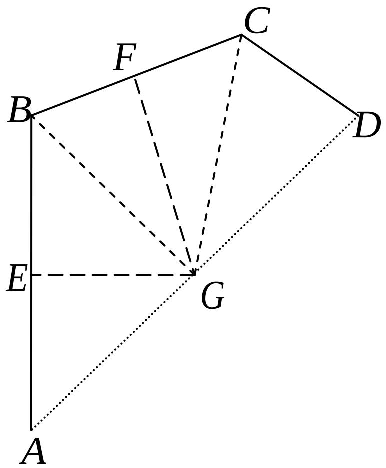
3). В A є 1 друг. Тоді $n = 6$. Умову задачі задовольняє ситуація, коли ці джентльмени розбиті на 3 пари друзів, а джентльмени з різних пар ворогують між собою.

4). В A немає друзів. Тоді $n = 5$. Умову задачі задовольняє ситуація, коли всі джентльмени ворогують між собою.

Таким чином, у клубі могло бути 8, 6 або 5 джентльменів.

4. Оскільки (див. малюнок) відрізок GE є у трикутнику AGB і висотою, і медіаною, то цей трикутник є рівнобедреним, і $GB = GA$.

Аналогічно рівнобедреним є трикутник CGB, і $GC = GB$. Крім того, за умовою $GD = GA$. Тому $GD = GC$, $\angle GCD = \angle ADC = 70^\circ$.



Можна міркувати ще й так. G – перетин серединних перпендикулярів до двох сторін трикутника ABC. Тому G – центр описаного навколо нього кола. Отже, $GD = GA = GC$ та $\angle GCD = \angle ADC = 70^\circ$.

8 клас

1. Розв'яжемо загальнішу задачу, покладаючи $A = m^k + n^k$, де $k \geq 263$. Якщо $m = n = 1$, то $A = 2 < B = 2^8$, а для $m = n \geq 2$ маємо нерівність $A = 2n^k > B = 2^8 n^{1+2+4+8+...+128} = 2^8 n^{255}$.

Нехай тепер $m \neq n$, для конкретності будемо вважати, що $m > n$. Скориставшись формулами скороченого множення отримуємо:

$$B \leq B(m-n) = (m-n)(m+n)\left(m^2+n^2\right)\left(m^4+n^4\right)\left(m^8+n^8\right)...\left(m^{128}+n^{128}\right) =$$
$$= m^{256} - n^{256} < m^{263} + n^{263} \leq A = m^k + n^k,\ k \geq 263.$$

2. Оскільки $2018 = 4 \cdot 504 + 2$ і 504 ділиться на 9, то посередині записаного вчителем числа знаходиться двоцифрове число 12, кратне 3. Саме воно залишиться вкінці, якщо Олеся гратиме так, щоб за кожну пару ходів (Андрій – Олеся) і зліва, і справа були викреслені по дві цифри. Дотримуючись такої стратегії, Олеся переможе.

Зауважимо, що вона може виграти, й не дотримуючись жодної стратегії. Перед її останнім ходом може залишитися лише одне з таких дев'яти чотирицифрових чисел: 1234, 2345, 3456, 4567, 5678, 6789, 7891, 8912, 9123. У кожному з цих випадків Олеся має змогу залишити на дошці 12, 45 чи 78 і перемогти.

3. Оскільки за умовою задачі $\angle BLC = 90^\circ$, то точка L лежить на колі з діаметром BC. Це коло описане навколо прямокутника $BDCH$. Тому його діаметром є також DH. Отже, й $\angle DLH = 90^\circ$.

Випадок з прямим кутом при вершині B тривіальний, оскільки при цьому точки L та B збігаються.

4. Ні. Див. розв’язання задачі 2 б) за 7 клас.

5. Нехай $A = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_n^{k_n}$ – канонічний розклад числа A на прості множники. З формули про кількість усіх натуральних дільників числа A можна записати, що $(k_1+1)(k_2+1)\dots(k_n+1) = 2018$.

Оскільки $2018 = 2 \cdot 1009$, і 1009 – просте число, то можливі лише два випадки: 1) $n=1,\ k_1+1=2018$ та 2) $n=2,\ (k_1+1)(k_2+1)=2\cdot 1009$.

У першому випадку отримуємо $A = p_1^{2017}$, що суперечить умові подільності на 2018. А у другому випадку, не порушуючи загальності, можна вважати, що $k_1=1,\ k_2=1008$, тобто $A = p\cdot p_2^{1008}$. При цьому з умови подільності A на 2018 випливає, що або $A = 2\cdot 1009^{1008}$, або $A = 1009\cdot 2^{1008}$. Жодне з цих чисел не ділиться на 2018^2.

9 клас

1. Додамо ці три рівняння:

$$\left(x^3-6y^2+27z\right)+\left(y^3-9z^2+3x\right)+\left(z^3-3x^2+12y\right)=189 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x^3-3x^2+3x-1\right)+\left(y^3-6y^2+12y-8\right)+\left(z^3-9z^2+27z-27\right)=153 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^3+(y-2)^3+(z-3)^3=153.$$

Нескладно переконатися, що число 153 єдиним чином подається у вигляді суми кубів трьох натуральних чисел: $153 = 5^3+3^3+1^3$. Далі, зауваживши, що для цілих чисел $n^3 \equiv n \pmod 3$, з рівнянь системи послідовно отримуємо: $x \equiv 0 \pmod 3$, $y \equiv 2 \pmod 3$, $z \equiv 1 \pmod 3$. Таким чином, будемо мати: $x-1=5$, $y-2=3$, $z-3=1$, тобто $x=6$, $y=5$, $z=4$. Але $6^3-6\cdot 5^2+27\cdot 4=174\neq 132$. Тому задана система рівнянь розв’язків у натуральних числах не має.

2. Оскільки $2018 = 4\cdot 504+2$ і 504 ділиться на 8, то посередині записаного вчителем числа знаходиться двоцифрове число 12, кратне 4. Саме воно залишиться вкінці, якщо Олеся гратиме так, щоб за кожну пару ходів (Андрій – Олеся) і зліва, і справа були викреслені по дві цифри. Дотримуючись такої стратегії, Олеся переможе.

3. Задана нерівність випливає з нерівності

$$\frac{y}{2x+y}+\frac{z}{2y+z}+\frac{x}{2z+x}-1=$$

$$=\frac{2\left(xy^2+yz^2+zx^2-3xyz\right)}{(2x+y)(2y+z)(2z+x)}\ge\frac{2\left(3\sqrt[3]{xy^2yz^2zx^2}-3xyz\right)}{(2x+y)(2y+z)(2z+x)}=0$$

для додатних чисел x, y, z.

4. Позначимо $(x,y)=d$ і помножимо обидві частини першого рівняння системи на (x,y). Оскільки $[x,y]\cdot(x,y)=xy$, то задану систему рівнянь можна записати у вигляді:

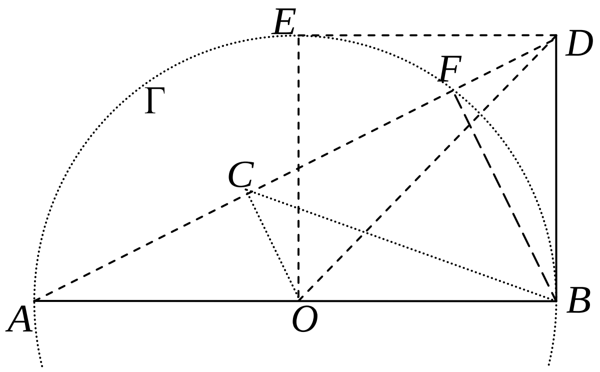
$$\begin{cases} xy=2018d-d^2, \\ x+y=2018. \end{cases}$$

Таким чином, числа x, y є коренями квадратного рівняння

$$t^2-2018t+2018d-d^2=0.$$

Знайдемо ці корені: $t_1=d<2018,\ t_2=2018-d$. Оскільки один з них співпадає з (x,y), то другий корінь ділиться на нього. Отже, d – дільник числа 2018, тобто може дорівнювати 1, 2 або 1009.

Звідси отримуємо такі пари (x,y) розв’язків: $(1,2017)$, $(2,2016)$, $(1009,1009)$, $(2017,1)$, $(2016,2)$.



5. Оскільки AB – діаметр, то $\angle AFB=90^\circ$ (див. малюнок). Тоді $CO \parallel FB$ як середня лінія. Отже, $OC\perp CD$ і чотирикутник $OBDC$ вписаний. Тому

$$\angle OCB=\angle ODB=45^\circ.$$

10 клас

1. З першого рівняння системи видно, що x – непарне, а y – від’ємне. Додамо ці рівняння:

$$\left(x^4+4y^3+6x^2+4y\right)+\left(y^4+4x^3+6y^2+4x\right)=335\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^4 + (y+1)^4 = 337.$$

Нескладно побачити, що число 337 єдиним чином подається у вигляді суми четвертих степенів двох натуральних чисел: $337 = 4^4 + 3^4$. Тому, враховуючи сказане вище, $x+1 = \pm 4$, $y+1 = -3$.

Безпосередньою перевіркою переконуємося, що лише пара $x = 3$, $y = -4$ задовольняє задану систему.

2. Зрозуміло, що n має бути непарним. Якщо $n = 1$, то буде використаний лише квадратик 1×1, а для $n = 3$ покриття неможливе взагалі.

Для $n = 5$ достатньо буде поставити квадратик 1×1 у куті квадрата 5×5, а потім покрити фігурками 4×1 два прилеглі до нього прямокутники 4×1 та квадрат 4×4.

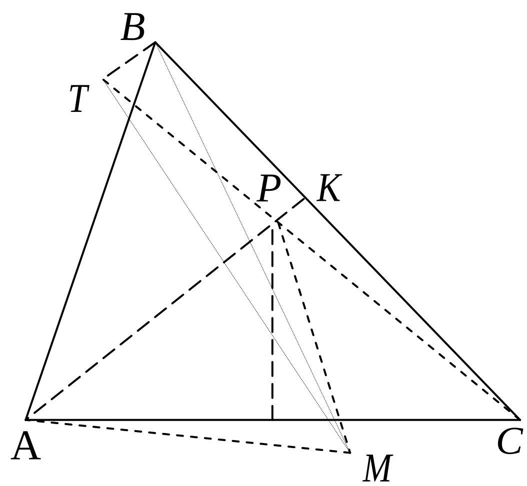
Для $n = 7$ достатньо буде поставити квадратик 1×1 у центрі квадрата 7×7, а потім покрити фігурками 4×1 чотири межуючі з ним прямокутники 4×3.

Нехай тепер $n = 4m+5, m \in \mathrm{N}$. Виділимо у куті квадрата $n\times n$ квадрат 5×5 і покриємо його як описано вище. Ще два прилягаючі до нього прямокутники $5\times 4m$ та квадрат $4m\times 4m$ можна покрити фігурками 4×1.

Аналогічно для $n = 4m+7, m \in \mathrm{N}$, покриваємо у куті квадрата $n\times n$ квадрат 7×7. Ще два прилягаючі до нього прямокутники $7\times 4m$ та квадрат $4m\times 4m$ вдасться покрити фігурками 4×1.

Таким чином, всі непарні $n \geq 5$ задовольняють умову задачі.

3. Див. розв’язання задачі 5 за 8 клас.



4. Нехай T – точка, симетрична до точки M відносно AK (див. малюнок). Тоді пряма AK ділить відрізок TM навпіл, і досить довести, що $BT \parallel AK$.

З рівності $\angle TPA = \angle MPA = \angle CPK$ випливає, що точки T, P, C лежать на одній прямій. Отже, отримуємо

$\angle TAB = \angle MAC = \angle TCB$, звідки маємо, що чотирикутник $BCAT$ вписаний. Тоді $\angle TBA = \angle TCA = \angle PAC = \angle PAB$,
тобто $BT \parallel AK$.

5. Див. розв'язання задачі 1 за 8 клас.

11 клас

1. Існує. Достатньо довести, що на цьому проміжку рівняння $\sin x \cdot \operatorname{tg} x = \cos^2 x$ має принаймні один дійсний корінь. Справді, на ньому функція $f(x) = \sin x \cdot \operatorname{tg} x - \cos^2 x$ неперервна і $f(0) = -1 < 0$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} > 0$.

2. Див. розв'язання задачі 4 за 9 клас.

3. а). Див. розв'язання задачі 2 за 10 клас;

б). Міркуючи аналогічно, встановимо, що n має бути непарним. Якщо $n = 1$, то буде використаний лише квадратик 1×1, а для $n = 3$, $n = 5$ та $n = 7$ покриття, очевидно, неможливі.

Для $n = 9$ достатньо буде поставити квадратик 1×1 у куті квадрата 9×9, а потім покрити фігурками 8×1 два прилеглі до нього прямокутники 8×1 та квадрат 8×8.

Для $n = 15$ достатньо буде поставити квадратик 1×1 у центрі квадрата 15×15, а потім покрити фігурками 8×1 чотири межуючі з ним прямокутники 8×7.

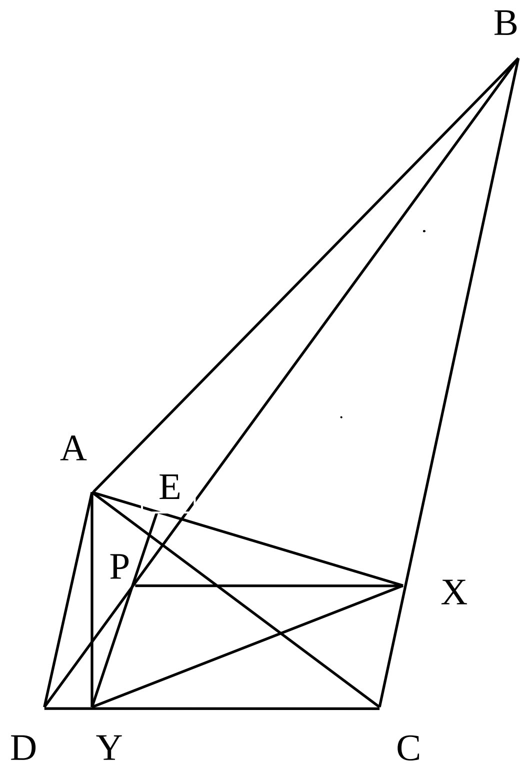
Нехай тепер $n = 8m + 9, m \in \mathrm{N}$. Виділимо у куті квадрата $n \times n$ квадрат 9×9 і покриємо його як описано вище. Ще два прилягаючі до нього прямокутники $9 \times 8m$ та квадрат $8m \times 8m$ можна покрити фігурками 8×1.

Аналогічно для $n = 8m + 15, m \in \mathrm{N}$, покриваємо у куті квадрата $n \times n$ квадрат 15×15. Ще два прилягаючі до нього прямокутники $15 \times 8m$ та квадрат $8m \times 8m$ вдасться покрити фігурками 8×1.

Залишається довести, що для $n = 8m + 3, m \in \mathrm{N}$, та для $n = 8m + 5, m \in \mathrm{N}$, вказане покриття здійснити не вдасться. Для цього, починаючи з лівого нижнього кута, будемо розфарбовувати у шаховому порядку квадрат $n\times n$ квадратиками 4×4. До правого та верхнього країв цього квадрата замість квадратиків прилягатимуть деякі прямокутники менших розмірів, ніж 4×4. При цьому у кожному з випадків одиничних квадратиків якогось одного кольору виявиться на 9 більше, ніж таких квадратиків іншого кольору.

Але кожен поставлений прямокутник 8×1 покриває по 4 клітинки кожного з кольорів, тому для можливості покриття така різниця мала би дорівнювати 1.

4. Нехай E – основа перпендикуляра, проведеного з точки Y на AX, $YE\cap BD=P$ (див. малюнок). Тепер достатньо довести, що $XP\perp AY$, а це рівносильне доведенню, що $XP\,||\,CD$. Оскільки $YE\,||\,CB$, то $\dfrac{DY}{YC}=\dfrac{DP}{PB}$. З іншого боку, оскільки $\Delta ADC\sim\Delta ACB$, то основи їх відповідних висот AY та AX ділять сторони цих трикутників в однакових пропорціях: $\dfrac{DY}{YC}=\dfrac{CX}{XB}$. З одержаних рівностей маємо, що $\dfrac{DP}{PB}=\dfrac{CX}{XB}\Rightarrow XP\,||\,CD$, що й треба було довести.



5. Справді, внаслідок заданої рівності маємо

$$xy+yz+zx=xyz\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{xyz\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2}{x+y+z}=$$

$$=\frac{xyz\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\right)+2\left(x+y+z\right)}{x+y+z}\geq\frac{xyz\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right)}{x+y+z}+2=3.$$

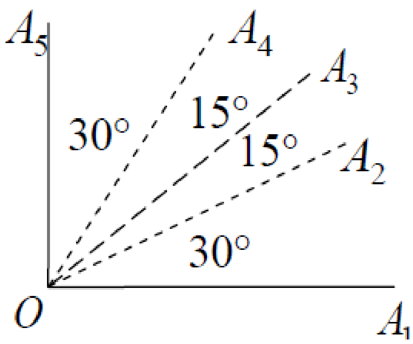
2019 рік

7 клас

0. Відповідь: а).

1. Враховуючи рівності $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n+1}$, умову задачі задовольняють такі пари чисел: $\frac{1}{2018}, \frac{1}{2019}$ та $\frac{1}{2019}, \frac{1}{2020}$.

2. З умови задачі випливає, що проведені промені повинні попарно утворювати принаймні 6 кутів. Тому $n \geq 4$.



Для $n=4$ таких кутів рівно 6. Якщо найбільший з них не дорівнює 60^{O}, то решти п'яти кутів не вистачить для утворення трьох потрібних пар. А якщо він дорівнює 60^{O}, то іншого кута величиною 60^{O} не знайдеться. Отже, $n \geq 5$. Приклад для $n=5$ наведений на малюнку справа.

3.Може. Для кожного натурального $n \geq 3$ задовольняють такі четвірки чисел: $a=n,\ b=n+1,\ c=n+2,\ d=2n+4$. При цьому

$$HCK(a,b)-HCK(c,d)=n(n+1)-(2n+4)=(n+2)(n-3)+2>0.$$

Зокрема, для $n=3$ знайдемо числа $a=3,\ b=4,\ c=5,\ d=10$, для яких $HCK(a,b)=12>HCK(c,d)=10$.

4. Найбільшим значенням виразу, яке отримаємо у такий спосіб, є число $1+2+3+...+2018=1009\cdot 2019=2037171$. Крім того, заміна будь-якого знака «+» на «–» зменшує значення виразу на парне число, тому розстановкою знаків вдасться отримувати лише непарні значення. Припустимо, що деяке непарне натуральне число, більше за 1, розстановкою знаків «+» на «–» ми отримали. Якщо при цьому перед 1 стоїть знак «+», то замінивши його на «–», зменшимо значення виразу на 2. Інакше, знайдемо першу зліва направо пару розташованих підряд знаків «–», «+», змінимо ці знаки на протилежні і знову ж зменшимо значення виразу на 2. (Це не вдасться зробити

лише у випадку, коли всі виставлені знаки були «–», і значення виразу дорівнює –2037171). Звідси випливає, що у такий спосіб вдасться отримати як шукані додатні значення всі непарні натуральні числа від 1 до 2037171. Зрозуміло, що їх кількість дорівнює $2037172:2=1018586$.

8 клас

0. Відповідь: а).

1. Таких точок є навіть нескінченна кількість. Для всіх непарних $x=2m+1,\ m\in \mathrm{Z},$ отримуємо лише парні значення

$$y=\left(k+n\right)\left(2m+1\right)+k-n=2\left(mk+mn+k\right).$$

Зокрема, покладаючи $m=0$, отримаємо, що жодна з цих прямих не пройде через точку $\left(1;1\right)$.

2. Переможе Катя, якщо, наприклад, вона кожного разу вибиратиме дільник $d=1$. Оскільки Микола також завжди матиме право вибрати $d=1$, то поки числа N залишаються більшими за 1 в обох гравців буде можливість зробити хід за правилами. При цьому з кожним ходом записані натуральні числа N зменшуються, і після кожного ходу Каті на дошці буде записане парне число N, а після кожного ходу Миколи – непарне N. Звідси випливає, що записати на дошці число 1 буде змушений саме Микола.

3. З умови задачі випливає, що трикутник ALB є рівнобедреним (за рівними кутами при основі AB), в якому медіана LM буде водночас і висотою. Крім того, з рівності $AC=AM$ отримуємо, що $\Delta ACL=\Delta AML$ (за двома сторонами і кутом між ними). Тому кут ACL також прямий. Звідси, з врахуванням рівності $\angle A=2\angle B$, отримуємо, що $\angle B=30^{\mathrm{O}}$.

Рівність $CL=ML$ виконується, але в умові вона була зайвою.

4. З врахуванням рівності $xy=1$ запишемо заданий вираз у вигляді $x^6+x^2+y^2+y^6$ і скористаємося очевидними нерівностями

$$\left(x^3-y^3\right)^2\ge 0\Leftrightarrow x^6+y^6\ge 2x^3y^3=2,\ \left(x-y\right)^2\ge 0\Leftrightarrow x^2+y^2\ge 2xy=2,$$

рівність в яких досягається для $x = y = 1$ та $x = y = -1$. Тому найменшим значенням заданого виразу є 4.

До цього ж результату приходимо й за нерівністю Коші:

$$x^6 + x^4y^2 + x^2y^4 + y^6 \ge 4 \cdot \sqrt[4]{x^6 \cdot x^4y^2 \cdot x^2y^4 \cdot y^6} = 4 \cdot \left|x^3y^3\right| = 4.$$

5. Див. розв'язання задачі 7.4.

9 клас

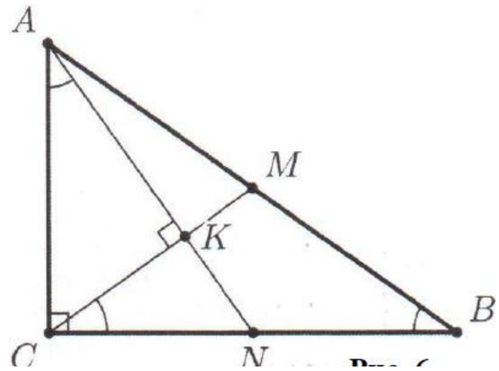
0. Відповідь: а).

1. Таких точок є навіть нескінченна кількість. Для всіх x вигляду $x = 3m+1,\ m \in \mathrm{Z},$ отримуємо лише кратні трьом значення

$$y = k\left(3m+1\right)^2 + \left(k-n\right)\left(3m+1\right) + k + n = 3\left(3m^2k + 3mk + k - mn\right).$$

Зокрема, покладаючи $m = 0$, отримаємо, що жодна з цих парабол не пройде через точку $(1;1)$.

2. Оскільки $BC = \sqrt{2}AC$ та $BC = 2NC$, то $AC = \sqrt{2}NC$. Тому $\Delta\ ACN \sim \Delta\ BCA$ (див. малюнок справа). Крім того, $\angle MCB = \angle MBC$, що випливає з рівності $MB = MC$.



Отже, $\angle AKC = \angle KCN + \angle KNC = \angle ABC + \angle BAC = 90^{\mathrm{O}}$, що й треба було довести.

3.Спочатку проаналізуємо остачі від ділення на 3. Оскільки $2^{100} \equiv 1\left(\mathrm{mod}\,3\right),\ 3^{100} \equiv 0\left(\mathrm{mod}\,3\right),\ 5^{100} \equiv 1\left(\mathrm{mod}\,3\right)$, то $N \equiv 2\left(\mathrm{mod}\,3\right)$. Але $13^k \equiv 1\left(\mathrm{mod}\,3\right)$ для всіх натуральних k, тому останню цифру 5 числа N Арсеній міг замінити лише на 1, 4 або 7.

Тепер розглянемо остачі від ділення на 8. Маємо $13^k \equiv 5\left(\mathrm{mod}\,8\right)$ для непарних k та $13^k \equiv 1\left(\mathrm{mod}\,8\right)$ для парних k, а число N закінчується на 625, тобто $N \equiv 1\left(\mathrm{mod}\,8\right)$. Звідси випливає, що заміни останньої цифри 5 на 4 чи на 7 не задовольняють, а у разі заміни 5 на 1 показник степеня k повинен бути непарним.

Для останньої заміни досліджуємо остачі від ділення на 5. Оскільки при цьому $N-4\equiv 1(\mathrm{mod}\,5)$, а $13^k\equiv 1(\mathrm{mod}\,5)$ лише для k, кратних 4, то і в цьому випадку отримуємо суперечність.

Отже, слова Арсенія не можуть бути правдою.

4. Умова $x+y+z=a+b+c$ є зайвою. Виконання вказаної нерівності не залежить від неї. Справді,

$$\frac{x}{a+b}+\frac{y}{b+c}+\frac{z}{c+a}+\frac{a}{x+z}+\frac{b}{x+y}+\frac{c}{y+z}>$$

$$>\frac{x}{a+b+c}+\frac{y}{a+b+c}+\frac{z}{a+b+c}+\frac{a}{x+y+z}+\frac{b}{x+y+z}+\frac{c}{x+y+z}=$$

$$=\frac{x+y+z}{a+b+c}+\frac{a+b+c}{x+y+z}\geq 2.$$

5. З нерівності

$$2^n=2+2+2^2+2^3+\ldots+2^{n-1}>1+2+2^2+2^3+\ldots+2^{n-1}\quad (*)$$

випливає, що значення заданого виразу будуть додатними тоді і тільки тоді, коли перед 2^{2019} стоятиме знак «+». При цьому інші знаки можна розставити довільно.

Розглянемо два довільні різні утворені у такий спосіб вирази, значення яких є додатними, і визначимо для них найбільше n, для якого у цих виразах перед 2^n виставлені різні знаки. Якщо від обох з них відняти попарно рівні доданки зі степенями двійки, більшими за n, то внаслідок нерівності (*) отримаємо числа різних знаків. Звідси випливає, що всі отримувані при вказаних розстановках знаків додатні значення заданого виразу будуть різними.

Оскільки на решті 2019 позиціях перед степенями двійки від $1=2^0$ до 2^{2018} є по дві можливості вибору знаку, то остаточно зможемо отримати 2^{2019} різних додатних значень.

10 клас

0. Відповідь: а).

1. Запишемо задане рівняння у вигляді $\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{\cos 2x+3}{\cos 2x+1}$.

Поділимо в обох частинах чисельники на знаменники. В отриманій рівності $1+\frac{1}{\sqrt{x}+1}=1+\frac{2}{\cos 2x+1}$ її ліва частина не перевищує 2, а права – не менша за 2. Обидві вони дорівнюють 2 лише за умови $\sqrt{x}=0$ та $\cos 2x=1$. Звідси отримуємо єдиний розв'язок $x=0$.

2. Оскільки 2019 має лише прості дільники 3 та 673, то Катя першим ходом зможе вибрати тільки $d=1$ чи $d=3$, залишаючи Миколі числа $N=2016$ та $N=2008$ відповідно. А він, вибираючи відповідно $d=504$ чи $d=502$, залишає число 1 і перемагає уже своїм першим ходом.

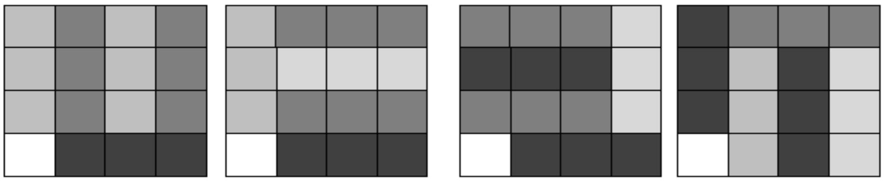
3. Розглянемо прямокутний трикутник ABC з катетами $AC=8n$, $BC=6n$ та гіпотенузою $AB=10n$, де $n-$ натуральне число. Тоді на AB шуканою точкою X буде середина гіпотенузи, яка віддалена від кожної з вершин трикутника ABC на $5n$.

Виберемо на катетах AC та BC точки K та M відповідно такі, що $CK=3k$, $CM=4k$, де $k-$ деяке натуральне число, причому $1\le k\le n$. Щоб відстані від вибраних точок до всіх вершин трикутника ABC були натуральними числами, достатньо, щоб суми $(3k)^2+(6n)^2$ та $(4k)^2+(8n)^2$ були квадратами натуральних чисел, тобто, щоб квадратом натурального числа була сума k^2+4n^2. Нескладно переконатися, що останню умову задовольняє, наприклад, пара чисел $k=5, n=6$. Тому прямокутний трикутник ABC з катетами $AC=48$, $BC=36$ та гіпотенузою $AB=60$ є особливим.

4. Спочатку доведемо, що непокритою може залишитися лише кутова клітинка. Нехай, наприклад, такою залишилася не кутова клітинка першого стовпчика. Тоді інші клітинки цього стовпчика вдасться покрити лише горизонтальними плитками 3×1. Отже, і в рядку з непокритою клітинкою плитку 3×1 також треба покласти горизонтально. Але в такому разі не зможемо покрити клітинки четвертого стовпчика. Аналогічно доводимо для інших не кутових клітинок, які знаходяться на краю квадрата 4×4.

Якщо ж непокритою залишиться одна з чотирьох клітинок всередині квадрата 4×4, то клітинки над нею і під нею також доведеться покривати горизонтальними плитками 3×1. Але тоді не вдасться покрити принаймні одну з клітинок зліва чи справа від неї.

Нехай тепер непокритою залишилася ліва нижня клітинка квадрата 4×4. Для решти клітинок отримуємо 4 способи їх покриття плитками 3×1, зображені на малюнку нижче:



У трьох перших з них клітинки нижнього рядка покриті горизонтальною плиткою 3×1, а четвертий відповідає випадку, в якому ці клітинки покриваються вертикальними плитками.

Зрозуміло, що для інших непокритих кутових клітинок теж матимемо по 4 варіанти. Тому всього існує 16 різних способів.

5. Задана нерівність випливає з нерівності

$$2\left(\frac{x^8+1}{x^4}+\frac{y^8+1}{y^4}+\frac{z^8+1}{z^4}+\frac{t^8+1}{t^4}\right)=$$

$$=\left(x^4+\frac{1}{z^4}+z^4+\frac{1}{y^4}\right)+\left(y^4+\frac{1}{t^4}+t^4+\frac{1}{z^4}\right)+\left(z^4+\frac{1}{x^4}+x^4+\frac{1}{t^4}\right)+$$

$$+\left(t^4+\frac{1}{y^4}+y^4+\frac{1}{z^4}\right)\geq 4\cdot\sqrt[4]{x^4\cdot\frac{1}{z^4}\cdot z^4\cdot\frac{1}{y^4}}+4\cdot\sqrt[4]{y^4\cdot\frac{1}{t^4}\cdot t^4\cdot\frac{1}{z^4}}+$$

$$+4\cdot\sqrt[4]{z^4\cdot\frac{1}{x^4}\cdot x^4\cdot\frac{1}{t^4}}+4\cdot\sqrt[4]{t^4\cdot\frac{1}{y^4}\cdot y^4\cdot\frac{1}{z^4}}=4\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{t}+\frac{t}{x}\right).$$

11 клас

0. Відповідь: а).

1. Запишемо задане в умові рівняння у вигляді $\dfrac{2\cos 2x}{\cos 2x+1}=\dfrac{6-3\cos 3x}{\cos 3x+2}$ і поділимо в обох частинах чисельники на знаменники.

В отриманій рівності $2-\dfrac{2}{\cos 2x+1}=-3+\dfrac{12}{\cos 3x+2}$ ліва частина не перевищує 1, а права – не менша 1, причому обидві вони дорівнюють 1 лише за умови $\cos 2x=1$ та $\cos 3x=1$. Оскільки $-\pi \le x \le \pi$, то звідси отримуємо єдиний розв'язок $x=0$.

2. Продовжимо CA поза точку A до точки E такої, що $AE=AB$. Тоді MK – середня лінія трикутника BAE. Проведемо промінь серединного перпендикуляра до BE, який проходить через точку A, і відкладемо на ньому точку P таку, що кут BPE – прямий. Тоді, оскільки кут BAE тупий, отримуємо потрібну нерівність $\sqrt{2}KM=\sqrt{2}\cdot\dfrac{BE}{2}=BP>AB$.

3. Нехай p – просте число, що є дільником принаймні одного числа, записаного в таблиці. Тоді в розклад на множники числа B воно входить у степені, який дорівнює найменшому із найбільших степенів p, обчислених по рядках таблиці. Будемо вважати, що це є множник p^{β}, який є дільником деякого числа з рядка i_0.

Аналогічно в розклад на множники числа C воно входить у степені, який дорівнює найбільшому із найменших степенів p, обчислених по стовпчиках таблиці. Для конкретності вважаємо, що це є множник p^{γ}, який є дільником деякого числа зі стовпчика j_0.

Розглянемо тепер максимальний степінь δ, з яким p входить у розклад на множники числа таблиці на перетині рядка i_0 та стовпчика j_0. З умови задачі отримуємо, що $\gamma \le \delta \le \beta$. Оскільки ж аналогічна нерівність справджується для всіх таких простих чисел p, то обов'язково B ділиться націло на C.

4. Оскільки $xyz=1$, то $\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{y^3}+\dfrac{1}{z^3}\ge 3\cdot\sqrt[3]{\dfrac{1}{x^3}\cdot\dfrac{1}{y^3}\cdot\dfrac{1}{z^3}}=3$. Тому

$$\frac{x^6+2}{x^3}+\frac{y^6+2}{y^3}+\frac{z^6+2}{z^3}\ge$$

$$\geq \left(x^3+\frac{1}{y^3}+1\right)+\left(y^3+\frac{1}{z^3}+1\right)+\left(z^3+\frac{1}{x^3}+1\right)\geq$$

$$\geq 3\cdot\sqrt[3]{x^3\cdot\frac{1}{y^3}\cdot 1}+3\cdot\sqrt[3]{y^3\cdot\frac{1}{z^3}\cdot 1}+3\cdot\sqrt[3]{z^3\cdot\frac{1}{x^3}\cdot 1}=3\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right).$$

5. Різних полігонів з площами 1 та 2 є по одному, з площею 3 – два, а з площею 4 – п’ять. Том разом 8 різних полігонів можуть займати площу, не меншу за $1\cdot 1+1\cdot 2+2\cdot 3+4\cdot 4=25$.

Оскільки за умовою задачі прямокутник не повинен бути квадратом, а прямокутник 25×1 доведеться викладати лише полігонами-прямокутниками $n\times 1$, сума площ перших восьми з яких дорівнює 36, то отримати мінімальну площу 25 не вдасться.

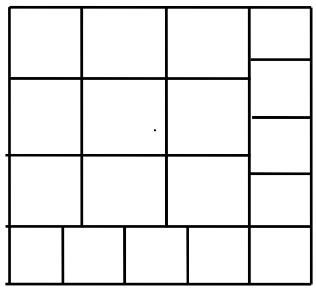
Приклад викладання вісьмома полігонами прямокутника 13×2 з площею 26 наведений на малюнку нижче:

2020 рік

7 клас

1. На 25%. З умови задачі маємо $a=0{,}8b$. Тоді $b=1{,}25a$.

2. Не можуть. Справді, $2020=20\cdot 101$. Тому добуток цифр такого числа мав би ділитися на 101. Але це неможливе, бо 101 – просте число.



3. Площа такого квадрата дорівнює $\left(3^2+4^2\right)n=25n$. Тому $n-$ точний квадрат. $n\neq 1$, бо у квадраті 5×5 одночасно не помістяться квадратики 3×3 та 4×4. Також $n\neq 4$, бо після розміщення у квадраті 10×10 чотирьох квадратиків 4×4 місця для квадратиків 3×3 уже не знайдеться. Приклад для $n=9$ наведений на малюнку справа.

4. За пів години голуб пролетів 5 км, а рота пройшла у напрямі штабу 3 км. Різниця у 2 км дорівнює подвоєній відстані від штабу до місця зустрічі голуба з командиром роти. Тому від штабу до місця зустрічі голуб

летів 6 хв. Отже, у штабі він був о 9.24. За ті ж пів години розвідник пройшов 2 км. Тому о 9.30 відстань між ним і голубом становила 5 км. Оскільки різниця швидкостей голуба і розвідника дорівнює 6 км/год., то голуб наздожене його через 50 хв. о 10.20.

5. З умови задачі випливає, що син кожного разу нараховував третину від загального числа всіх яблунь. Тому після третього етапу їхнього руху ним були пораховані по одному разові всі яблуні. А оскільки яблуні та груші чергуються і остання зустріч також відбулася під грушею, то це є та сама груша, від якої вони починали свій рух.

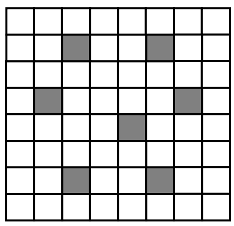
8 клас

1. Це, наприклад, можна зробити так. Спочатку набираємо 8 літрів води і переливаємо 5 літрів у п’ятилітрове відро. Виливаємо воду з цього відра і наливаємо в нього решту 3 літра. Знову набираємо 8 літрів води і доливаємо 2 літра у п’ятилітрове відро. Виливши всю воду з цього відра, знову наповнюємо його з восьмилітрового. Після таких операцій у восьмилітровому відрі залишиться рівно 1 літр води.

2. 0 та 64. Справді,

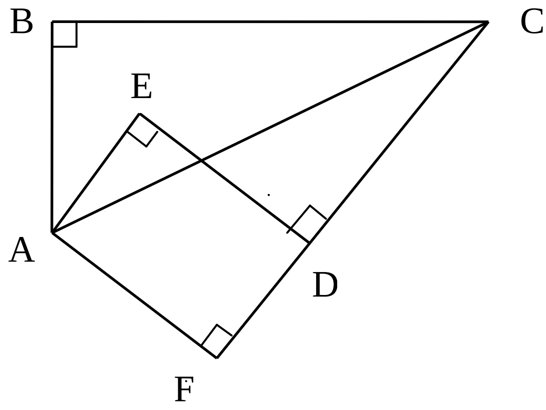
$$\frac{8^{2020}+4^{2020}}{8^{2018}+4^{2017}}=\frac{4^{2020}\left(2^{2020}+1\right)}{4^{2017}\left(8\cdot 2^{2017}+1\right)}=4^{3}=64.$$

3. 8см^2. Не залежно від розташування 7 чорних квадратиків, знайдеться горизонталь, яка їх не містить. Прямокутник із клітинок цієї горизонталі має площу 8см^2. Приклад розфарбування семи квадратиків у чорний колір, при якому не існує потрібного прямокутника з більшою площею, наведений на малюнку.



4. Порівну. З умови задачі випливає, що син кожного разу нараховував третину від загального числа всіх яблунь. Тому після третього етапу їхнього руху ним були пораховані по одному разові всі яблуні. А оскільки яблуні та груші чергуються і остання зустріч також відбулася під грушею, то це є та сама груша, від якої вони

починали свій рух. Зрозуміло, що при цьому сином також по одному разові були пораховані всі яблука на яблунях навколо озера. А оскільки на перших двох етапах він нараховував лише по четвертій частині від них, то на третьому етапі нарахував половину всіх яблук, стільки ж, як і батько.



5. Доповнимо ламану AED до прямокутника $AEDF$ (див. мал. справа) і проведемо відрізок AC. Прямокутні трикутники ABC та AFC рівні за рівними катетами $AB = AF$ та спільною гіпотенузою AC. Тому

$BC = CF = CD + DF = 5 + 3 = 8$.

9 клас

9.1. $a = 0$ та $a \geq 1$. У першому випадку лінійне рівняння має один дійсний корінь, а у другому – дискримінант квадратного рівняння менший або дорівнює нулю.

9.2. Шуканим є число $145 = 1 + 24 + 120 = 1! + 4! + 5!$. Доведемо, що інших трицифрових чисел з такою властивістю не існує.

Справді, найбільша цифра такого числа не менша за 5, бо $4! + 4! + 4! = 72 < 100$. Вона не більша за 6, бо $7! + 0! + 0! = 5040 > 999$, та не дорівнює 6, бо навіть $6! + 0! + 0! = 722$ починається з цифри 7. Тому найбільша цифра шуканого числа дорівнює 5.

Всі три цифри такого числа не можуть бути рівними 5, бо $555 \neq 360 = 5! + 5! + 5!$. Так само не може бути двох цифр 5, бо тоді $0! + 5! + 5! = 241 \leq \overline{abc} \leq 4! + 5! + 5! = 264$, але $255 \neq 242 = 2! + 5! + 5!$.

Отже, в десятковому записі шуканого числа цифра 5 одна. Тому $1! + 0! + 5! = 122 \leq \overline{abc} \leq 4! + 4! + 5! = 168$, і його першою цифрою є цифра $a = 1$. Оскільки при цьому $\overline{abc} \leq 1! + 4! + 5! = 145$, то саме цифра $c = 5$, а $2 \leq b \leq 4$.

Безпосередньою перевіркою переконуємося, що серед чисел 125, 135 та 145 лише останнє задовольняє умову задачі.

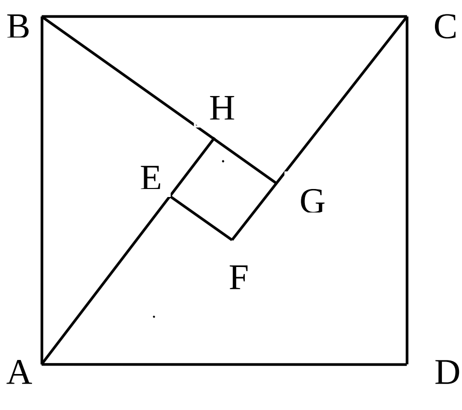
3. Спочатку розіб’ємо всі монети на 3 купки по 673, 673 та 674 монети і порівняємо маси перших двох купок. Якщо одна з них легша, то фальшива монета знаходиться саме в ній. Інакше – фальшива монета в третій купці. Вибираємо купку з фальшивою монетою і для зручності наступних міркувань доповнюємо кількість монет у ній до 729 справжніми монетами з інших купок. Ділимо цю купку на 3 рівні частини по 243 монети. Порівнявши маси двох із таких частин, аналогічно як при першому зважуванні знайдемо ту частину, яка містить фальшиву монету. Здійснюємо її поділ на 3 купки по 81 монеті і так само третім зважуванням визначаємо купку з фальшивою монетою. Четверте зважування зведеться до порівняння мас двох купок по 27 монет, п’яте – двох купок по 9 монет, шосте – двох купок по 3. І, нарешті, порівнюючи з трьох монет, які залишилися, дві, або зразу сьомим зважуванням виявимо фальшиву, або ж такою буде монета, яка не брала участі в останньому зважуванні.

4. Для зручності покладемо $a=1+x$ та $b=1-x$. Тоді

$$\left(a^2-a+1\right)\left(b^2+b+1\right)=\left(\left(1+x\right)^2-\left(1+x\right)+1\right)\left(\left(1-x\right)^2+\left(1-x\right)+1\right)=$$

$$=\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-3x+3\right)=x^2\left(x-1\right)^2+3\geq 3.$$

Рівність досягається для $x=0$ та $x=1$, тобто для таких двох пар чисел: $a=b=1$ та $a=2,\ b=0$.



5. $AB=5$. Нехай $EFGH$ – квадрат (див. мал. справа). Його центр збігається з центром квадрата $ABCD$. Тоді прямокутні трикутники ABH та BCG рівні внаслідок рівностей $\angle BAH=\angle CBG=90^\circ-\angle ABH$ та $AB=BC$. Оскільки при цьому $AH=4$, $BH=3$, то за теоремою Піфагора знаходимо $AB=5$.

Можна було також розглянути прямокутник $AEFK$. Потім з прямокутного трикутника з катетами 1 та 7 знайти його гіпотенузу $AC=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$, а з прямокутного трикутника ABC – катет $AB=5$.

10 клас

1. Таких трійок послідовних натуральних чисел не існує. З рівності $(n-1)^2+n^2+(n+1)^2=2020$ випливає, що $3n^2=2018$. Але 2018 не ділиться на 3.

2. Таких чисел є 36. Нехай умову задачі задовольняє число з цифрами a, b, c, d, не обов'язково саме у такому порядку. Тоді

$$abcd=20(a+b+c+d). \qquad (**)$$

Отже, принаймні одна цифра такого числа має бути кратна 5. Цифра 0 не задовольняє рівність (**), тому, не зменшуючи загальності, будемо вважати, що $d=5$. При цьому рівність (**) можна записати у вигляді

$$abc=4(a+b+c+5). \qquad (***)$$

Звідси випливає, що принаймні одна з цифр a, b, c є парною і відмінною від нуля. Нехай для конкретності такою є цифра c. Розглянемо чотири можливі при цьому випадки:

1). $c=2$. Тоді з (***) отримуємо

$$ab=2(a+b+7)\Leftrightarrow(a-2)(b-2)=18,$$

звідки знаходимо $a=5, b=8$ чи $a=8, b=5$. Враховуючи можливі перестановки цифр 2, 5, 5, 8, будемо мати 12 шуканих чисел.

2). $c=4$. Тоді з (***) отримуємо

$$ab=a+b+9\Leftrightarrow(a-1)(b-1)=10,$$

звідки знаходимо $a=3, b=6$ чи $a=6, b=3$. Враховуючи можливі перестановки цифр 3, 4, 5, 6, будемо мати ще 24 шукані числа.

3). $c=6$. Тоді з (***) отримуємо

$$3ab=2(a+b+11)\Leftrightarrow(3a-2)(3b-2)=70,$$

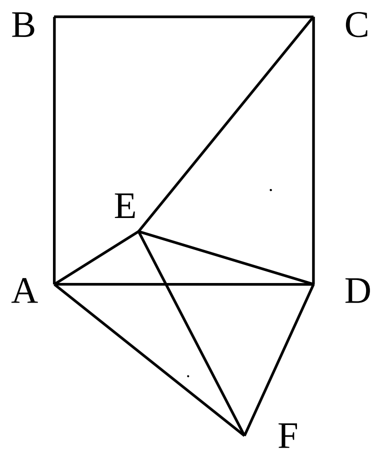
звідки знаходимо $a=3, b=4$ чи $a=4, b=3$. Враховуючи можливі перестановки цифр 3, 4, 5, 6, матимемо той самий набір шуканих чисел, що і у випадку 2.

4). $c=8$. Тоді з (***) отримуємо

$$2ab=a+b+13\Leftrightarrow(3a-1)(2b-1)=27,$$

звідки знаходимо $a=2, b=5$ чи $a=5, b=2$. Враховуючи можливі перестановки цифр 2, 5, 5, 8, отримаємо той самий набір шуканих чисел, що й у випадку 1.

3. Для $n=2$. Син кожного разу нараховував $\frac{1}{n+1}$ від загального числа всіх яблунь. Після $(n+1)-$го етапу ним були пораховані по одному разові всі яблуні. Отже, остання зустріч відбулася під грушею, від якої вони починали свій рух. При цьому сином по одному разові були пораховані і всі яблука на яблунях навколо озера. На перших n етапах він нараховував по $\frac{1}{n+2}$ частині від них, а на останньому – половину. З рівності $\frac{n}{n+2}+\frac{1}{2}=1$ знаходимо $n=2$. Така ситуація реальна, якщо, наприклад, дерева росли на однакових відстанях між сусідніми з них, батько рухався вдвічі швидше за сина і на перших двадцяти яблунях син нараховував по 10 яблук, а на решти десятьох – по 20.



4. 135°. Нехай $\Delta\, DAF=\Delta\, DCE$ (див. мал. справа). Тоді у рівнобедреному прямокутному трикутнику FDE маємо $FE=2\sqrt{2}$ та $\angle FED=45^\circ$. При цьому $AE^2+FE^2=AF^2$, тому $\angle AEF=90^\circ$.

Отже, $\angle AED=90^\circ+45^\circ=135^\circ$.

5. Для додатних чисел x та y справджується нерівність

$$\frac{x^2}{y}\geq 2x-y \Leftrightarrow (x-y)^2\geq 0,$$

причому рівність у ній можлива лише за умови $x=y$. Звідси

$$\frac{a^2}{a+2}+\frac{b^2}{b+2}+\frac{c^2}{c+2}=\frac{1}{9}\cdot\left(\frac{(3a)^2}{a+2}+\frac{(3b)^2}{b+2}+\frac{(3c)^2}{c+2}\right)\geq$$

$$\geq \frac{1}{9}\cdot\left(6a-(a+2)+6b-(b+2)+6c-(c+2)\right)=$$

$$=\frac{1}{9}\cdot\left(5(a+b+c)-6\right)=\frac{1}{9}\cdot(5\cdot 3-6)=1.$$

Рівність досягається лише за одночасного виконання умов $3a=a+2,\ 3b=b+2,\ 3c=c+2$, $a+b+c=3$, тобто для $a=b=c=1$.

Можна було також скористатися нерівністю

$$\frac{a^2}{a+2}+\frac{b^2}{b+2}+\frac{c^2}{c+2}\geq\frac{(a+b+c)^2}{a+2+b+2+c+2}=\frac{3^2}{3+6}=1.$$

11 клас

1. Оскільки за теоремою Піфагора $AC^2+BC^2=AB^2$, то вказана в умові задачі рівність рівносильна рівності $AC\cdot BC=AB\cdot CH$, ліва і права частини якої дорівнюють подвоєній площі трикутника ABC.

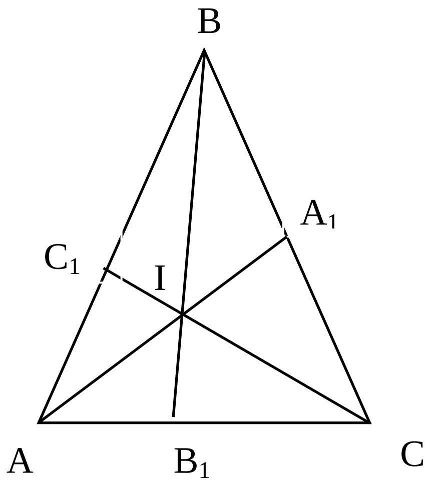
2. Припустимо, що квадрат прилягає до краю дошки. Не зменшуючи загальності, можна вважати, що він знаходиться на її першій горизонталі. Запишемо у кожну клітинку шахової дошки номер горизонталі, на якій знаходиться ця клітинка. Сума всіх записаних чисел дорівнює 288 і ділиться на 3. Так само на 3 ділиться й сума цифр, які покриватиме кожний прямокутник 3×1, а квадрат зі стороною 1 покриває число 1. Отримана суперечність доводить, що він не може прилягати до краю дошки. Для простоти можна було замість номерів горизонталей записувати у клітинки дошки остачі цих номерів від ділення на 3.

Міркуючи аналогічно можна довести, що квадрат зі стороною 1 може знаходитися лише на одному з таких полів: $c3,\ c6,\ f3,\ f6$.

3. Можуть. Допишемо справа до заданого виразу $*0^2$, що жодним чином не вплине на отримане після розстановки знаків «+» та «–» значення цього виразу. Тоді згрупуємо всі доданки зліва направо в 505 груп по 4 доданки в кожній. Оскільки для всіх натуральних чисел n справджується рівність $(n+2)^2-(n+1)^2-n^2+(n-1)^2=4$, то для кожної такої групи ми зможемо отримати суму її чисел, яка дорівнює 4. Відповідно, значення всього виразу буде $505\cdot4=2020$.

4. За властивістю бісектрис $\frac{AI}{IA_1}=\frac{AB}{BA_1}$ та $\frac{AI}{IA_1}=\frac{AC}{CA_1}=\frac{AC}{BC-BA_1}$.

Тому $\frac{AB}{BA_1}=\frac{AC}{BC-BA_1}$, звідки отримуємо $BA_1=\frac{BC\cdot AB}{AB+AC}$. Внаслідок першої із записаних рівностей $\frac{AI}{IA_1}=\frac{AB+AC}{BC}$. Отже,



$$\frac{AI}{IA_1}\cdot\frac{BI}{IB_1}\cdot\frac{CI}{IC_1}=\frac{AB+AC}{BC}\cdot\frac{BA+BC}{AC}\cdot\frac{CB+CA}{AB}\geq$$

$$\geq\frac{2\sqrt{AB\cdot AC}}{BC}\cdot\frac{2\sqrt{BA\cdot BC}}{AC}\cdot\frac{2\sqrt{CB\cdot CA}}{AB}=8,$$

причому рівність можлива лише для рівностороннього трикутника.

5. Справді,

$$\frac{2\sin 10^\circ+\sin 50^\circ}{2\sin 80^\circ-\sqrt{3}\sin 50^\circ}=\frac{2\sin\left(60^\circ-50^\circ\right)+2\cos 60^\circ\sin 50^\circ}{2\sin\left(30^\circ+50^\circ\right)-2\cos 30^\circ\sin 50^\circ}=$$

$$=\frac{\sin 60^\circ\cos 50^\circ-\cos 60^\circ\sin 50^\circ+\cos 60^\circ\sin 50^\circ}{\sin 30^\circ\cos 50^\circ+\cos 30^\circ\sin 50^\circ-\cos 30^\circ\sin 50^\circ}=\frac{\sin 60^\circ}{\sin 30^\circ}=\sqrt{3}.$$

Це число ірраціональне, бо з рівності $\sqrt{3}=\frac{m}{n}$, де $\frac{m}{n}$ – нескоротний дріб, отримуємо $m^2=3n^2$, тобто $m=3k,\ k\in\mathrm{N}$. Тоді $n^2=3k^2$, тому n також ділиться на 3. Суперечність.

Зміст

Підписано до друку 7 лютого 2020р.
Формат 61х84 1/16, папір офсетний, друк цифровий.
Ум. обсяг 3,75 друк. арк. Наклад 100 пр.
Замовлення № 45 від 30.01.2020

Друк: підприємець Голіней О.М.
м. Івано-Франківськ, вул. Галицька, 128
тел. (0342) 58 04 32