Федак І.В.

РЕКУРЕНТНІ ПОСЛІДОВНОСТІ.
ЧИСЛА ФІБОНАЧЧІ ТА ЛЮКА

Навчальний посібник

Івано-Франківськ

2018

УДК 51(075)
ББК 22.1
Ф65

*Друкується за рішенням Вченої ради
факультету математики та інформатики
Прикарпатського національного університету
імені Василя Стефаника*

Рецензенти:

Заторський Р.А., завідувач кафедри диференціальних рівнянь і прикладної математики ДВНЗ «Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника», доктор фізико-математичних наук, професор

Никифорчин О.Р., завідувач кафедри алгебри і геометрії ДВНЗ «Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника», доктор фізико-математичних наук, професор

Федак І.В.
Рекурентні послідовності. Числа Фібоначчі та Люка: Навчальний посібник. – Івано-Франківськ: ПНУ ім. Василя Стефаника, 2018. – 88с.

Навчальний посібник написаний за матеріалами спецкурсу «Додаткові розділи математичного аналізу», прочитаного його автором для студентів факультету математики та інформатики Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника. Містить основні властивості рекурентних послідовностей та чисел Фібоначчі і Люка, завдання для самостійного розв’язування. Може бути використаний у позакласній роботі з учнями при підготовці до математичних олімпіад та турнірів.

УДК 51(075)
ББК 22.1

Передмова

Важливим об'єктом дослідження у математичному аналізі є послідовності та їх границі. Часто такі послідовності задаються рекурентними формулами.

У пропонованому вашій увазі посібнику охарактеризовані основні властивості таких послідовностей та описані методи знаходження їх загальних членів.

Характерними прикладами рекурентних послідовностей другого порядку є послідовності чисел Фібоначчі та Люка.

Дослідження їх властивостей є досить актуальними. І не випадково з 1963 року результати таких досліджень публікуються у журналі The Fibonacci Quarterly.

Зокрема, у розділі Elementary problems and solutions щоквартально читачам пропонують по п'ять нових цікавих задач. Окремі з них наведені у даному посібнику.

Задачі з числами Фібоначчі та Люка систематично пропонують і на різноманітних олімпіадах та турнірах юних математиків.

У цьому посібнику ми детально проаналізуємо основні тотожності для чисел Фібоначчі та Люка (формули Біне, Кассіні, Каталана тощо), взаємозв'язки між цими числами, скінченні суми таких чисел та їх квадратів, деякі ряди та нескінченні добутки, пов'язані з ними, а також окремі властивості з теорії чисел, алгебри, геометрії та тригонометрії.

Деякі з цих властивостей будуть доведені кількома способами з метою ознайомити читача з методикою їх доведення. Водночас, цілий ряд тотожностей читачам пропонується обґрунтувати самостійно.

У кількох заключних параграфах посібника вказані шляхи можливих узагальнень для послідовностей як чисел, так і многочленів Фібоначчі та Люка.

Безумовно, у такій малій за об'ємом книжечці нереально охопити всі властивості чисел Фібоначчі та Люка. Тому для детальнішого ознайомлення з властивостями таких чисел рекомендуємо читачам фундаментальну монографію: T. Koshy, Fibonacci and Lucas Numbers with Applications, John Wiley, New York, 2001.

1. Лінійні рекурентні співвідношення та їх властивості

Визначимо послідовність дійсних чисел a_n, $n \geq 0$, рівністю

$$a_{n+k} = \mu_1(n)a_{n+k-1} + \mu_2(n)a_{n+k-2} + \ldots + \mu_k(n)a_n + \mu(n),\ k \geq 1, \qquad (1.1)$$

де $\mu_i(n), 1 \leq i \leq k,$ та $\mu(n)$ – деякі задані функції, причому $\mu_k(n)$ не є тотожним нулем. Цю рівність називають *лінійним рекурентним співвідношенням порядку* k.

Всі елементи такої послідовності визначаються однозначно, якщо відомі перші k її елементів: $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$.

У випадку $\mu(n) \equiv 0$ таке рекурентне співвідношення називається *однорідним*.

Наведемо приклади рекурентних співвідношень першого порядку:

1). Рівність $a_{n+1} = a_n + d, n \geq 1,$ визначає всі можливі арифметичні прогресії дійсних чисел з різницею d. Зокрема, при $d = a_1 = 1,$ з неї отримуємо послідовність натуральних чисел.

2). Рівність $a_{n+1} = qa_n, n \geq 1,$ задає геометричні прогресії дійсних чисел зі знаменником q. При $q = a_1 = 2$ матимемо послідовність натуральних степенів двійки.

3). Рівність $a_{n+1} = a_n + 2n + 1, n \geq 1,$ при $a_1 = 1$ задає послідовність квадратів натуральних чисел.

У даному посібнику ми в основному матимемо справу з однорідними рекурентними співвідношеннями другого порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$a_{n+2} = \mu_1 a_{n+1} + \mu_2 a_n,\ \mu_2 \neq 0. \qquad (1.2)$$

У загальному випадку *лінійні однорідні рекурентні співвідношення зі сталими коефіцієнтами* мають такий вигляд:

$$a_{n+k} = \mu_1 a_{n+k-1} + \mu_2 a_{n+k-2} + \ldots + \mu_k a_n,\ \mu_k \neq 0,\ k \geq 1. \qquad (1.3)$$

Покладаючи $a_n = f(n)$, лінійне рекурентне співвідношення можна записати у вигляді функціонального рівняння

$$f(n+k)=\mu_1(n)f(n+k-1)+$$
$$+\mu_2(n)f(n+k-2)+\ldots+\mu_k(n)f(n)+\mu(n) \qquad (1.4)$$

для функції $f:\mathbb{N}\bigcup\{0\}\to\mathbb{R}$, яке ще називають *різницевим рівнянням*.

Позначивши для зручності

$$L\left[f(n)\right]=\mu_1(n)f(n+k-1)+\mu_2(n)f(n+k-2)+\ldots+\mu_k(n)f(n),$$

запишемо рівняння (1.4) у вигляді:

$$f(n+k)=L\left[f(n)\right]+\mu(n). \qquad (1.5)$$

Нехай функція $f_0(n)$ є одним з його розв'язків. Тоді, покладаючи $f(n)=g(n)+f_0(n)$, для визначення функції $g(n)$ отримаємо *однорідне лінійне різницеве рівняння*

$$g(n+k)=L\left[g(n)\right]. \qquad (1.6)$$

Відзначимо *основні властивості* таких рівнянь:

1). Якщо функція $g(n)$ є розв'язком рівняння (1.6), то для довільної сталої c функція $c\cdot g(n)$ також є його розв'язком.

2). Якщо функції $g_1(n)$ та $g_2(n)$ є розв'язками рівняння (1.6), то функція $g(n)=g_1(n)+g_2(n)$ також є його розв'язком.

3). Якщо комплекснозначна функція $g(n)=u(n)+iv(n)$ є розв'язком рівняння (1.6), то дійснозначні функції $u(n)$ та $v(n)$ також є його розв'язками.

Таким чином, для знаходження всіх розв'язків неоднорідного різницевого рівняння (1.5) необхідне знання хоч одного з його розв'язків і вміння шукати всі розв'язки відповідного йому однорідного рівняння (1.6).

2. Характеристичне рівняння та розв'язки різницевих рівнянь

Будемо шукати розв'язок рівняння (1.6) у вигляді $g(n)=\lambda^n$, $\lambda\neq 0$. Підставляючи таку функцію замість чисел a_n в (1.3), для знаходження λ отримаємо рівняння

$$\lambda^{n+k} = \mu_1 \lambda^{n+k-1} + \mu_2 \lambda^{n+k-2} + \ldots + \mu_k \lambda^n .$$

Скорочуючи в ньому на $\lambda^n \neq 0$, приходимо до рівняння

$$\lambda^k = \mu_1 \lambda^{k-1} + \mu_2 \lambda^{k-2} + \ldots + \mu_{k-1} \lambda + \mu_k , \qquad (2.1)$$

яке називають *характеристичним рівнянням*.

Таким чином, функція $g(n) = \lambda^n$, $\lambda \neq 0$, буде розв'язком рівняння (1.6) тоді і тільки тоді, коли λ є коренем характеристичного рівняння (2.1).

Перейдемо тепер до дослідження коренів характеристичного рівняння. Можливі такі чотири випадки:

1). Всі корені $\lambda_1, \lambda_2, \ldots , \lambda_k$ є дійсними і різними. Їм відповідає така лінійно незалежна система розв'язків: $\lambda_1^n, \lambda_2^n, \ldots , \lambda_k^n$.

2). Всі корені $\lambda_1, \lambda_2, \ldots , \lambda_k$ є дійсними, але серед них є кратні корені. Припустимо, що корінь $\lambda \neq 0$ має кратність m. Такому кореню відповідає лінійно незалежна система розв'язків: $\lambda^n, n\lambda^n, \ldots , n^{m-1}\lambda^n$. Оскільки при цьому сума всіх кратностей коренів характеристичного рівняння дорівнює k, то, перебравши всі його корені знову отримаємо лінійно незалежну систему з k розв'язків.

3). Нехай тепер характеристичне рівняння має комплексний корінь $\lambda = a + bi$ кратності 1. Оскільки всі коефіцієнти такого рівняння є дійсними, то таку ж кратність матиме і спряжений до нього корінь $\overline{\lambda} = a - bi$. Запишемо їх у тригонометричній формі:

$$\lambda = \sqrt{a^2+b^2}\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right),\ \overline{\lambda} = \sqrt{a^2+b^2}\left(\cos\varphi - i\sin\varphi\right),$$

де $\cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\varphi \in (0; 2\pi)$.

Тоді цій парі коренів відповідатимуть два лінійно незалежні розв'язки: $\left(a^2+b^2\right)^{\frac{n}{2}}\cos(n\varphi)$ та $\left(a^2+b^2\right)^{\frac{n}{2}}\sin(n\varphi)$. Отже, за наявності простих комплексних коренів загальна кількість лінійно незалежних розв'язків лінійного однорідного різницевого рівняння порядку k також дорівнюватиме k.

4). І, нарешті, нехай характеристичне рівняння має комплексний корінь $\lambda = a + bi$ кратності m. Тоді таку ж кратність матиме і спряжений до нього корінь $\overline{\lambda} = a - bi$. Їм відповідатимуть такі $2m$ лінійно незалежних розв'язків лінійного однорідного різницевого рівняння:

$$\left(a^2+b^2\right)^{\frac{n}{2}}\cos\left(n\varphi\right),\ n\left(a^2+b^2\right)^{\frac{n}{2}}\cos\left(n\varphi\right),\ \ldots,\ n^{m-1}\left(a^2+b^2\right)^{\frac{n}{2}}\cos\left(n\varphi\right)$$

та

$$\left(a^2+b^2\right)^{\frac{n}{2}}\sin\left(n\varphi\right),\ n\left(a^2+b^2\right)^{\frac{n}{2}}\sin\left(n\varphi\right),\ \ldots,\ n^{m-1}\left(a^2+b^2\right)^{\frac{n}{2}}\sin\left(n\varphi\right).$$

Підсумовуючи сказане, переконуємося, що кожне лінійне однорідне різницеве рівняння порядку k зі сталими коефіцієнтами має k лінійно незалежних розв'язків, які можна знайти, розв'язавши відповідне характеристичне рівняння. Їх сукупність називають *фундаментальною системою розв'язків*.

Якщо таку фундаментальну систему з k лінійно незалежних розв'язків утворюють функції $g_1(n), g_2(n), \ldots, g_k(n)$, то функцію

$$g(n) = C_1 g_1(n) + C_2 g_2(n) + \ldots + C_k g_k(n),$$

де $C_1, C_2, \ldots, C_k$ – довільні сталі, $n \in \mathbb{Z}$, називають *загальним розв'язком лінійного однорідного різницевого рівняння* (1.6).

Якщо при цьому серед коренів характеристичного рівняння виявиться $\lambda = 1$, то розв'язками такого однорідного різницевого рівняння будуть також всі функції вигляду

$$g(n) = C_1 g_1(n) + C_2 g_2(n) + \ldots + C_k g_k(n) + \varphi(n),$$

де $\varphi(n)$ – довільна періодична функція з періодом $T = 1$.

Відповідно, *загальним розв'язком лінійного неоднорідного різницевого рівняння* (1.5) буде функція

$$f(n) = C_1 g_1(n) + C_2 g_2(n) + \ldots + C_k g_k(n) + f_0(n),$$

де $f_0(n)$ – будь-який один з його розв'язків, який ще називають *частковим розв'язком* такого рівняння.

3. Лінійні однорідні рекурентні співвідношення другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Розглянемо лінійне однорідне рекурентне співвідношення другого порядку зі сталими коефіцієнтами

$$a_{n+2} = \mu_1 a_{n+1} + \mu_2 a_n,\ \mu_2 \neq 0, \qquad (3.1)$$

для якого характеристичне рівняння має вигляд $\lambda^2 = \mu_1\lambda + \mu_2$.

Проаналізуємо його корені в залежності від дискримінанта:

1). $D = \mu_1^2 + 4\mu_2 > 0$. Тоді характеристичне рівняння має два різні дійсні корені $\lambda_1 = \frac{\mu_1 + \sqrt{D}}{2}$ та $\lambda_2 = \frac{\mu_1 - \sqrt{D}}{2}$. Цим кореням відповідають лінійно незалежні розв'язки $f_1(n) = \lambda_1^n$ та $f_2(n) = \lambda_2^n$ відповідного однорідного різницевого рівняння

$$f(n+2) = \mu_1 f(n+1) + \mu_2 f(n). \qquad (3.2)$$

Оскільки загальним розв'язком рівняння (3.2) є функція $f(n) = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n$, де C_1 та C_2 – довільні сталі, $n \in \mathbb{Z}$, то звідси отримуємо таку формулу для визначення *загального члена послідовності,* заданої рекурентним співвідношенням (3.1):

$$a_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n. \qquad (3.3)$$

2). $D = \mu_1^2 + 4\mu_2 = 0$. Тоді характеристичне рівняння має два однакові дійсні корені $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{\mu_1}{2}$. При цьому функція $f_1(n) = \left(\frac{\mu_1}{2}\right)^n$ є розв'язком різницевого рівняння (3.2).

Доведемо, що й лінійно незалежна з нею функція $f_2(n) = n \cdot \left(\frac{\mu_1}{2}\right)^n$ також є розв'язком.

За умови $\mu_1^2+4\mu_2=0$ це безпосередньо випливає з тотожності

$$(n+2)\cdot\left(\frac{\mu_1}{2}\right)^{n+2}\equiv\mu_1(n+1)\cdot\left(\frac{\mu_1}{2}\right)^{n+1}+\mu_2 n\cdot\left(\frac{\mu_1}{2}\right)^{n},$$

обґрунтувати яку пропонуємо читачам самостійно.

Отже, в цьому разі загальний розв'язок різницевого рівняння (3.2) має вигляд $f(n)=(C_1+C_2n)\left(\frac{\mu_1}{2}\right)^n$, де C_1 та C_2 − довільні сталі, $n\in\mathbb{Z}$.

Відповідно, отримуємо й формулу для *загального члена послідовності,* заданої рекурентним співвідношенням (3.1):

$$a_n=(C_1+C_2n)\left(\frac{\mu_1}{2}\right)^n. \tag{3.4}$$

3). $D=\mu_1^2+4\mu_2<0$. Тоді характеристичне рівняння має два різні комплексні корені $\lambda_1=\frac{\mu_1+i\sqrt{-D}}{2}$ та $\lambda_2=\frac{\mu_1-i\sqrt{-D}}{2}$.

Оскільки для них $\rho=|\lambda_1|=|\lambda_2|=\sqrt{\frac{\mu_1^2+(-4\mu_2-\mu_1^2)}{4}}=\sqrt{-\mu_2}$, то в тригонометричній формі ці корені мають вигляд:

$$\lambda_1=\sqrt{-\mu_2}(\cos\varphi+i\sin\varphi),\ \lambda_2=\sqrt{-\mu_2}(\cos\varphi-i\sin\varphi),$$

де $\cos\varphi=\frac{\mu_1}{2\sqrt{-\mu_2}}$, $\sin\varphi=\frac{\sqrt{-D}}{2\sqrt{-\mu_2}}$, $\varphi\in(0;2\pi)$.

Далі, за формулою Муавра отримаємо:

$$\lambda_1^n=(-\mu_2)^{\frac{n}{2}}(\cos(n\varphi)+i\sin(n\varphi)),\ \lambda_2^n=(-\mu_2)^{\frac{n}{2}}(\cos(n\varphi)-i\sin(n\varphi)).$$

Такій парі комплекснозначних розв'язків різницевого рівняння (3.2) відповідають два його дійснозначні лінійно незалежні розв'язки $f_1(n)=(-\mu_2)^{\frac{n}{2}}\cos(n\varphi)$ та $f_2(n)=(-\mu_2)^{\frac{n}{2}}\sin(n\varphi)$. Тому загальний розв'язок цього рівняння матиме вигляд:

$$f(n)=(-\mu_2)^{\frac{n}{2}}(C_1\cos(n\varphi)+C_2\sin(n\varphi)),$$

де C_1 та C_2 − довільні сталі, $n\in\mathbb{Z}$.

Відповідна формула для *загального члена послідовності,* заданої рекурентним співвідношенням (3.1), запишеться так:

$$a_n = \left(-\mu_2\right)^{\frac{n}{2}} \left(C_1 \cos\left(n\varphi\right) + C_2 \sin\left(n\varphi\right)\right). \qquad (3.5)$$

Зауважимо, що в кожному з цих випадків для знаходження конкретних послідовностей за отриманими тут загальними формулами додатково необхідно задати деякі два з елементів цієї послідовності. Зазвичай такими є елементи a_0 та a_1 чи a_1 та a_2.

4. Числа Фібоначчі та Люка і формули Біне для них

Числа Фібоначчі задаються рівностями:

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n,\ n = 0,1,2,\dots\ . \qquad (4.1)$$

Наведемо приклад двадцяти перших чисел Фібоначчі: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584 , 4181.

Зауважимо, що можна було б визначити такі числа і для від'ємних індексів n, покладаючи $F_{-n} = \left(-1\right)^{n-1} F_n$. При цьому рекурентне співвідношення $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ буде справджуватися для всіх $n \in \mathbb{Z}$.

Запишемо для цього співвідношення характеристичне рівняння $\lambda^2 = \lambda + 1$. Його коренями є числа $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ та $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Нескладно переконатися, що для цих чисел справджуються рівності, які надалі будуть нами використовуватися:

$$\alpha^2 = \alpha + 1,\ \beta^2 = \beta + 1,\ \alpha + \beta = 1,\ \alpha\beta = -1,\ \alpha - \beta = \sqrt{5}. \qquad (4.2)$$

За формулою (3.3) отримаємо, що $F_n = C_1\alpha^n + C_2\beta^n$.

Для знаходження сталих C_1, C_2 скористаємося рівностями $F_0 = 0,\ F_1 = 1,$ тобто знайдемо їх з такої системи рівнянь:

$$\begin{cases} C_1\alpha^0 + C_2\beta^0 = 0, \\ C_1\alpha^1 + C_2\beta^1 = 1. \end{cases}$$

Розв'язавши її, отримаємо $C_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}},\ C_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

У результаті приходимо до такої формули загального члена для чисел Фібоначчі:

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}, \tag{4.3}$$

яку називають *формулою Біне*.

Зауважимо, що ця формула справджується для всіх $n \in \mathbb{Z}$.

Для невід'ємних індексів $n \in \mathbb{Z}$ доведемо її ще й методом математичної індукції.

Для $n = 0$ та $n = 1$ маємо правильні рівності $F_0 = \frac{\alpha^0 - \beta^0}{\sqrt{5}} = 0$ та $F_1 = \frac{\alpha^1 - \beta^1}{\sqrt{5}} = 1$.

Припустимо, що формула (4.3) правильна для $n = k$ та $n = k+1$, тобто $F_k = \frac{\alpha^k - \beta^k}{\sqrt{5}}$ та $F_{k+1} = \frac{\alpha^{k+1} - \beta^{k+1}}{\sqrt{5}}$.

Тоді для $n = k+2$ отримаємо

$$F_{k+2} = F_{k+1} + F_k = \frac{\alpha^{k+1} - \beta^{k+1}}{\sqrt{5}} + \frac{\alpha^k - \beta^k}{\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{\alpha^k(\alpha+1) - \beta^k(\beta+1)}{\sqrt{5}} = \frac{\alpha^k \cdot \alpha^2 - \beta^k \cdot \beta^2}{\sqrt{5}} = \frac{\alpha^{k+2} - \beta^{k+2}}{\sqrt{5}}.$$

Внаслідок принципу математичної індукції звідси випливає, що формула Біне правильна для всіх $n \ge 0$.

Розглянемо також *числа Люка*, які задаються рівностями:

$$L_0 = 2,\ L_1 = 1,\ L_{n+2} = L_{n+1} + L_n,\ n = 0,1,2,\dots . \tag{4.4}$$

Двадцять перших таких чисел мають вигляд: 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, 843, 1364, 2207, 3571, 5778, 9349.

Покладаючи також $L_{-n} = (-1)^n L_n$, отримаємо справедливість рекурентного співвідношення $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$ для всіх $n \in \mathbb{Z}$.

Оскільки при цьому характеристичне рівняння $\lambda^2 = \lambda + 1$ виявилося таким самим, як і для чисел Фібоначчі, то за формулою

(3.3) отримаємо, що $L_n = C_1\alpha^n + C_2\beta^n$. При цьому для знаходження сталих C_1, C_2 скористаємося рівностями $L_0 = 2,\ L_1 = 1,$ тобто знайдемо їх із системи рівнянь:

$$\begin{cases} C_1\alpha^0 + C_2\beta^0 = 2, \\ C_1\alpha^1 + C_2\beta^1 = 1. \end{cases}$$

Розв'язавши її, отримаємо $C_1 = C_2 = 1.$

Отже, *формула Біне для чисел Люка* має вигляд:

$$L_n = \alpha^n + \beta^n. \tag{4.5}$$

Зауважимо, що вона також справджується для всіх $n \in \mathbb{Z}$.

Для $n \ge 0$ пропонуємо читачам самостійно обґрунтувати цю формулу методом математичної індукції.

Отримані нами формули Біне дають представлення чисел Фібоначчі та Люка *у показниковій формі*. Але, враховуючи, що $\alpha = 2\cos\frac{\pi}{5},\quad \beta = 2\cos\frac{3\pi}{5}$, ці числа можна також подати й *у тригонометричній формі*:

$$F_n = \frac{2^n}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\cos\frac{\pi}{5}\right)^n - \left(\cos\frac{3\pi}{5}\right)^n \right), \quad L_n = 2^n \cdot \left(\left(\cos\frac{\pi}{5}\right)^n + \left(\cos\frac{3\pi}{5}\right)^n \right).$$

5. Найпростіші взаємозв'язки між числами Фібоначчі та Люка

Числа Фібоначчі та Люка пов'язані між собою не лише спільним рекурентним співвідношенням. Доведемо рівності, які дають змогу виражати елементи кожної з послідовностей таких чисел через елементи іншої послідовності:

1). $$L_n = F_{n-1} + F_{n+1}. \tag{5.1}$$

Справді, враховуючи рівності $\alpha\beta = -1,\ \alpha - \beta = \sqrt{5}$, отримуємо

$$F_{n-1} + F_{n+1} = \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\sqrt{5}} + \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\sqrt{5}} =$$

$$=\frac{-\beta\alpha^n+\alpha\beta^n}{\sqrt{5}}+\frac{\alpha\alpha^n-\beta\beta^n}{\sqrt{5}}=$$

$$=\frac{(\alpha-\beta)\left(\alpha^n+\beta^n\right)}{\sqrt{5}}=\alpha^n+\beta^n=L_n.$$

2). $$5F_n=L_{n-1}+L_{n+1}. \tag{5.2}$$

Справді, внаслідок рівностей $\alpha\beta=-1$ та $\alpha-\beta=\sqrt{5}$ маємо

$$L_{n-1}+L_{n+1}=\left(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1}\right)+\left(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}\right)=$$

$$=\left(-\beta\alpha^n-\alpha\beta^n\right)+\left(\alpha\alpha^n+\beta\beta^n\right)=$$

$$=(\alpha-\beta)\left(\alpha^n-\beta^n\right)=\sqrt{5}\left(\alpha^n-\beta^n\right)=5F_n.$$

Аналогічно можуть бути доведені й співвідношення:

3). $$L_n=F_{n+2}-F_{n-2}. \tag{5.3}$$

Справді, враховуючи рівності

$$\alpha\beta=-1,\ \alpha^2-\beta^2=(\alpha+1)-(\beta+1)=\alpha-\beta=\sqrt{5},$$

отримуємо

$$F_{n+2}-F_{n-2}=\frac{\alpha^{n+2}-\beta^{n+2}}{\sqrt{5}}-\frac{\alpha^{n-2}-\beta^{n-2}}{\sqrt{5}}=$$

$$=\frac{\alpha^2\alpha^n-\beta^2\beta^n}{\sqrt{5}}-\frac{\beta^2\alpha^n-\alpha^2\beta^n}{\sqrt{5}}=$$

$$=\frac{\left(\alpha^2-\beta^2\right)\left(\alpha^n+\beta^n\right)}{\sqrt{5}}=\alpha^n+\beta^n=L_n.$$

4). $$5F_n=L_{n+2}-L_{n-2}. \tag{5.4}$$

Справді, внаслідок рівностей $\alpha\beta=-1$ та $\alpha^2-\beta^2=\sqrt{5}$ маємо

$$L_{n+2}-L_{n-2}=\left(\alpha^{n+2}+\beta^{n+2}\right)-\left(\alpha^{n-2}+\beta^{n-2}\right)=$$

$$=\left(\alpha^2\alpha^n+\beta^2\beta^n\right)-\left(\beta^2\alpha^n+\alpha^2\beta^n\right)=$$

$$=\left(\alpha^2-\beta^2\right)\left(\alpha^n-\beta^n\right)=\sqrt{5}\left(\alpha^n-\beta^n\right)=5F_n.$$

Відзначимо, що рівності (5.3) та (5.4) можна було б довести й простіше, скориставшись доведеними вище рівностями (5.1) та (5.2) і означеннями чисел Фібоначчі та Люка:

$$F_{n+2}-F_{n-2}=\left(F_{n+1}+F_n\right)-\left(F_n-F_{n-1}\right)=F_{n+1}+F_{n-1}=L_n,$$

$$L_{n+2}-L_{n-2}=\left(L_{n+1}+L_n\right)-\left(L_n-L_{n-1}\right)=L_{n+1}+L_{n-1}=5F_n.$$

Цікавими є й наступні дві рівності, які також доведемо, використовуючи формули Біне:

5). $$F_{2n}=F_nL_n. \qquad (5.5)$$

Справді,

$$F_nL_n=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\sqrt{5}}\cdot\left(\alpha^n+\beta^n\right)=\frac{\alpha^{2n}-\beta^{2n}}{\sqrt{5}}=F_{2n}.$$

6). $$2L_{2n}=L_n^2+5F_n^2. \qquad (5.6)$$

Справді,

$$L_n^2+5F_n^2=\left(\alpha^n+\beta^n\right)^2+5\cdot\left(\frac{\alpha^n-\beta^n}{\sqrt{5}}\right)^2=2\cdot\left(\alpha^{2n}+\beta^{2n}\right)=2L_{2n}.$$

6. Формули Кассіні та деякі їх застосування

В означенні чисел Фібоначчі та Люка ми використали зв’язок між трьома сусідніми елементами цих послідовностей.

Встановимо також інші взаємозв’язки між довільними трьома сусідніми елементами послідовностей Фібоначчі та Люка.

Зокрема, для $n\in\mathbb{N}$ методом математичної індукції доведемо рівність

$$F_{n-1}F_{n+1}-F_n^2=\left(-1\right)^n, \qquad (6.1)$$

яку називають *формулою Кассіні*.

Для $n=1$ маємо: $F_0F_2-F_1^2=0\cdot 1-1^2=\left(-1\right)^1$.

Припустимо, що формула (6.1) правильна для $n=k$.

Тоді для $n=k+1$ отримаємо

$$F_kF_{k+2}-F_{k+1}^2=\left(F_{k+1}-F_{k-1}\right)\left(F_k+F_{k+1}\right)-F_{k+1}^2=$$

$$=F_{k+1}F_k+F_{k+1}^2-F_{k-1}F_k-F_{k-1}F_{k+1}-F_{k+1}^2=$$

$$=F_{k+1}F_k-F_{k-1}F_k-F_k^2-\left(-1\right)^k=F_{k+1}F_k-F_k\left(F_{k-1}+F_k\right)-\left(-1\right)^k=$$

$$=F_{k+1}F_k-F_kF_{k+1}-\left(-1\right)^k=\left(-1\right)^{k+1}.$$

Внаслідок принципу математичної індукції звідси випливає, що формула Кассіні правильна для всіх натуральних n.

Наведемо також її доведення за формулою Біне:

$$F_{n-1}F_{n+1}-F_n^2=\frac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\sqrt{5}}-\left(\frac{\alpha^n-\beta^n}{\sqrt{5}}\right)^2=$$

$$=\frac{-\alpha^{n-1}\beta^{n+1}-\beta^{n-1}\alpha^{n+1}+2\alpha^n\beta^n}{5}=$$

$$=\frac{-\alpha^{n-1}\beta^{n-1}\left(\alpha-\beta\right)^2}{5}=-\left(\alpha\beta\right)^{n-1}=\left(-1\right)^n.$$

Звідси випливає, правильність формули Кассіні для всіх $n\in\mathbb{Z}$.

Аналогічна *формула Кассіні для чисел Люка* має вигляд:

$$L_{n-1}L_{n+1}-L_n^2=5\cdot\left(-1\right)^{n-1}. \qquad (6.2)$$

Доведемо її з використанням формули Біне:

$$L_{n-1}L_{n+1}-L_n^2=\left(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1}\right)\left(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}\right)-\left(\alpha^n+\beta^n\right)^2=$$

$$=\alpha^{n-1}\beta^{n+1}+\beta^{n-1}\alpha^{n+1}-2\alpha^n\beta^n=\alpha^{n-1}\beta^{n-1}\left(\alpha-\beta\right)^2=5\cdot\left(-1\right)^{n-1}.$$

Зрозуміло, що доведена рівність справджується для всіх $n\in\mathbb{Z}$.

Пропонуємо читачам самостійно обґрунтувати цю формулу для натуральних n методом математичної індукції.

Розглянемо й деякі застосування формул Кассіні до розв’язування конкретних задач:

1). Доведіть, що добуток трьох послідовних чисел Фібоначчі не може бути квадратом натурального числа.

Справді, внаслідок формули (6.1)

$$F_{n-1}F_nF_{n+1}=F_n\cdot\left(F_n^2+(-1)^n\right),$$

причому множники у правій частині цієї рівності є взаємно простими. Тому такий добуток міг би бути квадратом натурального числа лише за умови, що кожен з цих двох множників є точним квадратом. Це неможливо, бо $F_n^2+(-1)^n$ є квадратом натурального числа лише при $n=0$. Але при цьому $F_n=0$.

2). Для всіх $n\in\mathbb{Z}$ доведіть, що

$$\frac{F_{2n-1}}{F_{2n+1}}+\frac{F_{2n+1}}{F_{2n-1}}+\frac{1}{F_{2n-1}F_{2n+1}}=\frac{L_{2n-1}}{L_{2n+1}}+\frac{L_{2n+1}}{L_{2n-1}}-\frac{5}{L_{2n-1}L_{2n+1}}.$$

Використовуючи формули Кассіні у вигляді $F_{2n}^2+1=F_{2n-1}F_{2n+1}$ та $L_{2n}^2-5=L_{2n-1}L_{2n+1}$, отримаємо

$$F_{2n-1}^2+F_{2n+1}^2+1=\left(F_{2n+1}-F_{2n-1}\right)^2+1+2F_{2n-1}F_{2n+1}=$$

$$=\left(F_{2n}^2+1\right)+2F_{2n-1}F_{2n+1}=3F_{2n-1}F_{2n+1}$$

та

$$L_{2n-1}^2+L_{2n+1}^2-5=\left(L_{2n+1}-L_{2n-1}\right)^2-5+2L_{2n-1}L_{2n+1}=$$

$$=\left(L_{2n}^2-5\right)+2L_{2n-1}L_{2n+1}=3L_{2n-1}L_{2n+1}.$$

Тому для всіх $n\in\mathbb{Z}$ обидві частини даної рівності дорівнюють 3.

Подібна рівність для чисел Фібоначчі та Люка з парними індексами має вигляд:

$$\frac{F_{2n}}{F_{2n+2}}+\frac{F_{2n+2}}{F_{2n}}-\frac{1}{F_{2n}F_{2n+2}}=\frac{L_{2n}}{L_{2n+2}}+\frac{L_{2n+2}}{L_{2n}}+\frac{5}{L_{2n}L_{2n+2}}.$$

Для всіх $n\in\mathbb{Z}\setminus\{-1;0\}$ обидві її частини також дорівнюють 3.

Для доведення використовуємо аналогічні перетворення та формули Кассіні у вигляді $F_{2n+1}^2 - 1 = F_{2n}F_{2n+2}$ та $L_{2n+1}^2 + 5 = L_{2n}L_{2n+2}$.

Пропонуємо читачам завершити доведення самостійно.

7. Формули Каталана та Чезаро

Узагальненням формул Кассіні є *формули Каталана*:

$$F_{n-k}F_{n+k} - F_n^2 = (-1)^{n+k+1} \cdot F_k^2, \tag{7.1}$$

та

$$L_{n-k}L_{n+k} - L_n^2 = (-1)^{n+k} \cdot 5F_k^2. \tag{7.2}$$

Доведемо їх з використанням формул Біне:

$$F_{n-k}F_{n+k} - F_n^2 = \frac{\alpha^{n-k} - \beta^{n-k}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\alpha^{n+k} - \beta^{n+k}}{\sqrt{5}} - \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}\right)^2 =$$

$$= \frac{-\alpha^{n-k}\beta^{n+k} - \beta^{n-k}\alpha^{n+k} + 2\alpha^n\beta^n}{5} = \frac{-\alpha^{n-k}\beta^{n-k}\left(\alpha^k - \beta^k\right)^2}{5} =$$

$$= -(\alpha\beta)^{n-k} \cdot F_k^2 = (-1)^{n+k+1} \cdot F_k^2.$$

Аналогічно

$$L_{n-k}L_{n+k} - L_n^2 = \left(\alpha^{n-k} + \beta^{n-k}\right)\left(\alpha^{n+k} + \beta^{n+k}\right) - \left(\alpha^n + \beta^n\right)^2 =$$

$$= \alpha^{n-k}\beta^{n+k} + \beta^{n-k}\alpha^{n+k} - 2\alpha^n\beta^n = \alpha^{n-k}\beta^{n-k}\left(\alpha^k - \beta^k\right)^2 = (-1)^{n+k} \cdot 5F_k^2.$$

Зауважимо, що, покладаючи у формулах Каталана $k = 1$, як частковий випадок отримуємо формули Кассіні.

Для $k = 2$ формули Каталана мають вигляд:

$$F_{n-2}F_{n+2} - F_n^2 = (-1)^{n+1}, \tag{7.3}$$

та

$$L_{n-2}L_{n+2} - L_n^2 = 5 \cdot (-1)^n \tag{7.4}$$

відповідно.

Як наслідок з рівностей (6.1) та (7.3) отримуємо:

$$F_{n-2}F_{n-1}F_{n+1}F_{n+2} = F_n^4 - 1. \tag{7.5}$$

Аналогічно з рівностей (6.2) та (7.4) випливає, що

$$L_{n-2}L_{n-1}L_{n+1}L_{n+2} = L_n^4 - 25. \tag{7.6}$$

Рівності (7.5) та (7.6) називаються *формулами Чезаро*.

Застосуємо їх до спрощення наступних виразів, які далі будуть використані для обчислення нескінченних добутків:

1). $$\prod_{n=3}^{m}\left(1-\frac{1}{F_n^4}\right) = \prod_{n=3}^{m}\frac{F_n^4-1}{F_n^4} = \prod_{n=3}^{m}\frac{F_{n-2}F_{n-1}F_{n+1}F_{n+2}}{F_n^4} =$$

$$= \frac{F_1F_2^2}{F_3^2F_4}\cdot\frac{F_{m+1}^2F_{m+2}}{F_{m-1}F_m^2} = \frac{1}{12}\cdot\frac{F_{m+1}^2F_{m+2}}{F_{m-1}F_m^2}. \tag{7.7}$$

2). $$\prod_{n=2}^{m}\left(1-\frac{25}{L_n^4}\right) = \prod_{n=2}^{m}\frac{L_n^4-25}{L_n^4} = \prod_{n=2}^{m}\frac{L_{n-2}L_{n-1}L_{n+1}L_{n+2}}{L_n^4} =$$

$$= \frac{L_0L_1^2}{L_2^2L_3}\cdot\frac{L_{m+1}^2L_{m+2}}{L_{m-1}L_m^2} = \frac{1}{18}\cdot\frac{L_{m+1}^2L_{m+2}}{L_{m-1}L_m^2}. \tag{7.8}$$

8. Інші співвідношення між елементами послідовностей Фібоначчі та Люка

Між елементами послідовності Фібоначчі існують й інші цікаві співвідношення. Наведемо деякі з них.

$$F_{n+1}F_{m+1} + F_nF_m = F_{n+m+1}. \tag{8.1}$$

Справді, враховуючи рівності $\alpha\beta = -1$ та $\alpha - \beta = \sqrt{5}$, маємо

$$F_{n+1}F_{m+1} + F_nF_m = \frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\alpha^{m+1}-\beta^{m+1}}{\sqrt{5}} + \frac{\alpha^n-\beta^n}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\alpha^m-\beta^m}{\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{\alpha\cdot\alpha^{n+m+1} - \beta^{n+1}\alpha^{m+1} - \beta^{m+1}\alpha^{n+1} + \beta\cdot\beta^{n+m+1}}{5} +$$

$$+ \frac{-\beta\cdot\alpha^{n+m+1} - \beta^n\alpha^m - \beta^m\alpha^n - \alpha\cdot\beta^{n+m+1}}{5} =$$

$$=\frac{(\alpha-\beta)\cdot\left(\alpha^{n+m+1}-\beta^{n+m+1}\right)}{5}-\frac{\beta^{n+1}\alpha^{m+1}+\beta^{m+1}\alpha^{n+1}+\beta^{n}\alpha^{m}+\beta^{m}\alpha^{n}}{5}=$$

$$=\frac{(\alpha-\beta)\cdot\left(\alpha^{n+m+1}-\beta^{n+m+1}\right)}{5}-0=\frac{\alpha^{n+m+1}-\beta^{n+m+1}}{\sqrt{5}}=F_{n+m+1}.$$

Замінивши в рівності (8.1) m на $m-1$ отримаємо рівність

$$F_{n+1}F_{m}+F_{n}F_{m-1}=F_{n+m}. \tag{8.2}$$

А якщо замінити ще й n на $n-1$, то будемо мати:

$$F_{n-1}F_{m-1}+F_{n}F_{m}=F_{n+m-1}. \tag{8.3}$$

Крім того, віднявши (8.3) від (8.1), отримуємо ще й таке співвідношення:

$$F_{n+1}F_{m+1}-F_{n-1}F_{m-1}=F_{n+m}. \tag{8.4}$$

Також, покладаючи в (8.1) та в (8.4) $m=n$, прийдемо до таких двох рівностей:

$$F_{n+1}^{2}+F_{n}^{2}=F_{2n+1} \tag{8.5}$$

та

$$F_{n+1}^{2}-F_{n-1}^{2}=F_{2n}. \tag{8.6}$$

Пропонуємо читачам самостійно обґрунтувати аналогічні рівності для чисел Люка:

$$L_{n+1}L_{m+1}+L_{n}L_{m}=5F_{n+m+1}, \tag{8.7}$$

$$L_{n+1}L_{m}+L_{n}L_{m-1}=5F_{n+m}, \tag{8.8}$$

$$L_{n-1}L_{m-1}+L_{n}L_{m}=5F_{n+m-1}, \tag{8.9}$$

$$L_{n+1}L_{m+1}-L_{n-1}F_{m-1}=5F_{n+m}, \tag{8.10}$$

$$L_{n+1}^{2}+L_{n}^{2}=5F_{2n+1}, \tag{8.11}$$

$$L_{n+1}^{2}-L_{n-1}^{2}=5F_{2n}. \tag{8.12}$$

Звернемо увагу на те, що в лівих частинах рівностей (8.7) – (8.12) фігурують числа Люка, а у правих – числа Фібоначчі.

Часто в застосуваннях використовуються також наступні рівності, які нескладно довести, використовуючи формули Біне:

$$F_nL_m + F_mL_n = 2F_{n+m} \tag{8.13}$$

та

$$L_nL_m + 5F_nF_m = 2L_{n+m}. \tag{8.14}$$

Пропонуємо читачам довести ці рівності самостійно.

Покладаючи в них $m = n$, отримаємо рівності $F_{2n} = F_nL_n$ та $2L_{2n} = L_n^2 + 5F_n^2$, які ми вже мали вище як формули (5.5) та (5.6).

9. Суми елементів послідовностей Фібоначчі та Люка

Розглянемо питання про обчислення суми перших n чисел Фібоначчі. Для цього обґрунтуємо таку рівність:

$$F_1 + F_2 + ... + F_n = F_{n+2} - 1. \tag{9.1}$$

Її нескладно довести, додавши n очевидних рівностей:

$$F_1 = F_3 - F_2, \quad F_2 = F_4 - F_3, \quad \dots, \quad F_n = F_{n+2} - F_{n+1}.$$

Склавши їх, отримуємо (9.1).

Легко доводиться ця рівність і методом математичної індукції.

Для $n = 1$ вона очевидна: $F_1 = 1 = 2 - 1 = F_3 - 1$. А з припущення такої рівності для $n = k$ отримуємо, що

$$\left(F_1 + F_2 + ... + F_k\right) + F_{k+1} = \left(F_{k+2} - 1\right) + F_{k+1} = F_{k+3} - 1.$$

Також нескладно переконатися, використовуючи формули Біне та рівності $\alpha^2 - \alpha = 1,\ \beta^2 - \beta = 1$, що

$$F_1 + F_2 + ... + F_n = \frac{\alpha^1 - \beta^1}{\sqrt{5}} + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\sqrt{5}} + ... + \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{\left(\alpha^1 + \alpha^2 + ... + \alpha^n\right)\cdot\left(\alpha^2 - \alpha\right) - \left(\beta^1 + \beta^2 + ... + \beta^n\right)\cdot\left(\beta^2 - \beta\right)}{\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{\left(\alpha^{n+2} - \alpha^2\right) - \left(\beta^{n+2} - \beta^2\right)}{\sqrt{5}} = \frac{\left(\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}\right) - \left(\alpha^2 - \beta^2\right)}{\sqrt{5}} =$$

$$= F_{n+2} - F_2 = F_{n+2} - 1.$$

Встановимо також, чому дорівнюють суми перших n чисел Фібоначчі з парними та непарними номерами відповідно

Спочатку для чисел Фібоначчі з непарними номерами доведемо, що

$$F_1 + F_3 + \ldots + F_{2n-1} = F_{2n}. \quad (9.2)$$

Цю рівність легко отримати, додавши очевидні рівності:

$$F_1 = F_2, \; F_3 = F_4 - F_2, \; F_5 = F_6 - F_4, \; \ldots, \; F_{2n-1} = F_{2n} - F_{2n-2}.$$

Аналогічно для суми чисел Фібоначчі з парними номерами будемо мати

$$F_2 + F_4 + \ldots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1. \quad (9.3)$$

При цьому для доведення достатньо додати очевидні рівності:

$$F_2 = F_3 - F_1, \; F_4 = F_5 - F_3, \; \ldots, \; F_{2n} = F_{2n+1} - F_{2n-1}.$$

Можна було б також скористатися отриманою з (9.1) рівністю

$$F_1 + F_2 + \ldots + F_{2n} = F_{2n+2} - 1 \quad (9.4)$$

і відняти від неї рівність (9.2).

Пропонуємо читачам самостійно обґрунтувати рівності (9.2) та (9.3) методом математичної індукції та з використанням формул Біне.

Подібно доводяться й рівності для сум перших n чисел Люка:

$$L_1 + L_2 + \ldots + L_n = L_{n+2} - 3, \quad (9.5)$$

$$L_1 + L_3 + \ldots + L_{2n-1} = L_{2n} - 2, \quad (9.6)$$

$$L_2 + L_4 + \ldots + L_{2n} = L_{2n+1} - 1. \quad (9.7)$$

Їх обґрунтування також пропонуємо читачам провести самостійно.

10. Суми квадратів елементів послідовностей Фібоначчі та Люка. Геометрична інтерпретація

Розглянемо тепер суму квадратів перших n чисел Фібоначчі.

Очевидно, що

$$F_k F_{k+1} - F_{k-1} F_k = F_k \left(F_{k+1} - F_{k-1} \right) = F_k^2.$$

Тому, склавши рівності

$$F_1^2 = F_1F_2,\ F_2^2 = F_2F_3 - F_1F_2,\ F_3^2 = F_3F_4 - F_2F_3,\ \ldots,\ F_n^2 = F_nF_{n+1} - F_{n-1}F_n,$$

отримаємо формулу

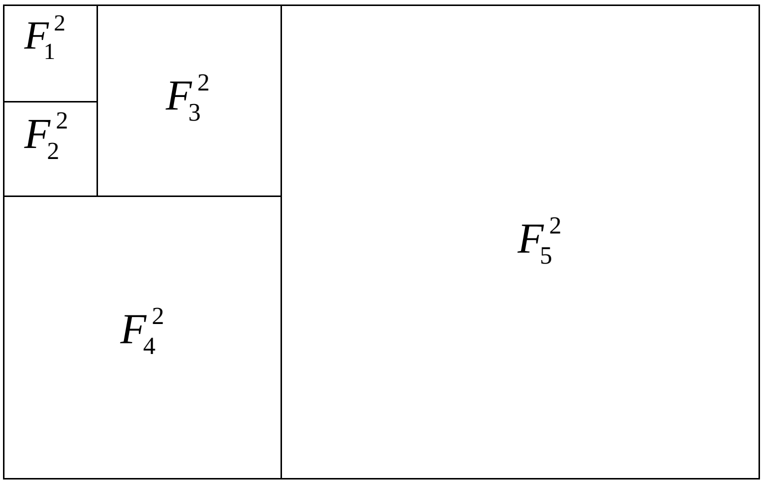
$$F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 = F_nF_{n+1}. \qquad (10.1)$$

Доведемо рівність (10.1) й методом математичної індукції.

Для $n=1$ вона очевидна: $F_1^2 = 1 = F_1F_2$. А з припущення такої рівності для $n=k$ отримуємо, що

$$\left(F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_k^2\right) + F_{k+1}^2 = F_kF_{k+1} + F_{k+1}^2 = F_{k+1}\left(F_k + F_{k+1}\right) = F_{k+1}F_{k+2}.$$

Геометрично суму квадратів перших n чисел Фібоначчі можна трактувати як площу прямокутника зі сторонами F_n та F_{n+1}. Нижче наводимо приклад побудови такого прямокутника для $n=5$.



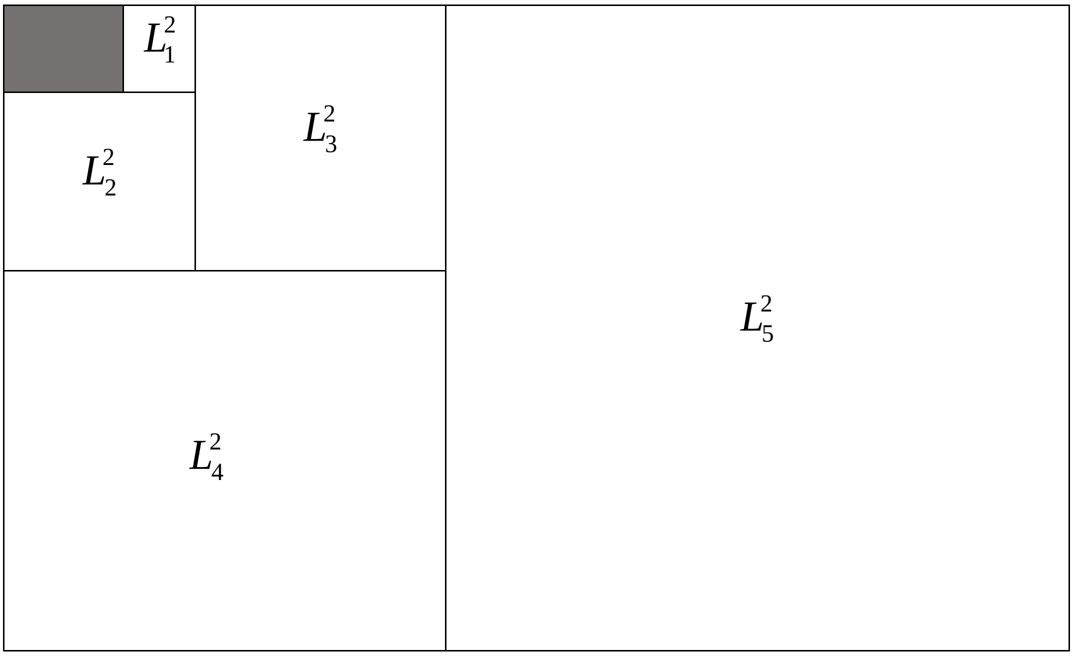
Аналогічно доводимо формулу для суми квадратів перших n чисел Люка:

$$L_1^2 + L_2^2 + \ldots + L_n^2 = L_nL_{n+1} - 2\ . \qquad (10.2)$$

Оскільки $L_kL_{k+1} - L_{k-1}L_k = L_k\left(L_{k+1} - L_{k-1}\right) = L_k^2$, то, склавши рівності $L_1^2 = L_1L_2 - 2$, $L_2^2 = L_2L_3 - L_1L_2$, $L_3^2 = L_3L_4 - L_2L_3$, $\ldots$, $L_n^2 = L_nL_{n+1} - L_{n-1}L_n$, отримаємо формулу (10.2).

Пропонуємо читачам самостійно довести цю рівність методом математичної індукції.

Для $n=5$ наводимо також геометричну інтерпретацію формули (10.2). Заштрихований прямокутник розмірами 2×1 відповідає числу 2, перенесеному в ліву частину цієї формули.



Наведемо також свого роду двоїсті до (10.1) та (10.2) формули:

$$F_1F_2+F_2F_3+\ldots+F_{2n-1}F_{2n}=F_{2n}^2, \tag{10.3}$$

$$F_1F_2+F_2F_3+\ldots+F_{2n}F_{2n+1}=F_{2n+1}^2-1, \tag{10.4}$$

$$L_1L_2+L_2L_3+\ldots+L_{2n-1}L_{2n}=L_{2n}^2-6 \tag{10.5}$$

та

$$L_1L_2+L_2L_3+\ldots+L_{2n}L_{2n+1}=L_{2n+1}^2-1. \tag{10.6}$$

Доведемо, наприклад, методом математичної індукції першу з них.

Для $n=1$ рівність (10.3) очевидна.

Припустимо, що вона правильна для $n=k$.

Тоді для $n=k+1$ достатньо буде довести, що

$$F_{2n}F_{2n+1}+F_{2n+1}F_{2n+2}=F_{2n+2}^2-F_{2n}^2.$$

У правильності останньої рівності переконуємося, розклавши обидві її частини на множники.

Рівності (10.4) – (10.6) пропонуємо читачам обґрунтувати самостійно.

11. Використання властивостей чисел Фібоначчі та Люка для доведення деяких нерівностей

Наведені вище властивості чисел Фібоначчі та Люка можуть бути застосовані для доведення багатьох нерівностей, які систематично публікуються у розділі Elementary problems and solutions журналу THE FIBONACCI QUARTERLY. Розглянемо приклади деяких із них у перекладі на українську мову, які були опубліковані у номерах 1 – 4 цього журналу за 2017 рік:

B-1207. Для натуральних $n \geq 2$ доведіть нерівність

$$\frac{F_n^4 + F_1^4}{F_n^2 + F_1^2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{F_k^4 + F_{k+1}^4}{F_{2k+1}} \geq F_n F_{n+1}.$$

Доведення. Використовуючи рівності $F_{2k+1} = F_k^2 + F_{k+1}^2$ та $F_n F_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} F_k^2$, запишемо задану в умові нерівність у вигляді

$$\frac{F_n^4 + F_1^4}{F_n^2 + F_1^2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{F_k^4 + F_{k+1}^4}{F_k^2 + F_{k+1}^2} \geq \frac{F_n^2 + F_1^2}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{F_k^2 + F_{k+1}^2}{2}.$$

У правильності останньої переконуємося, додавши n очевидних нерівностей вигляду

$$\frac{a^4 + b^4}{a^2 + b^2} \geq \frac{a^2 + b^2}{2} \Leftrightarrow \left(a^2 - b^2\right)^2 \geq 0,$$

B-1212. Для натуральних $n \geq 2$ доведіть нерівність

$$\frac{F_n^4 + 1}{F_n^2 - F_n + 1} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{F_k^4 + F_{k+1}^4}{F_k^2 - F_k F_{k+1} + F_{k+1}^2} \geq 2 F_n F_{n+1}.$$

Доведення. Враховуючи що $F_1 = 1$ та $F_n F_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} F_k^2$, запишемо цю нерівність у вигляді

$$\frac{F_n^4 + F_1^4}{F_n^2 - F_n F_1 + F_1^2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{F_k^4 + F_{k+1}^4}{F_k^2 - F_k F_{k+1} + F_{k+1}^2} \geq \left(F_n^2 + F_1^2\right) + \sum_{k=1}^{n-1} \left(F_k^2 + F_{k+1}^2\right).$$

Для завершення доведення додаємо n нерівностей вигляду

$$\frac{a^4+b^4}{a^2-ab+b^2} \geq a^2+b^2,$$

які для додатних чисел a та b рівносильні очевидній нерівності $ab\left(a-b\right)^2 \geq 0$.

Ще одну нерівність такого типу пропонуємо читачам довести самостійно:

<u>В-1219</u>. Для натуральних $n \geq 2$ доведіть нерівність

$$\frac{F_n^4+F_n^2+1}{F_n}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{F_k^4+F_k^2F_{k+1}^2+F_{k+1}^4}{F_kF_{k+1}} \geq 3F_nF_{n+1}.$$

При доведенні врахуйте, що для додатних чисел a та b

$$\frac{a^4+a^2b^2+b^4}{ab} \geq \frac{3}{2}\left(a^2+b^2\right) \Leftrightarrow \left(a-b\right)^2\left(2a^2+ab+2b^2\right) \geq 0.$$

Наведемо також приклади доведення складніших нерівностей з використанням властивостей чисел Фібоначчі та Люка.

<u>В-1201</u>. Для всіх натуральних n і додатних чисел a та b доведіть нерівності:

а) $$\frac{a^3}{aF_n+bF_{n+1}}+\frac{b^3}{bF_n+aF_{n+1}} \geq \frac{a^2+b^2}{F_{n+2}},$$

б) $$\frac{a^3}{aL_n+bL_{n+1}}+\frac{b^3}{bL_n+aL_{n+1}} \geq \frac{a^2+b^2}{L_{n+2}}.$$

Доведення. Розглянемо загальнішу задачу і для додатних чисел a, b, u, v доведемо, що

$$\frac{a^3}{au+bv}+\frac{b^3}{bu+av} \geq \frac{a^2+b^2}{u+v}.$$

З нерівностей $\dfrac{y^2}{z} \geq 2y-z \Leftrightarrow \left(y-z\right)^2 \geq 0,\ z>0,$ та $\left(a-b\right)^2 \geq 0$ отримуємо

$$\frac{a^3}{au+bv}+\frac{b^3}{bu+av}=\frac{1}{(u+v)^2}\left(a\cdot\frac{a^2(u+v)^2}{au+bv}+b\cdot\frac{b^2(u+v)^2}{bu+av}\right)\ge$$

$$\ge\frac{1}{(u+v)^2}\Big(a\cdot\big(2a(u+v)-(au+bv)\big)+b\cdot\big(2b(u+v)-(bu+av)\big)\Big)=$$

$$=\frac{1}{(u+v)^2}\Big(\left(a^2+b^2\right)(u+v)+(a-b)^2v\Big)\ge\frac{a^2+b^2}{u+v}.$$

Оскільки $F_{n+2}=F_n+F_{n+1}$ та $L_{n+2}=L_n+L_{n+1}$, то задані в умові нерівності є частковими випадками доведеної нерівності.

<u>В-1213</u>. Для всіх натуральних n доведіть, що

$$\frac{F_1}{F_3}\cdot\frac{F_5}{F_7}\cdot\ldots\cdot\frac{F_{4n-3}}{F_{4n-1}}>\frac{1}{\sqrt[4]{F_1+F_5+\ldots+F_{8n+1}}}.$$

Доведення. Якщо $k<m$, то для всіх натуральних p

$$F_kF_{m+p}-F_{k+p}F_m=$$

$$=\frac{1}{5}\Big[\left(\alpha^k-\beta^k\right)\left(\alpha^{m+p}-\beta^{m+p}\right)-\left(\alpha^{k+p}-\beta^{k+p}\right)\left(\alpha^m-\beta^m\right)\Big]=$$

$$=\frac{1}{5}\Big[\left(\alpha^p-\beta^p\right)\left(\alpha^k\beta^m-\alpha^m\beta^k\right)\Big]=$$

$$=\frac{1}{5}\Big[\left(\alpha^p-\beta^p\right)\alpha^k\beta^k\left(\beta^{m-k}-\alpha^{m-k}\right)\Big]=(-1)^{k+1}F_pF_{m-k}.$$

Тому $\frac{F_k}{F_m}>\frac{F_{k+p}}{F_{m+p}}$, якщо k непарне, і $\frac{F_k}{F_m}<\frac{F_{k+p}}{F_{m+p}}$, якщо k є парним. Отже, правильні наступні нерівності:

$$\frac{F_1}{F_3}\cdot\frac{F_5}{F_7}\cdot\ldots\cdot\frac{F_{4n-3}}{F_{4n-1}}>\frac{F_2}{F_4}\cdot\frac{F_6}{F_8}\cdot\ldots\cdot\frac{F_{4n-2}}{F_{4n}},$$

$$\frac{F_1}{F_3}\cdot\frac{F_5}{F_7}\cdot\ldots\cdot\frac{F_{4n-3}}{F_{4n-1}}>\frac{F_3}{F_5}\cdot\frac{F_7}{F_9}\cdot\ldots\cdot\frac{F_{4n-1}}{F_{4n+1}},$$

$$\frac{F_1}{F_3}\cdot\frac{F_5}{F_7}\cdot\ldots\cdot\frac{F_{4n-3}}{F_{4n-1}} > \frac{F_4}{F_6}\cdot\frac{F_8}{F_{10}}\cdot\ldots\cdot\frac{F_{4n}}{F_{4n+2}}.$$

Звідси випливає нерівність

$$\left(\frac{F_1}{F_3}\cdot\frac{F_5}{F_7}\cdot\ldots\cdot\frac{F_{4n-3}}{F_{4n-1}}\right)^4 > \left(\frac{F_1}{F_3}\cdot\frac{F_5}{F_7}\cdot\ldots\cdot\frac{F_{4n-3}}{F_{4n-1}}\right)\cdot\left(\frac{F_2}{F_4}\cdot\frac{F_6}{F_8}\cdot\ldots\cdot\frac{F_{4n-2}}{F_{4n}}\right)\cdot$$
$$\cdot\left(\frac{F_3}{F_5}\cdot\frac{F_7}{F_9}\cdot\ldots\cdot\frac{F_{4n-1}}{F_{4n+1}}\right)\cdot\left(\frac{F_4}{F_6}\cdot\frac{F_8}{F_{10}}\cdot\ldots\cdot\frac{F_{4n}}{F_{4n+2}}\right) = \frac{F_1F_2}{F_{4n+1}F_{4n+2}} =$$
$$= \frac{1}{F_1^2+\left(F_2^2+F_3^2\right)+\ldots+\left(F_{4n}^2+F_{4n+1}^2\right)} = \frac{1}{F_1+F_5+\ldots+F_{8n+1}},$$

яка рівносильна заданій.

Пропонуємо читачам, міркуючи аналогічно, обґрунтувати ще й таку нерівність:

$$\frac{F_2}{F_4}\cdot\frac{F_6}{F_8}\cdot\ldots\cdot\frac{F_{4n-2}}{F_{4n}} < \sqrt[4]{\frac{2}{F_3+F_7+\ldots+F_{8n+3}}}.$$

В-1216. Для всіх додатних дійсних чисел m та натуральних чисел n доведіть нерівність

$$F_n^m F_{n+1}^m \sum_{k=1}^{n}\frac{L_k^{m+1}}{F_k^{2m}} \ge n^{m+1}\left(\prod_{k=1}^{n} L_k\right)^{\frac{m+1}{n}}.$$

Доведення. Використаємо відомі нерівності

$$\frac{a_1^{m+1}}{b_1^m}+\ldots+\frac{a_n^{m+1}}{b_n^m} \ge \frac{\left(a_1+\ldots+a_n\right)^{m+1}}{\left(b_1+\ldots+b_n\right)^m} \text{ та } a_1+\ldots+a_n \ge n\cdot\left(a_1\cdot\ldots\cdot a_n\right)^{\frac{1}{n}},$$

де $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ та m є додатними дійсними числами, а n – натуральне число. Покладаючи $a_k = L_k,\ b_k = F_k^2$ та враховуючи рівність $\sum_{k=1}^{n} F_k^2 = F_nF_{n+1}$, отримуємо потрібну нерівність

$$F_n^m F_{n+1}^m \sum_{k=1}^{n}\frac{L_k^{m+1}}{F_k^{2m}} \ge \left(L_1+\ldots+L_n\right)^{m+1} \ge \left(n\cdot\left(L_1\cdot\ldots\cdot L_n\right)^{\frac{1}{n}}\right)^{m+1} \ge n^{m+1}\left(\prod_{k=1}^{n} L_k\right)^{\frac{m+1}{n}}.$$

12. Суми елементів послідовностей Фібоначчі та Люка з ваговими коефіцієнтами

Вище ми отримали рівності $\sum_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$ та $\sum_{k=1}^{n} L_k = L_{n+2} - 3$.

Узагальнюючи їх, розглянемо тепер суми $B_n = \sum_{k=1}^{n} \omega_k F_k$ та $C_n = \sum_{k=1}^{n} \omega_k L_k$, де вагові коефіцієнти ω_k є натуральними числами.

Спочатку візьмемо $\omega_k = k$. Позначивши $\sum_{k=1}^{n} F_k = A_n$, отримаємо

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} kF_k = \sum_{k=1}^{n} F_k + \sum_{k=2}^{n} F_k + \ldots + \sum_{k=n}^{n} F_k =$$

$$= A_n + \left(A_n - A_1\right) + \left(A_n - A_2\right) + \ldots + \left(A_n - A_{n-1}\right) =$$

$$= nA_n - \sum_{k=1}^{n-1} A_k = n\left(F_{n+2} - 1\right) - \sum_{k=1}^{n-1}\left(F_{k+2} - 1\right) =$$

$$= n\left(F_{n+2} - 1\right) - \left(F_{n+3} - 3\right) + \left(n - 1\right) = nF_{n+2} - F_{n+3} + 2.$$

Таким чином, справджується рівність

$$\sum_{k=1}^{n} kF_k = nF_{n+2} - F_{n+3} + 2. \qquad (12.1)$$

Аналогічно (пропонуємо читачам довести це самостійно)

$$\sum_{k=1}^{n} kL_k = nL_{n+2} - L_{n+3} + 4. \qquad (12.2)$$

Вибираючи також вагові коефіцієнти $\omega_k = n - k + 1$, розглянемо суми $B_n^* = \sum_{k=1}^{n}\left(n - k + 1\right)F_k$ та $C_n^* = \sum_{k=1}^{n}\left(n - k + 1\right)L_k$.

Оскільки при цьому

$$B_n + B_n^* = \left(n+1\right)\sum_{k=1}^{n} F_k = \left(n+1\right)\left(F_{n+2} - 1\right),$$

$$C_n + C_n^* = (n+1)\sum_{k=1}^{n} L_k = (n+1)(L_{n+2} - 3).$$

то, враховуючи формули (12.1) та (12.2), отримаємо:

$$\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)F_k = F_{n+4} - n - 3, \quad (12.3)$$

$$\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)L_k = L_{n+4} - 3n - 7. \quad (12.4)$$

Зауважимо, що, міркуючи аналогічно, для сум

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)F_{2k-1} = \sum_{k=1}^{n}F_{2k-1} + 2\sum_{k=2}^{n}F_{2k-1} + \ldots + 2\sum_{k=n}^{n}F_{2k-1}$$

з врахуванням рівності $\sum_{k=1}^{n}F_{2k-1} = F_{2n}$ будемо мати

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)F_{2k-1} = (2n-1)F_{2n} - 2F_{2n-1} + 2 \quad (12.5)$$

та відповідну двоїсту до неї формулу

$$\sum_{k=1}^{n}(2n-2k+1)F_{2k-1} = F_{2n+1} + F_{2n-1} - 2. \quad (12.6)$$

Подібними міркуваннями отримаємо також рівності:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k)F_{2k} = 2(nF_{2n+1} - F_{2n}), \quad (12.7)$$

$$\sum_{k=1}^{n}(2n-2k+2)F_{2k} = 2(F_{2n+2} - n - 1). \quad (12.8)$$

Аналогічні рівності для чисел Люка мають вигляд:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)L_{2k-1} = (2n-1)L_{2n} - 2L_{2n-1}, \quad (12.9)$$

$$\sum_{k=1}^{n}(2n-2k+1)L_{2k-1} = L_{2n+1} + L_{2n-1} - 4n, \quad (12.10)$$

$$\sum_{k=1}^{n}(2k)L_{2k} = 2(nL_{2n+1} - L_{2n} + 2), \quad (12.11)$$

$$\sum_{k=1}^{n}(2n-2k+2)L_{2k}=2\left(L_{2n+2}-n-3\right). \qquad (12.12)$$

Наведемо без доведення ще й такі дві загальні формули:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(a+(k-1)d\right)F_k=\left(a+(n-1)d\right)F_{n+2}-d\left(F_{n+3}-3\right)-a, \qquad (12.13)$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(a+(k-1)d\right)L_k=\left(a+(n-1)d\right)L_{n+2}-d\left(L_{n+3}-7\right)-3a. \qquad (12.14)$$

Враховуючи також рівності $\sum_{k=1}^{n}F_k^2=F_nF_{n+1}$ та $\sum_{k=1}^{n}F_kF_{k+1}=F_n^2-\gamma_n$, де $\gamma_n=\dfrac{1-(-1)^n}{2}$, подібними міркуваннями можна отримати й таку загальну формулу:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(a+(k-1)d\right)F_k^2=\left(a+(n-1)d\right)F_nF_{n+1}-d\left(F_n^2-\gamma_n\right). \qquad (12.15)$$

Аналогічна формула для чисел Люка має вигляд:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(a+(k-1)d\right)L_k^2=\left(a+(n-1)d\right)\left(L_nL_{n+1}-2\right)-d\left(L_n^2-\nu_n\right), \qquad (12.16)$$

де $\nu_n=\dfrac{5\cdot(-1)^n+3}{2}$.

З (12.15) та (12.16) як часткові випадки отримуємо рівності:

$$\sum_{k=1}^{n}kF_k^2=nF_nF_{n+1}-F_n^2+\gamma_n, \qquad (12.17)$$

$$\sum_{k=1}^{n}kL_k^2=n\left(L_nL_{n+1}-2\right)-L_n^2+\nu_n. \qquad (12.18)$$

Цікавими є й формули:

$$\sum_{k=1}^{n}2^{k-1}F_k=\frac{2^nL_{n+1}-1}{5}, \qquad (12.19)$$

$$\sum_{k=1}^{n}2^{k-1}L_k=2^nF_{n+1}-1. \qquad (12.20)$$

Обґрунтуємо першу з них:

$$\sum_{k=1}^{n}2^{k-1}F_k=\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{k=1}^{n}2^{k-1}\left(\alpha^k-\beta^k\right)=\frac{\alpha}{\sqrt{5}}\sum_{k=1}^{n}(2\alpha)^{k-1}-\frac{\beta}{\sqrt{5}}\sum_{k=1}^{n}(2\beta)^{k-1}=$$

$$=\frac{\alpha}{\sqrt{5}}\cdot\frac{(2\alpha)^n-1}{2\alpha-1}-\frac{\beta}{\sqrt{5}}\cdot\frac{(2\beta)^n-1}{2\beta-1}=2^n\cdot\frac{\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}}{5}-\frac{\alpha+\beta}{5}=\frac{2^nL_{n+1}-1}{5}.$$

А формулу (12.20) пропонуємо читачам довести самостійно.

Доведіть також рівності (12.19) та (12.20) методом математичної індукції.

13. Числа Фібоначчі та Люка і біноміальні коефіцієнти

Нехай n та k – невід’ємні цілі числа. *Біноміальними коефіцієнтами* називаються числа

$$C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!},\ 0\le k\le n. \tag{13.1}$$

Безпосередньо з означення випливає, що $C_n^k=C_n^{n-k}$.

Інакше біноміальні коефіцієнти можна записати у вигляді

$$C_n^k=\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!},$$

звідки отримуємо таке рекурентне співвідношення:

$$C_n^k=\frac{n}{k}C_{n-1}^{k-1},\ 1\le k\le n. \tag{13.2}$$

Доведемо таку *тотожність Паскаля*:

$$C_{n+1}^k=C_n^{k-1}+C_n^k,\ 1\le k\le n. \tag{13.3}$$

Справді,

$$C_n^{k-1}+C_n^k=\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}+\frac{n!}{k!(n-k)!}=$$

$$=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\left(\frac{1}{n-k+1}+\frac{1}{k}\right)=\frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}=C_{n+1}^k.$$

Враховуючи рівність (13.3), біноміальні коефіцієнти можна виписати у формі *трикутника Паскаля*. Наводимо кілька перших його рядків:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}
$$

Використовуючи тотожність Паскаля, доведемо методом математичної індукції *формулу Люка*:

$$F_{n+1} = \sum_{k=0}^{[n/2]} C_{n-k}^{k},\ n \ge 0. \qquad (13.4)$$

Для зручності доведення будемо вважати, що $C_q^p = 0$, якщо $p > q$, і запишемо рівність (13.4) у вигляді $F_{n+1} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{n-k}^{k},\ n \ge 0$.

Для $n = 0$ та $n = 1$ ця рівність правильна: $F_1 = C_0^0 = 1,\ F_2 = C_1^0 = 1$.

Припустимо, що вона справджується для чисел $n = m$ та $n = m+1$. Тоді для $n = m+2$ за тотожністю Паскаля отримаємо:

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_{m+2-k}^{k} = C_{m+2}^{0} + C_{m+1}^{1} + C_{m}^{2} + C_{m-1}^{3} + \ldots =$$

$$= C_{m+1}^{0} + \left(C_m^0 + C_m^1\right) + \left(C_{m-1}^1 + C_{m-1}^2\right) + \left(C_{m-2}^2 + C_{m-2}^3\right) + \ldots =$$

$$= \left(C_{m+1}^0 + C_m^1 + C_{m-1}^2 + \ldots\right) + \left(C_m^0 + C_{m-1}^1 + C_{m-2}^2 + \ldots\right) = F_{m+1} + F_m = F_{m+2},$$

що й треба було довести.

З біноміальними коефіцієнтами пов’язана й *формула бінома Ньютона*:

$$\left(x + y\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} y^k. \qquad (13.5)$$

Як наслідки з (13.5) отримуємо рівності:

$$\left(1+x\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k\,, \tag{13.6}$$

$$\left(1-x\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(-x\right)^k, \tag{13.7}$$

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n, \tag{13.8}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \left(-1\right)^k C_n^k = 0\,. \tag{13.9}$$

Наведемо і загальнішу рівність:

$$\left(x_1 + x_2 + \ldots + x_m\right)^n = \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_m=n} C\left(k_1,k_2,\ldots,k_m\right) x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_m^{k_m}\,, \tag{13.10}$$

де $C\left(k_1,k_2,\ldots,k_m\right) = \dfrac{n!}{k_1!\cdot k_2!\cdot\ldots\cdot k_m!}$ – *поліноміальні коефіцієнти.*

Зауважимо, що з (13.6) з врахуванням рівності $C_{n+1}^k = \dfrac{n+1}{k} C_n^{k-1}$ при $n \ge 1$ випливає, що також

$$\sum_{k=0}^{n+1} k\left(-1\right)^{n+1-k} C_{n+1}^k = \left(n+1\right)\sum_{k=1}^{n+1}\left(-1\right)^{n+1-k} C_n^{k-1} =$$

$$= \left(n+1\right)\sum_{p=0}^{n}\left(-1\right)^{n-p} C_n^p = \left(n+1\right)\left(1-1\right)^n = 0\,.$$

Використаємо біноміальні коефіцієнти як вагові коефіцієнти у сумах з числами Фібоначчі і доведемо наступні дві рівності:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k F_k = F_{2n},\ n \ge 0\,. \tag{13.11}$$

Доведення. За формулами Біне та бінома Ньютона з врахуванням рівностей $1+\alpha=\alpha^2$ та $1+\beta=\beta^2$ отримаємо:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k F_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{k=0}^{n} C_n^k\left(\alpha^k - \beta^k\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{k=0}^{n} C_n^k \alpha^k - \frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{k=0}^{n} C_n^k \beta^k =$$

$$=\frac{(1+\alpha)^n-(1+\beta)^n}{\sqrt{5}}=\frac{\alpha^{2n}-\beta^{2n}}{\sqrt{5}}=F_{2n}.$$

Так само доводимо рівність

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k F_k = -F_n,\ n \ge 0. \tag{13.12}$$

Доведення. За формулами Біне та бінома Ньютона з врахуванням рівностей $1-\alpha=\beta$ та $1-\beta=\alpha$ отримаємо:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k F_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k \left(\alpha^k-\beta^k\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{k=0}^{n} C_n^k (-\alpha)^k-\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{k=0}^{n} C_n^k (-\beta)^k=$$

$$=\frac{(1-\alpha)^n-(1-\beta)^n}{\sqrt{5}}=\frac{\beta^n-\alpha^n}{\sqrt{5}}=-F_n.$$

Аналогічні рівності для чисел Люка мають вигляд:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k L_k = L_{2n},\ n \ge 0, \tag{13.13}$$

та

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k L_k = L_n,\ n \ge 0. \tag{13.14}$$

Пропонуємо читачам, як вправи для самостійної роботи, обґрунтувати рівності (13.3) та (13.4) та довести наступні рівності:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k F_{k+m} = F_{2n+m}, \tag{13.15}$$

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k F_{k+m} = (-1)^{m-1} F_{n-m}, \tag{13.16}$$

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k L_{k+m} = L_{2n+m}, \tag{13.17}$$

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k L_{k+m} = (-1)^m L_{n-m}. \tag{13.18}$$

Цікавою є й наступна формула

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k F_k L_{n-k} = 2^n F_n. \qquad (13.19)$$

Її справедливість випливає з таких рівностей:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k F_k L_{n-k} = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\alpha^k - \beta^k\right)\left(\alpha^{n-k} + \beta^{n-k}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\alpha^n - \beta^n + \alpha^k \beta^{n-k} - \alpha^{n-k} \beta^k\right) =$$

$$= \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} \cdot \sum_{k=0}^{n} C_n^k + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k \alpha^k \beta^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} C_n^k \alpha^{n-k} \beta^k \right) =$$

$$= 2^n \cdot F_n + \frac{1}{\sqrt{5}} \left((\alpha + \beta)^n - (\alpha + \beta)^n \right) = 2^n \cdot F_n.$$

Пропонуємо читачам самостійно обґрунтувати ще й такі дві формули:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k F_k F_{n-k} = \frac{2^n L_n - 2}{5}, \qquad (13.20)$$

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k L_k L_{n-k} = 2^n L_n + 2. \qquad (13.21)$$

14. Коефіцієнти Фібоначчі та їх властивості

За аналогією з біноміальними коефіцієнтами розглянемо числа

$$\Phi_n^0 = 1,\ \Phi_n^k = \frac{F_1 F_2 \ldots F_n}{\left(F_1 F_2 \ldots F_k\right) \cdot \left(F_1 F_2 \ldots F_{n-k}\right)}, 1 \le k \le n, \qquad (14.1)$$

які називають *коефіцієнтами Фібоначчі*.

Інакше їх можна записати так:

$$\Phi_n^0 = 1,\ \Phi_n^k = \frac{F_n F_{n-1} \ldots F_{n-k+1}}{F_1 F_2 \ldots F_k}, 1 \le k \le n. \qquad (14.2)$$

Очевидно, що при цьому $\Phi_n^k = \Phi_n^{n-k}, 0 \le k \le n$. Встановимо для коефіцієнтів Фібоначчі *аналог тотожності Паскаля*.

Внаслідок (8.2) маємо $F_{n+1} = F_{k+1+(n-k)} = F_k F_{n-k} + F_{k+1} F_{n+1-k}$. Тому

$$\frac{F_{n+1} F_n F_{n-1} \dots F_{n-k+2}}{F_1 F_2 \dots F_k} = \frac{\left(F_k F_{n-k} + F_{k+1} F_{n+1-k}\right) F_n F_{n-1} \dots F_{n-k+2}}{F_1 F_2 \dots F_k} =$$

$$= F_{n-k} \cdot \frac{F_n F_{n-1} \dots F_{n-k+2}}{F_1 F_2 \dots F_{k-1}} + F_{k+1} \cdot \frac{F_n F_{n-1} \dots F_{n-k+2} F_{n-k+1}}{F_1 F_2 \dots F_k}.$$

Отже,

$$\Phi_{n+1}^k = F_{n-k} \cdot \Phi_n^{k-1} + F_{k+1} \cdot \Phi_n^k,\ 1 \le k \le n. \tag{14.3}$$

Оскільки $\Phi_1^0 = \Phi_1^1 = 1$, а числа Фібоначчі є цілими числами, то з (14.3) випливає, що всі коефіцієнти Фібоначчі також будуть цілими. Наводимо кілька рядків відповідного *аналогу трикутника Паскаля*:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 6 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 15 & & 15 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 8 & & 40 & & 60 & & 40 & & 8 & & 1
\end{array}$$

Цікаво, що дві прилягаючі до країв цього трикутника діагоналі такої таблиці складаються з чисел Фібоначчі.

Покладаючи в (14.3) $n = 2k+1$, отримаємо:

$$\Phi_{2k+2}^k = F_{k+1} \cdot \left(\Phi_{2k+1}^{k-1} + \Phi_{2k+1}^k\right).$$

А для $n = 2k-1$ будемо мати

$$\Phi_{2k}^k = F_{k-1} \cdot \Phi_{2k-1}^{k-1} + F_{k+1} \cdot \Phi_{2k-1}^k = L_k \cdot \Phi_{2k-1}^{k-1} = L_k \cdot \Phi_{2k-1}^k.$$

Можна було б аналогічним чином визначити й числа

$$\Lambda_n^k = \frac{L_1 L_2 \dots L_n}{\left(L_1 L_2 \dots L_k\right) \cdot \left(L_1 L_2 \dots L_{n-k}\right)},\ 1 \le k \le n-1.$$

Але, на відміну від коефіцієнтів Фібоначчі, не всі вони будуть цілими числами.

15. Твірні функції та їх властивості

Нехай задана послідовність дійсних чисел $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$. Тоді функція

$$g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \qquad (15.1)$$

називається *твірною функцією* цієї послідовності.

Відповідно, функція $g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$ є твірною функцією для скінченної послідовності $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$.

Наприклад, функція $g(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + (n+1)x^n + \dots$ є твірною для послідовності всіх натуральних чисел, а функція $g(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} = \dfrac{x^n - 1}{x - 1}$ – твірною для послідовності з n одиниць. Надалі ми будемо використовувати також рівність

$$\frac{1}{1-qx} = 1 + qx + q^2x^2 + \dots + q^{n-1}x^{n-1} + \dots, \ |qx| < 1, \qquad (15.2)$$

та її частковий випадок

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} + \dots, \ |x| < 1 . \qquad (15.3)$$

Якщо $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ та $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ – дві твірні функції, то

$$f(x) + g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n, \qquad (15.4)$$

$$f(x) g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) x^n. \qquad (15.5)$$

Наприклад, внаслідок (15.5) функція

$$g(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \cdot \sum_{k=0}^{n} x^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} (1 \cdot 1) \right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n$$

є твірною функцією згадуваної вище послідовності всіх натуральних чисел.

Що ж стосується формули (15.4), то її зручно використовувати після попереднього розкладу дробово-раціональної функції на прості дроби. Наприклад, оскільки $\alpha+\beta=1$ та $\alpha\beta=-1$, то

$$\frac{x}{1-x-x^2}=\frac{x}{(1-\alpha x)(1-\beta x)}=\frac{A}{1-\alpha x}+\frac{B}{1-\beta x}=$$

$$=\frac{A(1-\beta x)+B(1-\alpha x)}{1-x-x^2}=\frac{A+B-(A\beta+B\alpha)x}{1-x-x^2}.$$

Порівнюючи перший та останній з записаних тут дробів, приходимо до системи рівнянь

$$\begin{cases} A+B=0, \\ A\beta+B\alpha=-1, \end{cases}$$

з якої знаходимо $A=-B=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. Тому

$$\frac{x}{1-x-x^2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\alpha x}-\frac{1}{1-\beta x}\right). \tag{15.6}$$

Далі, скориставшись формулами (15.2) та (15.4), отримаємо:

$$\frac{x}{1-x-x^2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n x^n-\sum_{n=0}^{\infty}\beta^n x^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n-\beta^n}{\sqrt{5}}x^n .$$

Отже,

$$\frac{x}{1-x-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}F_n x^n , \tag{15.7}$$

тобто функція $g(x)=\dfrac{x}{1-x-x^2}$ є твірною функцією послідовності чисел Фібоначчі.

До цього ж висновку можна було прийти й з допомогою таких міркувань.

Нехай $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}F_n x^n=F_0+F_1x+F_2x^2+\ldots+F_nx^n+\ldots$.

Тоді, враховуючи, що $F_0 = 0$, маємо:

$$xg(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n x^{n+1} = F_1 x^2 + F_2 x^3 + \ldots + F_n x^{n+1} + \ldots ,$$

$$x^2 g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n x^{n+2} = F_1 x^3 + F_2 x^4 + \ldots + F_n x^{n+2} + \ldots .$$

Отже,

$$\left(1 - x - x^2\right) g(x) = F_1 x + \left(F_2 - F_1\right) x^2 + \left(F_3 - F_2 - F_1\right) x^3 +$$

$$+ \ldots + \left(F_n - F_{n-1} - F_{n-2}\right) x^n + \ldots = x .$$

Звідси $g(x) = \dfrac{x}{1 - x - x^2}$.

Враховуючи єдиність твірної функції, застосування цих двох підходів до представлення такої функції $g(x)$ дає нам ще один спосіб доведення формули Біне для чисел Фібоначчі.

Пропонуємо читачам, міркуючи аналогічно, самостійно двома способами обґрунтувати, що твірною функцією для послідовності чисел Люка є функція $g(x) = \dfrac{2 - x}{1 - x - x^2}$, тобто

$$\frac{2 - x}{1 - x - x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n x^n . \tag{15.8}$$

Доведіть також самостійно наступні рівності:

$$\frac{1}{1 - x - x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} F_{n+1} x^n , \tag{15.9}$$

$$\frac{1 + 2x}{1 - x - x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} L_{n+1} x^n . \tag{15.10}$$

Узагальненням (15.9) є рівність

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_{n+k} x^n = \frac{F_k + F_{k-1} x}{1 - x - x^2} . \tag{15.11}$$

Справді, враховуючи, що $\alpha\beta = -1$, та формулу Біне, маємо:

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_{n+k} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{n+k} - \beta^{n+k}}{\sqrt{5}} x^n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\alpha^k \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n x^n - \beta^k \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n x^n \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{\alpha^k}{1-\alpha x} - \frac{\beta^k}{1-\beta x} \right) = \frac{\left(\alpha^k - \beta^k\right) + \left(\alpha^{k-1} - \beta^{k-1}\right) x}{\sqrt{5}\left(1-\alpha x\right)\left(1-\beta x\right)} = \frac{F_k + F_{k-1} x}{1 - x - x^2}.$$

Аналогічна рівність для чисел Люка має вигляд:

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_{n+k} x^n = \frac{L_k + L_{k-1} x}{1 - x - x^2}. \qquad (15.12)$$

Пропонуємо читачам обґрунтувати її самостійно.

Наводимо ще декілька прикладів твірних функцій:

$$\frac{x - x^2}{1 - 2x - 2x^2 + x^3} = \sum_{n=0}^{\infty} F_n^2 x^n, \qquad (15.13)$$

$$\frac{1 - x}{1 - 2x - 2x^2 + x^3} = \sum_{n=0}^{\infty} F_{n+1}^2 x^n, \qquad (15.14)$$

$$\frac{x}{1 - 2x - 2x^2 + x^3} = \sum_{n=0}^{\infty} F_n F_{n+1} x^n, \qquad (15.15)$$

$$\frac{4 - 7x - x^2}{1 - 2x - 2x^2 + x^3} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^2 x^n, \qquad (15.16)$$

$$\frac{1 + 7x - 4x^2}{1 - 2x - 2x^2 + x^3} = \sum_{n=0}^{\infty} L_{n+1}^2 x^n. \qquad (15.17)$$

$$\frac{2 - x + 2x^2}{1 - 2x - 2x^2 + x^3} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n L_{n+1} x^n. \qquad (15.18)$$

Обґрунтуємо, наприклад, останню рівність:

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n L_{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\alpha^n + \beta^n\right)\left(\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}\right) x^n =$$

$$= \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{2n} x^n + \beta \sum_{n=0}^{\infty} \beta^{2n} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n =$$

$$= \frac{\alpha}{1 - \alpha^2 x} + \frac{\beta}{1 - \beta^2 x} + \frac{1}{1 + x} = \frac{\alpha + \beta - \alpha\beta\left(\beta + \alpha\right) x}{\left(1 - \alpha^2 x\right)\left(1 - \beta^2 x\right)} + \frac{1}{1 + x} =$$

$$=\frac{1+x}{1-3x+x^2}+\frac{1}{1+x}=\frac{2-x+2x^2}{1-2x-2x^2+x^3}.$$

Пропонуємо читачам, міркуючи аналогічно, самостійно довести рівності (15.13) – (15.17).

16. Деякі застосування властивостей твірних функцій

Підставляючи в рівностях (15.7) – (15.10) $x=\frac{1}{2}$ та $x=-\frac{1}{2}$, отримаємо, наприклад, суми таких рядів:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_n}{2^n}=2,\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n F_n}{2^n}=-\frac{2}{5},\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_n}{2^n}=6,\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n L_n}{2^n}=2.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_{n+1}}{2^n}=4,\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n F_{n+1}}{2^n}=\frac{4}{5},\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_{n+1}}{2^n}=8,\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n L_{n+1}}{2^n}=0.$$

Застерігаємо читачів від неправомірних підстановок значень $x=\pm\frac{1}{2}$ у рівності (15.13) – (15.18), оскільки отримані при цьому ряди в їх правих частинах виявляться розбіжними.

Формальна ж підстановка, наприклад, $x=\frac{1}{2}$ у формулу (15.13) приведе до неправильної рівності $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_n^2}{2^n}=-\frac{2}{3}$, бо всі доданки в її лівій частині є невід’ємними.

Застосуємо властивості твірних функцій до доведення рівностей, пов’язаних з числами Фібоначчі та Люка.

Наприклад, розглянемо рівності:

$$\frac{1}{1-x-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}F_{n+1}x^n,\ \frac{1-x}{1-x-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}F_{n-1}x^n,\ \frac{2-x}{1-x-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}L_n x^n.$$

Оскільки

$$\frac{2-x}{1-x-x^2}=\frac{1}{1-x-x^2}+\frac{1-x}{1-x-x^2},$$

то

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} F_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} F_{n-1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(F_{n+1} + F_{n-1}\right) x^n .$$

Звідси випливає, що $L_n = F_{n+1} + F_{n-1}$.

Доведемо цим способом також рівність

$$F_m L_n + F_{m-1} L_{n-1} = L_{m+n-1}. \tag{16.1}$$

Маємо:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left(F_m L_n + F_{m-1} L_{n-1}\right) x^m = L_n \sum_{m=0}^{\infty} F_m x^m + L_{n-1} \sum_{m=0}^{\infty} F_{m-1} x^m =$$

$$= L_n \cdot \frac{x}{1-x-x^2} + L_{n-1} \cdot \frac{1-x}{1-x-x^2} = \frac{L_{n-1} + \left(L_n - L_{n-1}\right) x}{1-x-x^2} =$$

$$= \frac{L_{n-1} + L_{n-2} x}{1-x-x^2} = \sum_{m=0}^{\infty} L_{m+n-1} x^m ,$$

звідки й випливає (16.1).

Пропонуємо читачам цим методом самостійно обґрунтувати рівності:

$$F_m F_n + F_{m-1} F_{n-1} = F_{m+n-1}, \tag{16.2}$$

$$L_m L_n + L_{m-1} L_{n-1} = 5 F_{m+n-1}. \tag{16.3}$$

Розглянемо також застосування властивостей твірних функцій для послідовностей чисел $\frac{F_n}{n!}$ та $\frac{L_n}{n!}$:

$$\frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\sqrt{5}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n}{n!} x^n , \tag{16.4}$$

$$e^{\alpha x} + e^{\beta x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n}{n!} x^n . \tag{16.5}$$

Загальніше ці рівності можна записати так:

$$\frac{e^{\alpha^k x} - e^{\beta^k x}}{\sqrt{5}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_{kn}}{n!} x^n , \tag{16.6}$$

$$e^{\alpha^k x}+e^{\beta^k x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_{kn}}{n!}x^n. \qquad (16.7)$$

Надалі врахуємо, що для функцій $A(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^n$ та $B(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{n!}x^n$ справджуються рівності:

$$A(x)B(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}C_n^k a_k b_{n-k}\right)\frac{x^n}{n!} \qquad (16.8)$$

та

$$A(x)B(-x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{n!}(-x)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^k a_k b_{n-k}\right)\frac{x^n}{n!}. \qquad (16.9)$$

Наприклад, покладаючи $a_n=F_n$ та $b_n=1$, за формулою (16.8) отримаємо:

$$\frac{\left(e^{\alpha x}-e^{\beta x}\right)e^x}{\sqrt{5}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}C_n^k F_k\right)\frac{x^n}{n!}.$$

Оскільки також

$$\frac{\left(e^{\alpha x}-e^{\beta x}\right)e^x}{\sqrt{5}}=\frac{e^{(\alpha+1)x}-e^{(\beta+1)x}}{\sqrt{5}}=\frac{e^{\alpha^2 x}-e^{\beta^2 x}}{\sqrt{5}}=\sum_{n=0}^{\infty}F_{2n}\frac{x^n}{n!},$$

то, порівнюючи праві частини таких рівностей, звідси маємо:

$$\sum_{k=0}^{n}C_n^k F_k=F_{2n}. \qquad (16.10)$$

Аналогічно доводимо, що

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^k F_k=(-1)^{n+1}F_n. \qquad (16.11)$$

Для цього вибираємо $a_n=F_n$, $b_n=(-1)^n$ та використовуємо формулу (16.9). Тоді

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^k F_k\right)\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_n}{n!}x^n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n=$$

$$\frac{\left(e^{\alpha x}-e^{\beta x}\right)e^{-x}}{\sqrt{5}}=\frac{e^{(\alpha-1)x}-e^{(\beta-1)x}}{\sqrt{5}}=\frac{e^{-\beta x}-e^{-\alpha x}}{\sqrt{5}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}F_n\frac{x^n}{n!},$$

звідки й випливає рівність (16.11).

Дві наступні рівності пропонуємо читачам довести самостійно.

$$\sum_{k=0}^{n}C_n^kL_k=L_{2n}, \tag{16.12}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^kL_k=(-1)^{n+1}L_n. \tag{16.13}$$

Відзначимо також, що для $a_n=F_{2n}$, $b_n=(-1)^n$, отримаємо

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^kF_{2k}=F_n. \tag{16.14}$$

Справді,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^kF_{2k}\right)\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_{2n}}{n!}x^n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n=$$

$$\frac{\left(e^{\alpha^2x}-e^{\beta^2x}\right)e^{-x}}{\sqrt{5}}=\frac{e^{\left(\alpha^2-1\right)x}-e^{\left(\beta^2-1\right)x}}{\sqrt{5}}=\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\sqrt{5}}=\sum_{n=0}^{\infty}F_n\frac{x^n}{n!},$$

звідки й випливає рівність (16.11).

Аналогічну рівність для чисел Люка

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^kL_{2k}=L_n \tag{16.15}$$

пропонуємо читачам обґрунтувати самостійно.

Для доведення свого роду гібридних формул

$$\sum_{k=0}^{n}C_n^kF_kL_{n-k}=2^nF_n, \tag{16.16}$$

$$\sum_{k=0}^{n}C_n^kF_kF_{n-k}=\frac{2^nL_n-2}{5}, \tag{16.17}$$

$$\sum_{k=0}^{n}C_n^kL_kL_{n-k}=2^nL_n+2 \tag{16.18}$$

використовують також твірні функції вигляду:

$$\frac{e^{m\alpha x}-e^{m\beta x}}{\sqrt{5}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{m^n F_n}{n!}x^n, \qquad (16.19)$$

$$e^{m\alpha x}+e^{m\beta x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{m^n L_n}{n!}x^n. \qquad (16.20)$$

Доведемо, наприклад, рівність (16.16). Маємо:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}C_n^k F_k L_{n-k}\right)\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_n}{n!}x^n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_n}{n!}x^n=$$

$$=\frac{\left(e^{\alpha x}-e^{\beta x}\right)\left(e^{\alpha x}+e^{\beta x}\right)}{\sqrt{5}}=\frac{e^{2\alpha x}-e^{2\beta x}}{\sqrt{5}}=\sum_{n=0}^{\infty}2^n F_n\frac{x^n}{n!}.$$

Тому формула (16.16) правильна.

Рівності (16.17) та (16.18) пропонуємо читачам довести цим способом самостійно.

17. Інші ряди та нескінченні добутки з числами Фібоначчі та Люка

Крім використання твірних функцій, суми багатьох рядів з числами Фібоначчі та Люка можуть бути знайдені й іншими способами. Одним з них є метод взаємного знищення доданків.

Приклад 1.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_{n+1}}{F_nF_{n+2}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_{n+2}-F_n}{F_nF_{n+2}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{F_n}-\frac{1}{F_{n+2}}\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{F_1}-\frac{1}{F_3}\right)+\left(\frac{1}{F_2}-\frac{1}{F_4}\right)+\left(\frac{1}{F_3}-\frac{1}{F_5}\right)+$$

$$+\ldots+\left(\frac{1}{F_n}-\frac{1}{F_{n+2}}\right)+\ldots=\frac{1}{F_1}+\frac{1}{F_2}=2.$$

Аналогічно отримуємо $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{L_{n+1}}{L_nL_{n+2}}=\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2}=\frac{4}{3}.$

Приклад 2.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{F_nF_{n+2}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_{n+1}}{F_nF_{n+1}F_{n+2}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_{n+2}-F_n}{F_nF_{n+1}F_{n+2}}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{F_nF_{n+1}}-\frac{1}{F_{n+1}F_{n+2}}\right)=\left(\frac{1}{F_1F_2}-\frac{1}{F_2F_3}\right)+\left(\frac{1}{F_2F_3}-\frac{1}{F_3F_4}\right)+$$

$$+\ldots+\left(\frac{1}{F_nF_{n+1}}-\frac{1}{F_{n+1}F_{n+2}}\right)+\ldots=\frac{1}{F_1F_2}=1.$$

Приклад 3.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{F_nF_{n+4}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_{n+2}^2}{F_nF_{n+2}^2F_{n+4}}=\frac{1}{3}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_{n+2}F_{n+4}+F_nF_{n+2}}{F_nF_{n+2}^2F_{n+4}}=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{F_nF_{n+2}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{F_{n+2}F_{n+4}}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{F_1F_2}+\frac{1}{F_3F_4}\right)=\frac{7}{18}.$$

Зауважимо, що при цьому ми скористалися тотожністю

$$3F_{n+2}^2=F_{n+2}F_{n+4}+F_nF_{n+2}$$

та результатом прикладу 2.

Аналогічні суми $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{L_nL_{n+2}}$ та $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{L_nL_{n+4}}$ пропонуємо читачам обчислити самостійно.

У наступному прикладі ми також скористаємося результатами попередніх прикладів, формулою Чезаро $F_{n-2}F_{n-1}F_{n+1}F_{n+2}=F_n^4-1$ та тотожністю $F_{n-1}F_{n+1}-F_{n-2}F_{n+2}=2\cdot(-1)^n$, яка випливає з формул Кассіні та Каталана.

Приклад 4.

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{F_n^4-1}=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{F_{n-2}F_{n-1}F_{n+1}F_{n+2}}=\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=3}^{\infty}\frac{F_{n-1}F_{n+1}-F_{n-2}F_{n+2}}{F_{n-2}F_{n-1}F_{n+1}F_{n+2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{1}{F_{n-2}F_{n+2}}-\frac{1}{F_{n-1}F_{n+1}}\right)=\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{F_nF_{n+4}}-\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{F_nF_{n+2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{F_1F_2}+\frac{1}{F_3F_4}\right)-\frac{1}{F_2F_3}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{7}{18}-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{18}.$$

Пропонуємо читачам самостійно, використовуючи тотожності $L_{n-2}L_{n-1}L_{n+1}L_{n+2}=L_n^4-25$ та $L_{n-2}L_{n+2}-L_{n-1}L_{n+1}=10\cdot(-1)^n$, обчислити суму ряду $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{L_n^4-25}$.

Наступним розглянемо метод з використанням формул Біне.

<u>Приклад 5</u>.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_n}{k^{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{5}k}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(\frac{\alpha}{k}\right)^n-\left(\frac{\beta}{k}\right)^n\right)=\frac{1}{\sqrt{5}k}\left(\frac{1}{1-\frac{\alpha}{k}}-\frac{1}{1-\frac{\beta}{k}}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{k-\alpha}-\frac{1}{k-\beta}\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\alpha-\beta}{(k-\alpha)(k-\beta)}=\frac{1}{k^2-k-1}.$$

Як часткові випадки звідси, зокрема, отримуємо рівності:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_n}{2^{n+1}}=1=\frac{1}{F_1},\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_n}{3^{n+1}}=\frac{1}{5}=\frac{1}{F_5},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_n}{8^{n+1}}=\frac{1}{55}=\frac{1}{F_{10}},\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_n}{10^{n+1}}=\frac{1}{89}=\frac{1}{F_{11}}.$$

Аналогічну формулу для суми ряду з числами Люка

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_n}{k^{n+1}}=\frac{2k-1}{k^2-k-1}$$

пропонуємо читачам обґрунтувати самостійно.

В окремих задачах для обчислення суми ряду доцільно перейти до границі в послідовності його частинних сум.

<u>Приклад 6</u>. Довести, що

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{F_{2^k}}=4-\alpha=3+\beta.$$

Спочатку для частинних сум цього ряду методом математичної індукції доведемо рівність

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{F_{2^k}} = 3 - \frac{F_{2^n-1}}{F_{2^n}}.$$

Для $n=1$ вона правильна:

$$S_1 = \sum_{k=0}^{1} \frac{1}{F_{2^k}} = \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} = 2 = 3 - \frac{F_1}{F_2}.$$

А з припущення її правильності для деякого $n \ge 1$ отримуємо:

$$S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{F_{2^k}} = 3 - \frac{F_{2^n-1}}{F_{2^n}} + \frac{1}{F_{2^{n+1}}} = 3 - \frac{L_{2^n} F_{2^n-1}}{L_{2^n} F_{2^n}} + \frac{1}{F_{2^{n+1}}} =$$

$$= 3 - \frac{L_{2^n} F_{2^n-1} - 1}{F_{2^{n+1}}} = 3 - \frac{F_{2^{n+1}-1}}{F_{2^{n+1}}},$$

що й доводить правильність такого припущення для всіх натуральних n.

При цьому ми скористалися тотожностями вигляду $F_{2m} = L_m F_m$ та $F_{2m-1} = L_m F_{m-1} - (-1)^m$. Обґрунтувати останню з них пропонуємо читачам самостійно.

Таким чином,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{F_{2^k}} = \lim_{n\to\infty} \left(3 - \frac{F_{2^n-1}}{F_{2^n}} \right) = 3 - \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^{2^n-1} - \beta^{2^n-1}}{\alpha^{2^n} - \beta^{2^n}} =$$

$$= 3 - \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^{2^n-1}}{\alpha^{2^n}} = 3 - \frac{1}{\alpha} = 3 + \beta = 4 - \alpha.$$

Переходом до границі, з врахуванням рівностей (7.7) та (7.8), знаходимо й такі нескінченні добутки:

$$\prod_{n=3}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{F_n^4} \right) = \lim_{m\to\infty} \prod_{n=3}^{m} \left(1 - \frac{1}{F_n^4} \right) = \frac{1}{12} \lim_{m\to\infty} \frac{F_{m+1}^2 F_{m+2}}{F_{m-1} F_m^2} =$$

$$=\frac{1}{12}\lim_{m\to\infty}\frac{\left(\alpha^{m+1}-\beta^{m+1}\right)^2\left(\alpha^{m+2}-\beta^{m+2}\right)}{\left(\alpha^{m-1}-\beta^{m-1}\right)\left(\alpha^{m}-\beta^{m}\right)^2}=\frac{\alpha^5}{12},$$

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{25}{L_n^4}\right)=\lim_{m\to\infty}\prod_{n=2}^{m}\left(1-\frac{25}{L_n^4}\right)=\frac{1}{18}\lim_{m\to\infty}\frac{L_{m+1}^2L_{m+2}}{L_{m-1}L_m^2}=$$

$$=\frac{1}{18}\lim_{m\to\infty}\frac{\left(\alpha^{m+1}+\beta^{m+1}\right)^2\left(\alpha^{m+2}+\beta^{m+2}\right)}{\left(\alpha^{m-1}+\beta^{m-1}\right)\left(\alpha^{m}+\beta^{m}\right)^2}=\frac{\alpha^5}{18}.$$

18. Числа Фібоначчі та Люка в тригонометрії

Розглядаючи формули Біне, ми також отримали представлення чисел Фібоначчі та Люка в тригонометричній формі. Цікавими є й інші зв'язки таких чисел з тригонометрією.

Нехай задана послідовність: $a_0=1,\ a_n=\cos\left(\operatorname{arctg} a_{n-1}\right),\ n\in\mathbb{N}$. Доведемо, що $a_n=\sqrt{\dfrac{F_{n+1}}{F_{n+2}}}$.

Помітивши, що

$$\frac{1}{a_n^2}=\frac{1}{\cos^2\left(\operatorname{arctg} a_{n-1}\right)}=1+\operatorname{tg}^2\left(\operatorname{arctg} a_{n-1}\right)=1+a_{n-1}^2,$$

отримуємо $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{1+a_{n-1}^2}}$.

Оскільки $a_0=1=\sqrt{\dfrac{F_1}{F_2}}$, то з припущення рівності $a_n=\sqrt{\dfrac{F_{n+1}}{F_{n+2}}}$ для деякого $n\ge 1$ маємо:

$$a_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{1+a_n^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{F_{n+1}}{F_{n+2}}}}=\sqrt{\frac{F_{n+2}}{F_{n+1}+F_{n+2}}}=\sqrt{\frac{F_{n+2}}{F_{n+3}}}\ ,$$

що й достатньо було довести.

Тепер уже нескладно знайти, наприклад, границю цієї послідовності:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}} = \sqrt{\frac{1}{\alpha}} = \sqrt{-\beta} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}.$$

Зауважимо, що знайти її ми могли також з рівняння $a = \dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}$.

Далі розглянемо формули, застосування яких дасть змогу обчислювати суми деяких рядів, пов'язаних з числами Фібоначчі та Люка, в яких фігурують обернені тригонометричні функції.

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{F_{n-1}}{F_n} - \operatorname{arctg}\frac{F_n}{F_{n+1}}\right) = \frac{(-1)^n}{F_{2n}}. \qquad (18.1)$$

Справді,

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{F_{n-1}}{F_n} - \operatorname{arctg}\frac{F_n}{F_{n+1}}\right) = \frac{\dfrac{F_{n-1}}{F_n} - \dfrac{F_n}{F_{n+1}}}{1 + \dfrac{F_{n-1}}{F_n}\cdot\dfrac{F_n}{F_{n+1}}} =$$

$$= \frac{F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2}{F_nF_{n+1} + F_{n-1}F_n} = \frac{(-1)^n}{F_{2n}}.$$

Пропонуємо читачам самостійно обґрунтувати аналогічну рівність

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{L_{n-1}}{L_n} - \operatorname{arctg}\frac{L_n}{L_{n+1}}\right) = \frac{5(-1)^{n-1}}{L_{2n-1} + L_{2n+1}}. \qquad (18.2)$$

Використовуючи формулу (18.1), отримаємо:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} arctg\left(\frac{1}{F_{2n}}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{F_{n-1}}{F_n} - \operatorname{arctg}\frac{F_n}{F_{n+1}}\right) =$$

$$= -\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}\left(\operatorname{arctg}\frac{F_{n-1}}{F_n} - \operatorname{arctg}\frac{F_n}{F_{n+1}}\right) = \lim_{m\to\infty}\operatorname{arctg}\frac{F_m}{F_{m+1}} = \operatorname{arctg}\frac{1}{\alpha}.$$

Доведемо також рівність

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{F_{2n+1}} = \operatorname{arctg}\frac{1}{F_{2n}} - \operatorname{arctg}\frac{1}{F_{2n+2}}. \qquad (18.3)$$

Справді, з врахуванням формули Кассіні,

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{F_{2n}}-\operatorname{arctg}\frac{1}{F_{2n+2}}\right)=\frac{F_{2n+2}-F_{2n}}{F_{2n}F_{2n+2}+1}=\frac{F_{2n+1}}{F_{2n+1}^{2}}=\frac{1}{F_{2n+1}}.$$

Відзначимо, що $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{F_{2n+1}}$ можна було б виразити (доведіть це самостійно) і через числа Люка:

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{F_{2n+1}}=\operatorname{arctg}\frac{1}{L_{2n}}+\operatorname{arctg}\frac{1}{L_{2n+2}}. \qquad (18.4)$$

Використовуючи формулу (18.3), знайдемо:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{1}{F_{2n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{F_{2n}}-\operatorname{arctg}\frac{1}{F_{2n+2}}\right)=$$

$$=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{F_{2n}}-\operatorname{arctg}\frac{1}{F_{2n+2}}\right)=$$

$$=\lim_{m\to\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{F_{2}}-\operatorname{arctg}\frac{1}{F_{2m+2}}\right)=\operatorname{arctg}\frac{1}{F_{2}}=\frac{\pi}{4}.$$

З врахуванням цього результату та формули (18.4) отримуємо:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{1}{L_{2n}}=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{1}{L_{2n}}+\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{1}{L_{2n+2}}+\operatorname{arctg}\frac{1}{L_{2}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{1}{F_{2n+1}}+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}2.$$

Правильним є й таке співвідношення:

$$\operatorname{arcctg}F_{2n+1}=\operatorname{arcctg}F_{2n}-\operatorname{arcctg}F_{2n+2}. \qquad (18.5)$$

Пропонуємо читачам самостійно обґрунтувати цю рівність і з її допомогою переконатися, що

$$\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arcctg}F_{2n+1}=\frac{\pi}{4}.$$

19. Числа Фібоначчі та Люка і властивості подільності

Розглянемо деякі властивості чисел Фібоначчі та Люка, пов'язані з подільністю.

Розглядаючи для них, починаючи з $n=1$, послідовності остач при діленні на 2: (1, 1, 0), 1, 1, 0, …, зробимо висновок, що числа F_n та L_n є парними тоді і тільки тоді, коли n ділиться на 3. Тут і далі в дужках виділено фрагмент, який періодично повторюється.

Аналогічно аналізуємо остачі при діленні на 3.

Для F_n: (1, 1, 2, 0, 2, 2, 1, 0), 1, 1, 2, 0, … .

Для L_n: (1, 0, 1, 1, 2, 0, 2, 2), 1, 0, 1, 1, … .

Звідси випливає, що числа F_n діляться на 3 тоді і тільки тоді, коли n ділиться на 4, а L_n є кратними 3 тоді і тільки тоді, коли n при діленні на 4 дає остачу 2.

Для остач при діленні на 4 відповідно отримуємо.

F_n: (1, 1, 2, 3, 1, 0), 1, 1, 2, 3, 1, 0, … .

L_n: (1, 3, 0, 3, 3, 2), 1, 3, 0, 3, 3, 2, … .

Отже, числа F_n діляться на 4 тоді і тільки тоді, коли n ділиться на 6, а L_n є кратними 4 тоді і тільки тоді, коли n при діленні на 6 дає остачу 3.

Знайдемо також остачі при діленні цих чисел на 5.

F_n: (1, 1, 2, 3, 0, 3, 3, 1, 4, 0, 4, 4, 3, 2, 0, 2, 2, 4, 1, 0), 1, 1,… .

L_n: (1, 3, 4, 2), 1, 3, 4, 2, 1, 3, 4, 2, … .

Таким чином, числа F_n діляться на 5 тоді і тільки тоді, коли n ділиться на 5, а числа L_n при жодному значенні n на 5 не діляться.

Оскільки $6=2\times3$, то з попередніх висновків отримуємо, що числа $F_n \vdots 6$ тоді і тільки тоді, коли $n \vdots 12$, а числа L_n є кратними 6 тоді і тільки тоді, коли n при діленні на 12 дає остачу 6.

Пропонуємо читачам, міркуючи аналогічно, встановити умови подільності чисел Фібоначчі та Люка на 7, 8, 9 та 10.

Поглянемо тепер на властивості подільності таких чисел з іншої точки зору.

Враховуючи рівність $F_{2n} = F_n L_n$, отримуємо, що F_{2n} ділиться на F_n для кожного натурального n.

Доведемо методом математичної індукції, що $F_{kn}, k \in \mathbb{N},$ також ділиться на F_n для кожного натурального n.

Для $k = 1$ це очевидно. А припустивши справедливість такого твердження для $k = m$, з рівності

$$F_{(m+1)n} = F_{mn+n} = F_{mn-1}F_n + F_{mn}F_{n+1}$$

отримаємо, що й $F_{(m+1)n}$ ділиться на F_n.

Таким чином з подільності $m \vdots n$ випливає подільність $F_m \vdots F_n$.

Справедливе також обернене твердження, отримане в 1964 році Карліцом: якщо $F_m \vdots F_n$, то $m \vdots n$.

Звідси отримуємо такі наслідки:

1). $F_m \vdots F_n$ тоді і тільки тоді, коли $m \vdots n$.

2). $\left(F_m, F_n\right) = F_{(m,n)}$.

3). Якщо $(m,n) = 1$, то $F_{mn} \vdots F_m F_n$.

Тут (m,n) позначає найбільший спільний дільник натуральних чисел m та n.

Зокрема, з наслідку 2 випливає, що будь-які два сусідні числа Фібоначчі є взаємно простими.

Справедливі й загальніші твердження:

4). $\left(F_{kn-1}, F_n\right) = 1,\ k \in \mathbb{N}$.

5). Якщо $(m,n) = 1$, то й $\left(F_m, F_n\right) = 1$.

Наведемо й відомі факти, пов'язані з подільністю чисел Люка:

а). $F_m \vdots L_n,\ n \geq 2,$ тоді і тільки тоді, коли $m \vdots 2n$;

б). $L_m \vdots L_n,\ n \geq 2,$ тоді і тільки тоді, коли $m = (2k-1)n,\ k \in \mathbb{N}$.

Цікавим є також питання про подільність сум довільних m послідовних чисел Фібоначчі на число $m \geq 2$.

Відомим є те, що $m = 24$ задовольняє таку вимогу. Доведемо, що насправді таких натуральних чисел m є нескінченна кількість.

Позначимо $S_n = F_1 + F_2 + \ldots + F_n$. Як ми вже довели вище $S_n = F_{n+2} - 1,\ n \in \mathbb{N}$. Якщо m задовольняє умову задачі, то $S_m = (F_{m+2} - 1) \vdots m$ та $S_{m+1} - S_1 = (S_m + F_{m+1} - 1) \vdots m$. Звідси випливає, що $(F_{m+1} - 1) \vdots m$ та $F_m = ((F_{m+2} - 1) - (F_{m+1} - 1)) \vdots m$. Навпаки, якщо $F_m \vdots m$ та $(F_{m+1} - 1) \vdots m$, то $S_m = (F_m + (F_{m+1} - 1)) \vdots m$.

Далі, за виконання цих двох умов, скориставшись формулою

$$F_{n+k} = F_k F_{n+1} + F_{k-1} F_n, \tag{*}$$

для всіх $n \in \mathbb{N}$ отримаємо

$$S_{n+m} - S_n = (F_{n+m+2} - 1) - (F_{n+2} - 1) = F_{n+m+2} - F_{n+2} =$$

$$= (F_{m+2} F_{n+1} + F_{m+1} F_n) - (F_2 F_{n+1} + F_1 F_n) =$$

$$= ((F_{m+2} - 1) F_{n+1} + (F_{m+1} - 1) F_n) \vdots m.$$

Таким чином, за таких умов суми довільних m послідовних чисел Фібоначчі ділитимуться на m.

Безпосереднім перебором переконуємося, що найменшим натуральним $m \geq 2$, яке задовольняє ці дві умови, а з ними й умову задачі, є $m = 24$. При цьому $S_{24} = F_{26} - 1 = 121392 = 24 \cdot 5058$.

Зауважимо, що з (*) випливають рівності $F_{2m+1} = F_m^2 + F_{m+1}^2$ та $F_{2m} = F_m F_{m+1} + F_{m-1} F_m = (F_{m+1} + F_{m-1}) F_m$.

Отже, якщо число m задовольняє такі дві умови і $m \vdots 6$, то $F_{2m} \vdots 2m$. Справді, $F_n \vdots 2 \Leftrightarrow n \vdots 3$, то F_{m+1} та F_{m-1} – непарні, а $F_m \vdots m$.

Також $(F_{2m+1}-1)\vdots 2m$, бо при цьому $m=2s$, $F_m=a\cdot 2s$, $F_{m+1}=b\cdot 2s+1$, де $a,b,s\in\mathbb{Z}$, Отже,

$$F_{2m+1}-1=2\left(a^2+b^2+b\right)\cdot 2s=\left(a^2+b^2+b\right)\cdot 2m.$$

Тому разом з числом $m\vdots 6$ підійдуть також всі числа вигляду $m\cdot 2^k,\ k\in N$. Звідси, зокрема, отримуємо такий ланцюжок чисел: $m=12\cdot 2^k,\ k\in\mathbb{N}$.

Зауважимо, що він не єдиний. Використовуючи таблицю чисел Фібоначчі та встановлені вище умови отримаємо, наприклад, ще й: $m=36\cdot 2^k,\ k\in\mathbb{N},$ $m=60\cdot 2^k,\ k\in\mathbb{N},$ $m=168\cdot 2^k,\ k\in\mathbb{N},$ тощо.

Пропонуємо читачам також знайти інші ланцюжки таких чисел m.

Як узагальнення, відзначимо, що отримані вище висновки залишаться справедливими для всіх рекурентних послідовностей другого порядку вигляду: $a_1=a_2=1,\quad a_{n+2}=a_{n+1}+\mu a_n,\ n\in\mathbb{N}$, де $\mu-$довільне непарне число таке, що $(\mu,m)=1$. Зокрема, для всіх $\mu=6p-1,\ p\in\mathbb{Z}$, найменше можливе значення $m=6$, а для всіх $\mu=6p+1,\ p\in\mathbb{Z}$, найменшим буде $m=24$. Відповідні нескінченні ланцюжки чисел m для них матимуть вигляд $m=3\cdot 2^k,\ k\in\mathbb{N},$ та $m=12\cdot 2^k,\ k\in\mathbb{N}$.

У плані самостійного дослідження пропонуємо читачам вивчити питання про подільність сум довільних m послідовних чисел Люка на число $m\geq 2$.

Цікавими будуть й аналогічні задачі для сум квадратів довільних m послідовних чисел Фібоначчі та Люка.

20. Властивості чисел Фібоначчі та Люка, пов'язані з матрицями та їх визначниками

Розглянемо матрицю $Q=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, визначник якої $|Q|=-1$.

Для степенів цієї матриці доведемо рівність

$$Q^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix},\ n \in \mathbb{N}. \qquad (20.1)$$

Якщо $n = 1$, то маємо $Q^1 = Q = \begin{pmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{pmatrix}$.

Припустимо, що (20.1) справджується для $n = k$.

Тоді для $n = k + 1$ отримаємо

$$Q^{k+1} = Q^k \cdot Q = \begin{pmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} F_{k+1} + F_k & F_{k+1} \\ F_k + F_{k-1} & F_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{k+2} & F_{k+1} \\ F_{k+1} & F_k \end{pmatrix},$$

що й досить було довести.

Враховуючи рівність $|Q| = -1$, з (20.1) випливає ще один спосіб доведення формули Кассіні для чисел Фібоначчі:

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = \left|Q^n\right| = |Q|^n = (-1)^n.$$

Зауважимо також, що з рівностей

$$\begin{pmatrix} F_{m+n+1} & F_{m+n} \\ F_{m+n} & F_{m+n-1} \end{pmatrix} = Q^{m+n} = Q^m Q^n = \begin{pmatrix} F_{m+1} & F_m \\ F_m & F_{m-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} F_{m+1}F_{n+1} + F_m F_n & F_{m+1}F_n + F_m F_{n-1} \\ F_m F_{n+1} + F_{m-1}F_n & F_m F_n + F_{m-1}F_{n-1} \end{pmatrix},$$

прирівнюючи відповідні елементи першої та останньої з записаних тут матриць, отримаємо формули:

$$F_{m+1}F_{n+1} + F_m F_n = F_{m+n+1}, \quad F_m F_n + F_{m-1}F_{n-1} = F_{m+n-1},$$

$$F_{m+1}F_n + F_m F_{n-1} = F_{m+n} = F_m F_{n+1} + F_{m-1}F_n,$$

які ми вже доводили вище (див. 8.1 – 8.3) іншим способом.

Розглянемо також матрицю $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Пропонуємо читачам самостійно переконатися, що

$$M^n = \begin{pmatrix} F_{2n-1} & F_{2n} \\ F_{2n} & F_{2n+1} \end{pmatrix}, n \in \mathbb{N}. \qquad (20.2)$$

Для доведення матричним способом формули Кассіні для чисел Люка введемо також відповідну до Q матрицю $R = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, визначник якої $|R| = -5$. Оскільки

$$R \cdot Q^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} F_{n+1} + 2F_n & F_n + 2F_{n-1} \\ 2F_{n+1} - F_n & 2F_n - F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{pmatrix},$$

то

$$L_{n-1}L_{n+1} - L_n^2 = (-5)\left(F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2\right) = (-5)(-1)^n = 5 \cdot (-1)^{n+1}.$$

Далі покажемо, що й самі числа Фібоначчі можуть виражатися через визначники деяких матриць $n \times n$, а саме доведемо, що

$$F_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix}. \qquad (20.3)$$

Для $n = 1$ та $n = 2$ формула (20.3) правильна.

Припустимо, що нею правильно визначаються F_{n-1} та F_n, $n \geq 2$.

Тоді, розклавши такий визначник за першим стовпчиком, а один з отриманих при цьому мінорів за першим рядком, з врахуванням рівності $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ отримаємо справедливість формули (20.3) і для F_{n+1}.

Аналогічне представлення для чисел Люка має вигляд

$$L_{n+1} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix}. \qquad (20.4)$$

Її доводять аналогічно, додатково використовуючи рівність $L_{n+1} = 3F_n + F_{n-1}$.

Відзначимо, що такі представлення не єдині. Так само можуть бути доведені й рівності:

$$F_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & i & 0 & \dots & 0 & 0 \\ i & 1 & i & \dots & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 & \dots & i & 1 \end{vmatrix} \qquad (20.5)$$

та

$$L_{n+1} = \begin{vmatrix} 3 & i & 0 & \dots & 0 & 0 \\ i & 1 & i & \dots & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 & \dots & i & 1 \end{vmatrix}, \qquad (20.6)$$

де $i = \sqrt{-1}$.

21. Приклади обчислення визначників з числами Фібоначчі та Люка

На практиці також часто зустрічаються визначники, елементами яких є числа Фібоначчі чи Люка. Вище ми вже мали справу з застосуваннями таких визначників другого порядку:

$$\begin{vmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{vmatrix} = F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n,$$

$$\begin{vmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{vmatrix} = L_{n+1}L_{n-1} - L_n^2 = 5\cdot(-1)^{n+1}.$$

Наведемо також цікавий приклад обчислення визначника третього порядку. Щоб не виписувати його окремо для чисел Фібоначчі та чисел Люка, скористаємося для позначення його елементів буквою G.

Нехай m, n, p, q, r – натуральні числа. Тоді

$$\Delta = \begin{vmatrix} G_p & G_{p+m} & G_{p+m+n} \\ G_q & G_{q+m} & G_{q+m+n} \\ G_r & G_{r+m} & G_{r+m+n} \end{vmatrix} = 0. \tag{21.1}$$

Справді, враховуючи рівності $G_{k+m+n} = G_{k+m}F_{n+1} + G_{k+m-1}F_n$, ми можемо записати цей визначник як

$$\Delta = \begin{vmatrix} G_p & G_{p+m} & G_{p+m} \\ G_q & G_{q+m} & G_{q+m} \\ G_r & G_{r+m} & G_{r+m} \end{vmatrix} \cdot F_{n+1} + \begin{vmatrix} G_p & G_{p+m} & G_{p+m-1} \\ G_q & G_{q+m} & G_{q+m-1} \\ G_r & G_{r+m} & G_{r+m-1} \end{vmatrix} \cdot F_n.$$

Перший із визначників у правій частині останньої рівності дорівнює нулю, бо його другий та третій стовпчики однакові.

А другий з них, віднявши від другого стовпчика третій зведемо до вигляду:

$$\begin{vmatrix} G_p & G_{p+m-2} & G_{p+m-1} \\ G_q & G_{q+m-2} & G_{q+m-1} \\ G_r & G_{r+m-2} & G_{r+m-1} \end{vmatrix}.$$

Далі, віднімаючи тут від третього стовпчика другий, отримаємо визначник

$$\begin{vmatrix} G_p & G_{p+m-2} & G_{p+m-3} \\ G_q & G_{q+m-2} & G_{q+m-3} \\ G_r & G_{r+m-2} & G_{r+m-3} \end{vmatrix}.$$

Продовживши описану процедуру, ми на деякому кроці отримаємо визначник, один зі стовпчиків якого дорівнює першому стовпчику.

Таким чином, рівність $\Delta = 0$ доведена.

Як часткові випадки формули (21.1) отримуємо рівності:

$$\begin{vmatrix} F_n & F_{n+1} & F_{n+2} \\ F_{n+1} & F_{n+2} & F_{n+3} \\ F_{n+2} & F_{n+3} & F_{n+4} \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} L_n & L_{n+1} & L_{n+2} \\ L_{n+1} & L_{n+2} & L_{n+3} \\ L_{n+2} & L_{n+3} & L_{n+4} \end{vmatrix} = 0.$$

Наводимо без доведення також аналогічні рівності для квадратів елементів двох попередніх визначників:

$$\begin{vmatrix} F_n^2 & F_{n+1}^2 & F_{n+2}^2 \\ F_{n+1}^2 & F_{n+2}^2 & F_{n+3}^2 \\ F_{n+2}^2 & F_{n+3}^2 & F_{n+4}^2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \left(-1\right)^{n+1}, \qquad \begin{vmatrix} L_n^2 & L_{n+1}^2 & L_{n+2}^2 \\ L_{n+1}^2 & L_{n+2}^2 & L_{n+3}^2 \\ L_{n+2}^2 & L_{n+3}^2 & L_{n+4}^2 \end{vmatrix} = 250 \cdot \left(-1\right)^n.$$

Розглянемо також приклад обчислення визначників матриць розмірами $n \times n$ вигляду

$$H_n = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \ldots & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \ldots & a_1 & a_0 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_2 & a_1 \end{pmatrix}, \; a_0 \neq 0,$$

які частковими випадками нижніх матриць Гессенберга.

Покладаючи тут $a_0 = 1,\; a_k = F_k, 1 \le k \le n,$ отримаємо матрицю M_n, визначник якої $\left|M_n\right| = \dfrac{1-\left(-1\right)^n}{2}$.

Для $n = 1$ та $n = 2$ маємо $\left|M_1\right| = F_1 = 1, \left|M_2\right| = \begin{vmatrix} F_1 & 1 \\ F_2 & F_1 \end{vmatrix} = 0$.

А для $n \ge 3$, віднімаючи в матриці

$$M_n=\begin{pmatrix} F_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ F_2 & F_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ F_3 & F_2 & F_1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ F_{n-1} & F_{n-2} & F_{n-3} & \dots & F_1 & 1 \\ F_n & F_{n-1} & F_{n-2} & \dots & F_2 & F_1 \end{pmatrix}$$

від першого стовпчика другий, а від другого стовпчика – третій, отримаємо, що

$$|M_n|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ F_1 & 0 & F_1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ F_{n-3} & F_{n-4} & F_{n-3} & \dots & F_1 & 1 \\ F_{n-2} & F_{n-3} & F_{n-2} & \dots & F_2 & F_1 \end{vmatrix}=|M_{n-2}|.$$

Останню рівність дістаємо, розкладаючи записаний тут визначник, а потім один з його мінорів за першими рядками.

22. Числа Фібоначчі та площі многокутників

Розглянемо тепер опуклі многокутники, координатами вершин яких є числа Фібоначчі.

Насамперед доведемо, що для кожного $m \geq 0$ чотирикутник $A_1A_2A_3A_4$ з вершинами $A_1(F_{m+1};F_{m+2})$, $A_2(F_{m+3};F_{m+4})$, $A_3(F_{m+5};F_{m+6})$, $A_4(F_{m+7};F_{m+8})$ є трапецією, в якій $A_1A_4 \parallel A_2A_3$.

Для цього доводимо рівність $\dfrac{F_{m+7}-F_{m+1}}{F_{m+8}-F_{m+2}}=\dfrac{F_{m+5}-F_{m+3}}{F_{m+6}-F_{m+4}}$.

Для її правої частини безпосередньо за означенням чисел Фібоначчі отримуємо $\dfrac{F_{m+5}-F_{m+3}}{F_{m+6}-F_{m+4}}=\dfrac{F_{m+4}}{F_{m+5}}$.

Крім того, маємо

$$F_{m+7}-F_{m+1}=(F_{m+6}+F_{m+5})-(F_{m+3}-F_{m+2})=$$

$$=\left(\left(F_{m+4}+F_{m+5}\right)+F_{m+5}\right)-\left(F_{m+3}-\left(F_{m+4}-F_{m+3}\right)\right)=$$

$$=2F_{m+5}+2F_{m+4}-2F_{m+3}=4F_{m+4}.$$

Аналогічно доводимо, що $F_{m+8}-F_{m+2}=4F_{m+5}$. Тому також

$$\frac{F_{m+7}-F_{m+1}}{F_{m+8}-F_{m+2}}=\frac{F_{m+4}}{F_{m+5}}.$$

Нескладно показати, що дві інші сторони не є паралельними. Пропонуємо читачам зробити це самостійно.

З доведеного випливає, що рівними є площі трикутників $A_1A_2A_3$ та $A_2A_3A_4$ як таких, що мають спільну основу A_2A_3 та рівні висоти, проведені до неї.

Звідси отримуємо, що площі всіх трикутників $A_1A_2A_3$ не залежать від вибору $m\ge 0$ і дорівнюють площі трикутника з вершинами $A_1\left(F_1;F_2\right)$, $A_2\left(F_3;F_4\right)$, $A_3\left(F_5;F_6\right)$, тобто з вершинами $A_1\left(1;1\right)$, $A_2\left(2;3\right)$, $A_3\left(5;8\right)$.

Якщо точки F_1, F_3, F_5 є проекціями точок A_1, A_2, A_3 відповідно на вісь абсцис, то площу цього трикутника виразимо через площі відповідних прямокутних трапецій, які знаходяться між його сторонами і віссю абсцис:

$$S_{A_1A_2A_3}=S_{F_1A_1A_2F_3}+S_{F_3A_2A_3F_5}-S_{F_1A_1A_3F_5}=\frac{1}{2}\left(1+3\right)\cdot 1+\frac{1}{2}\left(3+8\right)\cdot 3-\frac{1}{2}\left(1+8\right)\cdot 4=\frac{1}{2}.$$

Узагальнюючи, відзначимо, що від вибору числа $m\ge 0$ не залежить також площа многокутника $A_1A_2...A_n$, $n\ge 3$, з вершинами $A_1\left(F_{m+1};F_{m+2}\right)$, $A_2\left(F_{m+3};F_{m+4}\right)$, …, $A_n\left(F_{m+2n-1};F_{m+2n}\right)$.

Тому, покладаючи $m=0$, обчислимо площу многокутника з вершинами $A_1\left(F_1;F_2\right)$, $A_2\left(F_3;F_4\right)$, …, $A_n\left(F_{2n-1};F_{2n}\right)$.

Такий многокутник є опуклим і його можна розбити на $n-2$ трикутників з вершинами $\left(F_1;F_2\right)$, $\left(F_{2k-1};F_{2k}\right)$ та $\left(F_{2k+1};F_{2k+2}\right)$, де

$2 \le k \le n-1$. При цьому площа кожного трикутника з такими трьома вершинами може бути виражена через площі трьох прямокутних трапецій, які знаходяться під трьома його сторонами і обмежені знизу віссю абсцис.

Оскільки $(F_1;F_2)=(1;1)$, то ми отримуємо:

$$2\Delta_k=(F_{2k-1}-1)(F_{2k}+1)+(F_{2k+1}-F_{2k-1})(F_{2k}+F_{2k+2})-(F_{2k+1}-1)(F_{2k+2}+1)=$$

$$=F_{2k}F_{2k+1}-F_{2k-1}F_{2k+2}+F_{2k-1}+(F_{2k+2}-F_{2k+1}-F_{2k})=$$

$$=\frac{L_{4k+1}-1}{5}-\frac{L_{4k+1}+4}{5}+F_{2k-1}=F_{2k-1}-1.$$

Отже,

$$2\sum_{k=2}^{n-1}\Delta_k=\sum_{k=2}^{n-1}F_{2k-1}-(n-2)=(F_{2n-2}-1)-(n-2)$$

і площа многокутника дорівнює $S_n=\dfrac{F_{2n-2}-n+1}{2}$.

При цьому нами були використані рівності $F_{2k}F_{2k+1}=\dfrac{L_{4k+1}-1}{5}$ та $F_{2k-1}F_{2k+2}=\dfrac{L_{4k+1}+4}{5}$, обґрунтувати які пропонуємо читачам самостійно.

Покладаючи тут $n=3$, як частковий випадок маємо знайдену вище площу трикутника $A_1A_2A_3$: $S_3=\dfrac{F_4-3+1}{2}=\dfrac{1}{2}$.

Справедливе й загальніше твердження: площа многокутника $A_1A_2...A_n$, $n\ge 3$, з вершинами $A_1(F_{m+k};F_{m+2k})$, $A_2(F_{m+3k};F_{m+4k})$, … , $A_n\left(F_{m+(2n-1)k};F_{m+2nk}\right)$, $k\in\mathbb{N}$, не залежить від вибору чисел $m\ge 0$ і дорівнює $\dfrac{F_k\left(F_{2k(n-1)}-(n-1)F_{2k}\right)}{2}$.

Пропонуємо читачам самостійно розв’язати аналогічну задачу з обчисленням площ, замінивши числа Фібоначчі числами Люка.

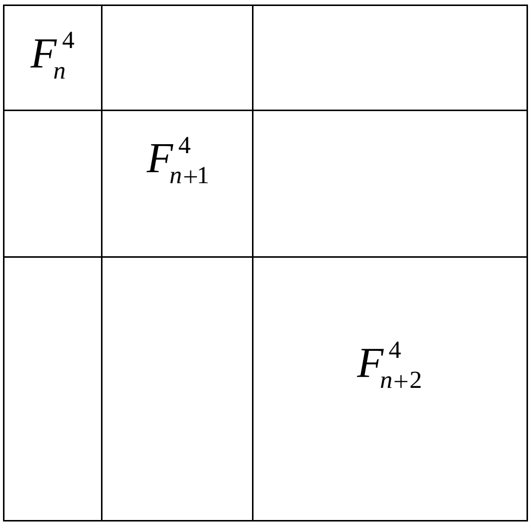
Наведемо також і пов'язану з числами Фібоначчі та площами геометричну інтерпретацію *тотожності Кандідо*:

$$\left(x^2+y^2+(x+y)^2\right)^2=2\left(x^4+y^4+(x+y)^4\right).$$

Покладаючи $x=F_n,\ y=F_{n+1}$, запишемо цю тотожність у вигляді:

$$\left(F_n^2+F_{n+1}^2+F_{n+2}^2\right)^2=2\left(F_n^4+F_{n+1}^4+F_{n+2}^4\right).$$

Звідси випливає, що площа всього зображеного нижче квадрата дорівнює подвоєній сумі площ, записаних у трьох менших виділених у ньому квадратиках:



Зрозуміло, що при цьому числа Фібоначчі можуть бути замінені на числа Люка.

23. Деякі узагальнення чисел Фібоначчі та Люка

Розглянемо тепер послідовність, яка визначається рівностями:

$$G_1=a,\ G_2=b,\ G_{n+2}=G_{n+1}+G_n,\ n\in\mathbb{N}. \qquad (23.1)$$

Покладаючи у ній $a=b=1$, отримаємо вже відомі нам числа Фібоначчі, а при $a=1,\ b=3$ матимемо числа Люка.

Доведемо методом математичної індукції, що

$$G_n=aF_{n-2}+bF_{n-1}. \qquad (23.2)$$

Справді,

$$G_1=a=a\cdot1+b\cdot0=aF_{-1}+bF_0,\quad G_2=b=a\cdot0+b\cdot1=aF_0+bF_1.$$

Припустимо, що рівність (23.2) правильна для $n=k$ та $n=k+1$.

Тоді для $n=k+2$ отримаємо

$$G_{k+2}=G_{k+1}+G_k=\left(aF_{k-1}+bF_k\right)+\left(aF_{k-2}+bF_{k-1}\right)=$$
$$=a\left(F_{k-1}+F_{k-2}\right)+b\left(F_k+F_{k-1}\right)=aF_k+bF_{k+1}.$$

Звідси випливає справедливість рівності (23.2) для всіх $n\in\mathbb{N}$.

Зауважимо, що використовуючи цю формулу, числа G_n можуть бути визначені і для $n\le 0$.

Позначимо $c=a+\left(a-b\right)\beta$ та $d=a+\left(a-b\right)\alpha$. Тоді, враховуючи формули Біне для чисел Фібоначчі, з (23.2) отримуємо:

$$\sqrt{5}G_n=a\left(\alpha^{n-2}-\beta^{n-2}\right)+b\left(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}\right)=$$
$$=\alpha^n\left(\frac{a}{\alpha^2}+\frac{b}{\alpha}\right)-\beta^n\left(\frac{a}{\beta^2}+\frac{b}{\beta}\right)=$$
$$=\alpha^n\left(a\beta^2-b\beta\right)-\beta^n\left(a\alpha^2-b\alpha\right)=$$
$$=\alpha^n\left(a\left(\beta+1\right)-b\beta\right)-\beta^n\left(a\left(\alpha+1\right)-b\alpha\right)=$$
$$=\alpha^n\left(a+\left(a-b\right)\beta\right)-\beta^n\left(a+\left(a-b\right)\alpha\right).$$

Отже, маємо таку *узагальнену формулу Біне*:

$$G_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(c\alpha^n-d\beta^n\right). \qquad (23.3)$$

Пропонуємо читачам переконатися, що формули Біне для чисел Фібоначчі та для чисел Люка є її частковими випадками.

Відзначимо, що

$$cd=\left(a+\left(a-b\right)\beta\right)\cdot\left(a+\left(a-b\right)\alpha\right)=$$
$$=a^2+a\left(a-b\right)\left(\alpha+\beta\right)+\left(a-b\right)^2\alpha\beta=$$
$$=a^2+a\left(a-b\right)-\left(a-b\right)^2=a^2+ab-b^2.$$

Число $\mu = a^2 + ab - b^2$ називають *характеристикою узагальненої послідовності Фібоначчі*.

Зокрема, $\mu = 1$ для послідовності чисел Фібоначчі та $\mu = -5$ для послідовності чисел Люка.

Використовуючи рівність (23.3) доведемо також *узагальнену формулу Кассіні*:

$$G_{n+1}G_{n-1} - G_n^2 = \mu\left(-1\right)^n. \qquad (23.4)$$

Справді,

$$5\left(G_{n+1}G_{n-1} - G_n^2\right) = \left(c\alpha^{n+1} - d\beta^{n+1}\right)\left(c\alpha^{n-1} - d\beta^{n-1}\right) - \left(c\alpha^n - d\beta^n\right)^2 =$$

$$= -cd\left(\alpha^{n+1}\beta^{n-1} + \alpha^{n-1}\beta^{n+1}\right) + 2cd\left(\alpha\beta\right)^n =$$

$$= -cd\left(\alpha\beta\right)^{n-1}\left(\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\right) = 5\mu\left(-1\right)^n.$$

Аналогічно може бути доведена (пропонуємо читачам зробити це самостійно) й *узагальнена формула Каталана*:

$$G_{n-k}G_{n+k} - G_n^2 = \left(-1\right)^{n+k+1} \cdot \mu F_k^2,\ 0 \le k \le n, \qquad (23.5)$$

Наведемо без доведення і деякі формули, пов’язані з додаванням елементів узагальненої послідовності Фібоначчі:

$$G_1 + G_2 + \ldots + G_n = G_{n+2} - b, \qquad (23.6)$$

$$G_1 + G_3 + \ldots + G_{2n-1} = G_{2n} + a - b, \qquad (23.7)$$

$$G_2 + G_4 + \ldots + G_{2n} = G_{2n+1} - a. \qquad (23.8)$$

Пропонуємо читачам самостійно обґрунтувати ці рівності, використовуючи формулу (23.2) та відповідні формули для сум чисел Фібоначчі.

Справедлива й наступна формула для сум квадратів узагальненої послідовності Фібоначчі:

$$G_1^2 + G_2^2 + \ldots + G_n^2 = G_nG_{n+1} + a\left(a - b\right), \qquad (23.9)$$

яку нескладно обґрунтувати, використовуючи рівності:

$$G_0 = b - a, \quad G_k G_{k+1} - G_{k-1} G_k = G_k \left(G_{k+1} - G_{k-1} \right) = G_k^2, \; k \in \mathbb{N}.$$

Зрозуміло, що існують також узагальнення й інших формул, які ми отримали вище. За бажанням читачі зможуть їх отримати з допомогою міркувань, аналогічних тим, які використовувалися при їхньому доведенні, та співвідношення (23.2).

Зокрема, враховуючи, що $G_{2k+1} = G_{k+1}^2 + G_k^2$, вкажемо такі трійки піфагорових чисел: $x = G_{k+1}^2 - G_k^2$, $y = 2G_k G_{k+1}$, $z = G_{2k+1}$.

Пропонуємо читачам самостійно переконатися, що $x^2 + y^2 = z^2$ для всіх $k \in \mathbb{N}$.

Знайдемо також твірну функцію для послідовності чисел G_n. Враховуючи (23.2) та формулу (15.11), яка справджується й для від'ємних k, отримаємо:

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n x^n = a \sum_{n=0}^{\infty} F_{n-2} x^n + b \sum_{n=0}^{\infty} F_{n-1} x^n = a \cdot \frac{F_{-2} + F_{-3} x}{1 - x - x^2} + b \cdot \frac{F_{-1} + F_{-2} x}{1 - x - x^2} =$$

$$= a \cdot \frac{-1 + 2x}{1 - x - x^2} + b \cdot \frac{1 - x}{1 - x - x^2} = \frac{(2a - b)x - a + b}{1 - x - x^2}.$$

24. Інші цікаві рекурентні послідовності другого порядку та їх узагальнення

Крім чисел Фібоначчі та чисел Люка, існують також інші цікаві рекурентні послідовності другого порядку. Виділимо деякі з них:

1). *Числа Пелля*. Їх послідовність визначається рівностями:

$$P_0 = 0, \; P_1 = 1 \; \text{ та } \; P_{n+2} = 2P_{n+1} + P_n, \; n \geq 0.$$

Для неї коренями характеристичного рівняння $\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$ є числа $\lambda_1 = 1 + \sqrt{2}$ та $\lambda_1 = 1 - \sqrt{2}$, а формула Біне має вигляд:

$$P_n = \frac{\left(1 + \sqrt{2}\right)^n - \left(1 - \sqrt{2}\right)^n}{2\sqrt{2}}.$$

Справджується й формула Кассіні: $P_{n+1}P_{n-1} - P_n^2 = (-1)^n$.

Знайдемо твірну функцію цієї послідовності:

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n x^n = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda_1 x)^n - \sum_{n=0}^{\infty}(\lambda_2 x)x^n\right) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{1-\lambda_1 x} - \frac{1}{1-\lambda_2 x}\right) = \frac{x}{1-2x-x^2}.$$

Також запишемо відповідні трійки піфагорових чисел:

$$x = P_{k+1}^2 - P_k^2,\ y = 2P_k P_{k+1},\ z = P_{2k+1}.$$

Пропонуємо читачам самостійно дослідити інші властивості чисел Пелля, аналогічні до властивостей чисел Фібоначчі.

2). *Числа Пелля-Люка*. Послідовність таких чисел визначається рівностями:

$$Q_0 = 2,\ Q_1 = 2 \text{ та } Q_{n+2} = 2Q_{n+1} + Q_n,\ n \geq 0.$$

Для неї отримуємо ті ж корені характеристичного рівняння, що й для чисел Пелля, а відповідна формула Біне виглядає так:

$$Q_n = \left(1+\sqrt{2}\right)^n + \left(1-\sqrt{2}\right)^n.$$

Пропонуємо читачам самостійно записати формулу Кассіні для цієї послідовності, а також знайти її твірну функцію.

3). *Числа Якобсталя*. Їх послідовність визначають рівностями:

$$J_0 = 0,\ J_1 = 1 \text{ та } J_{n+2} = J_{n+1} + 2J_n,\ n \geq 0.$$

Для неї коренями характеристичного рівняння $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ є числа $\lambda_1 = 2$ та $\lambda_1 = -1$, а за відповідною формулою Біне отримуємо:

$$J_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}.$$

4). *Числа Якобсталя-Люка*. Їх визначають аналогічно до чисел Якобсталя за винятком значення при $n = 0$:

$$j_0 = 2,\quad j_1 = 1 \text{ та } j_{n+2} = j_{n+1} + 2j_n,\ n \ge 0.$$

Формула Біне для таких чисел має вигляд: $j_n = 2^n + (-1)^n$.

Пропонуємо читачам самостійно дослідити й інші властивості чисел Якобсталя та Якобсталя-Люка, зокрема, записати формули Кассіні та твірні функції для послідовностей цих чисел.

Узагальнюючи наведені приклади, виділимо два такі класи однорідних рекурентних послідовностей другого порядку:

$$U_0 = 0,\ U_1 = 1 \text{ та } U_{n+2} = pU_{n+1} - qU_n,\ n \ge 0,$$

$$V_0 = 2,\ V_1 = p \text{ та } V_{n+2} = pV_{n+1} - qV_n,\ n \ge 0,$$

де p та q – довільні цілі числа.

Перший з цих класів є природним узагальненням чисел Фібоначчі, а другий – чисел Люка, які отримуємо, покладаючи $p = -q = 1$.

Для обох цих класів коренями характеристичного рівняння $\lambda^2 - p\lambda + q = 0$ є числа $\alpha = \dfrac{p+\sqrt{D}}{2}$ та $\alpha = \dfrac{p-\sqrt{D}}{2}$, де $D = p^2 - 4q$, а формули Біне мають вигляд $U_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{D}}$ та $V_n = \alpha^n + \beta^n$ відповідно.

Також справджуються рівності:

$$V_n = U_{n+1} - qU_{n-1} = 2U_{n+1} - pU_n,$$

$$U_{n+k} = U_n V_{k+1} - qU_k V_{n-1} = \frac{U_n V_k + U_k V_n}{2},$$

$$U_{2n} = U_n V_n = \frac{U_{n+1}^2 - q^2 U_{n-1}^2}{p},\quad U_{2n+1} = U_{n+1}^2 - qU_n^2,$$

$$V_{n+k} = V_n V_k - q^k V_{n-k},\quad V_{2n} = V_n^2 - 2q^n$$

тощо.

Наведемо ще й приклад неоднорідної рекурентної послідовності другого порядку:

$$L(0)=1,\ \ L(1)=1 \ \text{ та } \ L(n+2)=L(n+1)+L(n)+1,\ n\geq 0.$$

Її елементи називаються *числами Леонардо*.

Пропонуємо читачам з допомогою методу математичної індукції переконатися, що ці числа пов'язані з числами Фібоначчі залежністю

$$L(n)=2F_{n+1}-1.$$

Цікавим для рекурентних послідовностей другого порядку є й питання, пов'язані з подільністю.

Доведемо, що існує нескінченна кількість таких послідовностей чисел a_n, що для кожного простого числа p елемент a_p ділиться на p.

Розглянемо послідовність $a_1=0,\ a_2=b,\ a_{n+2}=\lambda a_{n+1}+\mu a_n,\ n\in\mathbb{N}.$

Покладемо $b=2^k\left(2^k+1\right)$, $\lambda=2^k-1$, $\mu=2^k$, де k – довільне натуральне число.

Методом математичної індукції доведемо, що

$$a_n=2^{nk}+(-1)^n 2^k,\ n\geq 1.$$

Для $n=1$ та $n=2$ така рівність справджується, тобто маємо

$$a_1=0,\ a_2=2^k\left(2^k+1\right)=b.$$

Припустимо, що вона правильна для $n=m$ та $n=m+1$.

Тоді для $n=m+2$ отримаємо

$$a_{m+2}=\lambda a_{m+1}+\mu a_m=\left(2^k-1\right)\left(2^{(m+1)k}+(-1)^{m+1}2^k\right)+$$

$$+2^k\left(2^{mk}+(-1)^m 2^k\right)=2^{(m+2)k}+(-1)^{m+2}2^k.$$

Звідси випливає справедливість записаної формули загального члена послідовності для всіх натуральних n.

Покладаючи $n=p,\ p>2,$ за малою теоремою Ферма одержуємо

$$a_p=2^{pk}+(-1)^p 2^k=2^k\left(2^{k(p-1)}-1\right)\equiv 2^{p-1}-1\equiv 0(\operatorname{mod} p),$$

що й треба було довести.

Зауважимо, що й для $p=2$ числа $a_p=2^{2k}+2^k$ також діляться без остачі на p.

25. Числа трібоначчі та інші рекурентні послідовності третього порядку

Серед рекурентних послідовностей третього порядку в першу чергу виділимо *послідовність трібоначчі*:

$$T_0 = 0,\ T_1 = T_2 = 1,\ T_{n+3} = T_{n+2} + T_{n+1} + T_n,\ n \geq 0.$$

Сама її назва є варіацією чисел Фібоначчі з додаванням «трі», який латинською (tri) означає кількість доданків.

Твірною функцією такої послідовності є функція

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n x^n = \frac{x}{1-x-x^2-x^3}.$$

Не станемо детально розглядати властивості елементів цієї послідовності. Наведемо тільки доведення методом математичної індукції однієї з тотожностей, запропонованої як задачу B-1209 у травневому номері журналу The Fibonacci Quarterly за 2017 рік:

$$\sum_{k=1}^{n} T_{2k} T_{2k-1} = \left(\sum_{k=1}^{n} T_{2k-1} \right)^2,\ n \in \mathbb{N}. \qquad (25.1)$$

Для $n = 1$ маємо рівність $1 = 1$.

Припустимо, що задана рівність правильна для $n = m$, тобто

$$\sum_{k=1}^{m} T_{2k} T_{2k-1} = \left(\sum_{k=1}^{m} T_{2k-1} \right)^2.$$

Тоді для $n = m + 1$ мало би бути

$$\sum_{k=1}^{m+1} T_{2k} T_{2k-1} = \left(\sum_{k=1}^{m+1} T_{2k-1} \right)^2.$$

Отже, залишається довести, що

$$\left(\sum_{k=1}^{m+1} T_{2k-1} \right)^2 - \left(\sum_{k=1}^{m} T_{2k-1} \right)^2 = T_{2m+2} T_{2m+1},$$

чи

$$T_{2m+1} \cdot \left(\sum_{k=1}^{m+1} T_{2k-1} + \sum_{k=1}^{m} T_{2k-1} \right) = T_{2m+2} T_{2m+1},$$

або ж

$$T_{2m+2} = 2\sum_{k=1}^{m} T_{2k-1} + T_{2m+1}.$$

Останню тотожність отримуємо, додавши наступні рівності:

$$T_4 - T_2 = T_1 + T_3$$

$$T_6 - T_4 = T_3 + T_5$$

....

$$T_{2m+2} - T_{2m} = T_{2m-1} + T_{2m+1}.$$

Пропонуємо читачам також самостійно переконатися, що

$$\begin{vmatrix} T_{n+4} & T_{n+3} & T_{n+2} \\ T_{n+3} & T_{n+2} & T_{n+1} \\ T_{n+2} & T_{n+1} & T_n \end{vmatrix} = -1,\ n \geq 0.$$

Зауважимо, що для від'ємних індексів числа трібоначчі можна отримати, використовуючи таку рекурентну формулу:

$$T_n = T_{n+3} - T_{n+2} - T_{n+1},\ n < 0.$$

Наприклад, $T_{-1} = T_2 - T_1 - T_0 = 0$, $T_{-2} = T_1 - T_0 - T_{-1} = 1$.

Відзначимо, що іноді числа трібоначчі визначають ще й так:

$$t_0 = t_1 = 0,\ t_2 = 1,\ t_{n+3} = t_{n+2} + t_{n+1} + t_n,\ n \geq 0.$$

Зрозуміло, що при цьому $t_n = T_{n-1}$.

Серед інших відомих рекурентних послідовностей третього порядку виділимо такі дві послідовності чисел:

1). *Числа Подована*.

$$P(0) = P(1) = P(2) = 1,\ P(n+3) = P(n+1) + P(n),\ n \geq 0.$$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P(n)x^n = \frac{1+x}{1-x^2-x^3}.$$

2). *Числа Перріна*.

$$P(0) = 3,\ P(1) = 0,\ P(2) = 2,\ P(n+3) = P(n+1) + P(n),\ n \geq 0.$$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P(n)x^n = \frac{3-x^2}{1-x^2-x^3}.$$

Щодо рекурентних послідовностей вищих порядків відзначимо числа Белла:

$$B_0 = 1,\ \ B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B_k,\ n \geq 0.$$

26. Поняття про многочлени Фібоначчі та Люка

Узагальненням чисел Фібоначчі є *многочлени Фібоначчі*, які задають рівностями:

$$f_0(x) = 0,\ f_1(x) = 1,\ f_{n+2}(x) = xf_{n+1}(x) + f_n(x),\ n \geq 0.$$

Для від'ємних індексів такі многочлени визначають формулою

$$f_{-n}(x) = (-1)^{n+1} f_n(x),\ n \in \mathbb{N}.$$

Аналог формули Біне для таких многочленів має вигляд:

$$f_n(x) = \frac{\alpha^n(x) - \beta^n(x)}{\sqrt{x^2+4}},$$

де

$$\alpha(x) = \frac{x + \sqrt{x^2+4}}{2},\ \beta(x) = \frac{x - \sqrt{x^2+4}}{2}.$$

Розглядаючи матрицю $Q(x) = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, отримаємо, що

$$Q^n(x) = \begin{pmatrix} f_{n+1}(x) & f_n(x) \\ f_n(x) & f_{n-1}(x) \end{pmatrix}.$$

Оскільки $|Q| = -1$ та $|Q^n| = (-1)^n$, то отримуємо такий *аналог формули Кассіні*:

$$f_{n+1}(x)\, f_{n-1}(x) - f_n^2(x) = (-1)^n.$$

Наведемо без доведення ще три тотожності, аналогічні до відповідних рівностей для чисел Фібоначчі:

$$f_{m+n+1}(x) = f_{m+1}(x)\, f_{n+1}(x) + f_m(x)\, f_n(x),$$

$$f_{n+1}^2(x) + f_n^2(x) = f_{2n+1}(x),$$

$$x\sum_{k=1}^{n} f_k(x) = f_{n+1}(x) + f_n(x) - 1.$$

Твірною функцією для послідовності многочленів Фібоначчі є функція

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) t^n = \frac{t}{1 - xt - t^2}.$$

Відзначимо також, що для похідних многочленів Фібоначчі справджується така рівність:

$$f_n'(x) = \sum_{k=1}^{n-1} f_k(x) f_{n-k}(x).$$

Аналогічно визначають і *многочлени Люка*:

$$l_0(x) = 2,\ l_1(x) = x,\ l_{n+2}(x) = xl_{n+1}(x) + l_n(x),\ n \geq 0.$$

Для від'ємних індексів відповідно покладають

$$l_{-n}(x) = (-1)^n l_n(x),\ n \in \mathbb{N}.$$

Аналог формули Біне для таких многочленів має вигляд:

$$l_n(x) = \alpha^n(x) + \beta^n(x),$$

а *аналог формули Кассіні* виглядає так:

$$l_{n+1}(x) l_{n-1}(x) - l_n^2(x) = (-1)^{n-1}\left(x^2 + 4\right).$$

Твірною функцією для послідовності многочленів Люка є функція

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} L_k(x) t^n = \frac{2 - xt}{1 - xt - t^2}.$$

Наведемо без доведення й деякі рівності, які пов'язують між собою елементи послідовностей многочленів Фібоначчі та Люка:

$$l_n(x) = f_{n+1}(x) + f_{n-1}(x) = xf_n(x) + 2f_{n-1}(x),$$

$$xl_n(x) = f_{n+2}(x) - f_{n-2}(x),$$

$$l_{n+1}^2(x) + l_n^2(x) = \left(x^2 + 4\right) f_{2n+1}(x),$$

$$l_n^2(x)-\left(x^2+4\right)f_n^2(x)=4(-1)^n,$$

$$f_m(x)l_n(x)+f_n(x)l_m(x)=2f_{m+n}(x),$$

$$f_{2n}(x)=f_n(x)l_n(x).$$

Читачі вже, напевно, звернули увагу на подібність таких формул до аналогічних співвідношень між числами Фібоначчі та Люка, які ми розглянули вище.

Ця схожість не є випадковою. Покладаючи у цих многочленах $x=1$ та замінивши $f_n(1)$ на F_n, а $l_n(1)$ – на L_n, ми отримаємо числа Фібоначчі та Люка відповідно.

Нескладно навести і приклади інших многочленів такого роду, розглядаючи їх як часткові випадки двох класів рекурентних послідовностей многочленів:

$$U_0(x)=0,\ U_1(x)=1 \text{ та } U_{n+2}(x)=p(x)U_{n+1}(x)-q(x)U_n(x),\ n\geq 0,$$

$$V_0(x)=2,\ V_1(x)=p(x) \text{ та } V_{n+2}(x)=p(x)V_{n+1}(x)-q(x)V_n(x),\ n\geq 0,$$

де $p(x)$ та $q(x)$ – довільні функції.

Зауважимо, що покладаючи також

$$U_0(x)=1,\ U_1(x)=x \text{ та } U_{n+2}(x)=2xU_{n+1}(x)-U_n(x),\ n\geq 0,$$

$$V_0(x)=1,\ V_1(x)=2x \text{ та } V_{n+2}(x)=2xV_{n+1}(x)-V_n(x),\ n\geq 0,$$

отримаємо многочлени Чебишова першого та другого роду відповідно, які є розв’язками рівняння Пелля $U_n^2(x)-\left(x^2-1\right)V_n^2(x)=1$.

27. Різні задачі, пов’язані з рекурентними послідовностями

Задача 1. Маленька Надійка хоче займатися у математичному гуртку. Але вона також любить стрибати шкільними сходами. За один раз Надійка може або стрибнути на одну сходинку вгору, або перестрибнути вгору через одну сходинку. Вчитель математики пообіцяв взяти Надійку у свій гурток, якщо вона пострибає по сходах усіма різними можливими способами і правильно порахує кількість цих способів. Скільки днів доведеться чекати дівчинці здійснення своєї мрії про гурток, якщо кожного дня вона стрибатиме лише одним способом, а сходи мають 10 сходинок?

Розв'язання. Очевидно, що на першу сходинку можна попасти лише одним способом – з підлоги. Для попадання на другу сходинку таких способів два: безпосередньо з підлоги або з першої сходинки. Аналогічно, на третю сходинку можна попасти або з другої, або з першої сходинки. Тому загальна кількість способів опинитися на третій сходинці дорівнює сумі кількості способів попадання на першу та на другу сходинки. Так само встановлюємо, що кількість способів опинитися на четвертій сходинці дорівнює сумі кількостей способів попадання на другу та на третю сходинки, і т.д. Тому, якщо A_n, A_{n+1} та A_{n+2} – це кількості способів, якими можна попасти на сходинки з номерами n, $n+1$ та $n+2$ відповідно, то $A_{n+2} = A_n + A_{n+1}$. За цією формулою, послідовно знаходимо: $A_1 = 1$, $A_2 = 2$, $A_3 = 3$, $A_4 = 5$, $A_5 = 8$, $A_6 = 13$, $A_7 = 21$, $A_8 = 34$, $A_9 = 55$, $A_{10} = 89$. Отже, Надійці для здійснення своєї мрії доведеться чекати менше трьох місяців.

Можна було міркувати ще й так. На сходинку з номером $n \geq 3$ Надійка може потрапити двома незалежними способами: 1) стати спочатку на першу сходинку, а потім подолати ще $n-1$ сходинок; 2) спочатку стрибнути на другу сходинку, а після цього піднятись ще на $n-2$ сходинки. Тому $A_n = A_{n-1} + A_{n-2}$, $n \geq 3$.

Як ви вже здогадалися, одержані тут числа є елементами послідовності Фібоначчі: $A_n = F_{n+1}$.

<u>Задача 2</u>. Миколка хвалиться, що він може розрізати прямокутник зі сторонами F_{n+1} та F_{n-1} на чотири частини і скласти з них квадрат зі стороною F_n. Чи не помиляється він?

Розв'язання. Помиляється. Враховуючи формулу Кассіні, площі таких фігур відрізняються на 1.

Цікаво, що для великих n візуально цю різницю важко буде побачити.

Задача 3. Числові послідовності задані рівностями:

а) $a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n,\ n \geq 0$;

б) $a_0 = 2,\ a_1 = 3,\ a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n,\ n \geq 0$.

Знайдіть формули їх загальних членів та твірні функції таких послідовностей.

Розв'язання. Зі спільного характеристичного рівняння цих двох послідовностей $\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$ маємо $\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \alpha^2$, $\lambda_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \beta^2$. Отже, їхні загальні члени слід шукати у вигляді $a_n = C_1\alpha^{2n} + C_2\beta^{2n}$.

Враховуючи при цьому задані два перші елементи, відповідно отримаємо: а) $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{2n} - \beta^{2n}\right) = F_{2n}$; б) $a_n = \alpha^{2n} + \beta^{2n} = L_{2n}$.

Для твірних функцій таких послідовностей матимемо відповідно:

а) $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} F_{2n} x^n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^{2n}x^n - \sum_{n=0}^{\infty}\beta^{2n}x^n\right) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\alpha^2 x} - \frac{1}{1-\beta^2 x}\right) = \frac{x}{1-3x+x^2};$$

б) $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} L_{2n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha^{2n}x^n + \sum_{n=0}^{\infty}\beta^{2n}x^n =$$
$$= \frac{1}{1-\alpha^2 x} + \frac{1}{1-\beta^2 x} = \frac{2-3x}{1-3x+x^2}.$$

Задача 4. Обґрунтуйте рівності:

а) $F_{n+2}^3 = F_{n+1}^3 + F_n^3 + 3F_nF_{n+1}F_{n+2}$; б) $L_{n+2}^3 = L_{n+1}^3 + L_n^3 + 3L_nL_{n+1}L_{n+2}$.

Розв'язання. Для доведення достатньо скористатися формулами $F_n + F_{n+1} = F_{n+2}$, $L_n + L_{n+1} = L_{n+2}$ і тотожністю $(x+y)^3 \equiv x^3 + y^3 + 3xy(x+y)$.

Задача 5. Доведіть, що:

а) $F_{3n} = F_{n+1}^3 + F_n^3 - F_{n-1}^3$; б) $5L_{3n} = L_{n+1}^3 + L_n^3 - L_{n-1}^3$.

Розв'язання. Правильність першої рівності випливає з тотожності

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{3n}-\beta^{3n}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}\right)\right)^3+$$

$$+\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{n}-\beta^{n}\right)\right)^3-\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}\right)\right)^3.$$

Друга рівність рівносильна тотожності

$$5\left(\alpha^{3n}+\beta^{3n}\right)=\left(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}\right)^3+\left(\alpha^{n}+\beta^{n}\right)^3-\left(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1}\right)^3.$$

<u>Задача 6</u>. Не виконуючи обчислень, доведіть, що $F_{32}=L_2L_4L_8L_{16}$.

Розв'язання. За формулою $F_{2n}=F_nL_n$ послідовно отримуємо

$$F_{32}=F_{16}L_{16}=F_8L_8L_{16}=F_4L_4L_8L_{16}=F_2L_2L_4L_8L_{16}=L_2L_4L_8L_{16}.$$

<u>Задача 7</u>. Знайдіть всі натуральні числа m та n такі, що $F_n=L_m$.

Розв'язання. Для $m\geq 3$ маємо нерівність $F_{m+1}<L_m<F_{m+2}$. Справді, $F_{m+1}<F_{m+1}+F_{m-1}=L_m<F_{m+1}+F_m=F_{m+2}$. Тому рівність $F_n=L_m$ можлива лише за умови $m\leq 2$. Отже, безпосереднім перебором знаходимо наступні пари розв'язків (m,n): $(1,1)$, $(1,2)$, $(2,4)$.

<u>Задача 8</u>. Використовуючи властивості чисел Фібоначчі та Люка знайдіть нескінченну кількість четвірок натуральних чисел a, b, c, d таких, що $a^2+b^2+c^2=d^2$, причому жодна четвірка не утворюється з жодної іншої множенням всіх її чисел на одне і те ж натуральне число.

Розв'язання. Скористаємося тотожністю

$$(xy)^2+x^2(x+y)^2+y^2(x+y)^2=\left(x^2+xy+y^2\right)^2=\left((x+y)^2-xy\right)^2.$$

Враховуючи тепер рівності $F_n+F_{n+1}=F_{n+2}$ та $L_n+L_{n+1}=L_{n+2}$, маємо такі нескінченні набори четвірок чисел (a, b, c, d):

$$\left(F_nF_{n+1},\ F_nF_{n+2},\ F_{n+1}F_{n+2},\ F_{n+2}^2-F_nF_{n+1}\right)$$

та

$$\left(L_nL_{n+1},\ L_nL_{n+2},\ L_{n+1}L_{n+2},\ L_{n+2}^2-L_nL_{n+1}\right).$$

Задача 9. Доведіть тотожність

$$F_{n-1}^4+4F_n^4+4F_{n+1}^4+F_{n+2}^4=6F_{2n+1}^2.$$

Розв'язання. Нехай $F_n=a$, $F_{n+1}=b$. Тоді $F_{n-1}=F_{n+1}-F_n=b-a$, $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n=b+a$, $F_{2n+1}=F_n^2+F_{n+1}^2=a^2+b^2$. Таким чином, задана тотожність випливає з тотожності

$$(b-a)^4+4a^4+4b^4+(b+a)^4=6\left(a^2+b^2\right)^2.$$

Задача 10. Для всіх $n\in\mathbb{Z}$ обґрунтуйте рівність

$$\left(\frac{1}{L_n}-\frac{1}{L_{n+1}}\right)^2+\left(\frac{1}{L_{n+1}}+\frac{1}{L_{n+2}}\right)^2+\left(\frac{1}{L_{n+2}}+\frac{1}{L_n}\right)^2=2\left(\frac{1}{L_n}+\frac{1}{L_{n+1}}-\frac{1}{L_{n+2}}\right)^2,$$

Розв'язання. Нехай $a=\dfrac{1}{L_n}$, $b=\dfrac{1}{L_{n+1}}$, $c=-\dfrac{1}{L_{n+2}}$.

Тоді задана рівність набуває вигляду

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=2(a+b+c)^2.$$

Оскільки $ab+bc+ca=\dfrac{1}{L_nL_{n+1}L_{n+2}}\left(L_{n+2}-L_n-L_{n+1}\right)=0$, то

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=2\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)=$$

$$=2\left(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca\right)=2(a+b+c)^2.$$

Відзначимо, що правильною є й така тотожність:

$$\left(\frac{1}{L_n}-\frac{1}{L_{n+1}}\right)^4+\left(\frac{1}{L_{n+1}}+\frac{1}{L_{n+2}}\right)^4+\left(\frac{1}{L_{n+2}}+\frac{1}{L_n}\right)^4=2\left(\frac{1}{L_n}+\frac{1}{L_{n+1}}-\frac{1}{L_{n+2}}\right)^4.$$

Задача 11. Спростіть вираз

$$(L_{n+1}-1)F_n\left(F_{2n+2}-F_{n+2}\right)+(1-F_n-F_{n+2})F_{n+2}\left(F_{2n+2}-F_{n+3}\right)+$$

$$+\left(F_{2n+2}-F_{n+2}\right)\left(F_{2n+2}-F_{n+3}\right),\ n\in\mathbb{N}.$$

Розв'язання. Скориставшись рівностями

$$F_{2n+2}=F_{n+1}L_{n+1}=F_{n+1}\left(F_n+F_{n+2}\right),$$

запишемо заданий вираз у вигляді

$$F_nF_{n+2}\left[\frac{(F_{2n+2}-F_{n+1})(F_{2n+2}-F_{n+2})}{F_{n+1}F_{n+2}}-\frac{(F_{2n+2}-F_{n+1})(F_{2n+2}-F_{n+3})}{F_nF_{n+1}}+\right.$$
$$\left.+\frac{(F_{2n+2}-F_{n+2})(F_{2n+2}-F_{n+3})}{F_nF_{n+2}}\right].$$

Нехай

$$P(x)=\frac{(x-F_{n+1})(x-F_{n+2})}{F_{n+1}F_{n+2}}-\frac{(x-F_{n+1})(x-F_{n+3})}{F_nF_{n+1}}+\frac{(x-F_{n+2})(x-F_{n+3})}{F_nF_{n+2}}.$$

Оскільки $P(F_{n+1})=P(F_{n+2})=P(F_{n+3})=1$, то $P(x)\equiv 1$ і $P(F_{2n+2})=1.$

Отже, вказаний вираз зводиться до F_nF_{n+2}.

<u>Задача 12</u>. Доведіть, що для кожного натурального числа n і коренів a, b, c рівняння $x^3-F_nx^2+F_{n+1}=0$ значення виразу $a^3(F_n-a)+b^3(F_n-b)+c^3(F_n-c)$ є сумою квадратів n натуральних чисел.

Розв'язання. Оскільки $x^3-F_nx^2+F_{n+1}=(x-a)(x-b)(x-c)$, то

$$a+b+c=F_n,\ ab+bc+ca=0,\ abc=-F_{n+1}.$$

Тому $a\neq 0,\ b\neq 0,\ c\neq 0,\ a+b=-\dfrac{ab}{c},\ b+c=-\dfrac{bc}{a},\ c+a=-\dfrac{ca}{b}$.

Отже,

$$a^3(F_n-a)+b^3(F_n-b)+c^3(F_n-c)=a^3(b+c)+b^3(c+a)+c^3(a+b)=$$
$$=-a^2bc-b^2ca-c^2ab=-(a+b+c)abc=F_nF_{n+1}=\sum_{k=1}^{n}F_k^2.$$

<u>Задача 13</u>. Для всіх $n\in\mathbb{N}$ розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} x^3+L_nx+y=F_n(1+L_n)+F_nx^2, \\ F_ny^3+F_{2n}y+z=F_n(1+F_{2n})+F_n^2y^2, \\ L_nz^3+L_n^2z+x=F_n(1+L_n^2)+F_{2n}z^2. \end{cases}$$

Розв'язання. Використавши рівність $F_{2n} = F_n L_n$, запишемо задану систему рівнянь у вигляді

$$\begin{cases} (x - F_n)(x^2 + L_n) = F_n - y, \\ (y - F_n)(F_n y^2 + F_{2n}) = F_n - z, \\ (z - F_n)(L_n z^2 + L_n^2) = F_n - x. \end{cases}$$

Звідси отримуємо єдиний розв'язок $x = y = z = F_n$.

Справді, $x > F_n \Rightarrow y < F_n \Rightarrow z > F_n \Rightarrow x < F_n$. Суперечність.

Аналогічно приходимо до суперечності, припустивши, що $x < F_n$.

<u>Задача 14</u>. Доведіть наступні рівності для сум:

а) $\sum_{k=1}^{n} F_k^2 F_{k+1} = \frac{F_n F_{n+1} F_{n+2}}{2}$; б) $\sum_{k=1}^{n} F_k F_{3k} = F_n F_{n+1} F_{2n+1}$.

Розв'язання. Для $n = 1$ обидві рівності очевидні.

Припустимо їх правильність для деякого $n \geq 1$.

Тоді для $n + 1$ відповідно отримаємо:

$$\sum_{k=1}^{n+1} F_k^2 F_{k+1} = \frac{F_n F_{n+1} F_{n+2}}{2} + F_{n+1}^2 F_{n+2} = \frac{F_{n+1} F_{n+2} (F_n + 2F_{n+1})}{2} = \frac{F_{n+1} F_{n+2} F_{n+3}}{2};$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} F_k F_{3k} = F_n F_{n+1} F_{2n+1} + F_{n+1} F_{3n+3} = F_{n+1} \left(F_n F_{2n+1} + F_{n+1+(2n+2)} \right) =$$

$$= F_{n+1} \left(F_n F_{2n+1} + (F_{n+2} F_{2n+3} - F_n F_{2n+1}) \right) = F_{n+1} F_{n+2} F_{2n+3}.$$

Звідси випливає правильність обох заданих рівностей для всіх натуральних n.

<u>Задача 15</u>. Для $n \geq 2$ доведіть, що

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{F_k}{L_k} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{F_k F_{n-k}} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{L_k}{F_k} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{L_k L_{n-k}}.$$

Розв'язання. Скористаємося рівністю $F_k L_{n-k} + L_k F_{n-k} = 2F_n$, яку нескладно довести за формулами Біне. Тоді

$$\frac{1}{F_k F_{n-k}} = \frac{1}{2F_n} \cdot \frac{F_k L_{n-k} + L_k F_{n-k}}{F_k F_{n-k}} = \frac{1}{2F_n} \cdot \left(\frac{L_{n-k}}{F_{n-k}} + \frac{L_k}{F_k} \right),$$

$$\frac{1}{L_kL_{n-k}}=\frac{1}{2F_n}\cdot\frac{F_kL_{n-k}+L_kF_{n-k}}{L_kL_{n-k}}=\frac{1}{2F_n}\cdot\left(\frac{F_k}{L_k}+\frac{F_{n-k}}{L_{n-k}}\right).$$

Отже,

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{F_kF_{n-k}}=\frac{1}{2F_n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{L_{n-k}}{F_{n-k}}+\frac{L_k}{F_k}\right)=\frac{1}{F_n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{L_k}{F_k},$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{L_kL_{n-k}}=\frac{1}{2F_n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{F_{n-k}}{L_{n-k}}+\frac{F_k}{L_k}\right)=\frac{1}{F_n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{F_k}{L_k}.$$

Звідси випливає рівність, вказана в умові задачі.

Задача 16. Для всіх невід'ємних цілих чисел m та n обчисліть значення виразу $2^{m+1}L_{m+1}-5\sum_{n=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}C_n^kF_kL_{n-k}$.

Розв'язання. За формулою (13.19) маємо: $\sum_{k=0}^{n}C_n^kF_kL_{n-k}=2^nF_n$.

Оскільки також

$$\sum_{n=0}^{m}2^nF_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{m}2^n\left(\alpha^n-\beta^n\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{m}(2\alpha)^n-\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{m}(2\beta)^n=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{(2\alpha)^{m+1}-1}{2\alpha-1}-\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{(2\beta)^{m+1}-1}{2\beta-1}=$$

$$=\frac{2^{m+1}\left(\alpha^{m+1}+\beta^{m+1}\right)-2}{5}=\frac{2^{m+1}L_{m+1}-2}{5},$$

то для всіх невід'ємних цілих чисел m та n значення заданого виразу дорівнює 2.

Задача 17. Доведіть, що $\sum_{i+j+k=n}\frac{(-1)^k}{i!\,j!\,k!}=\frac{1}{n!}$.

Розв'язання. Підставивши $x=y=1,\ z=-1$ у тотожність

$$(x+y+z)^n=\sum_{i+j+k=n}\frac{n!}{i!\,j!\,k!}x^iy^jz^k,$$

отримаємо потрібну рівність.

Задача 18. Для натуральних чисел m, n, k доведіть нерівність

$$\frac{F_{2m}}{F_{n+k}}+\frac{F_{2n}}{F_{m+k}}+\frac{F_{2k}}{F_{m+n}}\geq 3.$$

Розв'язання. Оскільки $F_{2n}=F_nL_n$ та $2F_{m+n}=F_mL_n+F_nL_m$, то запропонована нерівність еквівалентна нерівності

$$\frac{F_mL_m}{F_kL_n+F_nL_k}+\frac{F_nL_n}{F_mL_k+F_kL_m}+\frac{F_kL_k}{F_mL_n+F_nL_m}\geq\frac{3}{2}.$$

Не зменшуючи загальності, можна вважати, що $m\geq n\geq k$. Тоді, відповідно, й $F_m\geq F_n\geq F_k$ та $L_m\geq L_n\geq L_k$.

Звідси випливають такі три нерівності: $F_kL_k+F_nL_n\geq F_kL_n+F_nL_k$, $F_kL_k+F_mL_m\geq F_kL_m+F_mL_k$, $F_mL_m+F_nL_n\geq F_mL_n+F_nL_m$.

Тому достатньо довести, що

$$\frac{F_mL_m}{F_kL_k+F_nL_n}+\frac{F_nL_n}{F_mL_m+F_kL_k}+\frac{F_kL_k}{F_mL_m+F_nL_n}\geq\frac{3}{2}.$$

Остання нерівність є частковим випадком відомої нерівності

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$$

для додатних чисел a, b, c.

Задача 19. Для натуральних чисел $n\geq 2$ доведіть такий ланцюжок нерівностей: $F_{2n}<F_{n+1}^2<F_{2n+1}<L_n^2<F_{2n+2}$.

Розв'язання. Послідовно отримуємо:

$$F_{2n}=F_{n+1}^2-F_{n-1}^2<F_{n+1}^2<F_{n+1}^2+F_n^2=F_{2n+1}=$$

$$=F_{n-1}^2+\left(F_n^2-F_{n-1}^2\right)+F_{n+1}^2<\left(F_{n-1}+F_{n+1}\right)^2=L_n^2=$$

$$=\left(F_{n+2}-F_{n-2}\right)^2<F_{n+2}^2-F_n^2=F_{2n+2}.$$

Задача 20. Доведіть нерівність

$$\left(F_n^2+F_{n+1}^2+F_{n+2}^2\right)^2\left(\frac{1}{F_n^4}+\frac{1}{F_{n+1}^4}+\frac{1}{F_{n+2}^4}\right)>18.$$

Розв'язання. Скориставшись тотожністю Кандідо та нерівністю Коші, отримаємо

$$\left(F_n^2+F_{n+1}^2+F_{n+2}^2\right)^2\left(\frac{1}{F_n^4}+\frac{1}{F_{n+1}^4}+\frac{1}{F_{n+2}^4}\right)=$$

$$=2\left(F_n^4+F_{n+1}^4+F_{n+2}^4\right)\left(\frac{1}{F_n^4}+\frac{1}{F_{n+1}^4}+\frac{1}{F_{n+2}^4}\right)\geq$$

$$>2\cdot 3\cdot\sqrt[3]{F_n^4F_{n+1}^4F_{n+2}^4}\cdot 3\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{F_n^4}\cdot\frac{1}{F_{n+1}^4}\cdot\frac{1}{F_{n+2}^4}}=18.$$

<u>Задача 21</u>. Для всіх натуральних чисел n доведіть нерівності:

а) $\prod_{k=1}^{n}\left(F_k^2+1\right)>F_nF_{n+1}+1$; б) $\prod_{k=1}^{n}\left(L_k^2+1\right)>L_nL_{n+1}-1$.

Розв'язання. Оскільки F_k^2 та L_k^2 є додатними, то

$$\prod_{k=1}^{n}\left(F_k^2+1\right)>1+\sum_{k=1}^{n}F_k^2=F_nF_{n+1}+1;$$

$$\prod_{k=1}^{n}\left(L_k^2+1\right)>1+\sum_{k=1}^{n}L_k^2=1+\left(L_nL_{n+1}-2\right)=L_nL_{n+1}-1.$$

<u>Задача 22</u>. Доведіть, що ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{F_2F_4...F_{2k}}{F_1F_3F_5...F_{2k+1}}$ збіжний.

Розв'язання. Спочатку доведемо нерівність $\frac{F_2F_4...F_{2k}}{F_1F_3F_5...F_{2k+1}}<\frac{1}{\sqrt{F_{2k+1}}}$.

Для $k=1$ вона правильна. А з припущення її правильності для $k=n$ потрібно для здійснення кроку індукції довести нерівність $\frac{1}{\sqrt{F_{2n+1}}}\cdot\frac{F_{2n+2}}{F_{2n+3}}<\frac{1}{\sqrt{F_{2n+3}}}$, яка після піднесення обох її частин до квадрату внаслідок формули Кассіні рівносильна нерівності $F_{2n+2}^2<F_{2n+1}F_{2n+3}$.

Отже, доданки заданого ряду мажоруються числами $a_k=\frac{1}{\sqrt{F_{2k+1}}}$.

Оскільки $\lim_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}=\lim_{k\to\infty}\sqrt{\frac{F_{2k+1}}{F_{2k+3}}}=\frac{1}{\alpha}<1$, то такий ряд збіжний.

Задача 23. Обчисліть суму

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{F_nF_{n+1}^2F_{n+3}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{F_nF_{n+2}^2F_{n+3}}.$$

Розв'язання. Оскільки обидва ряди, які входять в цю суму, є збіжними, то

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{F_nF_{n+1}^2F_{n+3}}+\frac{1}{F_nF_{n+2}^2F_{n+3}}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_{n+1}^2+F_{n+2}^2}{F_nF_{n+1}^2F_{n+2}^2F_{n+3}}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_{2n+3}}{F_nF_{n+1}^2F_{n+2}^2F_{n+3}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_{n+2}F_{n+3}-F_nF_{n+1}}{F_nF_{n+1}^2F_{n+2}^2F_{n+3}}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{F_nF_{n+1}^2F_{n+2}}-\frac{1}{F_{n+1}F_{n+2}^2F_{n+3}}\right)=\frac{1}{F_1F_2^2F_3}=\frac{1}{2}.$$

Задача 24. Обчисліть значення наступних виразів:

$$\text{а) }\ \frac{1}{k!}\cdot\frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{x}{1-x-x^2}\right)\Bigg|_{x=0};\quad \text{б) }\ \frac{1}{k!}\cdot\frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{2-x}{1-x-x^2}\right)\Bigg|_{x=0}.$$

Розв'язання. Враховуючи отримані вище формули для твірних функцій послідовностей чисел Фібоначчі та Люка, знаходимо:

$$\frac{1}{k!}\cdot\frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{x}{1-x-x^2}\right)\Bigg|_{x=0}=\frac{1}{k!}\cdot\frac{d^k}{dx^k}\left(\sum_{n=0}^{\infty}F_nx^n\right)\Bigg|_{x=0}=$$

$$=\frac{1}{k!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d^k}{dx^k}\left(F_nx^n\right)\Bigg|_{x=0}=\frac{1}{k!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d^k}{dx^k}\left(F_nx^n\right)\Bigg|_{x=0}=$$

$$=\frac{1}{k!}\cdot\sum_{n=k}^{\infty}n(n-1)\dots(n-k+1)F_nx^{n-k}\Bigg|_{x=0}=$$

$$=\sum_{n=k}^{\infty}C_n^kF_nx^{n-k}\Bigg|_{x=0}=F_k.$$

Аналогічно доводиться, що

$$\frac{1}{k!}\cdot\frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{2-x}{1-x-x^2}\right)\Bigg|_{x=0}=L_k.$$

Список рекомендованої літератури

1. *Аракелян Г.* Математика и история золотого сечения. – М.: Логос, 2014. – 404с.
2. *Воробьев Н.Н.* Числа Фибоначчи (Серия «Популярные лекции по математике»). – М.: Наука, 1984. – 144с.
3. *Лихтарников Л.М.* Элементарное введение в функциональные уравнения. – СПб: Лань, 1997. – 160с.
4. *Маркушевич А.И.* Возвратные последовательности (Серия «Популярные лекции по математике»). – М.: Наука, 1975. – 48с.
5. *Матеріали* Всеукраїнських турнірів юних математиків імені профессора М.Й. Ядренка 1998 – 2017рр. // www.tym.in.ua.
6. *Федак І.В.* Функціональні рівняння: Навчальний посібник. – Івано-Франківськ: Голіней, 2017. – 144с.
7. *Grimaldi R.* Fibonacci and Catalan Numbers: An introduction. – New Jersey: John Wiley, 2012. – 382p.
8. *Koshy T.* Fibonacci and Lucas Numbers with Applications. – New York: John Wiley, 2001. – 676p.
9. *The Fibonacci Quarterly*. – Vol. 1 – 55. – 1963 – 2017.

Зміст