

Буртняк І.В.

***МОДЕЛІ ПОВЕДІНКИ ВОЛАТИЛЬНОСТІ  
ФІНАНСОВИХ ІНСТРУМЕНТІВ ФОНДОВИХ  
РИНКІВ***

Монографія

Івано-Франківськ

2018

УДК 519.86:336.76

ББК 64.826

*Рекомендовано до друку Вченою радою*

*ДВНЗ «Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника»*

*(протокол № 3 від 27 березня 2018 р.)*

**Рецензенти:**

**Буяк Л.М.** – доктор економічних наук, професор, завідувач кафедри економічної кібернетики та інформатики Тернопільського національного економічного університету

**Вовк В.М.** – доктор економічних наук, професор, завідувач кафедри економічної кібернетики Львівського національного університету імені Івана-Франка;

**Даніч В.М.** – доктор економічних наук, професор кафедри економічної кібернетики та прикладної економіки Харківського національного університету імені Василя Каразіна.

**Буртняк І.В.**

**Б 91 Моделі поведінки волатильності фінансових інструментів фондових ринків:** монографія. Івано-Франківськ : ДВНЗ «Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника», 2018. 287 с.

**ISBN 978-966-640-454-4**

У монографії проведено наукове узагальнення основних аспектів стохастичної волатильності похідних фінансових інструментів на фондових ринках. Методами спектральної теорії та хвильової теорії збурень досліджено ціноутворення деривативів, які задаються процесами з стохастичною багатовимірною волатильністю. За допомогою функції Гріна обчислено величину цін похідних фінансових інструментів, здійснене поетапне обчислення щільності та волатильності як засобу моніторингу та управління процесами ціноутворення.

Для науковців, економістів, учасників фондового ринку та широкий загал, який зацікавлений процесами розвитку фондового ринку

УДК 519.86:336.76

ББК 64.826

**ISBN 978-966-640-454-4**

© Буртняк І.В.; 2018

© ДВНЗ «Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника», 2018

## ЗМІСТ

<b>ПЕРЕДМОВА</b> .....	5
<b>РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИКО-МЕТОДОЛОГІЧНІ ОСНОВИ РОЗВИТКУ ФОНДОВОГО РИНКУ</b> .....	10
1.1 Фондовий ринок як складна динамічна система.....	10
1.2. Детермінанти динамічного розвитку фінансових інструментів .....	39
1.3. Еволюція теоретичних поглядів на розвиток фінансових інструментів, як критерію розвитку фондового ринку .....	54
Висновки до розділу 1 .....	67
Список використаних джерел .....	69
<b>РОЗДІЛ 2. МОДЕЛЮВАННЯ РОЗВИТКУ ФОНДОВОГО РИНКУ</b> .....	82
2.1. Модель шляхозалежної волатильності для індексу ПФТС .....	82
2.2 Моделювання залежностей причинно–наслідкового характеру між індексом ПФТС та світовими індексами .....	96
2.3. Адитивна модель прогнозування індексу ПФТС .....	112
Висновки до розділу 2 .....	125
Список використаних джерел .....	127
<b>РОЗДІЛ 3. СПЕКТРАЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИФУЗІЙНИХ ПРОЦЕСІВ НА ФОНДОВОМУ РИНКУ</b> .....	132
3.1. Оцінювання двобар’єрних опціонів з локальною волатильністю .....	132
3.2. Оцінка фінансових потоків методами спектрального аналізу ....	146

3.3. Моделювання ціни похідних фінансових активів на фондовому ринку.....	156
Висновки до розділу 3 .....	167
Список використаних джерел .....	169

**РОЗДІЛ 4. РЕАЛІЗАЦІЯ МОДЕЛЕЙ БАГАТОФАКТОРНОЇ ВОЛАТИЛЬНОСТІ ДЕРИВАТИВІВ МЕТОДАМИ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛІЗУ .....**

173

4.1. Багатофакторні моделі ціноутворення деривативів .....

173

4.2. Моделі двобар'єрних опціонів з багатофакторною волатильністю .....

210

4.3. Моделі визначення цін деривативів методами спектрального аналізу .....

224

4.4. Спектральне дослідження деривативів на базі моделі CEV з багатовимірною волатильністю .....

232

Висновки до розділу 4 .....

271

Список використаних джерел .....

273

**ВИСНОВКИ .....**

284

## ПЕРЕДМОВА

Сучасний фондовий ринок характеризується високим рівнем динамічності процесів та операцій з фінансовими інструментами та значною волатильністю цін на них. Вітчизняний фондовий ринок, будучи незначним за розмірами є частиною глобального фінансового ринку і знаходиться під його прямим впливом. Особливо це стосується сегменту фінансових деривативів, який з-поміж інших сегментів є найбільш волатильним, оскільки вбирає в себе по суті ризики всього фінансового ринку. Враховуючи суттєві коливання цін на похідні фінансові інструменти, високі рівні ризиків, що їх супроводжують, процеси ціноутворення потребують глибокого наукового дослідження, що має не лише теоретичне але і вагоме практичне значення, оскільки є необхідним при прийнятті рішення як стратегічного так і оперативного характеру, особливо для трейдерів при ціноутворенні декількох різних серій опціонів з різними цінами виконання і термінами погашення. Швидкість прийняття оптимального рішення щодо купівлі продажу похідних фінансових інструментів є доволі високою та вимагає обробки значного масиву інформації з можливістю моделювання поведінки цін та супровідних ризиків як для продавців так і для інвесторів. Така функція реалізується за допомогою різноманітних методів регулювання і стабілізації цін на окремі види цінних паперів. Разом з тим, удосконалення інструментарію ціноутворення похідних цінних паперів, дозволить покращити якість прогнозування динаміки фондових ринків та сприятиме активізації діяльності його учасників.

Фундаментальні основи дослідження функціонування фондового ринку знайшли своє відображення в роботах зарубіжних та

вітчизняних вчених, серед яких варто виокремити: Ф. Блека, М. Шоулса, Р. Мертона, Д. Кокса, І.С. Благуна, Н. Л. Іващук, О.І. Ляшенко, Н. К. Максишко, Л.О. Примостки, О. М. Сохацької та низку інших. Наразі вітчизняний фондовий ринок суттєво відстає від більшості європейських країн в своєму розвитку, а сегмент похідних фінансових інструментів є незначним, що обумовлено низьким рівнем прозорості операцій, недосконалістю законодавчої бази, низьким рівнем довіри з боку населення та захисту прав інвесторів. Крім того, на даний час розроблено багато підходів до обчислення локальної та стохастичної волатильності, які описують спільну динаміку ціни базового активу, за допомогою моделей, це відображено в працях таких вчених, як: Л. Андерсен, Ф. Блек, Д. Бонес, О. Васічек, Д. Гобсон, Р. Гольштейн, В. Горовий, Д. Давидов, М. Ж. Інгресол, Жебланк, К. Золна, М. Йор, П. Карр, Ж. Кетерал, К. Кокс, Ф. Кореллі, В. Лінецький, А. Ліндслей, М. Лоріг, Д. Мадан, Г. Маккін, Р. Мендоза-Аріага, Р. Мертон, Ж. Папаніколау, А. Паскучі, А. Пельсер, Ю. Рен, С. Рос, П. Самуельсон, Р. Сіркар, Д. Трейнор, Е. Торп, Ж. Фуке, С. Хестон, Н. Шваген, М. Шоулз та ін.

Ситуація на фондовому ринку України постійно змінюється під впливом глобалізаційних процесів, що відбуваються на зовнішніх фінансових ринках, внутрішньої перманентної фінансової та політичної кризи, нестабільної економічної ситуації, тощо. Тому, не зважаючи на значний вклад у розроблення проблематики функціонування фондового ринку, такі зміни зумовлюють об'єктивну необхідність постійного пошуку нових підходів до прогнозування цінової динаміки фондового ринку. Таким чином, незавершеність формування цілісної методології ціноутворення фінансових інструментів загалом та фінансових деривативів зокрема обумовила актуальність дослідження, його мету, завдання, об'єкт та предмет.

Метою даного дослідження є розвиток теоретико-методологічних засад та розроблення нових економіко-математичних моделей системного аналізу, оцінки та прогнозування ціноутворення похідних фінансових інструментів на різних стадіях розвитку фондового ринку та для різних горизонтів.

В роботі здійснено формалізацію процесу ціноутворення на фінансові інструменти фондового ринку, запропоновано методи, які забезпечують можливість прогнозувати результати цілеспрямованих дій інвесторів, що відбуваються під впливом внутрішніх та зовнішніх чинників на фондовому ринку. Знаходження значення імплікованої волатильності і послідовних наближень ціни деривативів дають можливість: системно аналізувати процеси, що відбуваються не лише в сегменті похідних фінансових інструментів, а і в інших взаємопов'язаних сегментах як вітчизняного так і зарубіжних фондових ринків, а також, що не менш важливо, коригувати існуючу у учасників ринку – як продавців так і інвесторів – фінансову стратегію своєї поведінки на фінансовому ринку, в тому числі покроково знаходити зміни дохідності і волатильності та прогнозувати динаміку фінансових ризиків.

У першому розділі досліджено динаміку волатильності індикаторів фондового ринку, які характеризують прибутковість фондових інструментів, ціну ринкового портфеля та індексу ПФТС. Використання в роботі останнього обумовлено тим, що він розраховується кожного дня за результатами торгів на одній із найбільших фондових площадок України – ПФТС, яка є членом Світової Федерації фондових бірж, і є одним із основних показників стану вітчизняного фондового ринку. В результаті запропоновано авторський підхід, що дозволяє спрогнозувати волатильність в різні часові моменти, а розвинута методика дає можливість проаналізувати

можливий перебіг процесу та зробити висновки і пропозиції щодо мінімізації фінансових ризиків.

Другий розділ монографії зосереджено на дослідженні динаміки індексу ПФТС з використанням моделі Гобсона-Роджерса. Застосовуючи середню зміну волатильності, запропоновано ефективний метод для моделювання, аналізу і стійкої оцінки важливих ринкових параметрів, які враховуються при формуванні індексу ПФТС, та може ефективно використовуватись в роботі з широким спектром фінансових інструментів та показників, що їх характеризують.

У третьому розділі доведено, що поведінка похідних фінансових інструментів, зокрема облігацій та опціонів, описується стохастичними процесами та допускає явне представлення їх функцій щільності розподілів, що може значно полегшити статистичну оцінку їхніх параметрів. Особливо це важливо для фондового ринку України, структура цінних паперів якого в основному представлена борговими цінними паперами – облігаціями. Враховуючи значні ризики, що супроводжують операції на фондовому ринку України, моніторинг ціноутворення деривативів, дослідження поведінки їх волатильності для аналізу дохідності дає змогу оперативно та обґрунтовано приймати управлінські рішення професійними учасниками фондового ринку.

Четвертий розділ монографії присвячений застосуванню спектральної теорії та теорії сингулярних і регулярних збурень для знаходження наближеної ціни деривативів, що задаються процесом з стохастичною волатильністю, яка залежить від багатьох швидко і повільно змінних чинників. Розроблено авторський алгоритм знаходження наближеної ціни двобар'єрних опціонів та знайдено явні формули для знаходження вартості деривативів на основі розкладу за власними функціями та власними значеннями самоспряжених



операторів з використанням крайових задач для сингулярних і регулярних збурень. Встановлено теорему оцінки точності наближення цін деривативів, за шкалами систем повільно і швидко діючих чинників від яких залежить волатильність похідних фінансових інструментів.

Методологічною основою проведеного дослідження є сукупність принципів, прийомів, загальних та спеціальних методів наукового дослідження. Інформаційну базу дослідження склали законодавчі та нормативні акти, звіти Національної комісії цінних паперів та фондового ринку, матеріали фондової біржі ПФТС, аналітичні матеріали міжнародних рейтингових агентств, монографічні та фундаментальні дослідження зарубіжних та вітчизняних вчених.

Практичне значення отриманих результатів полягає в тому, що ключові результати роботи доведено до рівня методичних розробок і практичних рекомендацій, які можуть бути використані в діяльності професійних учасників фондового ринку при здійсненні операцій з похідними фінансовими інструментами.

# РОЗДІЛ 1

## ТЕОРЕТИКО-МЕТОДОЛОГІЧНІ ОСНОВИ РОЗВИТКУ ФОНДОВОГО РИНКУ

### *1.1. Фондовий ринок як складна динамічна система*

Фондовий ринок визначають як «сферу потенційних обмінів», «інститут або механізм, що зводить разом покупців (пред'явників попиту) і продавців (постачальників) окремих товарів і послуг [1]. Особливість його полягає в тому, що він «має справу» з цінними паперами (ЦП), обіг яких визначає структуру ринку, його розміщення, правила функціонування.

У монографії Загорського В.С. [2] зазначено, що ринок грошей і цінних паперів становлять єдиний фінансовий ринок у його широкому розумінні. Розділення цих ринків можливе лише умовно для здійснення теоретичного аналізу кожного з них зокрема. Ринок цінних паперів вміщений у фінансовому контурі управління економікою і залучений до процесів розподілу і перерозподілу фінансових ресурсів і грошей.

Згідно з Постановою ВРУ «Про Концепцію функціонування та розвитку фондового ринку України», поняття фондового ринку ототожнюється з поняттям цінних паперів [3], проте деякі вітчизняні науковці схильні розділяти ці дві категорії. Зокрема, в роботі [4] її автор вказує на те, що фондовий ринок (ринок капіталів) представляється довготерміновими цінними паперами, а ринок цінних паперів включає, окрім довготермінових, ще й короткотермінові (рис. 1.1).



Рис. 1.1. Узгодження понять «ринок капіталу», «фондовий ринок» і «ринок цінних паперів»

В роботі [5] поняття фондового ринку та ринку цінних паперів ототожнюються (рис. 1.2). Однак зауважує автор, ринок цінних паперів є сегментом як грошового ринку, так і ринку капіталів, які також включають рух прямих банківських кредитів, перерозподіл грошових ресурсів через галузь страхування, внутрішньофірмові кредити, тощо.



Рис. 1.2. Узгодження понять «ринок капіталу», «фондовий ринок» і «ринок цінних паперів»

Економічна енциклопедія за редакцією Мочерного С.В. дає наступне визначення: «Фондовий ринок – це частина фінансового ринку як система економічних відносин з приводу випуску, розміщення, купівлі-продажу акцій, інших приватизаційних і похідних цінних паперів. На сучасному етапі розвитку структура фінансових інститутів ринку змінюється на користь реального сектору – корпоративних цінних паперів та їх похідних, тобто фондовий ринок

охоплює дедалі більшу частку фінансового ринку» [6]. Деякі автори, фондовий ринок, як і ринок цінних паперів, поділяють на первинний і вторинний, чим об'єднують обидва поняття.

В підручнику Загороднього А.Г., Вознюка Г.Л. категорії «фондовий ринок» та «ринок цінних паперів» є ідентичними і представлені як «частина ринку позикових капіталів, де здійснюють емісію та купівлю-продаж цінних паперів» [7].

Фінансово-економічний словник [8] також дає спільне визначення для понять фондового ринку та ринку цінних паперів і за рухом фінансових потоків на фінансовому ринку відображає місце фондового ринку серед валютного, кредитного ринків, а також ринку коштовних металів (рис. 1.3).

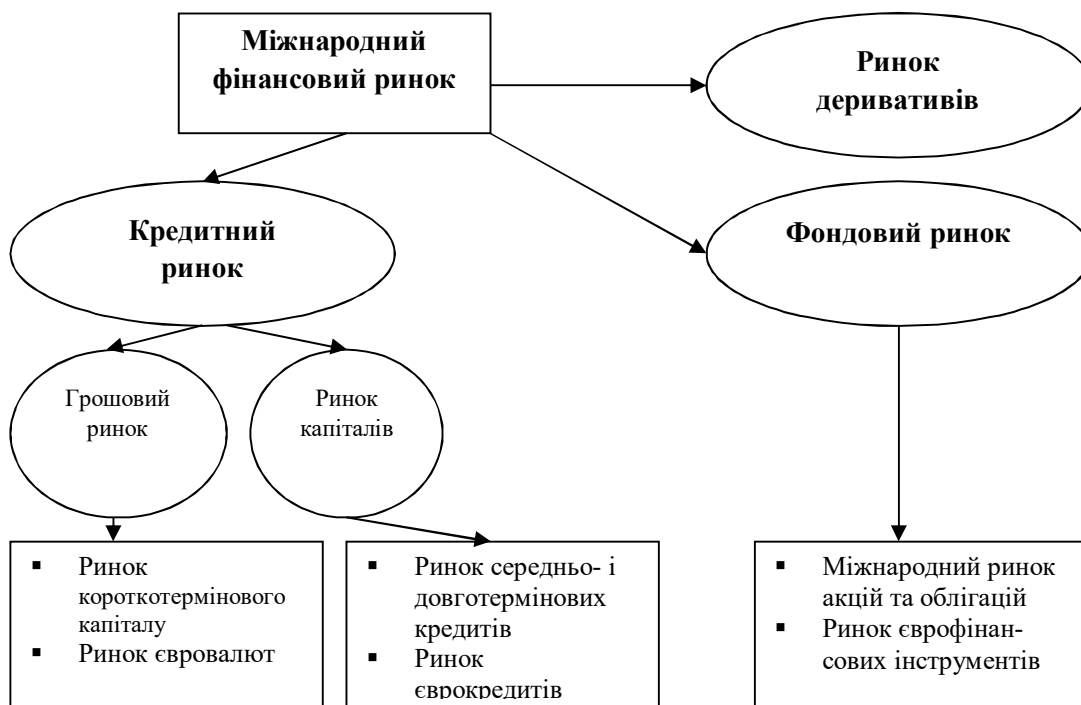


Рис. 1.3. Місце фондового ринку в класифікації міжнародних ринків за рухом фінансових потоків [8]

Таким чином, проблема узгодження термінології таких фінансових інституцій як «фондовий ринок», «ринок цінних паперів»,

«ринок капіталів», «грошовий ринок» на сьогодні залишається актуальною. Тому, слід користуватись термінологією, на основі якої сформовані та діють основні нормативно-законодавчі документи, що регулюють діяльність фондового ринку в Україні. Тобто в даній роботі будемо відштовхуватись від поняття «фондовий ринок», яке за змістом співпадає з поняттям «ринку цінних паперів».

Дослідженням основних засад функціонування фондового ринку займалися наступні вчені: Ф. Блек, М. Шоулс [11], Р. Мертон [12], Д. Кокс [13-14], І.С. Благун [15], В.М. Даніч [16], Н. Л. Іващук [17], О.І. Ляшенко [18-19], Н. К. Максишко [20], Л.О. Примостка [21], О. М. Сохацька [22] та низка інших. На жаль розвиток вітчизняного фондового ринку відстає від більшості європейських країн, Основними причинами насамперед є економічні умови формування ринку та недосконалість законодавства, щодо фондового ринку.

Основними показниками фондового ринку є найбільш агреговані змінні, які характеризують дохідність або рівень цін ринкового портфеля, але не окремих активів, що складають портфель. Головним індикатором фондового ринку України є індекс Першої Фондової Торгової Системи (ПФТС)

Як видно з окремих визначень, фондовий ринок розглядається як частина фінансового ринку і є системою економічних та правових відносин, пов'язаних із випуском та обігом фінансових активів.

Рух фінансових активів на ринку відбувається за посередництвом різноманітних фінансових інститутів [9]. Саме фінансові посередники забезпечують інвесторам оперативне вкладення коштів у фінансові активи та вчасне вилучення коштів з процесу інвестування.

На фондовому ринку, на відміну від грошового ринку, сума купівельних і платіжних засобів перетворюється на реальний капітал.

Доволі численну групу учасників фондового ринку становлять фінансові посередники, представниками яких є фінансові інститути:

банки, інвестиційні фонди та інвестиційні компанії, страхові організації, пенсійні фонди, торговці цінними паперами та ін. [10]. Фінансові посередники здійснюють розподіл вільних ресурсів, диверсифікують ризики, забезпечують рівновагу на ринку капіталів, забезпечують існування ліквідних ринків фінансових ресурсів тощо.

Як правило, допоміжні функції здійснюють суб'єкти інфраструктури: біржі, депозитарії, реєстратори, розрахунково-клірингові центри та консалтингові агентства.

Обіг фінансових ресурсів на фондовому ринку здійснюється за допомогою цінних паперів, які поділяють на пайові, боргові і похідні. Будучи інструментами фондового ринку вони дають можливість інвесторам управляти інвестиційним ризиком і одержувати прибуток шляхом здійснення купівлі-продажу.

Серед «похідних» інструментів виділяють наступні:

- опціони, що дають право власнику купувати або продавати цінні папери за фіксованою ціною до вказаного терміну;
- ф'ючерси – контракти на купівлю або продаж стандартної кількості цінних паперів у вказаний термін і за певною ціною;
- варанти – сертифікати, які дають право його власникам зробити підписку на певну кількість цінних паперів за наперед визначеною ціною і за певний період.

Основними причинами змін на фондових ринках стали такі макроекономічні тенденції: глобалізація економіки, нестабільність відсоткових ставок і валютних курсів, значний рівень інфляції, тощо. За таких умов вагоме місце займають похідні фінансові інструменти (деривативи), які дають можливість застрахуватися від небажаних наслідків.

Ринок деривативів є доволі молодим сегментом фондового ринку. Поява таких інструментів пов'язана із фінансовими змінами, які відбувалися на американському ринку у 1971 – 1973 роках. Крім

того, 70-ті роки були періодом значних коливань цін на ринку нафти, що також стало поштовхом до пошуку способів запобігання їхнім наслідкам. На жаль, цілком позбутись ризику не можливо. Його можна лише обмежити або перенести на інший суб'єкт. Власне задля зменшення ризику було створено новий тип фінансових інструментів, а саме, похідні інструменти, які ще називаються деривативами. Переломним у їхньому розвитку був 1973 рік [11], коли офіційно була опублікована модель ціноутворення опціонів, які дають можливість страхувати фінансові інвестиції від змін цін тих активів, на які ці інструменти виставляються.

Примостка Л.О дає таке означення деривативів: «Похідні фінансові інструменти – це контракти, які укладаються з метою перерозподілу фінансових ризиків і передбачають попередню фіксацію всіх умов проведення в майбутньому певної операції (купівлі, продажу, обміну, емісії ) з інструментом, який є предметом угоди» [21, с. 7]. Шелудько В.М. вважає, що похідні фінансові інструменти, або деривативи, - це інструменти механізм випуску й обігу яких пов'язаний з купівлею-продажу певних фінансових чи матеріальних активів [23, с.89]. Тоді як Голуб Г.Г., Кушнер Л.В. під категорією “деривативів” розуміють стандартний документ, що засвідчує право та/або зобов'язання придбати або продати базовий актив (цінні папери, матеріальні або нематеріальні активи, а також кошти) на визначених ним умовах у майбутньому [24, с.380].

Іващук Н. Л. дає наступне означення. Похідний інструмент (дериватив) – це такий фінансовий інструмент, вартість якого залежить від ціни (значення) іншого (первинного, базового) інструменту (активу), на який цей похідний інструмент було виставлено [17, с.30].

Згідно закону України про цінні папери та фондовий ринок [25], під деривативами розуміють фінансовий контракт, або фінансовий інструмент, вартість якого ґрунтується на ціні іншого інструменту

(активу), на який цей похідний інструмент було виставлено. Основою такого фінансового інструменту можуть бути активи (наприклад, сировинні матеріали, акції, житлові застави, нерухоме майно, облігації, позики), індекси (наприклад, відсоткові ставки, валютні курси, фондові індекси, індекси споживчих цін), або інші (такі як погодні умови).

Дослідженням ринку деривативів займалися низка українських науковців такі як: Г. Азаренкова [26], К. Абасова [27], С. Антонов [28], О. Квактун [29], О. Колодізев [30], Парандій [31], Л. Примостка [32], О. Сохацька [33], та інші.

Деривативи використовуються для хеджування, можливих збитків та додаткових втрат під час проведення зовнішньоторговельних валютних чи інших операцій у зв'язку зі зміною курсу валюти. За їхньою допомогою проводять арбітражні операції, тобто купівлю чи продаж валюти з метою отримання прибутку. Похідні інструменти забезпечують інформаційну функцію, згідно з якою інвестор отримує важливу інформацію про майбутній стан ринку а також стимулюючу функцію, бо деривативи характеризуються високою дохідністю, а також вони допомагають інвесторам здійснювати управління фінансовими, грошовими та товарними ризиками, та сприяють розвитку фінансових інновацій. Активізація ринку деривативів прискорює розвиток економіки та фондового ринку, а також а також зменшує ризики інвесторів. Деривативи дають можливість ефективно управляти ризиком, а також можливість відшкодувати, хоч би частково збитки внаслідок несприятливих для інвестора дій.

На сьогодні існує понад 1200 різних видів похідних фінансових інструментів, які дають можливість банкам, інвестиційним фондам та інвесторам контролювати ризик або як кажуть провести хеджування. Це означає, що фондовий ринок став незамінним елементом



підприємницької діяльності, що дозволяє не тільки попередити ризик але і збільшити оборотність фінансових ресурсів. Зараз на фондовому ринку використовується значна кількість деривативів, асортимент яких постійно розширюється, але основними є опціони, які можуть бути предметом обігу як біржового так і позабіржового ринку.

Н.Л. Іващук при дослідженні ціноутворення нестандартних опціонів розглядає Вінерівські процеси, що описують поведінку опціонів різного типу з Пуассонівським та логонормальним розподілами цін виплат [17].

У класичній теорії інвестицій на фондових ринках існує твердження, що найкращою мірою визначення інвестиційного ризику є стандартне відхилення норм прибутковості. Прийнято вважати, що чим більша волатильність прибутковості, тим більш ризикованим є фінансовий продукт.

Під час прогнозування основних фінансових показників фондового ринку волатильність використовують як один із основних параметрів для оцінювання можливих ризиків.

Слово волатильність походить від французького *volatile*, яке в свою чергу походить від латинського *volatilis*, що означає «летючий», «швидкий». Крім того французькою «волатильність» має значення «із завищеною ціною».

У фінансових аналітиків волатильність асоціюється зі ступенем зміни ціни. Високо волатильні активи коливаються в більш широкому діапазоні, ніж низькі. Однак, з економічної точки зору, давати строге кількісне визначення волатильності можна по-різному. Такі вчені, як П.І. Бідюк [34], А.А. Гриценко [35], А.Є. Кулаков [36], Н.К. Максишко [20], В.С. Романов [37], В.В. Соловійова [38], В. Твардовський [39], М. Чекулаєв [40] користуються поняттям волатильності як випадкового відхилення певних величин від їхнього тренду. В найпростішому випадку це коливання випадкової компоненти часового ряду.

В роботі [40] наведено таке визначення волатильності. Волатильність є мірою ризику ринкового фінансового інструмента та випадковою складовою зміни ціни фінансового інструмента, що розглядається  $r = m + v$ , де  $r$  – зміна ціни за певний проміжок часу;  $m$  – середня зміна ціни (тренд);  $v$  – волатильність, випадкова величина (часовий ряд) з нульовим математичним сподіванням.

Кузнєцов [40], під поняттям волатильності, розуміє мінливість значень параметрів ринку, таких, як відсоткові ставки або курси валют, ціни акцій або товарів. А. Лаубш [39]. розуміє волатильність як характеристику, що визначає мінливість фінансових результатів використаного інструмента. М.А. Роговий [40] волатильність визначає як статистичний показник, що характеризує тенденцію ринкової ціни або доходу із зміною часу. Тобто вона є одним з найважливіших фінансових показників в управлінні фінансовими ризиками, і є мірою ризику використання фінансового інструмента на заданому проміжку часу. Найчастіше вираховується середня волатильність. Виражається волатильність в абсолютному або у відносному від початкової вартості значенні.

Розмах коливань будь-якого біржового активу піддається єдиному закону, після періодів з високою волатильністю йдуть періоди згасання, ринок заспокоюється і настає мало волатильний період. Через якийсь час фаза низької волатильності знову змінюється стадією високо волатильного ринку. Таким чином, постійно відбувається перехід з одного стану в інший

Чим довше триває період значної волатильності, тим більш ймовірно, що швидко почнеться період низької волатильності. І чим довше на ринку переважає низька волатильність, тим більш ймовірно, що швидко настане період з високою волатильністю. Вузькі діапазони змінюються широкими, а широкі - вузькими

Зміна ціни за деякий інтервал розглядається як випадкове відхилення від тренду зумовлене волатильністю, яка є випадковою величиною часового ряду. Моделювання даної випадкової величини є основою в більшості випадків для оцінки ринкових ризиків.

У найпростішому випадку волатильність розглядається, як нормально розподілена випадкова величина ("білий шум") з дисперсією що дорівнює дисперсії зміни ціни за проміжок часу.

Щоб розрахувати волатильність в такий спосіб потрібно розглянути значну кількість інтервалів зміни цін. Наприклад, для розрахунку одноденної волатильності потрібно використати тримісячну вибірку одноденної зміни ціни активу.

Волатильність змін ціни акцій характеризує як ринок схильний до флуктуацій, тобто, відхилень цін від попередніх значень. При проведенні аналізу волатильність часто розглядають як локальне середнє значення модуля зміни ціни.

Згідно з [40] волатильність – це рівень коливань вартості фінансового інструменту залежно від коливань ринку. Чим сильніше відхилення ціни активу від середнього значення, тим вищим є рівень ризику цього активу. Це одна з гіпотез теорії оптимального інвестиційного портфеля, який пов'язав високу волатильність з непередбачуваністю поведінки ціни, а, отже, і з підвищеним ризиком. Волатильність є показником осмисленості дій учасників фондового ринку. Зі зростанням ціни акцій багато гравців намагаються підхопити тренд і таким чином надають йому ще більший імпульс у розвитку. Це може продовжуватися до тих пір, поки не вичерпується потік зацікавлених осіб, після чого динаміка ціни може змінитися на протилежну.

Серед таких гравців багато тих, які не задаються питанням щодо реальної вартості активів. У прагненні заробити вони намагаються вгадати настрої натовпу і пливуть за течією. Інші учасники фондового

ринку купують цінні папери осмислено, маючи чітке уявлення про вартість активу і план заробітку на інвестуванні коштів в такий бізнес. Деякі купівельно спроможні інвестори, не бажаючи провокувати серйозні коливання на ринку, купують значні пакети акцій за фіксованою ціною. Логіка поведінки цих інвесторів дозволяє зробити наступний важливий висновок: при здійсненні операцій з цінними паперами слід орієнтуватися, перш за все, на вартість бізнесу, а поведінку натовпу використовувати у власних інтересах. Звідси випливає, що чим більше людей роблять осмислені угоди, що ґрунтуються на вартості та економічних показниках бізнесу, тим нижчою буде волатильність, оскільки у решти гравців буде менше можливостей порушувати стабільність ринку.

Таким чином, волатильність є ключовим поняттям для оцінки ринкового ризику та прийняття рішень щодо вкладення коштів. Будь-яке інвестиційне рішення – це ставка на невідоме майбутнє, а рух цін є тією змінною, для якої будуються прогнози. Всі інвестори займаються прогнозуванням волатильності і тому шукають методи її оцінки. Одним з найбільш ефективних таких методів є динамічна модель зміни волатильності американського економіста Роберта Енгла [41], яка була ним розроблена в 1982 році. Модель базується на ідеї про те, що більшість часових рядів у макроекономіці мають у своїй основі стохастичний (ймовірнісний) тренд. Саме тому короточасні відхилення можуть мати довгострокові наслідки. Цей висновок має суттєве практичне значення для довгострокового прогнозування, оскільки інвестори та фінансові установи мають потребу у прогнозних оцінках волатильності на тиждень, місяць, рік, тощо. Хоча реальна волатильність є змінною величиною, економісти довгий час використовували тільки такі статистичні методи, що ґрунтувались на передумові про її усталеність. Статистичні моделі дохідностей активів можуть пояснити тільки їхні незначні щоденні зміни. Більша частина

волатильності, таким чином, потрапляє у випадкову помилку або, інакше кажучи, у помилку прогнозу за моделлю.

У стандартних статистичних моделях вважається, що очікувана дисперсія випадкової помилки не змінюється в часі. Відповідно, вони не відображають значних коливань цін та дохідностей активу. Натомість Р.Енгл припустив, що дисперсія випадкової помилки в деякій статистичній моделі в певний період часу систематично залежить від раніше реалізованих випадкових помилок. У технічних термінах це означає, що випадкова змінна характеризується авторегресивною умовною гетероскедастичністю. Тому його підхід одержав скорочену назву ARCH.

Вперше модель ARCH була використана Р.Енглем для вивчення волатильності інфляції. Але найбільш ефективним стало застосування даної моделі на фінансовому ринку, де діяльність економічних суб'єктів спрямована на управління різними типами ризиків та їхню оцінку. Інвестори порівнюють очікувані доходи від активу та ризик. Банки та інші фінансові установи хотіли б мати гарантію того, що вартість їхніх активів не впаде нижче певного мінімального рівня, який би загрожував платоспроможності банку. Подібні оцінки не можуть бути зроблені без вимірювання волатильності дохідності фінансових активів.

На основі моделі Р.Енгла можна зробити висновок щодо того, наскільки виправданим є ризик капітальних вкладень в умовах тих чи інших ринкових коливань. Якщо на ринку спостерігаються сильні коливання, то це створює значні загрози ризику навіть капіталів банків. Тому банки використовують модель змінної в часі волатильності з метою кількісного урахування того, яку частку їхніх активів доцільно вкласти в ті або інші фінансові інструменти, щоб ризик був незначним.

Відкритий Р.Енглom метод аналізу економічних часових рядів дозволив значно достовірніше прогнозувати тенденції зміни ВВП, споживчих цін, процентних ставок, біржового курсу та інших економічних показників не тільки на найближчий день чи тиждень, а й навіть на рік вперед. Так як регулятори фінансового ринку вимагають від кредитних установ застосування індикаторів вартості, що піддаються ризику, під час контролю необхідного капіталу, то застосування моделі ARCH стає обов'язковим (необхідним) інструментом для оцінки ризику у фінансовому секторі.

Модель змінної в часі волатильності або ARCH-модель використовується переважно для оцінки вартості ризиків портфельних інвестицій. Наприклад, розрахунок майбутньої волатильності відіграє значну роль у визначенні цін на опціони та інші фінансові деривативи. Сьогодні найбільш адаптованою моделлю для обрахунку вартості портфеля цінних паперів, що піддається ризику, та змінної волатильності є модель GARCH, що була розроблена Р.Енглom у 1986 році спільно із Т.Боллерслом [42]. Це узагальнена авторегресійна модель гетероскедастичності, яка передбачає, що на поточну динаміку волатильності впливають як попередні зміни показників, так і попередні оцінки дисперсії, тобто так звані «старі новини» ринку. Крім цього, існують різні модифікації GARCH-моделей, такі, як AGARCH, EGARCH тощо, які застосовуються у різних специфічних умовах. Наприклад, AGARCH або асиметрична GARCH-модель використовується для вимірювання динаміки дисперсії у періоди підйому або спаду на фінансових ринках [43-44].

Специфікація волатильності як стохастичного процесу є природною, що можна пояснити на значній кількості емпіричних даних, які обґрунтовують властивості розподілів, які виступають при трансформації витрат. Наприклад, спостережуване співвідношення між величиною волатильності і активом може бути пояснене рівнем

залежності волатильності згідно з моделлю (CEV) варіації сталої еластичності, чи моделлю Кокса і Росса [14]. Стохастична волатильність може також виникнути ендогенно за допомогою рівноваги, яка моделює поведінку учасників ринку.

Більш загальні стохастичні моделі волатильності запропоновані Хулом і Вайтом [45-46], побудовані на ідеї, що коректна специфікація волатильності може мати загальне і аналітичне трактування. Дуже часто використання правдоподібних параметрів, аналогічно, як при від'ємній кореляції між волатильністю і ціною, на практиці не відповідає фактичним цінам опціонів. При емпіричній верифікації відбувається пошук структурних параметрів за допомогою відбору істотно різних часових рядів для проведення оцінки.

Моделювання та прогнозування динаміки цін фінансових інструментів є важливим елементом інвестиційної діяльності. Оскільки вони володіють високим рівнем фінансового важелю і виконання зобов'язань за ними здійснюється у майбутньому. Ціни на деривативи мають тенденцію до змін і передбачити їх поведінку стає все складніше. За допомогою похідних фінансових інструментів здійснюються різноманітні операції з фінансовими продуктами, придатними для купівлі-продажу [47-48]. Ефективність прийняття інвестиційних рішень під час діяльності на фондовому ринку України є головним чинником зацікавленості в ньому інвесторів. Для успішних фінансових результатів діяльності учасникам ринку цінних паперів необхідно добре орієнтуватися в процесах ціноутворення деривативів. Операції з похідними цінними паперами займають важливе місце у фінансовій діяльності фондового ринку бо кожному учаснику потрібно хеджувати ризики, що отримати додатковий прибуток на основі спекуляцій на фондовому ринку [49]. Тому деривативи є одним із основних інструментів ринку цінних паперів. Важливим завданням є дослідження стану і динаміки вітчизняного фондового ринку в тісному

взаємозв'язку з фондовими ринками інших країн, аналіз волатильності фінансових інструментів з метою підвищення ефективності інвестиційних операцій. В даний час розроблено багато інших підходів до обчислення локальної та стохастичної волатильності, які описують спільну динаміку ціни базового активу, за допомогою моделей CEV [50-51], JDCEV [52], Heston [53], але застосування цих моделей вимагає використання спеціальних функцій та чисельного інтегрування складних функцій. Це означає що можуть бути великі значні в обчисленнях, але при розгляді часових залежностей значна частина моделей стає нестійкою. Для безпосереднього обчислення потрібні інші методи знаходження ціни деривативів [54].

Таким чином аналіз фондового ринку методами нелінійної динаміки, ґрунтується на побудові адекватних моделей його розвитку, з врахуванням внутрішніх структурних та динамічних властивостей. Саме нелінійні методи дослідження фондового ринку дозволяють інтерпретувати спектр його поведінки, який є надзвичайно чутливим до зміни економічних трендів, а дані фондових індексів можна використовувати для побудови індикаторів. Якщо окремі змінні корелюють між собою, стандартне відхилення втрачає своє значення у визначенні розмірності ризику. У випадку коли розподіл ставок прибутковості фінансових інструментів не описується нормальним розподілом, суттєво зменшується ефективність стандартного відхилення як розмірності ризику. Тоді теорія хаосу пропонує рішення, а саме, фрактальну розмірність часових рядів. Прийняття гіпотези, яка стверджує, що рух курсів біржових акцій описується законами теорії хаосу, виключає застосування технічного аналізу для прогнозування майбутніх цін на акції, оскільки між двома даними концепціями підходу до аналізу часових рядів існує досить вагома суперечність. Це пояснюється тим, що теорія хаосу виключає повторюваність, всупереч наявності у ній поняття циклу, а технічний



аналіз зосереджений на засадах повторюваності, і це дає можливість технічним аналітикам ідентифікувати різного роду формації.

Неповторність властива також теорії ефективності фінансових ринків, проте ця теорія обтяжена значною кількістю припущень, які не працюють на практиці. Тому, доречним буде дослідити можливості, які теорія хаосу пропонує для опису явищ на фінансових ринках.

Теорія хаосу має перевагу над теорією ефективності фінансових ринків – вона не вимагає виконання жодних умов. Єдиним обмеженням стає довжина часових рядів, але відповідна довжина часових рядів також є необхідною для повноцінного застосування методів технічного аналізу і методів перевірки ефективності [55].

Розраховуючи локальний коефіцієнт Херста і волатильність, можна прослідкувати схильність часового ряду фінансових показників до флуктуацій (змін) та визначати передбачуваність ряду [56].

Використовуючи теорію ефективного ринку, яку започаткував Ю. Фама. Можна легко довести, що фондовий ринок є цілком ефективним і вся інформація відносно емітентів цінних паперів та ризиків щодо них, повністю відображається на їхній вартості. Тобто найбільше приділяється уваги інформаційній ефективності, а не операційній (можливості оперативно проводити купівлю чи продаж) цінних паперів.

Вітчизняні науковці проводять наукові дослідження щодо раціональної поведінки інвесторів на фондовому ринку при виконанні гіпотези ефективного ринку щоб прийняті рішення інвесторами на фондовому ринку ґрунтувалися на прогнозах щодо ціноутворення на фінансові активи,. При цьому прикладні розробки вітчизняних науковців щодо прогнозування ціноутворення на фондовому ринку є недостатньо вивченими і стосуються тільки аналітичного супроводу прийняття рішень інвесторами загалом. О. Ляшенко було досліджено динаміку фондових індексів України за допомогою

мультифрактального аналізу, виявлено що фондові індекси мають фрактальні властивості, та служать своєрідним барометром стану фінансового ринку та і економіки загалом, розроблено алгоритм прийняття рішень інвестором на фондовому ринку з використанням теорії асиметричної інформації і низки сучасних підходів до моделювання поведінки цін (кореляційного й факторного аналізу, вейвлет-аналізу, когерентного аналізу,) [19]. Г.Шуклін розробив алгоритм прийняття рішень щодо інвестування ринку цінних паперів, які досліджуються на основі фундаментального і технічного аналізів із використанням диференціальних рівнянь із часовим лагом і методами нечіткої логіки [57].

Згідно з теорією випадкового руху, яку розробив Л. Башельє поточна ринкова вартість та дохідність цінних паперів є статистично незалежними. Згідно з цією теорією прогнозувати ціноутворення показника фондового ринку на основі даних про його динаміку за попередній період неможливо, тому, що цінний папір має внутрішню вартість, його ринкова ціна змінюється випадковим чином і відображає інформацію про його емітентів.

Р.Еліот розробив теорію хвиль, згідно з якою динаміка ціноутворення на фондовому ринку різного роду фінансових активів, ґрунтується на певних моделях, а інвестори їх можуть розпізнати та використовувати для прогнозування цін у майбутньому.

Згідно з теорією ширини ринку, розробником якої є Р. Расел, можна аналізувати протилежно спрямовані тренди ціноутворення на різні групи цінних паперів, коли курс одних на ринку зростає, а інших знижується. Перевагою цієї теорії є порівняння кількості цінних паперів, ринкова вартість яких знижується, та кількості тих паперів, ринкова вартість яких зростає, а потім проводити висновки щодо інвестиційних рішень.

Відносно технічного аналізу, то основним є твердження, що ціни рухаються в певному напрямку, і цей рух ґрунтується на попередніх значеннях цін. Однак на курс, крім тиску його минулих значень і поточних тенденцій, впливає також чимало інших чинників фундаментального характеру. На значних за тривалістю проміжках часу вплив більш-менш незначних чинників може перетворюватися в “шум”, тобто чим менший є проміжок часу, тим значніший їхній вплив на ціноутворення. Тобто на незначних за тривалістю проміжках часу коливання та інші фінансові змінні можна вважати випадковими величинами.

На сьогодні поширена думка, що на фондовому ринку зручно проводити аналіз в двох напрямках: фундаментальному і технічному. Технічний аналіз, використовує історію закономірностей, а фундаментальний аналіз, базується на знаннях економічних законів, різних чинників ціноутворення, а також попиту і пропозиції на цінні папери.

Постає проблема в тому що технічні індикатори для розрахунку своїх значень використовують процеси багаторазового усереднення, зважування та інше. На фондовому ринку коливання цін мають випадковий характер, бо учасники ринку не можуть один з одним домовитися, тому застосування сучасних технічних індикаторів і середніх величин, таких як, наприклад ковзне середнє, не завжди приводить до точного результату.

Новий напрям технічного аналізу відкриває спектральний аналіз фінансових та фондових ринків, який є прикладним апаратом теорії сигналів, яка широко використовується в цифрових системах. Основною його перевагою є те, що для кожного сигналу можна застосувати перетворенням Фур'є і розвинути в частотній області. За допомогою цього перетворення можна дізнатись «частоту» ринку, тобто проаналізувавши спектр, зрозуміти наскільки часто

відбуваються короткострокові або довгострокові коливання цін і які вони за тривалістю. Після цього знаходять ймовірність того, до якого циклу відносяться коливання, і відповідно, знаючи, коли вони закінчуться, можна прийняти відповідне рішення про купівлю або продаж цінного паперу.

Ясно що передбачений за допомогою цього методу момент, ніколи не співпаде з реальним на сто відсотків внаслідок не детермінованості ринку, але чіткий момент закінчення тенденції буде однозначно визначено. Якщо досліджувати точніше і глибше, то можна з високою точністю визначити фазу ринкового циклу, тому що, як відомо, частота і фаза пов'язані між собою диференціальним рівнянням, і воно має місце для сигналів в цифрових системах в загальному випадку, так і при аналізі фондових ринків в зокрема.

Процеси ціноутворення на фондовому ринку на основі класичних методів аналізу фондового ринку є не повністю ефективними тому зручно використати нові підходи та методи. Використавши спектральний аналіз, а саме регулярні та сингулярні збурення для прогнозування часових рядів фінансових показників. Можна розкласти часовий ряд на складові, які легко інтерпретувати. При цьому метод не вимагає стаціонарності ряду, знання моделі тренду, а також відомостей про наявність у ряді періодичних складових та їх періодів. Дана методика дозволяє розв'язувати багато задач.

В роботі застосовано методичні та теоретичні основи економіко-математичних методів аналізу часових рядів для прогнозування динаміки фондових індикаторів, за допомогою спектрального аналізу, з метою оптимізації ефективності діяльності учасників фондового ринку.

Спектральний аналіз поєднує в собі елементи класичного аналізу часових рядів, багатовимірної статистики, динамічних систем та обробки сигналів.

Методи спектрального аналізу застосовуються для дослідження закономірностей динаміки часових рядів показників фондового ринку і дозволяють ефективно визначати кількісні сторони закономірностей, та відслідковувати динаміку процесів, що протікають на фондового ринку.

Однією з поширених методик є знаходження оцінок Тюкі-Хеннінга і Парзена для виявлення і вивчення закономірностей часових рядів значень фінансових ресурсів з використанням методів теорії системного моделювання на основі спектрального аналізу. Спектральний аналіз дає можливість побудувати оцінки спектральної щільності які дозволяють проводити аналіз періодичних залежностей фінансових показників у стохастичній динаміці [58-59].

За допомогою крос-спектрального аналізу проводять дослідження залежності між часовими рядами значень фінансових ресурсів, на основі яких будують моделі виявлення закономірностей, що визначають динаміку процесів, які протікають в рамках фінансових ринків, знаходять емпіричні значення когерентності, фазового зсуву і коефіцієнта підсилення. Діаграми когерентності і фазові діаграми можуть бути потужним інструментом для дослідження залежності між рядами значень фінансових показників, та дозволяють ефективно визначати кількісні сторони закономірностей, які визначають динаміку процесів, що протікають на фондовому ринку. Інформація яку одержують в процесі застосування крос-спектрального аналізу у випадку дослідження зв'язків між деякими показниками стає ефективним інструментом локалізації першопричин таких зв'язків [59].

Спектральний аналіз (англ. Spectrum analysis) - скорочена і узагальнена назва для SSA і MSSA [59]. MSSA (Multi-Channel Singular Spectrum Analysis) багатовимірний сингулярний спектральний аналіз - сукупність математичних методів, для аналізу рядів динаміки і

часових рядів. За допомогою MSSA досліджують стан та динаміку цінних паперів на біржі. Багатовимірний сингулярний спектральний аналіз дає можливість визначити майбутню поведінку ціноутворення на фондовому ринку, а також дослідити динаміку різних біржових індексів. Потрібно проаналізувати сукупність хвильових, трендових і шумових показників. Метод, за допомогою якого проводиться дослідження та обробка часових рядів, носить назву «гусениця». За його допомогою трейдери прогнозують динаміку ціни.

SSA (Singular spectrum analysis) сингулярний спектральний аналіз є математичним методом аналізу часових рядів [59]. Динаміку ціноутворення розглядають як сукупність хвильових, шумових і трендових складових. Сингулярний спектральний аналіз використовується для визначення найбільш ймовірної поведінки цін в найближчому майбутньому. SSA є частинним випадком MSSA.

Метод сингулярного спектрального аналізу застосовується в багатьох галузях науки, а найчастіше в економіці, метеорології, астрономії. SSA використовують для згладжування початкових даних та прогнозування цін на ринку, а також для забезпечення знаходження максимально повної інформації про динаміку процесу на основі серії часових рядів. У випадку часових рядів, які описують стохастичні процеси, моделювання яких зводиться до стохастичних диференціальних рівнянь, зокрема рівнянь дифузії, виродженої дифузії, розклад спектральної функції зводиться до розкладу фундаментального розв'язку за власними функціями оператора, що відповідає цій змодельованій задачі. Це відповідає тому, що в нескінченно вимірному Гільбертовому просторі інтегровних з квадратом функцій, є розклад функції по базису з власних функцій. В ролі функції, яку розкладають береться ціна, а фундаментальний розв'язок, або щільність розподілу при наближенні до початкових чи крайових точок, веде себе як білий шум [60].

В роботі розроблено підхід для здійснення моніторингу фінансових потоків, що продукуються двобарерними Бесселівськими процесами. Тобто, потрібно подати щільність у вигляді розклад через функції Бесселя першого і другого роду, а також їхні похідні. Оскільки ряди Бесселя добре досліджені, а власні значення поставленої крайової задачі затабульовані то розклад щільності в ряди за функціями Бесселя є дуже зручним для використання на практиці при знаходженні цін опціонів з потрібною точністю.

Проблема такого типу розглядається вперше. Для таких задач є нерозв'язаною задача коли дифузія Бесселя має нелокальну волатильність залежну від різних чинників, але така проблема є лише частково розв'язана для звичайних дифузійних процесів породжених Броунівським рухом. Тому потрібні нові підходи і аналіз вже відомих для розв'язання задач такого типу.

В роботі розглянуто фінансові потоки породжені процесами Бесселівської дифузії представивши їх по системі функцій Бесселя першого роду при умові, яка враховує лінійну комбінацію потоку та його просторової похідної. Таке представлення дає можливість обчислити величину ринкового портфеля акцій та забезпечує вимір внутрішньої волатильності на ринку в будь-який момент часу, дозволяє дослідити динаміку фондового ринку.

Розклад функції Гріна по системі Бесселивих функцій дається аналітичною формулою за допомогою якої зручно обчислювати величину фінансових потоків.

У [61] описано застосування процесів Бесселя на фінансових ринках та співвідношення з інтегралом від геометричного броунівського руху. В [62] зроблено огляд ціноутворення азійських опціонів за допомогою процесів Бесселя.

У загальній теорії розглядаються більш ширші припущення на стохастичні процеси, зокрема такі як мартингальні, але не завжди існує

аналітична формула для зображення розв'язку тому потрібно припустити що процеси марківські.

В роботі дифузійний процес використано для знаходження величини фінансових потоків, які представлені через функції Бесселя першого роду, зокрема розглянуто задачу Штурма-Ліувілля де граничні умови використовують функції Бесселя та їх похідні.

Спектральний метод застосовано до похідних фінансових інструментів, ціноутворення через представлення ціни похідного активу нейтральною до ризику очікування деякої функції від майбутньої вартості основного процесу.

Досліджено Бесселівські процеси, які є узагальненням процесу Орнштейна-Уленбека для бар'єрних опціонів [63]. При певних характеристиках дифузійний процес з оператором Бесселя ніколи не перетворюється в нуль цим випадкам присвячено ряд робіт [64-65], розглянемо ті випадки коли похідна фінансового потоку Бесселівського процесу може перетворитися в нуль. При таких умовах визначають надлишкову швидкість росту портфеля акцій, а також пояснюють як перевищення темпів зростання ринкового портфеля забезпечує вимір внутрішньої волатильності на ринку в будь-який момент часу [65].

Спектральне подання для щільності загальної одновимірної дифузії було отримано в роботі [65]. З того часу, спектральна теорія стала важливим інструментом для аналізу фінансових моделей дифузії, а саме в дослідженні розвинень по власних функціях лінійних операторів багато задач, пов'язаних з оцінкою деривативів розв'язуються за допомогою методів спектральної теорії, тому вона широко застосовується у фінансовій математиці. Спектральні методи, є потужним інструментом для аналітичного ціноутворення, пов'язаного з оцінкою цінних паперів.



Спектральну теорію використовували багато науковців, а саме для прогнозування цін опціонів [66], знаходження відсоткової ставки на цінні папери [67], моделювання волатильності фінансових активів [68]. Як спектральна теорія так і стохастичні моделі волатильності стали незамінним інструментом у фінансовій математиці, це пов'язано з тим, що ціни двобар'єрного опціону підпорядковуються броунівському руху і корелюють з волатильністю [69]. Дослідження стохастичної волатильності, зокрема волатильності активу, що лежить в основі похідної та контролюється нелокальною дифузією [70].

Моделі динаміки короткострокових відсоткових ставок розглядались в роботі Васічека [66] для ціноутворення деривативів. Значний внесок у теорію відсоткових ставок зроблено в роботах [71-73] а саме: знаходження кредитного спреда інструментів кредитного ринку, визначення цін опціонів на відсоткову ставку, визначення ризику і доходності похідних фінансових інструментів фондового ринку. Розроблені цими вченими моделі мають свої переваги та недоліки, але кожна з них застосовується для підвищення ліквідності фінансових ринків. Використання складніших моделей, незважаючи на свою теоретичну обґрунтованість, зумовлює отримання складних багатопараметричних функцій кривої прибутковості, а це спричиняє значні похибки в обчисленнях.

Використовуючи спектральний аналіз В. Лінецький [74] застосував спектральну теорію самоспряжених операторів до різних моделей, а зокрема до моделі Васічека. В роботі М. Лоріга [65] розглядалися короткострокові відсоткові ставки, описані моделлю Васічека з стохастичною волатильністю, залежною від двох чинників, один з яких швидко, а другий повільно мінливі. спектральна теорія та теорія сингулярних і регулярних збурень застосована до самоспряжених операторів у гільбертових просторах, які описують процеси з багатовимірною стохастичною волатильністю, що має 1-

швидко мінливих,  $n$ -повільно мінливих чинників. Зокрема дана теорія застосована до короткострокових відсоткових ставок, що описуються моделлю Васічека. Обчислено наближену ціну облігацій та їх дохідність. Застосувавши теорію Штурма-Ліувілля, альтернативи Фредгольма, а також аналіз сингулярних і регулярних збурень в різних часових шкалах, отримано явні формули для наближень цін облігацій та дохідності.

Модель  $CEV$  (constant elasticity of variance model) є узагальненням моделей геометричного броунівського руху. Вперше ця модель запропонована для дослідження ціни європейського опціону [75]. Модель  $CEV$  ґрунтується на припущенні, що ризик-нейтральний процес, який описує ціну акції  $S$  має вигляд

$$dS = (r - q)Sdt + \sigma S^\alpha dz,$$

де  $r$ -безризикова відсоткова ставка,  $q$ -дивідендна дохідність,  $\sigma$ -параметр волатильності,  $\alpha$ -додатня константа,  $dz$ -вінерівський процес. При  $\alpha = 1$  модель  $CEV$  співпадає з моделлю геометричного броунівського руху, якщо  $\alpha < 1$  то при зменшенні вартості активу його волатильність збільшується, якщо  $\alpha > 1$  то при зростанні вартості активу його волатильність також зростає. Це відповідає усміщці волатильності і означає, що волатильність є зростаючою функцією залежною від ціни активу.

Порівнюючи з моделями геометричного броунівського руху переваги моделі  $CEV$  полягають у тому, що коефіцієнт нестабільності співвідноситься з ціною ризикованих активів і може пояснити емпіричні упередження, такі як нестабільність посмішки волатильності [76]. Модель  $CEV$  зазвичай застосовується для розрахунку теоретичної ціни, чутливості та передбачуваної волатильності опціонів [77-78]. Протягом останніх років проблема інвестицій для пенсійного фонду є дуже важливою, виявилось що

модель *CEV* успішно застосовується для вивчення оптимальної інвестиційної стратегії [78-80].

В кінці минулого століття увагу вчених фінансистів привернула проблема зв'язку між ціною активу та його волатильністю [81]. Було встановлено, що ціна активу веде себе як волатильність. У відомій моделі Блека-Шоулза волатильність є сталою [82]. Це зумовило низку праць для уточнення цієї моделі. Емпіричними дослідженнями встановлено, що волатильність є випадковою величиною залежною від часу [83]. В [84] запропоновано аналітичні моделі, що мають стохастичну волатильність. В. Лінецький [80] та досліджували модель стохастичної волатильності зі стрибками. Модель *CEV* є узагальненням моделей динамічної волатильності. Зокрема вона дає можливість дослідити ціну активів, які змінюються неперервно в часі. Цьому присвячені ряд робіт [85-86]. У роботі розглядається модель *CEV* з багатовимірною стохастичною волатильністю. Використовуючи спектральну теорію самоспряжених операторів у гільбертовому просторі та хвильову теорію сингулярних і регулярних збурень встановлено аналітичну формулу наближеної ціни активів, які описуються моделлю *CEV* з багатовимірною стохастичною волатильністю.

Використовуючи методи з спектральної теорії та теорії сингулярних і регулярних збурень, можна знайти наближену ціну двобарерних опціонів ОрнштейнаУленбека з багатофакторною волатильністю, як розклад за власними функціями використовуючи інфінітезимальні генератори  $(1+n+1)$  вимірної дифузії, тобто дифузія залежить від однієї локальної змінної,  $l$ -вимірною швидкозмінного чинника і  $n$ -вимірною повільно змінного чинника. Дана робота є розширенням робіт [85-86], в [65]  $l=1$  та  $n=1$ .

Процес  $X$  може репрезентувати багато економічних явищ, та процесів. Наприклад, величину запасів, ціну індексу, надійний

короткий відсоток і т.д. Ще ширше,  $X$  це зовнішній чинник, який характеризує вартість будь-яких із згаданих вище процесів.

Спектральна теорія стала важливим інструментом для аналізу дифузії, а саме в дослідженні розвинень за власними функціями лінійних операторів. Для фінансових моделей дифузії є основним процесом, тому не дивно, що методи спектральної теорії внесли свій вклад у фінансову математику. Зокрема, багато проблем, пов'язаних з оцінкою похідних активів були вирішені аналітично за допомогою методів спектральної теорії. Використовуючи методи з спектральної теорії та теорії сингулярних і регулярних збурень, можна знайти наближену ціну деривативів як розклад за власними функціями використовуючи інфінітезимальні генератори  $(1+n+1)$  вимірної дифузії, при  $l=1$  та  $n=1$  отримаємо методу роботи [65], тобто дифузія залежить від однієї локальної змінної, одновимірного швидкозмінного чинника і одновимірного повільно змінного чинника.

У роботі розглянуто моделі без дефолту процесу дифузії з інерцією, коефіцієнти яких залежать від змінних  $(t, x, y)$  і для знаходження цін деривативів використовуємо розклад у ряди Тейлора для вироджених дифузійних процесів. Зокрема в працях [85-86] кореляційні матриці є не вироджені, а в нашій роботі є виродженими, тому застосування цієї ідеї вимагає нових підходів викликаних труднощами виродження.

Випадкові процеси, які описуються рівнянням дифузії з інерцією широко використовуються в теорії масового обслуговування, зокрема в теорії черг. Найчастіше такі процеси відбуваються на фондових ринках при ціноутворенні європейських та азійських опціонів. теорія ціноутворення деривативів та дослідження поведінки волатильності для аналізу дохідності є необхідними для гнучкості в прийнятті управлінських стратегічних рішень менеджерами. Обґрунтованість стратегічних рішень дозволяє менеджерам здійснювати покрокові

додаткових інвестицій з метою збереження стратегічних позицій компанії на фондовому ринку. Як правило, високий рівень волатильності дає менеджеру більше можливостей для зміни своїх рішень у майбутньому. Волатильність має важливе значення для інвесторів при ціноутворенні декількох різних серій опціонів з різними цінами виконання і термінами погашення. Оскільки в моделі Блека-Шоулса [60] вона є сталою то в цих випадках можуть виникнути спекулятивні зміни в ціні які неможливо перевірити без наявності певного роду спеціалізованих знань. Це один із прикладів того, як волатильність ціноутворення опціонів, пов'язана з принципами моделювання та управління ризиками на фінансовому ринку. Тому потрібно використовувати моделі із змінною волатильністю.

Для зручності обчислень, використано припущення що ринок є без арбітражу, нульових відсоткових ставок і без дивідендів. Усі отримані результати можна легко поширити на детерміністичні відсоткові ставки. Крім того, результати цієї роботи можна розширити на моделі з  $n$  не локальними чинниками волатильності. Хоча для простоти проводимо аналіз для одного не локального чинника з виродженням.

Для побудови наближеного розв'язку задачі Коші розвинуто ідеї з [87], які засновані на розширенні застосування інтегро-диференціальних операторів ціноутворення типу Леві. Метою роботи є впровадження єдиного підходу до ціноутворення та імплікованої волатильності на основі класичного наближення рядами Тейлора.

Розглянуто вироджений дифузійний процес, що описує динаміку ціни та імплікованої волатильності, в залежності від часу, індексів базових активів, акцій, опціонів величин фінансових потоків [88]. Побудовано щільність розподілу ймовірностей проходження цього процесу. Маючи щільності розподілу можна знайти ціну в будь-який момент часу.. За знайденими наближеннями використовуючи як

початкове наближення функцію ціни Блека-Шоулса одержано явні формули для знаходження початкових наближень імплікованої волатильності. Наближення ціни отримується за допомогою розв'язання задачі Коші для диференціальних рівнянь в частинних похідних дифузії з інерцією. Якщо виплата опціонів є функцією лише від  $x$ , тоді розклад в ряд Тейлора коефіцієнтів не залежить від  $t$  і значно спрощується аналітичний вираз фундаментального розв'язку щільності розподілу випадкового процесу.

Різні випадкові чинники, що впливають на зміну процесу моделюються як розв'язки деяких генераторів, що розглядаються в певних шкалах і їхній вплив, тобто збурення можна порівнювати за різними рівнями шкали. Такий підхід до вивчення економічних процесів взятий з дослідження фізичних процесів, але він дає добрі результати при дослідженні процесів фондового ринку. Теоретичне існування розв'язку при збуреннях приводить до розв'язання скінченної кількості рівнянь Пуассона, це на основі альтернатив Фредгольма зводиться до доведення того, що певні інтеграли рівні нулю, а для цього можна використати різні програмні продукти. Розроблена методологія розкладу за власними функціями і власними значеннями певних операторів дифузії з інерцією в яких волатильність залежить від системи швидкозмінних і повільнозмінних чинників. Застосування цієї методики до процесів Орнштейна-Уленбека, Васічека та CEV дає можливість одержати наближене значення фінансового показника через складові в шкалі кожного чинника. Це дає можливість аналізувати вплив кожного чинника, якщо чинники розглядати як координати то по координатно, але не всі дифузійні процеси можна розкладати за власними значеннями. Вироджені дифузійні процеси, які моделюються рівняннями Колмогорова не можна представити через власні значення та власні функції, тому тут доцільне застосування розкладу в ряди Фур'є коефіцієнтів рівняння тоді щільність цього

стохастичного процесу має представлення через ряд послідовних наближень щільностей, що відповідають коефіцієнтам розкладу а ряд Тейлора. Такий підхід дає можливість обчислювати ціни фінансових показників, щільність розподілу, в різні часові моменти з великою точністю. За допомогою цієї методики можна проаналізувати можливий перебіг процесу, зробити запобіжні висновки та пропозиції, щоб мінімізувати ризики.

## *1.2. Детермінанти динамічного розвитку фінансових інструментів*

Враховуючи систематизацію чинників щодо економічного зростання, можна виокремити історичний та модельний підходи, перший із яких стосується аналізу основних чинників економічного зростання, зокрема, капіталу, землі, праці, тощо. Модельний підхід веде до аналізу безпосередніх чинників (таких, як працевлаштування і ефективність праці) та посередніх (зокрема, виробничий капітал, інвестиції та їх ефективність). Крім того, в економічній теорії, аналіз економічного зростання відокремлений від аналізу економічних коливань. В рамках теорії економічного зростання в цьому випадку розглядаються два питання: джерела коливань і чинники, переважно екзогенні, що можуть призвести до пом'якшення будь-яких коливань. Виходячи з цього, розрізняють стійке економічне зростання або економічне зростання, пов'язане з балансом економічного зростання за межами рівноваги.

У центрі дискусій уже багато років залишається вплив технічного (технологічного) прогресу на функціонування економіки. Якщо технічний прогрес є результатом діяльності економічних чинників, переважно через призму цін, то природньою позицією економіки є рівновага і навпаки, технічний прогрес впливає на економіку через

імпульси (потрясіння), то можуть з'явитися суттєві коливання, які переважно віддаляють економіку від рівноваги. В епоху глобалізації технічний прогрес, зокрема у слабо розвинених економіках, є похідною від отриманого економікою іноземного капіталу, а також від освічення людських ресурсів, зокрема, в межах адаптованих систем управління чи трудової міграції кваліфікованих ІТ-фахівців у галузі високих технологій.

Не менш важливими є міркування пов'язані з питанням впливу грошової політики, а в цілому, функціонування грошового та ринку капіталів на економічне зростання, а предметом особливої уваги є недосконалість функціонування фінансових ринків, які є джерелом суттєвих економічних коливань. Тому в цьому випадку важливою є монетарна політика держави, а також дослідження взаємозв'язку між макроекономічними показниками та курсом національної валюти.

Фінансова глобалізація та розвиток похідних інструментів часто розглядають як джерела основних причин фінансових криз за рахунок збільшення інтенсивності фінансових зв'язків між установами, корпораціями та країнами у глобальному масштабі.

Інноваційні фінансові інструменти як одні із найважливіших і водночас найбільш суперечливих чинників розвитку фінансової глобалізації є двигуном розвитку зв'язків і взаємозалежностей фінансового характеру на макро- та мікроекономічному рівнях у глобальному масштабі [88].

З одного боку спостерігається їх беззаперечний позитивний вплив на розвиток світової фінансіалізації, з іншого – негативний вплив переважно на стабільність фінансових ринків і, як наслідок, виникнення криз.

Фінансові інновації визначаються як сучасні рішення щодо продуктів, процесів та фінансового ризику. Інше визначення характеризує їх як шляхи модернізації елементів фінансової системи,



тобто введення нових рішень стосовно його регулювання, ринків, установ та інструментів (рис. 1.4).

Прийняті в окремих країнах закони, які лібералізують і дерегулюють функціонування фінансових ринків, сприяють розвитку міжнародних потоків, які є основним джерелом динамічного розвитку фінансової глобалізації, а окремі правила у окремих країнах визначають можливості й масштаби фінансових інструментів на своїх ринках.

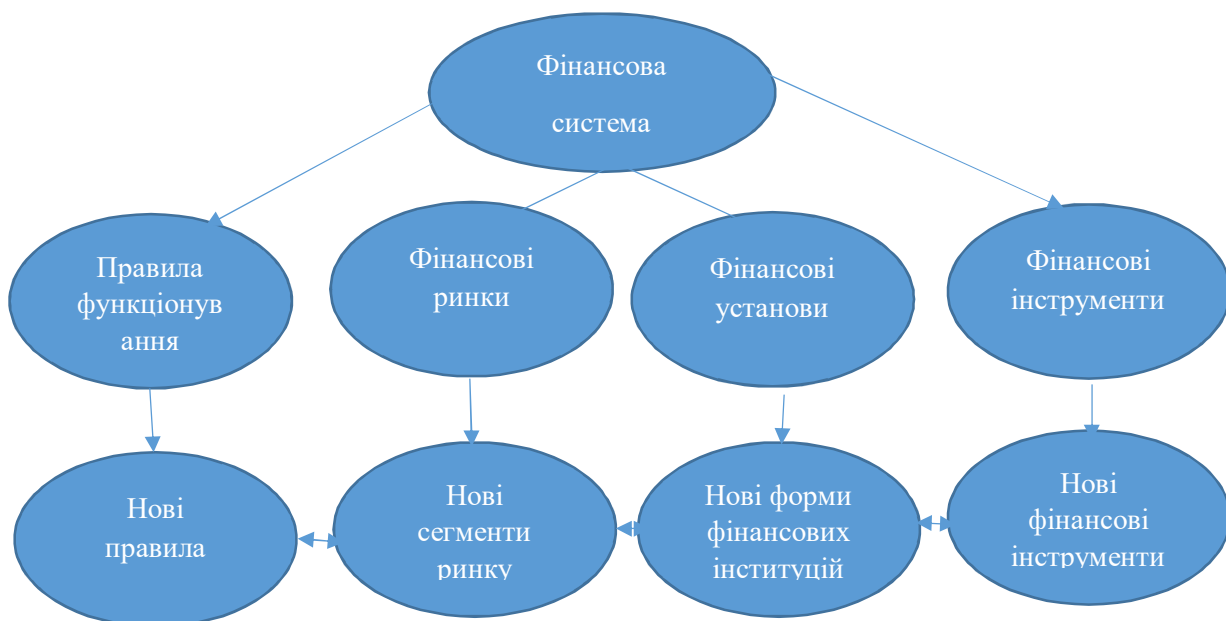


Рис. 1.4. Складові елементи фінансової системи

Зокрема, після глобальної фінансової кризи були вжиті законодавчі заходи, що мають на меті обмеження спекулятивного використання деяких похідних інструментів, діяльності хедж-фондів і офшорних зон як чинників дестабілізації світової фінансової системи.

Якщо розглянути фінансові ринки, то інноваціями будуть їх нові сегменти, зокрема: надзвичайно важливий ринок євродоларів, ринок похідних фінансових інструментів, ринок кредитних та дебетових

карт, ринок послуг, пов'язаних з банкоматами (automated teller machine, АТМ).

До нових форм і типів фінансових установ належать, зокрема: фонди приватного капіталу, хедж-фонди, фонди державного майна, фінансові холдинги та компанії спеціального призначення.

Як зауважено в роботі [17], інноваційні фінансові інструменти охоплюватимуть:

- нові або традиційні інструменти, в яких деякі елементи були змінені, з метою збільшення їх ліквідності та діапазону застосування;
- інструменти, які є комбінацією кількох інших фінансових інструментів;
- інструменти, які є заміниками традиційних фінансових інструментів;
- інструменти захисту від змін параметрів фінансового ринку наприклад, процентних ставок, валютних витрат, ціни на товари, а також ризиків.

Тобто інноваційними фінансовими інструментами, можуть бути деривативи та похідні інструменти, значення яких залежить від значення іншого інструменту, котрий називається базовим. Базовим інструментом можуть бути акції, облігації, процентні ставки, валюти, фондові індекси, товари, тощо. До найбільш поширених видів деривативів належать:

- класичні (традиційні);
- гібридні (структуровані, синтетичні);
- створені на основі інших елементів;
- екзотичні опціони.

Перша група включає в себе форвардні і ф'ючерсні транзакції, свопи та опціони, які іноді називають ванільними операціями (vanilla transaction).

Форвардні транзакції є найпростішим фінансовим інструментом є угодою на купівлю або продаж базового інструменту за заздалегідь визначеною ціною і майбутньою датою реалізації.

Механізм функціонування ф'ючерсної транзакції такий же, як і у форвардній транзакції за винятком того, що ф'ючерсні операції носять стандартний характер і вводяться на фондовій біржі тоді, коли форвардна транзакція виключно діє на позабіржовій торгівлі. Порівняно з форвардним та ф'ючерсним варіантами опціони є більш гнучким інструментом, оскільки вони означають право, але не зобов'язання купувати (*call option*) або продавати (*put option*) або вибрати той чи інший тип операції (*double option*) стосовно базового інструменту за заздалегідь визначеною ціною та оплатою відповідної премії. Опціонами можуть функціонувати як на біржі, так і в позабіржовій торгівлі.

Свопи, натомість, є контрактами, укладеними за межами фондової біржі, власники яких зобов'язуються обмінюватися визначеними базовими інструментами на певний період, після чого повертаються до початкових умов.

Перелічені інструменти можна поділити, зокрема, на симетричні (лінійні) й асиметричні (нелінійні). До перших належать форвардні транзакції, ф'ючерси та свопи. Вони означають, що з обох сторін транзакції є наявним зобов'язання реалізації на узгоджених умовах. В випадку асиметричного інструменту, яким є опціон, з одного боку виступає закон, а з іншого – зобов'язання щодо здійснення транзакції.

Другу групу, тобто гібридні інструменти утворюють різні комбінації інших фінансових інструментів – акцій, облігацій, валют, біржових індексів з похідними інструментами. Можна поєднати, зокрема, банківський депозит, страховий поліс, інвестиційний сертифікат з опціоном високого ризику. Наприклад, дана інвестиція ділиться на дві частини, перша із яких вкладена у перераховані вище

безпечні інструменти таким чином, щоб разом із процентною ставкою забезпечити повернення всього інвестованого капіталу або його значної частини. Натомість, та частина, що залишилася, вкладена у ризикований похідний інструмент, який може принести значний прибуток. Серед похідних інструментів, що входять до третьої групи, базовим інструментом котрих є інші види похідних інструментів, тобто деривативи, найчастіше виступають опціони на ф'ючерсні контракти, опціони на транзакції своп (або свопціони), а також складні опціони. Суть перших полягає у придбанні або продажу права на купівлю чи продаж ф'ючерсного контракту на певний фінансовий інструмент або товар. Другі так само дають право на купівлю чи продаж свопу. Натомість, треті є опціонами купівлі для інших опціонів (наприклад, опціон купівлі для опціону продажу, опціон продажу для опціону купівлі).

Екзотичні опціони включають в себе опціони, основні параметри яких (наприклад, термін дії, термін виконання, вибір типу опціону, дата оплати, премії тощо), носять відмінний від класичного опціону характер, наприклад бермудські опціони, опціони вибору, опціони „плати пізніше” (pay later). Наступним різновидом є опціони ліміту, дохід якого залежить від ціни базового активу на протязі терміну його дії, наприклад, азійські опціони, опціон “з оглядом назад” (lookback option), сходовий опціон (ladder option), бар'єрний опціон. Ще одним видом опціонів є багатофакторні, тобто такі, у яких виступають хоча б два базові активи, наприклад, веселкові опціони, кошикові, діапазонні опціони, тощо.

Фінансові інструменти, можна поділити на зовнішні, які виникають внаслідок недосконалої фінансових ринків, та турбулентності макроекономічного оточення, а також внутрішні, джерелом яких є потреба учасників фінансового ринку у створенні

інструментів, котрі захистять їх від ризиків, збільшать прибутки та підвищать конкурентоспроможність.

До першої групи відносяться такі чинники, як глобалізація, макроекономічне середовище, сучасні технології, а також законодавча політика та нормативні акти (рис. 1.5)



Рис. 1.5. Детермінанти поширення похідних фінансових інструментів

Крім того, що глобалізація є найважливішим чинником розширення похідних інструментів, оскільки містить усі інші, між ними та глобалізацією існує зворотній зв'язок збільшення глобалізації і навпаки, вона ще визначає інтенсифікацію розмірів і видів економічних активів, зокрема фінансових, між суб'єктами, які знаходяться у різних країнах та всередині них. Це зумовлює збільшення ризику, пов'язаного з різноманітністю діючих у них умов (курси валют, процентні ставки, ціни та біржові індекси).

Ускладнення ефективних способів глобального управління фінансами, фінансовими установами та транснаціональними корпораціями спричиняє необхідність застосування щоразу більш удосконалених інноваційних інструментів та їх запозиченням з однієї

країни до іншої. Значну роль у даному процесі відграють функціонуючі на глобальному рівні нові види інституційних інвесторів, зокрема, хедж-фонди, компанії спеціального призначення та фонди прямих інвестицій. Створенню нових ризикованих похідних фінансових інструментів сприяють складність регулювання їх застосування органами влади окремих країн через наявність євроринку та офшорних фінансових центрів.

Нестабільність макроекономічного оточення є черговим чинником, який стимулює утворення нових фінансових інструментів. Можна стверджувати, що економіка розвивається від кризи до кризи, що означає тривалу зміну кон'юнктури. Після періоду зростання та стабільності, спостерігається неминучий спад і раптова (більшою або меншою мірою) економічна криза в регіоні чи світі.

Змінам у реальній економіці зазвичай передують сильні коливання на фінансових ринках. Падають у ціні акції та інші цінні папери, знижуються валютні курси, зростають процентні ставки за кредитами та інфляція. Значне збільшення обсягів оборотів і їх швидкість призводить до того, що розміри турбулентності на фінансових ринках стають все більшими, і легше переходять з однієї країни в іншу. Очевидно, що суб'єкти господарювання намагаються захистити себе від цього, шукаючи засоби і у сфері фінансових інструментів.

Фінансова лібералізація та відкриття фінансових ринків окремих країн призвели до того, що банки та інші фінансові установи перестали бути захищені своїми урядами від міжнародної конкуренції, і водночас самі розпочали агресивну діяльність на ринках. Конкуренція всередині країни набула глобальних масштабів. Новий вимір конкуренції і її загострення, які, до речі, спричинені появою конкуренції з ринками, які розвиваються, призвели до того, що вони намагаються отримати

перевагу над конкурентами, застосовуючи все більш сучасні, більш складні, а часом і більш ризиковані фінансові інструменти.

Діяльність фінансових інституцій у сфері пошуку інноваційних фінансових інструментів також залишається під тиском попиту на них з боку різних учасників фінансових ринків, які прагнуть знизити ризики своєї діяльності та збільшити прибутки. Їх поглинання у цій сфері зростає разом з величиною та якісною й географічною диверсифікацією їх діяльності. Створення нових, удосконалених фінансових інструментів також є елементом маркетингової стратегії фінансових інституцій, котрі у такий спосіб демонструють свою компетенцію.

Вплив державної політики та нормативних актів на розвиток дериватів – складний. З одного боку, як уже було зазначено, лібералізація та дерегуляція, запроваджені урядами окремих країн, були одним з найважливіших чинників, що визначали фінансовий розвиток глобалізації, включаючи вибух фінансових інновацій. Натомість, з іншого боку, державні рестрикції можуть обмежувати розвиток ринку деривативів. На практиці часто трапляється так, що ці обмеження спричиняють розвиток нових фінансових інновацій, які є спробою їх обійти. Прикладом цього є сфера податків та багато інноваційних інструментів, які мають на меті їх обмежити або уникнути їх сплати.

Коефіцієнтом останнього, але не менш важливого розвитку дериватів став розвиток комп'ютерних технологій та засобів телекомунікації. Комп'ютери дали змогу накопичувати і переробляти значну кількість інформації і дозволили моделювання, зокрема, щодо оцінки ризиків та ймовірності отримання бажаних результатів запланованих інвестицій, а також обсягу існуючих загроз. Вони революціонізували біржову торгівлю – торгівля на торговому майданчику була майже повністю замінена електронною торгівлею,

яка ведеться через “електронні платформи”. Вагому і зростаючу частку тут займає алгоритмічна торгівля, заснована на високій частоті розміщення замовлень високопродуктивних комп'ютерів. Алгоритмічна торгівля означає розміщення замовлень між комп'ютерами на основі введених до них алгоритмів, тобто програм, що містять тип активу, його ціну, розмір, термін дії замовлення тощо, і навіть розміщення замовлення без втручання інвестора.

Поєднання комп'ютерів та телебачення призвело до того, що “мозковий штурм”, а також засідання правління і наглядових рад різних установ можуть відбуватися “на відстані”, тобто шляхом відео-конференції. Інтернет спричинив “смерть часу” (death of time) і “смерть відстані” (death of distance), а це означає, що передача інформації, управління, висновки, моніторинг та контроль фінансових операцій стали можливими в реальному часі між партнерами, які знаходяться у різних частинах світу. Водночас, витрати на ці заходи значно знизилися, порівняно з витратами на передачу інформації через інші засоби. Здебільшого, були усунені фінансові посередники. Інвестори можуть розміщувати замовлення на придбання акцій або інших цінних паперів похідних інструментів, не виходячи з дому, за допомогою персональних комп'ютерів та інших подібних пристроїв.

Інноваційні фінансові інструменти спричинили значні зміни на фінансових ринках, стимулюючи їх розвиток. Їхні розміри, які вимірюються вартістю та кількістю транзакцій, різко зросли, і їх ліквідність також збільшилася. Вони надали ринковим суб'єктам доступ до фінансування за допомогою боргу та власного капіталу. Вони підвищили гнучкість формування структури свого капіталу, у тому числі, застосовуючи боргові свопи до власного капіталу. Вони дали можливість диверсифікувати джерела фінансування, у чому надзвичайно корисною була сек'юритизація. Завдяки їм відбулося інституційний розвиток фінансових ринків. Зокрема, з'явилися нові



установи, що спеціалізуються на транзакціях із застосуванням похідних фінансових інструментів (таких як, наприклад, хедж-фонди, компанії спеціального призначення), та традиційні – інвестиційні, пенсійні та страхові фонди значно збільшили діапазон своєї фінансової діяльності. Завдяки арбітражним стратегіям та впливу активів на ціни валютні курси і процентні ставки сприяють більшій прозорості на ринках і прогнозуванню змін. Основною функцією деривативів є захист від ризиків (цінового, курсового, ризику процентних ставок та кредитного), що значно сприяє суб'єктам у виході на іноземні ринки та у фінансовій діяльності на міжнародному рівні. Завдяки цьому, результати діяльності суб'єктів ринку є більш передбачуваними, а їх конкретний рівень, встановлений у бюджетах, є забезпеченим. Суб'єкти, які проявляють меншу схильність до ризику, здатні за їх допомогою (сек'юритизація) екстраполювати ризик на тих, що мають на нього більший апетит. Похідні фінансові інструменти дозволяють обійти податкове законодавство та інші деструктивні для суб'єктів ринку державні норми, або уникнути їх.

Негативною стороною застосування деривативів у більш широкому масштабі є загроза стабільності ринків та фінансових систем на державному та світовому рівнях [18]. Потоки капіталів, що йдуть через них, значною мірою є спекулятивними, що означає відокремлення фінансових операцій від реальної економіки. Застосовуються фінансові інструменти, які опираються на ефект фінансового важеля, а це означає, що відносно невеликий реальний капітал є основою для здійснення транзакцій з номінальною вартістю, у багато разів вищою від нього. Ризик таких операцій надзвичайно високий, і на практиці часто зустрічаються пов'язані з ними великі втрати та банкрутства суб'єктів, котрі у них залучені. Невнормовані принципи їх оцінки та обліку зумовлюють завищення банками та фінансовими їхньої реальної вартості, що веде до створення

кумулятивної “спекулятивної бульбашки” в економіці, вибух якої означатиме фінансову кризу. Відтак, збільшується диспропорція між балансовою вартістю активів цих установ та їх фактичною вартістю. Якщо є необхідність збільшити виплату коштів, наприклад через занепокоєння інвесторів, може виявитись, що ці кошти відсутні, і якщо не буде допомоги від держави, то вони змушені оголосити про банкрутство. Неконтрольовані значні потоки капіталу створюють загрозу хаотичного розвитку обмінних курсів і значно підвищують ризик як фінансових, так і товарних операцій.

Можливості вибору деривативів для ефективного захисту від ризиків є обмеженими. Відомий фондовий інвестор Уоррен Баффет назвав їх “фінансовою бомбою масового знищення” [90]. Зокрема, саме з ними пов’язують вибух світової фінансової кризи 2008-2009 років. Проте, насправді, кризу спричинили помилки в економічній політиці Сполучених Штатів, відсутності належного фінансового регулювання та нагляду за діяльністю фінансових установ, які у гонитві за прибутком здійснювали безвідповідальну та дуже ризиковану політику кредитування. Потім шляхом сек’юритизації позик та їх спеціального страхування у формі свопних транзакцій вони перекидали ризик на покупців деривативів, випущених на їх основі [91]. Покупцями були інвестиційні, страхові, пенсійні фонди, інвестиційні банки та хедж-фонди, а також інші інституційні учасники фінансових ринків по всьому світу. Механізм сек’юритизації показаний на рисунку 1.6

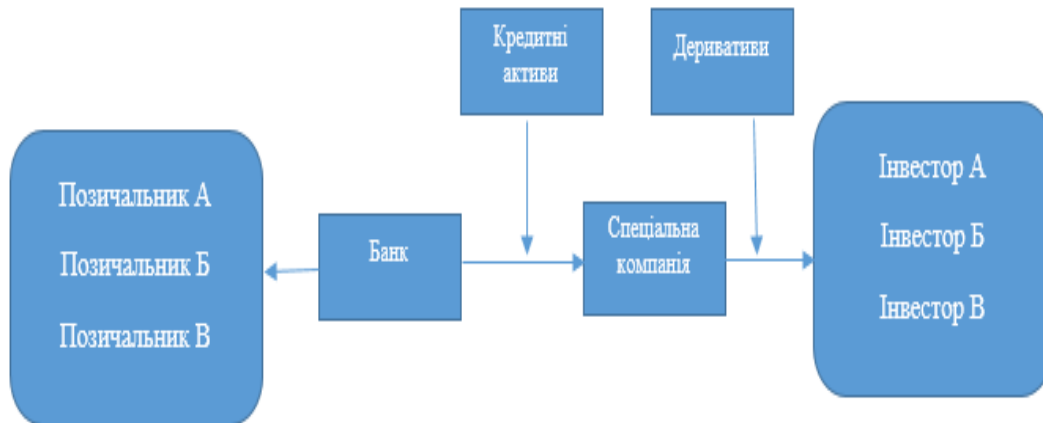


Рис. 1.6. Механізм сек'юритизації

Можна виділити наступні етапи процесу сек'юритизації:

- виокремлення пулу активів з балансу банку;
- страхування банком;
- платне переведення відокремлених активів спілці спеціального призначення (*specialpurpose vehicle, SPV*);
- випуск SPV цінних паперів на їх основі, тобто деривативів, та їх продаж у США і за кордоном;
- відсоткових ставок та позик в банку ініціатора сек'юритизації та після вирахування плати за послугу переказу їх SPV;
- перерахування фіксованих або змінних процентних ставок покупцям похідних фінансових інструментів та викуп деривативів, відповідно до терміну їх погашення.

Основними видами деривативів, випущеними СПВ, є:

- *asset backed securities (ABS)*, тобто на основі різних кредитних вимог, наприклад, інвестиційних позик, студентських позик, автокредитів, платежів за кредитними картками;
- *mortgage backed securities (MBS)*, тобто пов'язані з іпотечними кредитами;

- *collateralised debt obligations* (CDO), тобто забезпечені облігаціями;
- *asset backed commercial papers* (ABCP), базовим інструментом котрих були короткострокові цінні папери.

З іншого боку, кредитні свопні операції, на підставі яких були випущені похідні інструменти, або *credit default swaps* (CDS), полягають у купівлі банком застави існуючих кредитних активів в іншій фінансовій установі, в обмін на сплату премії. У випадку, якщо кредити не були погашені, продавець страхування мав перераховувати еквівалент власнику CDS (рис. 1.7).



Рис. 1.7. Механізм *credit default swaps* (кредитного дефолтного свопу)

Розширення інноваційних інструментів на міжнародному ринку з початку 1990-х років, перерване лише світовою фінансовою кризою, тісно пов'язане з процесами фінансової глобалізації. Вони є одним з найважливіших чинників її стимуляції, і в той же час, на основі зворотного зв'язку, вони обумовлені її розвитком.

Відтак, чинники, що вплинули на динаміку фінансової глобалізації, водночас мали вплив на надзвичайно інтенсивне якісне та кількісне зростання. Оцінка інноваційних фінансових інструментів, а точніше кажучи, їх застосування, показує, що вони, безумовно носять амбівалентний характер. Їх позитивна сторона полягає насамперед у створенні можливості набагато кращого, ніж у минулому захисту від

цінового ризику, ризику курсу обміну та процентного ризику. Завдяки цьому фінансові та інші ринкові суб'єкти мали змогу значно розширити розміри операцій, диверсифікувати їх, зокрема, з точки зору супутнього ризику. Могли також ці ризики перекинути на інших, у кого більший апетит до них. Однак слід зазначити, що деякі їх використання можуть трактуватися по-різному, залежно від мети, для якої вони використовуються. Наприклад, їхнє використання для уникнення оподаткування чи інших обмежувальних правил буде позитивно оцінюватися транснаціональними корпораціями, але негативно – як макроекономічний ефект для фінансів тієї чи іншої країни.

Однак широкомасштабне застосування все більш складних фінансових інструментів (структурованих, синтетичних) з їх багаторівневою системою означає, що фінансові ринки стають все менш прозорими. Ризик вибору деривативів, які є неадекватними для даного типу транзакції, стає все більшим. Крім того, „жадібність банкірів” або тиск на отримання прибутку за будь-яку ціну викликає їх ризиковане використання. А якщо до цього додати ще й відсутність належних нормативно-правових актів, моніторинг та контроль за діяльністю великих фінансових корпорацій, то отримаємо результат „заведеної часової бомби”, яка вибухнула з великою силою, у формі світової фінансової кризи, а також попередніх розладів та турбулентності на ринках, що розвиваються. Проте, загалом слід вважати, що позитивні наслідки поширення деривативів значно перевищують негативні. Без них фінансова глобалізація була б неможливою, або була б набагато біднішою. І відтак, її вплив на реальну сферу світової економіки та добробут окремих країн був би значно меншим. Звичайно, її переваги розподілені нерівномірно. Максимум отримують ті країни, які найбільшою мірою є фінансово глобалізованими.

### ***1.3. Еволюція теоретичних поглядів на розвиток фінансових інструментів, як критерію розвитку фондового ринку***

При дослідженні фондових ринків важливою проблемою як теоретичного, так і практичного характеру, є ціноутворення, яке базується на виявленні закономірностей формування цін на фінансові активи. На даний момент існує декілька теорій, присвячених розв'язанню цієї проблеми, які ґрунтуються на можливості передбачення цінової динаміки фондових активів (прогнозованості ринку) та на раціональній поведінці інвестора, а також на тому, що часові ряди значень ціни деривативів, мають приховані закономірності, а отже є хоча б частково передбачуваними.

Багато методів прогнозування ціноутворення на фондових ринках базуються на припущенні про нормальний закон розподілу, де показники динаміки є незалежними величинами та розподілені в межах заданого сталого стандартного відхилення, але це припущення не дозволяє адекватно описувати економічні реалії [89-92].

Під час становлення і розвитку фондових ринків, проводилася значна кількість наукових досліджень щодо ціноутворення на біржах з використанням різного типу контрактів. Перші результати щодо опціонної теорії отримані Л. Башельє і В. Бронзінім, які робили з повністю протилежні припущення про ціноутворення похідних фінансових інструментів. [93]. Пізніше А. Н. Колмогоров створив потужний базис теорії ймовірностей, що дозволило за допомогою ймовірнісних моделей досліджувати ціноутворення на фондовому ринку. Після другої світової війни настали сприятливі умови для застосування деривативів і їхнє ціноутворення почало базуватися на дослідженні операцій у економічному плануванні завдяки лінійному програмуванню Л. Канторовича і Дж. Данцига, портфельній теорії Г.

Марковиця, порівняльному статичному й економічному аналізі економічних систем П. Самуельсона, теорії ігор Дж. фон Неймана і О. Morgenштерна [94-96].

Ціноутворення опціонів до створення відомої моделі Блека-Шоулса ґрунтувалося на паритеті опціонів CALL і PUT. Поняття паритету опціонів є зрозумілішим, ніж ідеї опціонної теорії, та використовувалося значно раніше ніж його формалізація. Теорема паритету опціонів уперше визначена Х. Столлом [97], згідно його теореми, маючи три із чотирьох фінансових інструментів, а саме: облигацію з нульовим купоном, акцію, CALL опціон на акцію і PUT опціон на акцію, будь-який четвертий фінансовий інструмент можна створити шляхом реплікації його функції дохідності [98]. Значний внесок у розвиток фондових ринків було зроблено за допомогою першої і другої фундаментальної теореми фінансової економіки, авторами яких були К. Ерроу, Ж. Дебре. Наукові результати цих вчених при відсутності арбітражу для фондових ринках удосконалили Дж. Хіршляйфер, за допомогою встановлення закону єдиної ринкової ціни, С. Росс доведенням теореми про відсутність арбітражу та М. Рубінштейн уточненням формулювання фундаментальних теорем [99-101]. Зауважимо, що формулювання фундаментальної теореми фінансової економіки також було зроблено С. Россом [102]. Він дав визначення відсутності арбітражу як ситуації, де ніхто із учасників ринку не може сформулювати портфель з наявних ринкових інструментів із додатною функцією дохідності портфеля для всіх станів на ринку, або з додатною функцією дохідності портфеля хоча б для одного стану за умови нульових чи від'ємних витрат та довів, що відсутність арбітражу еквівалентна існуванню додатно визначеного лінійного цінового оператора.

Пізніше наукові результати С. Росса узагальнив Х. Варіану [103]. Першу фундаментальну теорему, формулювання якої

використовується і тепер дав М. Рубінштейн. Він стверджував, що ризик-нейтральні ймовірності існують тоді і тільки тоді, коли не існує безризикових арбітражних можливостей [101]. За другою фундаментальною теоремою можна стверджувати, що ризик-нейтральні ймовірності є єдиними тоді і тільки тоді, коли ринок є повним [101]. Третя фундаментальна теорема, формулювання якої належить К. Ерроу, часто зазнає критики від прихильників теорії ціноутворення опціонів, стверджує, при певних умовах існує можливість сформувати реверсивний портфель за допомогою відсутніх у ньому акцій, за умови ефективного і повного ринку [101]. Точніше формулювання другої фундаментальної теореми, яке є незалежним від поняття арбітражу й еквівалентної мартингальної міри у припущенні щодо існування арбітражних можливостей на повному ринку дали Р. Баттінг і Р. Ярров [104]. Принцип ризик-нейтрального ціноутворення на фондових ринках, удосконалили Дж. Харрісон, Д. Крепс і С. Плїска [105], ціноутворення деривативів було побудовано цими вченими на основі мартингалів та розроблено універсальний теоретичний апарат для визначення ціноутворення похідних фінансових інструментів. Наукові та практичні результати перерахованих вище вчених внесли значні успіхи для здійснення аналізу й оцінки умовних фінансових зобов'язань. Такі вчені як Р. Ярров, Р. Ліпцер, А. Н. Ширяєв, Д. Даффі, С. Шрїва, Ю. С. Мішура активно використовували теореми для ціноутворення фінансових інструментів різного типу за умов ускладненої динаміки [106]. За допомогою першої фундаментальної теореми, можна стверджувати, що безарбітражний ринок ґрунтується на ризик-нейтральній (мартингальній) мірі, згідно з якою ціни деривативів формують мартингал [107]. На основі другої фундаментальної теореми, на повних ринках, існує можливість створення портфеля цінних паперів, капітал якого в через певний період відновлює потрібне умовне



фінансове зобов'язання [108]. Це означає, що на безарбітражному ринку повнота присутня лише тоді, коли задана тільки одна мартингальна міра.

Будь-яке вкладення коштів в деривативив є більш ризикованим, ніж інвестування безпосередньо у фінансовий інструмент, пов'язаний із цим вкладенням, оскільки його ціна змінюється кожного разу, коли змінюється ціна фінансового інструменту, що лежить у його основі. Тому ціноутворення деривативів за допомогою стандартних формул дуже складно обчислювалося, а точна його оцінка протягом значної кількості років була економістам невідомою. В 1900 році Л. Башельє використав броунівський рух для розрахунку цін опціонів, він перший застосував складну математичну техніку в теорії фінансів. С. Шпренкл узагальнив наукові результати Л. Башельє ввівши застосування логнормального розподілу цін деривативів. Завдяки цьому результату, при визначенні ціни похідних фінансових інструментів було відсутнє дисконтування [109]. Дж. Боннес застосував логнормальний розподіл ціноутворення для визначення вартості європейського опціону.

Багато спроб визначення вартості похідних цінних паперів були невдалими внаслідок неможливості правильно обчислити премію за ризик. М. Шоулс та Ф. Блек здійснили прорив за допомогою розробки методу визначення ціни опціону, що не потребує використання конкретної величини премії за ризик, тобто премія за ризик існує, але включена до базисної ціни фінансового інструмента.

Основою теорії ціноутворення опціонів є біноміальна модель та модель Блека-Шоулса. Біноміальна модель була вперше запропонована Д. Коксом, С. Россом та М. Рубінштейном [14] у 1979 році. Вона є моделлю зміни ціни базового активу чи інструменту протягом часового інтервалу. Отримала назву *біноміальної* тому, що в кожному періоді в ній передбачається існування тільки двох можливих альтернатив поточної ринкової вартості акції. сформувавши

біноміальне дерево, можна проілюструвати процес визначення вартості опціону. Формула моделі оцінки опціонів уперше була виведена Б. Фішером і М. Шоулзом у 1973 році в статті «Оцінка опціонів та комерційних облигацій» (*The Pricing of Options and Corporate Liabilities*). Їх дослідження базувалися на роботах Д. Трейнора, П. Самуельсона, Д. Бонеса та Е. Торпа і розроблялися в період швидкого зростання опціонної торгівлі. Модель Блека-Шоулза припускає, що ціни на акції підлягають випадковому блуканню. Це означає, що в короткостроковий період розподіл змін цін на акції є нормальним. Звідси випливає, що для будь-якої точки, прогнози ціни на акції матимуть логарифмічно-нормальний розподіл і їх можна моделювати випадковим (стохастичним) процесом Іто. Дисперсія базових активів зростає лінійно в часі. Формула Блека-Шоулса широко використовується трейдерами для встановлення ціни звичайних опціонів при мінімальних ризиках.

У випадку броунівського руху з нормальним розподілом де виплата підпорядковується пуассонівському закону розподілу, ціну опціонів встановила Н. Іващук [17].

Учасники фондового ринку, які проводять торгівлю деривативами, повинні мати широкий спектр можливостей щодо вибору позиції на ринку. Вибір позиції можна здійснити за допомогою динамічного хеджування, тобто врахування моментів розподілу ціноутворення деривативів, а для цього потрібна значна кількість фінансових інструментів [110].

Першими роботами по хеджуванню позицій були праці Л. Хіггинса і С. Нельсона у 1902 і 1904 роках [111]. Основні принципи динамічного хеджування були розроблені В. Ганном 1937 року. Він вивчав ризик-нейтральне хеджування для опціонів та запропонував деякі форми динамічного хеджування [112]. Ф. Міллс ще до розробки сучасної портфельної теорії стверджував, що стрибки цін впливають

на цінову поведінку та функції розподілу ціноутворення деривативів можуть відрізнятися від нормального розподілу тому, що вони залежать від екстремальних економічних змін [113].

Е. Торп досліджував статичне ризик-нейтральне хеджування і довів, що воно використовується не як інструмент динамічного дельта-хеджування, а як інструмент для ризик-менеджменту. Х. Філер звертав увагу на хеджування опціонів, але на динамічне і без обчислення дельти [114]. А. Бернхард у своїх роботах дослідив ризик-нейтральне статичне дельта-хеджування та знайшов величину хеджування для деривативів з довільним страйком [115]. Мертон стверджував «Якщо хеджування здійснюється неперервно, тоді дохідність хеджованих позицій стає незалежною від зміни ціни акцій. Фактично дохідність хеджованих позицій стає визначеною.» [12].

Такі вчені як А. Рейнах, Л. Хіггинс, С. Нельсон і Ф. Мілс зробили значний внесок у дослідження фондового ринку вивчаючи паритет між PUT і CALL опціонами, статичне та динамічне хеджування опціонів, а також умови стрибків у ціноутворенні деривативів [116].

Методологія ціноутворення деривативів ґрунтується на гіпотезах Ф. Блека, М. Шоулса і Р. Мертона щодо волатильності [11]. Учасники та дослідники фондового ринку використовують термін «усмішка» волатильності, та імплікована волатильність, що відповідає ринковим цінам на опціони згідно з формулою Блека-Шоулса [11]. Сучасні наукові дослідження спрямовані на пошук точніших функцій розподілу деривативів та розробку альтернативних моделей оцінки процесів ціноутворення, щоб усунути недоліки моделі Блека-Шоулса. Альтернативними моделями що дозволяють знайти ціну похідних фінансових інструментів, є стохастичні моделі опціонів на відсоткову ставку, дифузійні моделі зі стрибком, моделі з сталою еластичністю варіації (CEV), моделі з стохастичною волатильністю, модель

Хестона; моделі з стохастичною волатильністю і стохастичною відсотковою ставкою, дифузійні моделі з стохастичною волатильністю та стрибком.

Моделі ціноутворення опціонів дозволяють детальніше зрозуміти процеси які відбуваються на фондовому ринку.

Хронологію появи моделей ціноутворення деривативів від часу знаходження розв'язання проблеми ціноутворення опціонів Ф. Блеком, М. Шоулсом і Р. Мертоном у 1973 році проаналізовано в джерелах [117-118]. Завдяки стрімкому розвитку фондових ринків кількість моделей ціноутворення деривативів починаючи з вісімдесятих років минулого століття значно зросла. За останні десять років дослідження щодо ціноутворення деривативів були спрямовані на розв'язання конкретних проблем для різних фінансових інструментів, тобто для акцій, банківських депозитів, відсоткових ставок, інвестицій тощо [119-120].

Наданий момент ціноутворення деривативів зазнало змін щодо класичних припущень на основі теорії Ф. Блека та М. Шоулса тобто на фондовому ринку присутнє мультидисконтування майбутніх грошових потоків, якщо безризикова відсоткова ставка не є основним складником моделей визначення ціни. Та крім того існує багато проблем щодо визначення цін деривативів при умах арбітражу, а також прийняття законодавства щодо регулювання фондового ринку.

Ціноутворення деривативів також тісно пов'язане з новими типами забезпечених і незабезпечених фінансових інструментів, різними торгівельними платформами, способами і методами розподілу цінних паперів тощо [121-122].

На фондовому ринку використовують багато різноманітних теорій ціноутворення, а саме технократична, фундаменталістська, теорія «ходіння навмання» тощо.

Теорія ринкового аналізу або технократичної теорія ґрунтується на тому, що значення ціни цінного папера, визначається ринковою кон'юнктурою, а це означає що відома вся інформація про фінансовий актив і ціноутворення можна спрогнозувати результатами трендового аналізу динаміки цін. Інвестори згідно цієї теорії використовують ретроспективну динаміку цін, вивчають тренди та проводять екстраполяцію. Експерти-технократи в одному й тому самому динамічному ряді цін можуть визначити різні тенденції, часто навіть протилежні, але такий підхід до прогнозування ціноутворення має велику ймовірність доброго результату. Технократи досліджують фондовий ринок в цілому не беручи до уваги зовнішні чинники, вони вважають, що суб'єкти, які формують ринки, мало відрізняються за мотивацією і поведінкою, і за аналітичних умов діятимуть однаково. Це дає можливість ефективного прогнозування напрямку руху цін.

Наступною є фундаменталістська теорія, на основі якої справжню ціну деривативу можна визначити на основі обчислень враховуючи багато чинників як ринкових, так і неринкових, а також інформацію про зміну ринкової ціни і обсяги торгів на фондовому ринку. Також враховують узагальнені чинники коливань цін. Такі чинники генеруються самим фондовим ринком.

Наступна теорія носить назву «теорія ходіння навмання», основною ідеєю якої, є те, що курси акцій змінюються безсистемно незалежно від історичних змін, тому їх не можна передбачити на підставі ретроспективних даних. Теорія ходіння навмання використовує положення, що ціни швидко і достатньо поглинають всю можливу інформацію стосовно будь-яких чинників фондового ринку і не залежать від попередньої динаміки. Коливання цін має випадковий характер, тому арбітражний прибуток можна отримати прогнозним шляхом. розглянута теорія використовує гіпотезу ефективного ринку. Вона дозволяє стверджувати, що фондовий ринок, на якому фактична

ринкова ціна цілком відображає актив і дорівнює вартості фінансового активу оскільки включає всю інформацію про нього. Інвестори, визначаючи доцільність здійснення фінансових вкладень, спираються на особисті уявлення й мету стосовно ризику й дохідності, а також на власну оцінку справжньої вартості цінних паперів. Наскільки правильно інвестор визначає справжню вартість цінного папера, залежить від повноти його поінформованості щодо всіх умов і чинників, які впливатимуть на майбутні доходи від фінансового активу. Якщо дериватив вільно обертається на ринку, то його ціноутворення формується на основі попиту і пропозиції. Це означає, якщо учасники фондового ринку поведуться раціонально то ціна деривативу наблизатиметься його реальної вартості.

Основними чинниками ефективного ринку є значна кількість покупців і продавців; а ринкові ціни повністю відображають всю інформацію про фінансовий актив; існує вся інформація у вільному доступі.

Гіпотеза ефективного ринку, стверджує, що ціни змінюються, лише реагуючи на надходження на ринок нової інформації, а щоденні коливання ринкових цін деривативів на мають точно визначеної тенденції. Теорія «ходіння навмання» впливає з гіпотези ефективного ринку в слабкій формі.

Більшість фондових ринків не відповідає вимогам інформаційної ефективності, це означає що прогнозування ціноутворення є важливим елементом.

На даний момент при дослідженні ціноутворення на українському фондовому ринку недоцільно застосувати методи моделювання, які базуються на припущеннях про нормальний закон розподілу та стаціонарність часових рядів, але можна зробити висновок про високу точність прогнозування за допомогою GARCH-моделі [123].

Ефективність прогнозування за допомогою GARCH-моделі зростає, якщо її поєднати з методом Монте-Карло [124]. Сучасні аналітики при дослідженні ціноутворення деривативів поєднують економіко-математичні моделі прогнозування з фундаментальним аналізом шляхом створення критеріїв розподілу на основі економічних чинників. Також, експерти можуть визначити ймовірності різних наслідків впливу фундаментальних чинників на ціноутворення. Ці ймовірності використовуються для побудови функції щільності розподілу ймовірності цін на прогнозовану дату. Часто проводять побудову ймовірнісних сценаріїв за допомогою комбінації цих підходів [125]. Щоб збільшити точність використовують зовнішні чинники, що зумовлюють значні збурення волатильності. Прогнозування динаміки ціноутворення деривативів на основі зовнішніх чинників є складним процесом тому, що зв'язок між динамікою макроекономічних показників не є сталим, а залежить від конкретної ситуації на фондовому ринку [126]. Збільшення кількості зовнішніх чинників в моделі збільшує волатильність прогнозного ряду цін, а також може поглинати вплив кожного окремого чинника на залежну змінну [127-128].

Аналіз ціноутворення різноманітних фінансових інструментів зручно проводити за допомогою методів стохастичного аналізу. Л. Башельє довів, що ціна фінансового активу зазнає випадкових змін згідно з броунівським рухом. Під час удосконалення його теорії більш точною виявилася модель геометричного броунівського руху. На початку розвитку досліджень стохастичних процесів на фондовому ринку, модель Блека-Шоулса, а пізніше моделі Васічека (зі сталою відсотковою ставкою) та Орштейна-Уленбека встановлені зі сталою волатильністю (дисперсією, з сталим коефіцієнтом дифузії). Розвиток застосування цих моделей ґрунтувався на ускладненні накладених умов

на волатильність; залежність від часового чинника, від зміни ціноутворення (місцевого і локального чинника), від впливу різного роду чинників, їх стохастичного характеру, що мають різну динаміку руху з відповідною до їх розвитку шкалою представлення.

На ефективних ринках при деякій стабільності умов розвитку, розподіл цін виражається через функцію Гріна від розв'язку системи диференціальних рівнянь, якщо є різні зміни (порушення стабільності) то додається стрибок цін. Оскільки, прості та зручні для застосування розв'язки рівнянь та систем диференціальних рівнянь ціноутворення не завжди можна знайти то використовують різного роду наближення, а саме спектральні розклади, розклади в ряд Тейлора. Розклад функції волатильності в ряд Тейлора дає можливість враховувати різні умови проходження процесу і на кожному кроці обчислювати наближене значення процесу. Правильність і точність підходу перевіряється за допомогою методу Монте-Карло. Зауважимо, що в сучасних умовах азійські опціони описуються виродженими дифузійними процесами Колмогорова. В ролі функції, яку розкладають береться ціна, а фундаментальний розв'язок, або щільність розподілу при наближенні до початкових чи крайових точок, веде себе як білий шум.

Зауважимо, що коректну постановку крайових задач, що відповідають стохастичним економічним процесам, було розроблено У. Феллером [129].

Випадкові чинники, що впливають на зміну процесу моделюються як розв'язки деяких генераторів, що розглядаються в певних шкалах і їхній вплив, тобто збурення можна порівнювати за різними рівнями шкали. Такий підхід дає добрі результати при дослідження процесів фондового ринку. Вироджені дифузійні процеси, які моделюються рівняннями Колмогорова не можна представити через власні значення та власні функції, тому тут доцільне



застосування розкладу в ряди Фур'є коефіцієнтів рівняння тоді щільність цього стохастичного процесу має представлення через ряд послідовних наближень щільностей, що відповідають коефіцієнтам розкладу в ряд Тейлора. Розглянутий підхід дозволяє проводити ціноутворення деривативів в різні часові моменти з наперед заданою точністю, а розвинута методика дає можливість проаналізувати можливий перебіг процесу та зробити висновки і пропозиції, щоб мінімізувати ризики.

Згідно розвинутої методології можна розглянути модель ціноутворення опціонів, які описуються процесами на основі рівнянь дифузії з інерцією. Найчастіше такі процеси відбуваються на фондових ринках при ціноутворенні європейських та азійських опціонів. Теорія ціноутворення деривативів та дослідження поведінки волатильності для аналізу дохідності є необхідними для гнучкості в прийнятті управлінських стратегічних рішень інвесторами на фондовому ринку. Слід зазначити, що ціноутворення деривативів на фондовому ринку може бути спрогнозованим тоді, якщо що він розвивається еволюційним шляхом, у випадку різного роду революційних змін, які проходять в державі слід застосовувати спеціальні алгоритми. Здійснення побудови економіко-математичних моделей для прогнозування ціноутворення на різних стадіях розвитку та для різних горизонтів прогнозування дозволяє формалізувати процес ціноутворення фінансових активів та знизити використання інтуїтивних методів. Реалізацію такого підходу потрібно здійснювати при умові використання різних інструментів прогнозування, об'єднуючи елементи технічного та фундаментального аналізу, нейронних мереж та сучасних досягнень в сфері моделювання економічних процесів. Розглянуті теоретичні концепції дозволяють знайти методи, які забезпечують можливість передбачати результати

цілеспрямованих дій інвесторів, що відбуваються під впливом різноманітних чинників на фондовому ринку.

На основі проведеного дослідження існуючих теоретичних концепцій ціноутворення можна зробити висновок, що вони базуються на конкретних припущеннях, які з протягом певного проміжку часу та з виникненням нових обставин змінюються і не точно відображають ситуацію на фондовому ринку. Тому, наведені теоретичні концепції потрібно використовувати в комплексі для прогнозування динаміки ціни опціонів в кожному конкретному випадку.

## Висновки до розділу 1

1. Фондовий ринок України є складною динамічною системою, який має за мету перерозподіл фінансових ресурсів в як в межах економічної системи країни, так і поза ними, будучи невід'ємною складовою світового фінансового ринку. Враховуючи останнє, операції з фінансовими інструментами, що здійснюються на фондовому ринку України знаходяться під впливом глобалізаційних процесів та характеризуються значною волатильністю цін та фінансових ризиків. В роботі фондовий ринок ототожнюється з ринком цінних паперів (короткострокових та довгострокових) і розглядається як частина фінансового ринку.

2. Встановлено, що динамічний розвиток інноваційних фінансових інструментів, має складний характер, який визначається як зовнішніми чинниками, які виникають внаслідок недосконалості фінансових ринків, та турбулентності макроекономічного оточення, так і внутрішніми – джерелом яких є потреба учасників фінансового ринку у створенні інструментів, котрі пом'якшать ризики, збільшать прибутки та підвищать його конкурентоспроможність. Тому складовим елементом фондового ринку є ринок деривативів, головним завданням яких є хеджування ризиків, що супроводжують операції з базовими фінансовими інструментами. При цьому одним із основних параметрів, що характеризують операції з деривативами є волатильність.

3. Доведено, що високий ступінь складності деяких похідних інструментів та поява багатьох прошарків посередників під час сек'юритизаційних транзакцій ведуть до того, що фінансові ринки перестають бути прозорими. Наразі можливості раціонального вибору

типових деривативів для ефективного захисту як продавців так і інвесторів від ризиків є обмежені. Усе це дає підстави вважати, що вони є однією з основних причин періодичних розладів на фінансових ринках та виникнення криз не лише локального і регіонального, але й глобального масштабу, з огляду на легкість їхнього поширення.

4. В роботі встановлено, що оцінка впливу похідних фінансових інструментів як на мікро- так макро рівнях є амбівалентною, а її застосування значно збільшує можливості управління ризиками для учасників фондового ринку, а відтак може визначати обсяги і різноманіття реалізованих ними фінансових операцій з екстраполяцією на економічне зростання та добробут окремих країн. Втім їхнє складне, багаторівневе і ризиковане використання, за відсутності відповідних правил та контролю з боку регуляторів на національному та міжнародному рівнях веде до зростання турбулентності фінансових ринків.

5. Встановлено, що широкомасштабне застосування все більш складних фінансових інструментів (структурованих, синтетичних) з їх багаторівневою системою означає, що фінансові ринки стають все менш прозорими. Ризик вибору деривативів, які є неадекватними для даного типу транзакції, стає все більшим.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Фондовый портфель / Отв. ред. Рубин Ю.Б., Солдаткин В.П. – М.: СОМИНТЭК, 1992.– 212с.
2. Загорський В.С. Розвиток ринку цінних паперів та управління його ризиками / В.С. Загорський: монографія.–Х.:ВД «ІНЖЕК», 2008.– 192 с.
3. Постанова ВРУ «Про Концепцію функціонування та розвитку фондового ринку України» від 22.09.1995 № 342/95-ВР.
4. Мозговий О.М. Фондовий ринок / О.М. Мозговий: навч. посібн. – К.:КНЕУ, 1999.–316с.
5. Ляшенко В.И. Фондовые индексы и рейтинги / В.И. Ляшенко. – Д.: Сталкер, 1998. – 320 с.
6. Економічна енциклопедія: У трьох томах. Т.3. / Редкол.: С.В. Мочерний та ін. – К.: Видавничий центр «Академія», 2002. – 952 с.
7. Загородній А.Г. Ринок фінансових послуг: Термінологічний словник / А.Г. Загородній, Г.Л. Вознюк. – Львів: Бескид Біт, 2008. – 544 с.
8. Загородній А.Г. Фінансово-економічний словник / А.Г. Загородній, Г.Л. Вознюк. – К.: Знання, 2007. – 1072 с.
9. Януль І.Є. Шляхи розвитку фондового ринку в Україні / І.Є. Януль, В.М. Шелудько // Фінанси України. – 1998. – №6. – С. 96–100.
10. Мертенс А.В. Инвестиции: Курс лекций по современной финансовой теории./ А.В. Мертенс– К.: Киевское инвестиционное агентство, 2007. – 41с.
11. Black F , M. Scholes, (1973) The pricing of options and corporate liabilities, Journal of Political Economy 81, 637-659.

12. Merton R. C. (1980) On Estimating The Expected Return on The Market an Exploratory Investigation. / Robert C. Merton //Journal of Financial Economics. Vol. 8. – P. 323-361
13. Cox, J. (1975) "Notes on Option Pricing I: Constant Elasticity of Diffusions." Unpublished draft, Stanford University
14. Cox, J.C., Ross, S., Rubinstein, M. (1976) The Valuation of options for alternative stochastic processes. Journal of Financial economics 3, 145-166.
15. Благун І.С. Оцінка і прогнозування динаміки показників фондового ринку/ І.С. Благун, І.В Буртняк // Современные проблемы моделирования социально-экономических систем: Монография.– Х.: ИД «ИНЖЕК», 2009–С. 135-150.
16. Blahun I. Simulative model for evaluation of investment processes in the regions of Ukraine / I. Blahun, L. Dmytryshyn, H. Leshuk // Investment Management and Financial Innovations. – 2017. – № 14(3), 322-329. doi:http://10.21511/imfi.14(3-2).2017.032016.
17. Іващук Н.Л. Аналіз структури світового ринку деривативів: Монографія. – Львів: Ліга-Прес, 2008. – 248 с.
18. Liashenko O., Kravets T. Multifractal Analysis of Currency and Stock Indices Using Wavelet Technology // Ekonomika, 2013, Vol. 92(3) Supplement A, P. 296-303
19. Ляшенко О.І. Дослідження динаміки фондового індексу ПФТС на фінансовому ринку України на різних часових вікнах з 2001 по 2016 роки / О.І. Ляшенко, К. І. Крицун // МННЦ ІТіС. – 2016. – №21. – С. 21-34
20. Максишко Н.К. Прогнозування динаміки індексу українських акцій на базі моделі однорідної структури та гібридного підходу / Сучасні проблеми прогнозування соціально-економічних процесів: концепції, моделі, прикладні аспекти: Монографія // За ред. О.І.

Черняка, П.В. Захарченка. – Бердянськ : Видавець Ткачук О.В., 2012. – 564 с.

21. Примостка Л. О. Фінансові деривативи: аналітичні та облікові аспекти / Л. О. Примостка: монографія.–К.:КНЕУ, 2001.– 263 с.
22. Сохацька О. М. Біржова справа. / О. М. Сохацька. – Тернопіль : ТНЕУ, 2014. – 655 с
23. Шелудько В.М. Фінансовий ринок / В.М. Шелудько. Підручник– – К.: «Знання», 2006. – 535 с.
24. Голуб Г.Г. Проблеми та перспективи розвитку строкового валютного ринку в Україні/ Г.Г. Голуб, Л.В. Кушнер // соціально-економічні дослідження в перехідний період. – 2007. – №1. – С. 379–383.
25. Закон України “Про цінні папери та фондовий ринок” від 18.02.2018 // ВВР – 2018. – №3480-IV.
26. Азаренкова Г. Основні тенденції розвитку фондового ринку в посткризовий період / Г. Азаренкова, І. Шкодінна // Вісник Національного банку України. – Лютий, 2012. – № 2 (192). – С. 3–7.
27. Абасова К. Валютні деривативи в Україні: стан та перспективи / К. Абасова // Вісник Національного банку України. – 2014. – № 9(223). – с. 45–48.
28. Антонов С. Організація обігу валютних деривативів в Україні: питання теорії та практики / С. Антонов, С. Шишков // Ринок цінних паперів України. – 2009. – № 5–6. – С. 37–56.
29. Квактун О.О. Особливості участі України на світовому ринку деривативів / О.О. Квактун // Економічний простір. – 2014. – № 83.
30. Колодізев О. М., Аналіз перспектив розвитку ринку деривативів в Україні з урахуванням вирішення проблеми його нормативно-правового регулювання/ О. М. Колодізев, О. В. Коцюба // Проблеми економіки. – 2016. – №1. – С. 242–248.

31. Парандій О. Ризики та втрати у торгівлі деривативами / О. Парандій // Фінансові інструменти. – 2013. – № 1–2. – С. 77–82.
32. Примостка Л.О. Біржовий ринок деривативів в Україні: історія, сучасність, перспективи розвитку / Л.О. Примостка, І.В. Краснова // Ринок фінансових послуг. – 2014. – № 7.
33. Сохацька О. М. Застосування опціонів у корпоративному управлінні / О. М. Сохацька // Економіст. – 2001. – № 3. – С. 33, 34–39.
34. Бідюк П.І. Прогнозування волатильності фінансових процесів за альтернативними моделями / П.І. Бідюк, О.М. Трофимчук, О.А. Кожухівська // Наук. вісті НТУУ «КПІ». – 2012. – № 6. – С. 36-44.
35. Гриценко А.А. Співвідношення стабільності та волатильності у динаміці вартості грошової одиниці / А.А. Гриценко, Н.В. Душкевич // Проблеми і перспективи розвитку банківської системи України: зб. наук. праць. – Суми: ДВНЗ «Українська академія банківської справи НБУ», 2007. – № 19. – С. 46–53.
36. Кулаков А.Е. Волатильность доходности и подход к построению системы контроля и управления рисками / А.Е. Кулаков // Банковское дело. – 2004. – № 6. – С. 35–38
37. Романов В.С. Волатильность как характеристика изменчивости финансово-экономических переменных: сб. науч. трудов / В.С. Романов. – Пенза: «Теория и практика реструктуризации предприятий», 2011. – 150 с.
38. Соловйова В.В. Дослідження тенденцій розвитку фондового ринку України / В.В. Соловйова // міжнародний науково-практичний журнал «Фінансовий простір»: електронне наукове фахове видання. – 2014. – №3 (15). – 2014
39. Твардовский В. Волатильность как инструмент для определения минимумов рынка [Электронный ресурс] / В. Твардовский // ЗАО



175 «Инвестиционная компания «Ай Ти Инвест». – Режим доступа:  
<http://www.itinvest.ru/about/news/2066/>

40. Рубцов Б.Б. Современные фондовые рынки. Учебное пособие для вузов / Б.Б. Рубцов. – М: Альпина Бизнес Букс, 2007. – 926 с.
41. Engle, R.F. (1982) Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of U.K. inflation, *Econometrica* 50, 987-1008.
42. Bollerslev, T. (1986) Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics* 31,307-327.
43. Буртняк И.В. Моделирование динамики развития фондового рынка с помощью моделей ARCH // *Бизнес Информ.* – 2009. – №12. – С. 131–134.
44. Буртняк І.В., Малицька Г.П. Дослідження взаємодії між фондовими індексами на основі моделей ARCH // *Вісник Східноукраїнського нац. у-ту ім. В. Даля.*– Луганськ, 2009. – №12. – С. 102–110
45. Rubinstein, M. (2001) Rational markets: Yes or no? The affirmative case / Rubinstein, M. // *Financial Analysts Journal.* 57(3), 15–29.
46. Hull, J. & A. White (1987). The pricing of options on assets with stochastic volatilities. *The Journal of Finance* 42(2), 281–300
47. Carr, P. & V. Linetsky (2006). A jump to default extended CEV model: An application of Bessel processes. *Finance and Stochastics* 10 (3), pp. 303–330.
48. Corielli, F., Foschi, P. and Pascucci, A., (2010), “Parametric approximation of diffusion transition densities”, *SIAM Journal on Financial Mathematics*, Volume 1, pp. 833–867.
49. Forde, M., Jacquier, A. and Lee, R., (2012), “The small-time smile and term structure of implied volatility under the heston model”, *SIAM Journal on Financial Mathematics*, Volume 3, Issue 1, pp. 690–708.
50. Gatheral, J., Hsu, E. P., Laurence, P., Ouyang, C. and Wang, T.-H., (2012), “Asymptotics of implied volatility in local volatility

- models”, *Mathematical Finance*, Volume 22, Issue 4, pp. 591–620.
51. Heston, S. (1993). A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options, *Review of Financial Studies*, 6 (2), pp. 327–343.
  52. Lindsay, A.E. & Brecher, D.R. (2012). Simulation of the CEV Process and the Local Martingale Property, *Mathematics and Computers in Simulation*, 82, pp. 868-878.
  53. Lorig, M., Pagliarani, S. and Pascucci, A., (2013), “A Taylor series approach to pricing and implied vol for LSV models”, Working Paper available at ArXiv: <http://arxiv.org/abs/1308.5019>.
  54. Mendoza-Arriaga, R., Carr, P., and Linetsky V., (2010). Time-changed Markov processes in unified creditequity modeling. *Mathematical Finance* 20, pp. 527–569.
  55. Liashenko O., Kravets T. The Synchronization Effects of Stock Indices Dynamics in the Multifractal Analysis Using Wavelet Technology // *Revista Economica*, 2014, 66, P. 41-57
  56. Ляшенко О.І. Мультифрактальний аналіз динаміки фондових індексів Азії: NIKKEI ТА HKSE / О.І. Ляшенко, К. І. Крицун // *Технологічний аудит та резерви виробництва – 2016. Том.2, №6(28)*. – С.15- 18.
  57. Шуклін Г.В. Моделювання інвестиційних рішень на фондовому ринку / Г. В. Шуклін // *Моделювання та інформаційні системи в економіці : зб. наук. праць. — 2009. — Вип. 79. — С. 62-69*.
  58. Благун І.С. Прогнозування економічних і соціальних процесів: навчальний посібник / І.С. Благун, І.В. Буртняк., Г.П. Малицька – Івано-Франківськ: Видавець Віктор Дяків, 2012. –131 с.
  59. Благун І.С. Моделювання процесів розвитку фондового ринку: монографія / І.С. Благун, І.В. Буртняк. – Івано-Франківськ: Видавець Віктор Дяків, 2011. –155 с.

60. Буртняк І.В. Дослідження процесу Орнштейна–Уленбека методами спектрального аналізу/ І.В. Буртняк, Г.П. Малицька // Проблеми економіки. – 2014. – №2. – С. 349–356.
61. Dmytryshyn L. A Methodological Approach To Development And Optimization A Set Of Parameters For A Company's Creditworthiness Evaluating / Dmytryshyn L., Blahun I. // Економічний часопис. – 2014. – № 7-8 (2). – С. 52-55.
62. Yor, M. (1984). On square-root boundaries for Bessel processes, and pole-seeking Brownian motion. *Stochastic Analysis and Applications* (Lecture Notes Math. 1095), eds A. Truman and D. Williams, Springer, Berlin, pp. 100–107.
63. Davydov D. and Linetsky V. (2001). Structuring, pricing and hedging double-barrier step options, *Journal of Computational Finance*, 5, pp. 55–88.
64. Fouque J.-P., Papanicolaou G., and Sircar R. (2000). *Derivatives in Financial Markets with Stochastic Volatility*, Cambridge University Press.
65. Gatheral J. (2006). *The Volatility Surface: a Practitioner's Guide*, John Wiley and Sons, Inc.
66. Lorig M. J. (2014) Pricing Derivatives on Multiscale Diffusions: an Eigenfunction Expansion Approach. *Mathematical Finance* **24**:2, 331–363.
67. Vasicek O., (1977). An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics* 5(2), 177 – 188.
68. Fouque, J.-P., G. Papanicolaou, R. Sircar, and K. Solna (2003). Singular perturbations in option pricing. *SIAM J. Applied Mathematics* 63(5), 1648–1664.
69. Schroder, M. (March 1989) Computing the Constant Elasticity of Variance Option Pricing Formula. *The Journal of Finance*, 44, 211–219.

70. Emanuel, D. C. and MacBeth, J. D. (1982) Further Results on the Constant Elasticity of Variance Call Option Pricing Model. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 17, 533–554.
71. Fouque J.P., G. Papanicolaou and K.R Sircar, (2000) *Derivatives in Financial Markets with stochastic Volatility* Cambridge University Press.
72. Davydov, D. and Linetsky, V. (2003) Pricing Options on Scalar Diffusions: An Eigenfunction Expansion Approach. *Operations Research*, 51, 185–209.
73. Lorig, M. (2013). The exact smile of certain local volatility models. *Quantitative Finance* 13 (6), pp. 897–904.
74. Heston S. (1993). A Closed-Form solution for Options with stochastic volatility with applications to bond and currency options, *Review of Financial Studies*, 6 (2), 327 – 343
75. Gorovoi, V. & Linetsky, V., 2004. Black’s model of interest rates as options, eigenfunction expansions and Japanese interest rates. *Mathematical finance* 14(1), 49–78.
76. Burtnyak, I.V. & Malyska, A (2018). Spectral study of options based on CEV model with multidimensional volatility. *Investment Management and Financial Innovations*, 15(1), 18-24.
77. Ho, T.S.Y., & Lee, S., 1986. Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims // *Journal of Finance*. — Vol. 41. — № 4. — P.1011—1029.
78. Hull, J. & White, A., 1987. The pricing of options on assets with stochastic volatilities. *The Journal of Finance* 42(2), 281–300.
79. Linetsky, V. (2004). The spectral decomposition of the option value. *International Journal of Theoretical and Applied Finance* 7(3), 337–384.
80. .Fouque J.-P., R. Sircar, K. Solna (2009). Multiname and Multiscale Default Modeling, *Multiscale Modeling and Simulation* 7(4), 1956-1978.
81. Linetsky V. (2004). Lookback options and diffusion hitting times: A

- spectral expansion approach. *Finance and Stochastics*, 8(3):373–398.
82. Aboulaich, R., Baghery, F. & Jrai A., (2013) Option Pricing for a Stochastic Volatility Jump-Diffusion Model, *International Journal of Mathematics and Statistics*, 13 (1), pp. 1-19.
  83. Pagliarani, S., Pascucci A., and Riga C., (2013). Adjoint expansions in local Levy models. *SIAM J. Financial Math.* 4, pp. 265–296
  84. Pascucci, A. (2011). PDE and martingale methods in option pricing. *Bocconi&Springer Series*. New York: Springer-Verlag
  85. Ren, Y, Madan, D. and Qian, M.Q., (2007), “Calibrating and pricing with embedded local volatility models”, *Risk*, pp. 138–143.
  86. Lorig, M., S. Pagliarani, and A. Pascucci (2015). Analytical expansions for parabolic equations. *SIAM Journal on Applied Mathematics* 75, 468–491.
  87. Lorig, M., S. Pagliarani, and A. Pascucci (2015). Explicit implied volatilities for multifactor local-stochastic volatility models. To appear: *Mathematical Finance*.
  88. Буртняк І.В. Фундаментальні матриці розв'язків одного класу вироджених параболічних систем/ І.В. Буртняк, Г.П.Малицька // *Карпатські математичні публікації*. – 2012. – №1/2012/т.4. – С. 12–22.
  89. Burtnyak, I.V. & Malytska, A (2018). Taylor expansion for derivative securities pricing as a precondition for strategic market decisions. *Problems and Perspectives in Management*, 16(1), 224-231. doi:10.21511/ppm.16(1).2018.22
  90. Bronzin V. *Theorie der Prämien-geschäfte* / Bronzin V. – Leipzig ; Wien : Franz Deuticke, 1908. — 89 p.
  91. Castelli C. *The theory of «options» in stocks and shares* / Castelli C. – London : F.C. Mathieson, 1877. — 77 p.
  92. Filer H. *Understanding Put and Call Option's* / H. Filer. – 5th ed. – N. Y. : Crown Publishers, 1962. – 125 p.

93. Gömmel R. On Entstehung und Entwicklung der Effektenbörsen im 19 Jahrhundert bis 1914 / R. Gömmel // Deutsche Börsengeschichte / H. Pohl, F.K. Verlag. – Frankfurt, 1992. – S. 133–207.
94. Bachelier L. Th`eorie de la Sp`eculation / L. Bachelier // Annales de l'Ecole Normale Superieure. – 1900. – Vol. 17. – P. 21–86
95. Нейман фон Дж. Теория игр и экономическое поведение / Нейман фон Дж., О. Моргенштерн ; пер. с англ. ; под ред. Н.Н. Воробьёва. – М. : Наука, 1970. — 708 с.
96. Markowitz H.M. Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investment / Markowitz H.M. — L. ; N. Y. : Chapman & Hall Ltd., 1959. — 356 p.
97. Samuelson P.A. Modern Finance Theory Within One Lifetime / P.A. Samuelson // Mathematical Finance / [Geman H., Madan D., Pliska S.R., Vorst T.]. — Bachelier Congress, 2000. — P. 41–47.
98. Stoll H.R. The Relationship between Put and Call Option Prices / H.R. Stoll // Journal of Finance. — 1969. — Vol. 24, № 5, Dec. — P. 801–824.
99. Merton R.C. The Relation between Put and Call Prices / R.C. Merton // Comment, Journal of Finance. — 1973. — № 28, March. — P. 183–184
100. Arrow K.J. Existence an Equilibrium for a Competetive Economy / K.J. Arrow, G. Debreu // Econometrica. — 1954. — Vol. 22, № 3, July. — P. 265–290.
101. Hirshleifer J. Investment Decision under Uncertainty: Applications of the State-Preference Approach / J. Hirshleifer // Quarterly Journal of Economics. — 1966. — Vol. 80, № 2, May. — P. 252–277.
102. Rubinstein M. Rubinstein on Derivatives / Rubinstein M. — London ; Chicago : Risk Book, 1999. — 485 p.
103. Ross S.A. Return, Risk and Arbitrage / S.A. Ross // Risk and Return in Finance / ed. I. Friend, J. Bicksler. — Wharton Discussion Paper, 1973. — P. 189–217.

104. Varian H.R. The Arbitrage Principle in Financial Economics / H.R. Varian // Journal of Economic Perspectives. — 1987. — Vol. 1, № 2, Fall. — P. 55–72.
105. Batting R.J. The second fundamental theorem of asset pricing: a new approach / R.J. Batting, R.A. Jarrow // Review of Financial Studies. — 1999. — Vol. 12, № 4. — P. 1219–1234.
106. Kreps D.M. Arbitrage and Equilibrium in Economics with infinitely many Commodities / D.M. Kreps // Journal of Mathematical Economics. — 1981. — Vol. 8. — P. 15–34.
107. Mishura Y. Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Related Processes / Y. Mishura. — Berlin ; Heidelberg : Springer-Verlag, 2008. — 393 p.
108. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики / А.Н. Ширяев. — М. : ФАЗИС, 2004. — 1076 с.
109. Markowitz H.M. Foundations of Portfolio Theory / H.M. Markowitz // Journal of Finance. — 1991. — Vol. 46, № 2, June. — P. 469–477.
110. Sprenkle C.M. Warrant Prices as Indicators of Expectations and Preferences / C.M. Sprenkle // The Random Character of Stock Market Prices / ed. Paul H. Cootner. — Cambridge (Mass) : MIT Press, 1964. — P. 412–474.
111. Taleb N. The Black Swan : The Impact of the Highly Improbable / Taleb N. — 2nd ed. — N. Y. : Random House Trade Paperbacks, 2010. — 444 p.
112. Nelson S.A. The A B C of Options and Arbitrage / S.A. Nelson. — N. Y. : The Wall Street Library, 1904. — 96 p.
113. Gann W.D. How to Make Profits in Puts and Calls [Electronic resource] / W.D. Gann. — 1941. — 25 p. — Access mode : — [http://www.gann.su/book\\_eng.html](http://www.gann.su/book_eng.html).

114. Boyarchenko S.I. Non-Gaussian Merton-Black-Scholes Theory / S.I. Boyarchenko, S.Z. Levendorskii. — New Jersey ; London ; Singapore ; Hong Kong : World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2002. — 421 p.
115. Filer H. Understanding Put and Call Option's / H. Filer. — 5th ed. — N. Y. : Crown Publishers, 1962. — 125 p.
116. Bernhard A. More Profit and Less Risk: Convertible Securities and Warrants / Bernhard A. — N. Y. : Arnold Bernhard & Co., Inc, 1970. — 132 p.
117. Reinach A.M. The Nature of Puts and Calls / Reinach A.M. — N. Y. : Bookmailer, 1961. — 102 p.
118. Халл Дж.К. Опционы, фьючерсы и другие производные финансовые инструменты / Халл Дж.К. — М. : ООО «И.Д. Вильямс», 2007. — 1056 с.
119. Силантьєв С.О. Менеджмент похідних фінансових інструментів : навч. посіб. / Силантьєв С.О. — К. : КНЕУ, 2010. — 279 с.
120. Chisholm A.M. Derivatives Demystified: A Step-by-Step Guide to Forwards, Futures, Swap and Options / Chisholm A.M. — 2nd ed. — Chichester : John Wiley & Sons Ltd., 2010. — 286 p.
121. Douglas R. Credit Derivatives Strategies: New Thinking on Managing Risk and Return / Douglas R. — N. Y. : Bloomberg Professional, 2010. — 223 p.
122. Welfens P.J. Digital Economic Dynamics : Innovations, Networks and Regulations / P.J. Welfens, M. Weske. — Berlin ; Heidelberg ; New York : Springer-Verlag, 2007. — 212 p.
123. Knoll M.S. Ancient roots of modern financial innovation: the early history of regulatory arbitrage / M.S. Knoll // Oregon Law Review. — 2008. — Vol. 87, № 93. — P. 93–116.
124. Буртняк І.В. Дослідження поведінки фондового ринку на основі моделей ARCH / І. В. Буртняк // Актуальні проблеми розвитку економіки регіону – Івано-Франківськ : 2016. –Т2. №14. – С. 63–80.



125. Прогнозування та хеджування фінансових ризиків: монографія / за ред. проф. Примостки Л. О. – К: КНЕУ, 2014. – 424 с.
126. Blahun I. Cognitive approach to analysis of investment attractiveness of the regions / I. Blahun, L. Dmytryshyn, H. Leshuk // Науковий вісник Полісся. – Чернігів : ЧНТУ, 2017. – № 4(12). – Ч.1. – С. 171-176.
127. Матвійчук А. В. Штучний інтелект в економіці: нейронні мережі, нечітка логіка : монографія / А. В. Матвійчук – К.: КНЕУ, 2011. – 439 с.
128. Dmytryshyn L. A model for achieving the allocative efficiency of credit resources in Ukraine's banking system / Dmytryshyn L., Blahun I. // Banks and Bank Systems, Volume 11, Issue 3, 2016, P. 6-14
129. Фондовий ринок: підручник / [О. М. Мозговий, А. Ф. Баторшина, О. Г. Величко]; за заг. ред. д-ра екон. наук, проф. О. М. Мозгового – К.: КНЕУ, 2013. – 543 с.

## РОЗДІЛ 2. МОДЕЛЮВАННЯ РОЗВИТКУ ФОНДОВОГО РИНКУ

### *2.1. Модель шляхозалежної волатильності для індексу ПФТС*

Природу волатильності як стохастичного процесу можна пояснити на значній кількості емпіричних даних, які обґрунтовують властивості розподілів, що виступають при трансформації витрат [1]. Наприклад, спостережуване співвідношення між величиною волатильності і активом може бути пояснене рівнем залежності волатильності згідно з моделлю (CEV) варіації сталої еластичності [2-5], або моделлю Кокса і Росса [6]. Стохастична волатильність може також виникнути ендогенно за допомогою рівноваги, яка моделює поведінку учасників ринку.

Більш загальні стохастичні моделі волатильності запропоновані Хулом і Вайтом [7], побудовані на ідеї, що коректна специфікація волатильності може мати загальне і аналітичне трактування. Дуже часто використання правдоподібних параметрів, аналогічно, як при від'ємній кореляції між волатильністю і ціною, на практиці не відповідає фактичним цінам опціонів. При емпіричній верифікації відбувається пошук структурних параметрів за допомогою відбору істотно різних часових рядів для проведення оцінки.

В цьому сенсі фактично, в науковій літературі [8-9] постає проблема щодо складу моделі. Будемо встановлювати структуру моделі волатильності перед дослідженням значень цін опціонів.

Узагальнені процеси з умовною гетероскедастичністю (GARCH) використовують граничні дискретні проміжки часу для моделювання стохастичної волатильності [10]. Припустимо, що враховуючи

інтереси інвестора, ми отримуємо ціни опціонів, на основі інформації про близькі часові проміжки, тобто без неперервної часової структури неможливо визначити точну стратегію повторення.

При виборі моделі встановлення цін потрібно врахувати теоретичну загальність і склад структури волатильності та здатність ефективно і точно оцінювати параметри. Для першого твердження наукова література досягла певних результатів, піднімаючи нові важливі проблеми і розробляючи різні підходи [11]. Застосовуючи швидку середню зміну волатильності, було запропоновано ефективний метод для моделювання, аналізу і стійкої оцінки важливих ринкових параметрів. Основною їхньої ідеєю – є удосконалення моделі Блека-Шоулза, яка відображає вплив стохастичної волатильності на ціну.

В 1998 році Гобсон і Роджерс [12], (надалі HR) конкретизували локальну волатильність за допомогою моментів минулих повернень. Позначимо  $Z_t = \ln(e^{-rt} P_t)$  логарифм від дисконтованої зміни ціни та визначимо розгалужену функцію порядку  $m$

$$S_t^{(m)} = \lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda u} (Z_t - Z_{t-u})^m du, \quad (2.1)$$

де параметр  $\lambda$  описує вагу ретроспективних спостережень. Ціни акцій задовольняють стохастичне диференціальне рівняння

$$dZ_t = \sigma(t, Z_t, S_t^{(1)}, \dots, S_t^{(n)}) dB_t + \mu(t, Z_t, S_t^{(1)}, \dots, S_t^{(n)}) dt$$

для деяких гладких функцій  $\sigma(\cdot) > 0$  і  $\mu(\cdot)$ .

Оскільки  $\sigma(\cdot)$  може також залежати від  $P_t$ , то модель включає частинний випадок, коли волатильність є детермінованою функцією ціни. Ці гіпотези зберігають повноту та дозволяють визначити незалежну ціну опціону. Розглянута особливість має перевагу над повністю стохастичними процесами волатильності, де розгляд арбітражу не достатній, щоб визначити ризикову премію тобто

різницю між ціною виконання та ринковою ціною базового інструменту. Надалі, припустимо, що миттєва волатильність - це функція першого порядкового відгалуження  $S_t = S_t^{(1)}$ . Таке припущення дає можливість одержати коректну постановку задачі Коші для стохастичного диференціального рівняння Колмогорова і розв'язати її з максимальною точністю це і є модель Гобсона-Роджерса[13].

Використовуючи рівняння (2.1), розкладено  $S_t$  як відхилення поточної ціни від експоненціально зваженої середньої величини минулих цін.

$$S_t = Z_t - \lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda u} Z_{t-u} du \quad (2.2)$$

Параметр  $\lambda$  визначає часовий горизонт «рухомих часових вікон» інтегралу справа. Для більших значень параметра  $\lambda$ ,  $S_t$  залежні від недавнього минулого, тоді як для менших значень –  $S_t$  співпадають з приростами зміни цін. В цьому випадку рівень залежності волатильності більш узгоджений.

Щоб побудувати основну модель, яка використовується для обчислювальних процедур, розглянемо нейтральну міру ризику  $\bar{P}$  і  $\bar{P}$ -броунівський рух  $B_t$ . Нехай  $e^{-rt} P_t$  буде  $\bar{P}$ -мартингал, який є розв'язком стохастичного рівняння  $d\bar{P}_t = \sigma \bar{P}_t d\bar{B}_t$ , за формулою Іто [14]

$$dZ_t = \sigma d\bar{B}_t - \frac{1}{2} \sigma^2 dt. \quad (2.3)$$

Після заміни  $u = t - s$  рівняння (2.2) має вигляд

$$S_t = Z_t - \lambda e^{-\lambda t} \int_{-\infty}^t e^{-\lambda s} Z_s ds,$$

диференціал якого дорівнює

$$dS_t = dZ_t - \lambda S_t dt. \quad (2.4)$$

Гобсон і Роджерс знайшли загальну формулу для диференціала функцій вищих порядкових відгалужень і довели, що  $(Z_t, S_t^{(1)}, \dots, S_t^{(n)})$  утворюють Марківський процес.

Зробивши заміну  $U = Z - S$  і позначивши  $f(t, U_t, Z_t)$  ціну в момент  $t < T$ , одержимо що, вартість можливої премії має вигляд

$$f(t, U_T, Z_T) = q(Z_T), \quad (2.5)$$

у час  $T$ . Використовуючи стандартні аргументи, одержуємо диференціальне рівняння в частинних похідних

$$f_t + \lambda(Z - U)f_U - \frac{1}{2}\sigma(Z - U)^2(f_{ZZ} - f_Z) = 0, \quad (2.6)$$

з граничною умовою (2.5). Рівняння (2.6) є ультрапараболічним стохастичним рівнянням типу Колмогорова.

Тепер припустимо, що волатильність змінюється через певний час. Природа цього процесу є важливою проблемою в теорії фінансів, в літературі запропоновані різні спроби моделювання цього процесу [15].

Залежність між волатильністю та минулими змінами є інтуїтивною. У роботах [16-17] запропоновано пов'язати поверхню волатильності з минулими змінами в порядкувому рівні, тоді як, на практиці, як правило, фахівці, використовують експоненціальне зваження, щоб передбачати волатильність. Крім того, ця гіпотеза вводить ефект скупчення волатильності. Залежно від значень  $\lambda$ , значні зміни в ціні змушують відгалуження (2.6) істотно змінюватися протягом певного періоду. Особливості динаміки волатильності, такі як локальна сталість і залежність волатильності від нещодавно спостережуваної волатильності, пояснюються її природою [18-19].

Провівши аналіз, використовуючи значення величини індексу ПФТС, за період з січня 2013 р. по грудень 2017 р. [20] Обчислимо значення функції  $S$

$$\bar{S}_t = \sum_{i=0}^M \frac{\nu_i}{\Xi} (Z_t - Z_{t-i}), \quad (2.7)$$

де  $\nu_i = e^{-\lambda i \Delta t}$  вагові коефіцієнти, а  $\Xi$  – їхня сума. Як відповідну оцінку волатильності візьмемо

$$\bar{\sigma}_t = \sqrt{k \sum_{i=1}^M \frac{\nu_i}{\Xi} (Z_{t-i+1} - Z_{t-i} - \bar{\mu}_t)^2}, \quad (2.8)$$

де  $\bar{\mu}_t = \ln \frac{M-t}{t}$  – ваговий коефіцієнт,  $k = \Xi^2 / \sum \left( \frac{\Xi^2}{M} - \nu_i^2 \right)$  це коректувальний коефіцієнт для неупередженої оцінки  $\sigma^2$ . Для обчислення щоденних оцінок, розглянуто 122 операційних дні та одиницю часу  $\Delta t = 1/122$ .

Взявши  $M = 1224$ , послідовно обчислюємо оцінку, засновану на 1224 спостереженнях за кожним з операційних днів. Завдяки формулам (2.7) і (2.8), заснованих, обчислення успішно виконуються.

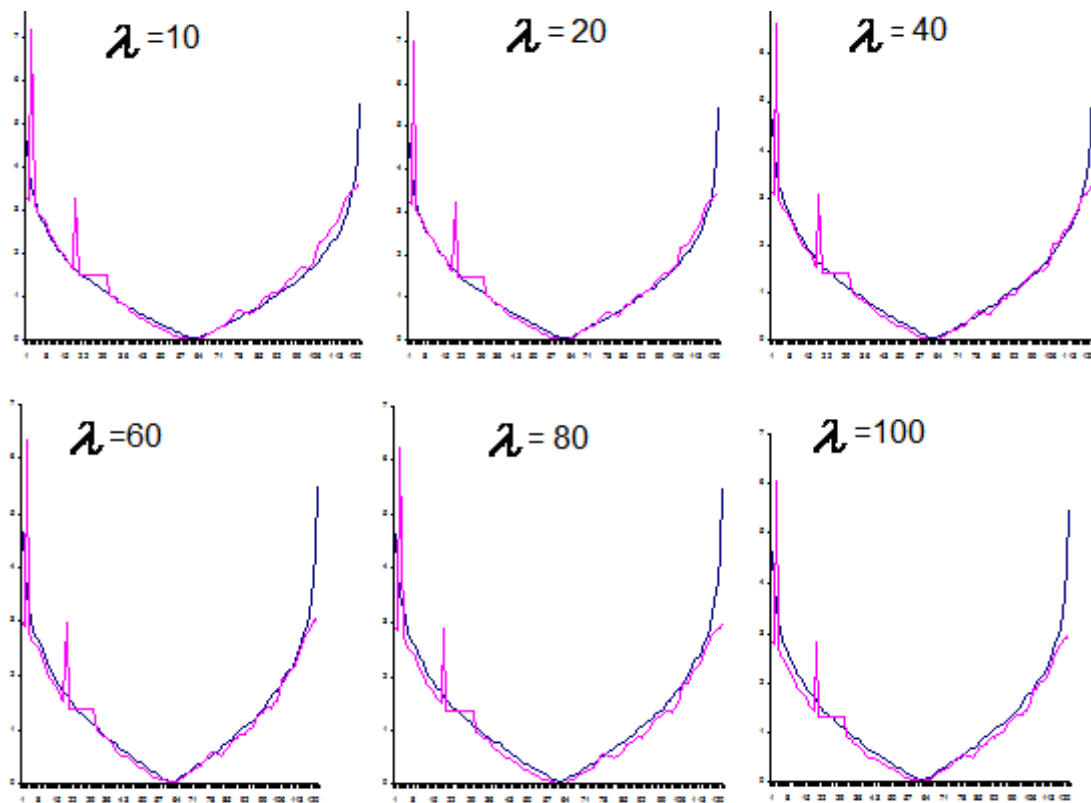


Рис.2.1. Квадратичний тренд при різних значеннях  $\lambda$ .

На рис. 2.1 видно взаємовідношення між оцінкою (2.7) та волатильністю (2.8) для різних значень  $\lambda$ . Кожен випадок ілюструє криву, одержану, наближенням волатильності  $\bar{\sigma}_t$  за допомогою полінома другого порядку  $a\bar{S}^2 + b\bar{S} + c$ .

На рис. 2.2 наведено зв'язок між оцінкою (2.7) та волатильністю  $\bar{\sigma}_t$  обчисленої допомогою частки квадратних тричленів

$$\sigma(S) = \frac{1 + aS + bS^2}{c + dS + eS^2}.$$

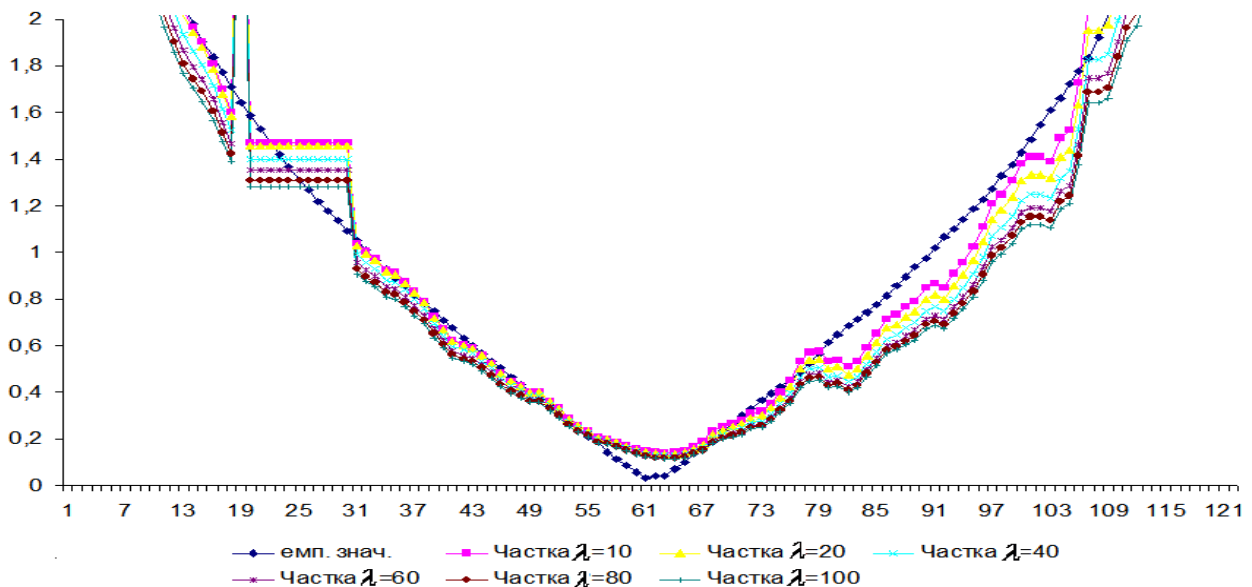


Рис.2.2. Тренд волатильності, як частка двох многочленів.

В таблиці 2.1 наведені параметри для різних видів моделей, при відповідних значеннях  $\lambda$ , обчислені за допомогою методу найменших квадратів. Обширні дослідження доводять, що найефективнішою специфікацією для функції волатильності є  $\sigma(S) = \frac{1 + aS + bS^2}{c + dS + eS^2}$  та  $\sigma(S) = aS^2 + bS + c$ , це в значній мірі скорочує зусилля, пов'язані з проблемою оптимізації [21].

Таблиця 2.1.

**Параметри для різних видів моделей**

$\lambda$	10	20	40	60	80	100
Коеф.	$\sigma(S) = \frac{1 + aS + bS^2}{c + dS + eS^2}$					
c	0,278	0,282	0,295	0,306	0,315	0,323
d	-0,035	-0,035	-0,036	-0,038	-0,039	-0,040
e	-0,003	-0,003	-0,003	-0,003	-0,003	-0,003
a	0,241	0,240	0,239	0,238	0,238	0,238
b	0,015	0,015	0,015	0,015	0,015	0,015
	$\sigma(S) = aS + b$					
a	-0,006	-0,006	-0,006	-0,006	-0,005	-0,005
b	1,268	1,227	1,165	1,118	1,083	1,056
	$\sigma(S) = aS^2 + bS + c$					
c	3,298	3,233	3,090	2,974	2,894	2,813
b	0,881	0,857	0,816	0,774	0,760	0,740
a	0,059	0,057	0,054	0,051	0,050	0,049
	$\sigma(S) = \sqrt{a + bS^2}$					
a	268,370	263,143	251,614	242,365	235,146	229,463
b	-1,772	-1,727	-1,646	-1,584	-1,536	-1,499

Проведені дослідження підтверджують емпіричну очевидність наших припущень і допомагають визначити відповідну функцію



волатильності. Доведено залежність волатильності від розгалужених функцій  $S$  першого порядку на прикладі індексу ПФТС. Встановлено на основі емпіричних даних, що найкраще функцію волатильності наближає квадратична регресія, а особливо – частка квадратних тричленів.

У теорії ціноутворення опціонів [1], базовий актив моделюється як геометричний броунівський рух, чия динаміка під нейтральною межею ризику задається як

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t. \quad (2.9)$$

де  $r$  – локальна безризикова відсоткова ставка, а  $\sigma$  – волатильність. Якщо припустити, що обидва параметри є константами, то модель (2.9) описує прості опціони.

В даний час формула Блека-Шоулза [1] широко використовується на практиці, у випадку, коли ціни на купівлю та продаж опціонів задані в термінах так званої умовної змінної. Проте ціни, за якими продаються деривативи, неузгоджені з припущенням про сталу волатильність, значні емпіричні доведення стохастичної волатильності стимулюють розвиток більш реалістичних моделей. Основна мета моделей зі змінною волатильністю полягає в наступному: з одного боку, можна отримати ціну звичайного опціону, яка узгоджена з розглянутими параметрами змінної, а з іншого, обрати правильний варіант стратегії для підвищення продуктивності хеджування [21]. З теоретичної точки зору, це не важко досягти, бо будь-яка модель, яка залежить від значної кількості параметрів може бути відкалібрована, щоб відповідати ринковим цінам. Слід підкреслити, що процедура калібрування залежить від кількості та інформативності наявних даних [22-23].

У моделі локальної волатильності, змінна є детермінованою функцією часу та поточної ціни базового активу. Переваги такого підходу в тому, що в принципі появляється можливість точно визначити функцію від змінної таким чином, щоб ціни опціонів узгоджувалися з ринковими цінами.

Перші результати в цьому напрямку були отримані Гобсоном і Роджерсом [12], які запропонували визначити модель змінної як різницю між поточною ціною і середнім зваженим показником минулих цін. Якщо для броунівського руху  $W$  позначити через  $S_t$  біржову ціну, а через  $M_t$  і  $D_t$  відповідно тенденції і відхилення процесів, то можна записати

$$M_t = \lambda e^{-\lambda t} \int_{-\infty}^t e^{\lambda s} Z_s ds, \quad \lambda > 0, \quad D_t = Z_t - M_t, \quad (2.10)$$

де  $Z_t = \ln(e^{-rt} S_t)$  є логарифмом дисконтної ціни процесу. Функції  $e^{\lambda s}$  в (2.10) є ваговими коефіцієнтами, а параметр  $\lambda$  описує ставку, за якою знижуються ціни.

В умовах процесу Іто  $S_t$  є розв'язком стохастичного диференціального рівняння

$$dS_t = \mu(D_t) S_t dt + \sigma(D_t) S_t dW_t, \quad (2.11)$$

де  $\mu$  і  $\sigma > 0$  є обмеженими функціями, які задовольняють сформульовані гіпотези, з тим щоб гарантувати, що система (2.10)–(2.11) має розв'язок. Ключовою особливістю моделі є те, що процес  $(S_t, D_t)$  є марківський. Таким чином, ціна  $U$  опціону з терміном погашення  $T$ , має вигляд

$$U(S_t, t) = e^{-r(T-t)} K w(r(T-t) + \ln(S_t / K), M_t - \ln K, T-t),$$

де  $K$  – початкова ціна опціону,  $w = w(x, y, t)$  є розв'язком задачі Коші

$$\frac{\sigma^2(x-y)}{2}(\partial_{xx}w - \partial_x w) + (x-y)\lambda\partial_y w - \partial_t w, \quad \text{в } R^2 \times [0, T], \quad (2.12)$$

$$w(x, y, 0) = (e^x - 1)^+ \quad \text{при } (x, y) \in R^2. \quad (2.13)$$

Таким чином шляхо-залежні моделі ґрунтуються на емпіричному доведенні залежності змінності по відношенню до відхилення. На рис. 2.3 наведено імпліковану змінність проти скоригованої логарифмічної грошової поверхні для опціонів значень індексу ПФТС протягом 2017 року. Зауважимо, що середня вага  $\lambda e^{-\lambda t}$  в (2.13) не може бути достатньо гнучкою, щоб врахувати абсолютно всі особливості процесу, що можуть виникнути, наприклад через злиття акцій чи зміни капіталізації. Рис. 2.4 репрезентує еволюцію значень імплікованої змінності для індексу ПФТС. Досліджувані змінні згруповані по областях значень  $D_t$ , значення яких зростає при зменшенні  $D_t$ . Це добре висвітлює співвідношення між змінною та ринковими цінами [24].

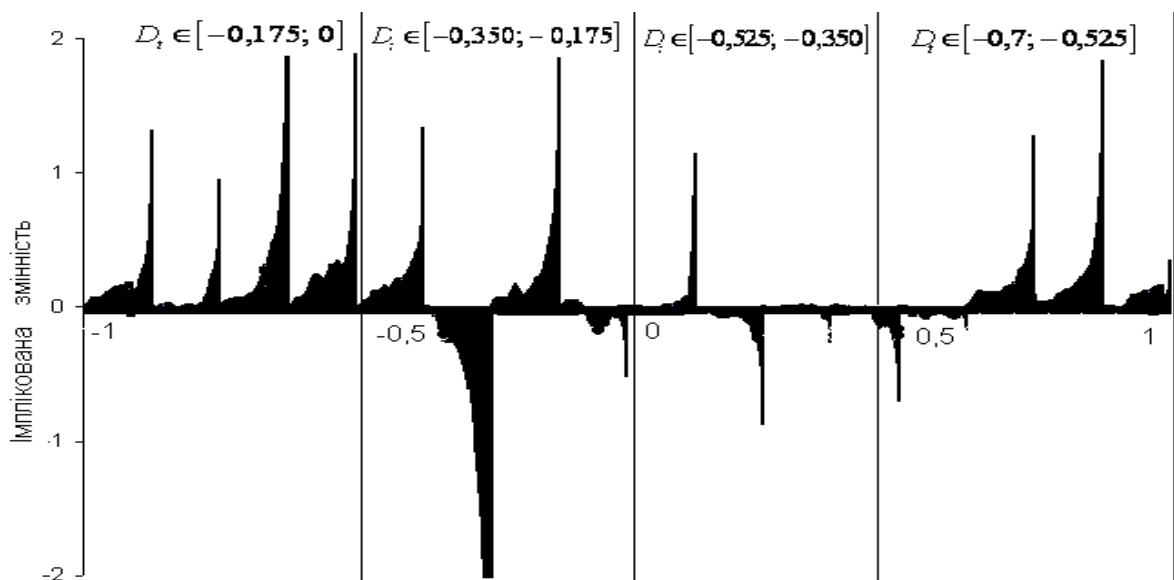


Рис. 2.3. Еволюція значень імплікованої змінності побудованої за

значеннями логарифмічної грошової поверхні  $\frac{\ln(e^{r(T-t)}S_t/K)}{\sqrt{T-t}}$  за згрупованими значеннями тренду відхилень  $D_t$  для індексу ПФТС в 2017 році.

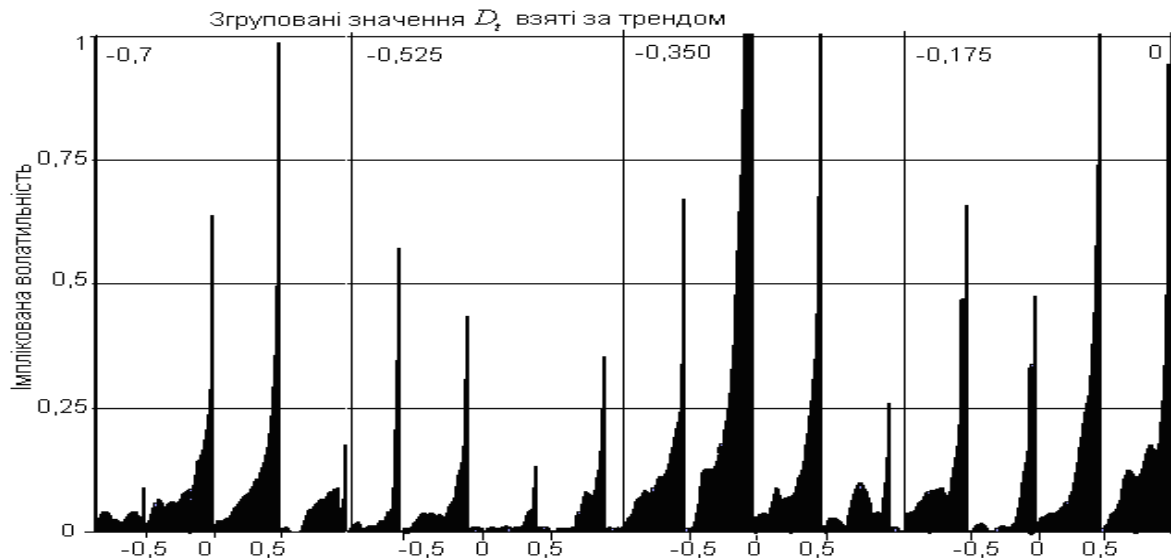


Рис. 2.4. Еволюція значень імплікованої волатильності побудована за значеннями логарифмічної грошової поверхні  $\frac{|\ln(e^{r(T-t)}S_t/K)|}{\sqrt{T-t}}$  за згрупованими значеннями тренду відхилень  $D_t$  для індексу ПФТС в 2017 році.

Слабкою стороною моделі Гобсона-Роджерса є те, що багато проблем математичного і економічного характеру виникають з визначення відхилення процесу  $D_t$ , який включає в себе шлях базового активу в минулому, тобто на проміжку  $(-\infty, T]$ . Вимога необмеженого періоду часу в минулому, очевидно ставить практичні проблеми, оскільки тільки скінчені проміжки часу є наявними, що приводить до відсутності даних в моделі. Щоб подолати цю проблему

запропоновано узагальнення моделі Гобсона-Роджерса, тобто введена до розгляду нова модель для цін активів зі змінною залежною від минулого. Розглянемо середню вагу  $\varphi$ , яка є невід'ємною, кусково-неперервною і інтегрованою функцією на  $(-\infty, T]$  і строго додатною на  $[0, T]$ , тоді отримаємо

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^t \varphi(s) ds. \quad (2.14)$$

Відзначимо, що якщо  $\varphi$  має компактний носій (замикання підмножини області визначення функції, де функція набуває ненульових значень), то в цьому випадку область інтегрування в (2.14) обмежена. Позначимо через  $r$  безризикову ставку і  $B_t = e^{rt}$ . Визначимо процес

$$M_t = \frac{1}{\Phi(t)} \int_{-\infty}^t \varphi(s) Z_s ds, \text{ або еквівалентно } dM_t = \frac{\varphi(t)}{\Phi(t)} (Z_t - M_t) dt, \quad (2.15)$$

де  $Z_t$  є розв'язком диференціального рівняння

$$dZ_t = \mu(Z_t - M_t) dt + \sigma(Z_t - M_t) dW_t, \quad (2.16)$$

а  $\mu$  і  $\sigma$  обмежені неперервні за Гельдером функції та  $\sigma$  є строго додатною функцією. Основна ідея полягає в розгляді більш гнучкого відхилення процесу визначеного в термінах загальної середньої ваги, що можливо співвідноситься зі скінченим періодом часу. При цих припущеннях відомо, що диференціальне рівняння (2.16), з урахуванням (2.15), має єдиний слабкий розв'язок і при цьому  $(Z, M), (Z, D)$  є процесами Маркова. Типові характеристики середньої ваги даються на таких прикладах:

1)  $\varphi(t) = e^{P(t)} \max\{Q(t), 0\}$  де  $P(t), Q(t)$  є поліноміальними функціями, зокрема  $P(t) = \lambda t$  і  $Q(t) = 1$ ;

2)  $\varphi(t) = 1$  для  $t \in [0, T]$  і  $\varphi(t) = 0$  для  $t \notin [0, T]$ , це відповідає середньому геометричному азійського опціону;

3)  $\varphi(t)$  – кусково-лінійна функція – найбільш загальний випадок.

На рис. 2.5 наведено величину імплікованої волатильності для індексу ПФТС. Досліджувані змінні згруповані по областях значень відхилення  $D_t$ . Проаналізувавши рис. 2.5, можемо зробити висновок, що значення імплікованої волатильності зростає при зменшенні  $D_t$ . Це означає, що існує тісний взаємозв'язок між змінною та ринковими цінами.

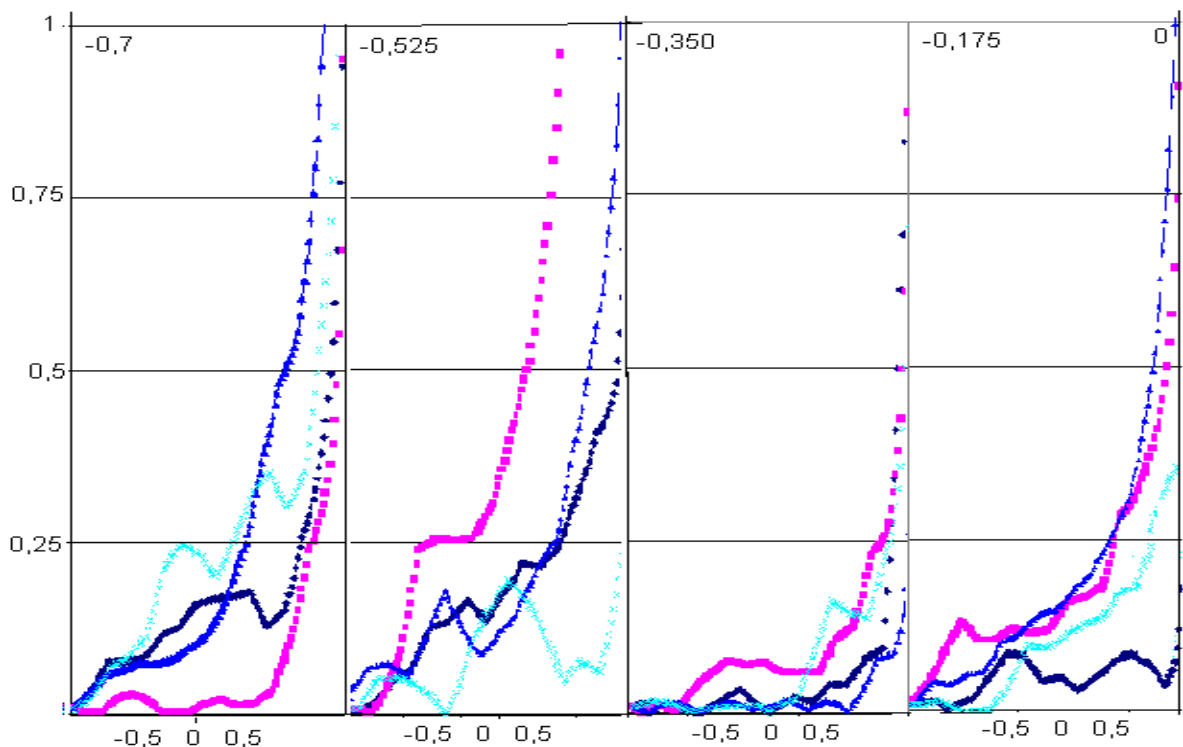


Рис.2.4. Імплікована волатильність за згрупованими значеннями тренду відхилення  $D_t$  для індексу ПФТС в 2017 році.

Використовуючи модель шляхо-залежної волатильності побудовано тренд  $D_t$  і за його значеннями, використовуючи метод найменших квадратів (МНК), знайдено волатильність індексу ПФТС, результати розрахунку наведено на рис. 2.6. Найкраще репрезентує даний процес квадратична модель  $\sigma = a + bD_t + cD_t^2$  де  $\lambda = 10$ ,  $\tau = 0,5$ ,  $N = 2000$ , оцінки одержані з точністю до 0,94.

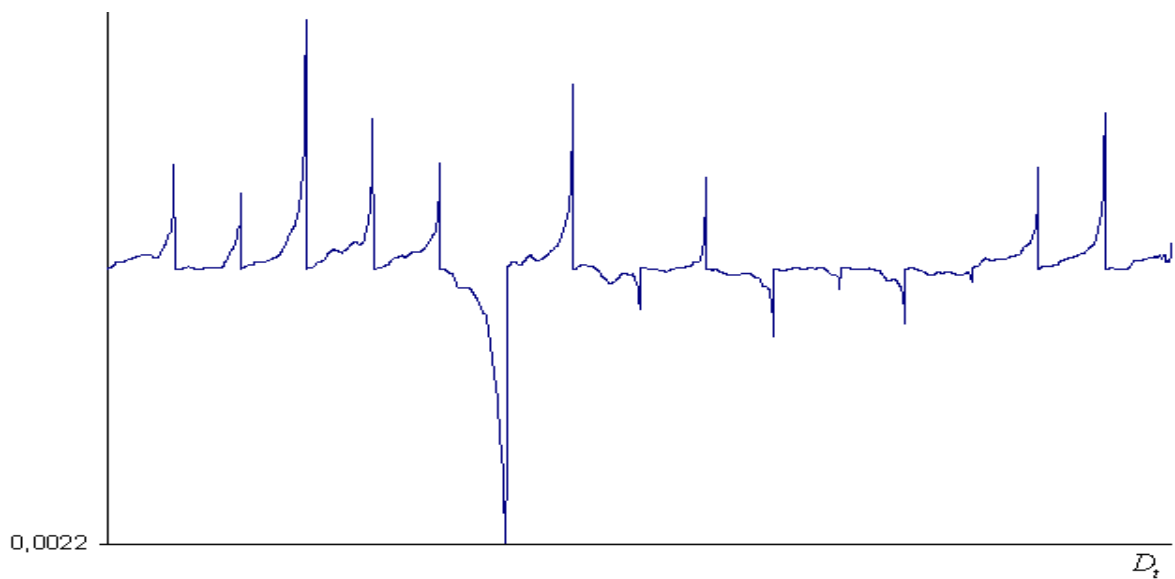


Рис. 2.6. Тренд волатильності індексу ПФТС знайдений за МНК.

Зауважимо також, що шляхозалежність волатильності яка включає інформацію про минуле, і дає змогу в умовах стабільного ринку, спрогнозувати поведінку інвесторів в різних ринкових умовах, а також відобразити позитивні або негативні тенденції активу. Наприклад, на відміну від стандартних локальних, або стохастичних моделей волатильності, у випадку раптового падіння ринку, шляхозалежна модель волатильності призначена для автоматичного підвищення рівня волатильності з метою дослідження динаміки ринку

в більш природний спосіб. Тобто в цій моделі волатильність не потрібно постійно калібрувати (що є відомим недоліком локальних моделей волатильності). Завдяки цьому, модель користується значною увагою серед вчених і практиків.

## *2.2. Моделювання залежностей причинно–наслідкового характеру між індексом ПФТС та світовими індексами*

Властива ринку невизначеність, що вимірюється варіаціями або коваріаціями, змінюється в часі. Вивчення цих змін набули систематичного характеру і стало можливим лише з появою моделей авторегресійної умовної гетероскедастичності (AutoRegressive Conditionally Heteroskedastic, ARCH). Основна ідея яких полягає у відмінності між умовними і безумовними моментами другого порядку. Тоді як безумовні варіації і коваріації стали, умовні моменти нетривіально залежать від минулих станів світу і розвиваються в часі [26-28].

Першим об'єктом моделювання стала інфляційна невизначеність. Згодом ARCH моделі знайшли застосування в аналізі волатильності цін і прибутковості спекулятивних активів. Застосуванням ARCH моделей встановлено, що динаміка волатильності багатьох фінансових змінних підпорядкована стійким закономірностям. Традиційна модель ціноутворення для капітальних активів і її динамічна модифікація указують на пропорційну залежність між очікуваною надмірною віддачею ринкового портфеля і його умовним стандартним відхиленням. ARCH модель є природним інструментом для вивчення цієї проблеми в динамічному контексті, коли умовна дисперсія змінюється в часі. Умовні кореляції між сегментами фінансового ринку дозволяють оцінити ефективність диверсифікації засобів як



спосіб страхування ризиків. Низька кореляція вказує на ефективність диверсифікації, тоді як висока кореляція свідчить про протилежне.

Стратегія моделювання курсів фінансових інструментів у випадку моделі класу ARCH зводиться на практиці до двох напрямів перевірки удосконалення специфікації основного рівняння регресії

$$r_t = x_{(k)t} \alpha_{(k)} + \xi_t,$$

де  $x_{(k)t} = (x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{Kt})_{(1 \times K)}$  вектор  $K$  пояснювальних змінних,

$\alpha_{(k)} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_K \end{pmatrix}_{(K \times 1)}$  вектор відповідних параметрів,  $\xi_t = v_t \sqrt{h_t}$ , а

$v_t : IID(0,1)$ ,  $\xi_t : IID(0, \sigma_\xi^2)$  та

$$h_t = \gamma_0 + \sum_{s=1}^S \gamma_s \xi_{t-s}^2, \quad \gamma_0 > 0, \gamma_s \geq 0 \quad (2.17)$$

Ефективність прогнозу сформульованого на підставі моделі ARCH часто зумовлена врахуванням у рівнянні (2.17) існуючих на ринку залежностей, які мають причинно–наслідковий характер. Висока правдивість прогнозу існує завдяки специфікації детермінуючої частини моделі. Найважче відшукати причинно–наслідкові залежності на рівні даних високої частоти, які обмежені кількома видами змінних, що реєструються з тією ж самою частотою як курси більшості фінансових інструментів. Такі перевірки найчастіше охоплюють аналіз взаємного впливу інструментів, які походять з різних сегментів фінансового ринку, наприклад грошового, валютного, капітанового, та різних географічних ринків, цілі аналізу впливу індексів великих бірж цінних паперів на індекси або курси акцій окремих компаній на інших, менших біржах у світі [29-31].

На противагу більшості економічних явищ, специфіка функціонування фінансових ринків дозволяє реєстрування біржових

курсів та цін інших фінансових інструментів з незвично високою частотою. Найвищий її рівень стосується даних денних, годинних, хвилинних і навіть поточних даних, які появляються в інформаційних системах. Наприклад кількість котирувань індексу Dow Jones Industrial Average (DJIA) на протязі одного дня перевищує 10000, а кількість даних, які реєструються на валютному ринку в агентстві Рейтер 3000. На ринку цінних паперів України, наприклад на ПФТС, кількість спостережень в системі постійних записів до індексу становить близько 400–500 протягом одного дня.

У випадку даних з такою високою частотою їх не можна безпосередньо використати для моделювання і прогнозування курсів окремих фінансових інструментів більшості доступних макроекономічних категорій. Вони звичайно реєструються з набагато нижчою частотою, тобто річною, кварталною або місячною. В той же час можливе єдине довершення агрегації біржових даних з нижчою частотою, що відповідає доступним макроекономічним даним і проведення аналізу на рівні такого спостереження, тобто виникає необхідність відшукання реляції в причинно–наслідковому характері даних на рівні високої частоти, яка стосується обмеженої кількості фінансових інструментів. Однією з можливостей є використання даних біржового обороту. Його найважливіша риса, об'єм обороту тобто кількість трансакцій, як і їх поточна вартість є детально реєстрована на відповідних біржах і може бути доступна для всіх. Як правило ці дані збираються не тільки в формі з агрегованій для всього ринку, але і для окремих акцій чи сегментів. Для цього часто використовується оборот.

Зазначимо, що величини курсу–обороту завжди використовується на фінансових ринках в технічному аналізі, де служить для конструкції так званих технічних показників. Варто підкреслити, що крім існування сильних емпіричних підстав весь час

необхідне теоретичне обґрунтування для існування залежності курсу–обороту [32-34].

По–перше вважаємо, що щоденний біржовий оборот може бути по-різному скорельований з денною зміною курсів, а також залежить від числа трансакцій, завірених на протязі одного дня, які в свою чергу залежать від варіанції денних змін самих курсів. По–друге, залежність курсу–обороту може виступати з приводу розбіжності в передбаченнях учасників ринку, що є додатно скорельована з величиною самого біржового обороту. По–третє, денна зміна курсу і денний оборот залежать від середнього темпу напливу інформації на ринок, розбіжності думок учасників ринку на тему нової інформації та глибини ринку репрезентованої через кількість активних учасників в даний момент на ринку. Якщо зафіксувати в часі два перші чинники, то залежність курсу–обороту може бути виявлена зміною ринкової активності, яка генерується через учасників ринку.

Рівносильними є сформульовані теоретичні постулати до спостережень, що залишилися є наступні. По–перше існує залежність між оборотами і автокореляцією ставки обороту курсів відповідних фінансових інструментів, хоч все одно величини, як і сам напрям того зв'язку можуть бути різними для окремих ринків, інструментів та околів. По–друге, впровадження обороту до функції умовної варіації моделі ARCH правило, приводить до зменшення чи навіть повного виключення ефекту ARCH. Це означає, що згідно з теорією моделей ARCH у випадку часових рядів, які породжені фінансовими ринками, явище групування біржового обороту може бути безпосередньою причиною групування курсової варіації, появою ефекту ARCH та самої гетероскедастичності випадкового складника в класичних моделях. По–третє, на валютному ринку трансакції укладені при низьких оборотах є більш “інформативні” ніж ті, котрі мають місце коли обороти на біржі є потужними. Варто підкреслити, що згідно з теорією

ефективності ринків капіталу існування всяких залежностей причинно–наслідкового характеру повинні бути автоматично виключені з ринків з коротким часовим горизонтом. Їхнє поява можлива на ринках країн, що розвиваються, відповідно менш ефективних в сенсі класичної теорії ефективності.

На біржі ПФТС залежність між величинами індексу ПФТС та відповідним йому біржовим оборотом є тісною. Це доводять результати аналізу кореляції які наведені в табл. 2.2.

Таблиця 2.2.

### Кореляція індексу ПФТС

Роки	$cor(PFTS_t, VOL_t)$	$cor(RLPFTS_t, RLVOL_t)$
98-17	0,356279	0,008473
2010	0,204266	0,04678
2011	0,231298	-0,02326
2012	0,011885	-0,00338
2013	-0,32458	-0,00971
2014	-0,07635	0,062312
2015	0,036034	0,007611
2016	0,212256	-0,02709
2017	0,274939	0,013417

де  $PFTS_t$  – величина індексу ПФТС в дні  $t$ ,  $VOL_t$  – величина обороту в дні  $t$ ,  $RLPFTS_t = \ln(PFTS_t) - \ln(PFTS_{t-1})$ ,  $RLVOL_t = \ln(VOL_t) - \ln(VOL_{t-1})$ .

Зауважимо що сила зв'язку між величинами індексу ПФТС та відповідним йому біржовим оборотом не є сталою, а змінюється в часі.

Важливий результат вийшов у випадку порівняння динаміки коефіцієнтів кореляції обчислених для темпів і рівнів зросту. В

більшості виокремлених околів можна зауважити, що величина коефіцієнтів кореляції зростає то спадає для темпів зросту.

Вступний аналіз кореляції між індексом і оборотами на ПФТС дозволяє вважати, що біржовий оборот може становити добру пояснюючу змінну в основному рівнянні регресії моделі ARCH. Ця залежність використана при конструкції відповідних рівнянь моделі класу ARCH для індексу ПФТС. Використані в емпіричному дослідженні статистичні дані взяті з ПФТС в Україні та з сайтів (<http://finance.yahoo.com/> і <http://djindexes.com/>). База даних з денною частотою охоплює проміжок вісімнадцять років від 12.01.98 р. до 30.12.17 р.

Статистична інформація використана для конструкції змінних у відповідних моделях ARCH стосується індексу і оборотів на ПФТС, двох основних американських індексів Dow Jones Industrial Average (DJIA) і NASDAQ Composite, а також німецького індексу – DAX та індексу Російської Торгівельної Системи (РТС). База даних спеціально створена так, щоб врахувати всі ті дні, коли біржі закриті і сесії не відбувалися (вихідні та святкові дні). Індекс ПФТС є показником зваженої ринкової величини акцій, до його складу входять всі компанії основного ринку ПФТС. Якщо ж появляються нові емісії акцій, то щокварталу наступає так звана ревізія індексу ПФТС і включення нових учасників. Індекс тоді враховує всі котування на основному ринку ПФТС на кінець попереднього кварталу. Індекс ПФТС відслідковує середні зміни курсів акцій на ринку. Звичайно на біржі є близько 200 компаній з різною величиною обороту їх акцій, постає потреба такого добору, щоб можна найбільш результативно репрезентувати весь ринок. Критерієм є величина капіталізації ринку [35-36]. Біржовий оборот для всього ринку отримується як сума величини оборотів всіма акціями протягом даної сесії. Величина обороту та його темп зросту наведені на рисунках 2.7.-2.8.

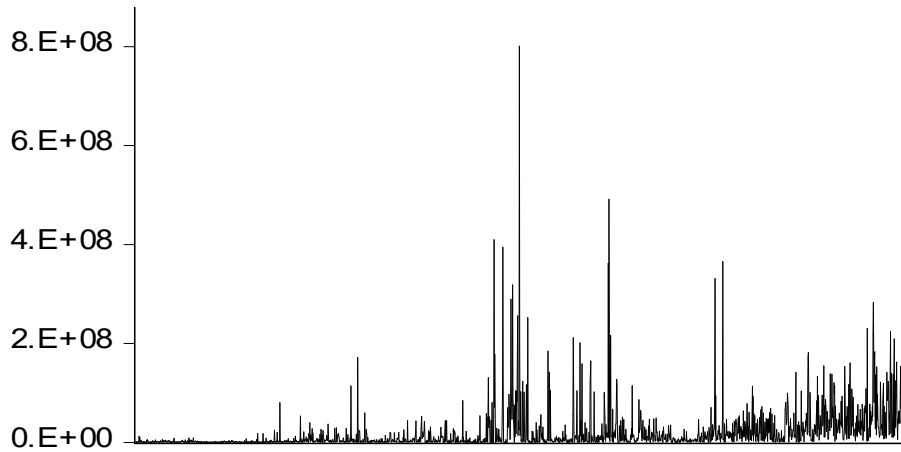


Рис. 2.7. Оборот ПФТС.

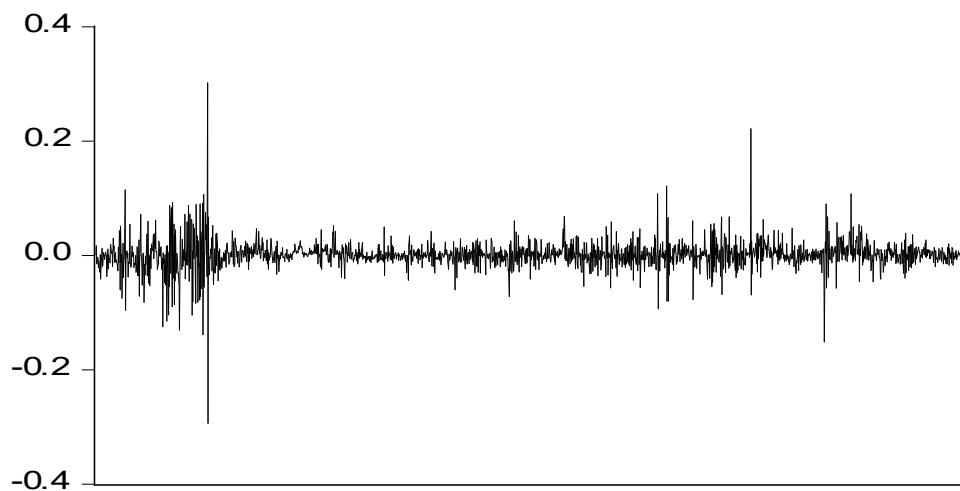


Рис. 2.8. Оборот ПФТС, темп зросту.

Індекси DJIA і NASDAQ Composite взяті як головні характеристики двох найбільших біржових ринків у США, а DAX як найголовніший європейський та РТС як найосновніший в Росії.

Ефект ARCH тестовано для денних даних 1998–2017 рр. Проведено оцінку параметрів моделей: ARCH(1), GARCH(1,1) і ARCH–M(1) основного рівняння регресії, авторегресійним, в трьох прийнятих варіантах специфікації (варіант А).

$$r_t = \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1} + \xi_t \quad (2.18)$$

де  $\xi_t = v_t \sqrt{h_t}$  (у всіх трьох варіантах), у варіанті який використовує біржовий оборот як пояснюючу змінну (варіант Б)

$$r_t = \alpha_0 + \alpha_1 v_{t-1} + \xi_t \quad (2.19)$$

де  $v_t$  темп зросту біржового обороту, а варіанті В без детермінуючої частини

$$r_t = \alpha_0 + \xi_t \quad (2.20)$$

де темп зросту індексів курсів залежить виключно від формування функції умовної варіації і відслідковує одну і ту ж “механіку” аналізованого явища. У випадку ARCH–M рівняння (2.19) і (2.20) доповнені згідно умовної варіації (2.17) та  $r_t = x_{(k)t} \alpha_{(k)} + \psi \sqrt{h_t} + \xi_t$ .

Аналіз результатів приводить до висновку, що найкраще показала себе модель GARCH(1,1) в якій використаний біржовий оборот, як пояснююча змінна.

В наступному кроці зроблено подальшу модифікацію моделі з використанням у основному рівнянні регресії пояснюючих змінних взятих з міжнародного фінансового ринку згідно з гіпотезою про існування зв’язків причинно–наслідкового характеру між ПФТС та іншими біржами у світі. Специфікація моделі розширилася завдяки світовим індексам: DJIA, NASDAQ Composite, DAX та PTC. Тим самим постає зверифікована гіпотеза про вплив індексів американських бірж та європейського ринку на формування індексу ПФТС.

Вибір ступеня моделі зумовлений існуванням найсильнішого ефекту ARCH для запізнення в один проміжок, підчас селекції вибиралися найкращі ступені моделі. В таблиці 2.3 репрезентовано результати оцінки параметрів функцій індексу ПФТС для моделей: ARCH(1), GARCH(1,1) і ARCH–M(1) у всіх трьох прийнятих варіантах специфікації основного рівняння регресії [37-40].

Таблиця 2.3.

## Оцінка параметрів функції індексу ПФТС

Модель	$\alpha_0$	$\alpha_1$	$\gamma_0$	$\gamma_1$	$\phi_1$	$\psi$
варіант А						
ARCH(1)	0,0013 (2,8793)	-0,1654 (-9,4604)	0,0003 (76,7711)	0,4986 (22,2132)	–	–
GARCH(1,1)	0,0011 (3,3291)	-0,1356 (-5,4090)	0,00004 (20,4759)	0,2694 (19,0734)	0,6880 (56,9749)	–
ARCH-M(1)	0,0106 (9,6921)	-0,0768 (-4,8146)	0,0003 (77,4728)	0,5418 (21,4793)	–	-0,4720 (-12,3959)
варіант Б						
ARCH(1)	0,0011 (2,7637)	0,00001 (0,4147)	0,0003 (80,2325)	0,5017 (22,3319)	–	–
GARCH(1,1)	0,0011 (2,9697)	0,0001 (0,6337)	0,0002 (17,0363)	0,1681 (23,1719)	0,8168 (142,0202)	–
ARCH-M(1)	0,0106 (8,9696)	0,0002 (0,0869)	0,0003 (80,2002)	0,5279 (22,5520)	–	-0,4783 (-10,6526)
варіант В						
ARCH(1)	0,0029 (3,4539)	–	0,0003 (50,7508)	0,3008 (10,4161)	–	–
GARCH(1,1)	0,0023 (3,1441)	–	0,0002 (11,3964)	0,2989 (11,4347)	0,4254 (10,3994)	–
ARCH-M(1)	0,0161 (3,1557)	–	0,0003 (49,4747)	0,2834 (8,9754)	–	-0,6635 (-2,6536)

(в дужках наведено величину t-статистики)



Аналіз результатів приводить до висновку, що найкраще показала себе модель GARCH(1,1) в якій використаний біржовий оборот, як пояснююча змінна.

В наступному кроці зроблено подальшу модифікацію моделі з використанням у основному рівнянні регресії пояснюючих змінних взятих з міжнародного фінансового ринку згідно з гіпотезою про існування зв'язків причинно–наслідкового характеру між ПФТС та іншими біржами у світі. Специфікація моделі розширилася завдяки світовим індексам: DJIA, NASDAQ Composite, DAX та РТС. Тим самим постає зверифікована гіпотеза про вплив індексів американських бірж та європейського ринку на формування індексу ПФТС.

Аналіз проведено на підставі вище згаданих даних. Спочатку впроваджена одночасна авторегресія пояснюючої змінної та біржового обороту:

$$r_t^{PFTS} = \alpha_0 + \alpha_{11}r_{t-1}^{PFTS} + \alpha_{20}v_t^{PFTS} + \xi_t, \quad (2.21)$$

Наступна специфікація, це розширення з запізненням в один проміжок величини індексів, які походять з американського ринку – DJIA і NASDAQ Composite:

$$r_t^{PFTS} = \alpha_0 + \alpha_{11}r_{t-1}^{PFTS} + \alpha_{20}v_t^{PFTS} + \alpha_{31}r_{t-1}^{DJIA} + \alpha_{41}r_{t-1}^{NASDAQ} + \xi_t, \quad (2.22)$$

та індексу DAX:

$$r_t^{PFTS} = \alpha_0 + \alpha_{11}r_{t-1}^{PFTS} + \alpha_{20}v_t^{PFTS} + \alpha_{31}r_{t-1}^{DJIA} + \alpha_{41}r_{t-1}^{NASDAQ} + \alpha_{51}r_{t-1}^{DAX} + \xi_t, \quad (2.23)$$

В подальшому кроці додано запізнюючу змінну  $v_{t-1}^{PFTS}$ , що стосується обороту на ПФТС:

$$r_t^{PFTS} = \alpha_0 + \alpha_{11}r_{t-1}^{PFTS} + \alpha_{20}v_t^{PFTS} + \alpha_{21}v_{t-1}^{PFTS} + \alpha_{31}r_{t-1}^{DJIA} + \alpha_{41}r_{t-1}^{NASDAQ} + \alpha_{51}r_{t-1}^{DAX} + \xi_t,$$

Вище наведена специфікація постає остаточно змодифікованою при це розширення з запізненням в один проміжок величини індексу, який походить з російського ринку – РТС.

$$r_t^{PFTS} = \alpha_0 + \alpha_{11}r_{t-1}^{PFTS} + \alpha_{20}v_t^{PFTS} + \alpha_{21}v_{t-1}^{PFTS} + \alpha_{31}r_{t-1}^{DJIA} + \alpha_{41}r_{t-1}^{NASDAQ} + \alpha_{51}r_{t-1}^{DAX} + \alpha_{61}r_{t-1}^{RTS} + \xi_t \quad (2.24)$$

Отримані результати наведені в таблицях 2.4–2.7.

Таблиця 2.4.

### Оцінка параметрів моделі GARCH(1,1)

$$r_t^{PFTS} = \alpha_0 + \alpha_{11}r_{t-1}^{PFTS} + \alpha_{20}v_t^{PFTS} + \alpha_{31}r_{t-1}^{DJIA} + \alpha_{41}r_{t-1}^{NASDAQ} + \xi_t$$

$\alpha_0$	$\alpha_{11}$	$\alpha_{20}$	$\alpha_{21}$	$\alpha_{31}$	$\alpha_{41}$	$\alpha_{51}$	$\gamma_0$	$\gamma_1$	$\gamma_2$
Роки: 12.01.1998–30.12.2017									
0,0011	-0,1362	-0,0001	–	-0,0178	-0,0020	–	0,0001	0,2701	0,6887
(3,1503)	(-5,4095)	(-0,5354)		(-0,5718)	(-0,1039)		(17,3192)	(18,6981)	(56,1110)

Таблиця 2.4.

### Оцінка параметрів моделі GARCH(1,1)

$$r_t^{PFTS} = \alpha_0 + \alpha_{11}r_{t-1}^{PFTS} + \alpha_{20}v_t^{PFTS} + \alpha_{31}r_{t-1}^{DJIA} + \alpha_{41}r_{t-1}^{NASDAQ} + \alpha_{51}r_{t-1}^{DAX} + \xi_t$$

$\alpha_0$	$\alpha_{11}$	$\alpha_{20}$	$\alpha_{21}$	$\alpha_{31}$	$\alpha_{41}$	$\alpha_{51}$	$\gamma_0$	$\gamma_1$	$\gamma_2$
Роки: 12.01.1998–30.12.2017									
0,0011	-0,1366	-0,0001	–	-0,0176	-0,0027	0,0010	0,0001	0,2718	0,6866
(3,1408)	(-5,4327)	(-0,5386)		(-0,5657)	(-0,1351)	(0,4838)	(17,4350)	(18,6853)	(55,7065)

Таблиця 2.6.

## Оцінка параметрів моделі GARCH(1,1)

$$r_t^{PFTS} = \alpha_0 + \alpha_{11}r_{t-1}^{PFTS} + \alpha_{20}v_t^{PFTS} + \alpha_{21}v_{t-1}^{PFTS} + \alpha_{31}r_{t-1}^{DJIA} + \alpha_{41}r_{t-1}^{NASDAQ} + \alpha_{51}r_{t-1}^{DAX} + \xi_t$$

$\alpha_0$	$\alpha_{11}$	$\alpha_{20}$	$\alpha_{21}$	$\alpha_{31}$	$\alpha_{41}$	$\alpha_{51}$	$\gamma_0$	$\gamma_1$	$\gamma_2$
Роки: 12.01.1998–30.12.2017									
0,0011	-0,1365	-0,0002	0,0002	-0,0183	-0,0019	0,0104	0,0004	0,2720	0,6857
(3,1290)	(-5,1477)	(-0,1162)	(0,8274)	(-0,5897)	(-0,0968)	(0,4965)	(17,4793)	(18,2414)	(55,1614)

Таблиця 2.7.

## Оцінка параметрів моделі GARCH(1,1)

$$r_t^{PFTS} = \alpha_0 + \alpha_{11}r_{t-1}^{PFTS} + \alpha_{20}v_t^{PFTS} + \alpha_{21}v_{t-1}^{PFTS} + \alpha_{31}r_{t-1}^{DJIA} + \alpha_{41}r_{t-1}^{NASDAQ} + \alpha_{51}r_{t-1}^{DAX} + \alpha_{61}r_{t-1}^{RTS} + \xi_t$$

$\alpha_0$	$\alpha_{11}$	$\alpha_{20}$	$\alpha_{21}$	$\alpha_{31}$	$\alpha_{41}$	$\alpha_{51}$	$\alpha_{61}$	$\gamma_0$	$\gamma_1$	$\gamma_2$
Роки: 12.01.1998–30.12.2017										
0,0010	-0,1446	0,0001	0,0001	-0,0106	-0,0053	0,0052	0,0580	0,00004	0,2688	0,6957
(2,7391)	(-5,240)	(-0,3298)	(0,7227)	(-0,3292)	(-0,2605)	(0,2344)	(6,2877)	(17,1858)	(18,5217)	(58,9587)

Сформулюємо наступні висновки: По–перше сила залежності між курсом і оборотом зменшується з плином часу. По–друге стверджується істотний вплив всіх чотирьох міжнародних індексів, з поміж яких найбільшим видається РТС.

Варто звернути увагу, що сконструйоване рівняння підтверджує динамічні зв'язки і всі пояснюючі змінні запізняються на один

проміжок. Це означає, що модель може бути безпосередньо використана як прогностичне знаряддя [41-43].

На основі отриманих результатів для решти моделей, можемо зробити висновок, що моделі GARCH(1,1) зазвичай в систематичний спосіб краща від моделей ARCH(1), ARCH-M(1).

Міра, яка описує кількість зразкових напрямів змін відповідно до реальних, що набуває окремого значення у випадку тривалих часових рядів з високою частотою спостереження. Поведінка інвестиційних стратегій природно залежить від уміння передбачення напрямку змін курсів акцій і кінцеву величину самих курсів. В зв'язку з тим, можна запропонувати такі міри, які дозволяють оцінити продуктивне значення моделі [44]:

$$Q_1 = \frac{N(\{r_t \hat{r}_t > 0\})}{N(\{r_t \hat{r}_t \neq 0\})} \quad (2.25)$$

де  $\hat{r}_t$  теоретична величина пояснюючої змінної,

$N(\{r_t \hat{r}_t > 0\})$ ,  $N(\{r_t \hat{r}_t \neq 0\})$  кількість спостережень для яких  $r_t \hat{r}_t > 0$ ,  $r_t \hat{r}_t \neq 0$ .

В контексті короткотермінових інвестиційних стратегій, предметом особливої уваги може бути здатність прогнозування зворотних пунктів (перехід від спадання до зростання курсів і навпаки) якому відповідає міра:

$$Q_2 = \frac{N(\{r_t \hat{r}_t > 0 | r_{t-1} r_t < 0\})}{N(\{r_t \hat{r}_t \neq 0 | r_{t-1} r_t < 0\})} \quad (2.26)$$

де  $N(\{r_t \hat{r}_t > 0 | r_{t-1} r_t < 0\})$  кількість спостережень для яких  $r_t \hat{r}_t > 0$  за умови  $r_{t-1} r_t < 0$ .

На фінансовому ринку існують кошти у вигляді комісійних від трансакцій, які приводять до того, що міри записані вище повинні бути скорегованими відповідно до приросту курсу, що відповідає тим оплатам (як правило 0,5–1% від кожної трансакції). При конструкції

мір узгодження напрямку змін повинні бути відповідно “фільтровані” для 1% чи 0,5% фільтру.  $Q_1$  і  $Q_2$  набувають вигляду:

$$Q_{1(1\%)} = \frac{N(\{r_t \hat{r}_t > 0 | r_t > 1\%\})}{N(\{r_t \hat{r}_t \neq 0 | r_t > 1\%\})} \quad (2.27)$$

$$Q_{2(1\%)} = \frac{N(\{r_t \hat{r}_t > 0 | r_{t-1} r_t < 0 \cap r_t > 1\%\})}{N(\{r_t \hat{r}_t < 0 | |r_t| > 1\%\})} \quad (2.28)$$

Міри узгодження напрямку змін щораз частіше використовуються, як підстава для оцінки економетричних моделей, які базуються на даних з високою частотою, де предметом моделювання є темп зростання біржових курсів [42]. Аналіз величини мір узгодження зроблений для моделей (2.24), як для найкращого варіанту, який враховує залежності причинно наслідкового характеру, біржові обороти і міжнародні індекси. Отримані результати наведені в табл. 2.8.

*Таблиця 2.8.*

### Міра узгодження індексу ПФТС

	Вибірка
	12.01.1998–30.12.2017
$Q_1$	0.5519
$Q_2$	0.5095
Кількість зворотних пунктів	512
$Q_{1(1\%)}$	0.8107
$Q_{2(1\%)}$	0.4152
Кількість зворотних пунктів (для >1%)	142
$Q_{1(0.5\%)}$	0.8973
$Q_{2(0.5\%)}$	0.3934
Кількість зворотних пунктів (для >0.5%)	225

В усіх пробах ця модель правдиво пояснює в близько 51% випадках напрямок змін змінність індексу ПФТС, причому міра  $Q_1$  найвищою є в цілій вибірці. Добрий результат отриманий з погляду пояснення зворотних пунктів у всьому проміжку 1998–2015 рр. на 512 зворотних пунктів модель спостережень виправдала 317, близько 55%. Високого рівня досягнули величини для зворотних пунктів в яких враховані 1%, 0,5% фільтри. Досить добрі результати були одержані в першій під пробі де  $Q_{1(1\%)}$  і  $Q_{1(0.5\%)}$  – в межах 81%. Корисні результати додає одночасний аналіз  $Q_3$   $Q_4$ , він доводить, що для моделі індексу ПФТС сума безумовних ставок для спостережень в яких модель правильно відображає напрям змін, є майже в три рази більшою ніж для спостережень в яких цей висновок не є правильним. Аналогічно близько в півтора рази вища середня ставка обороту для наведених вище випадків. Необхідно пояснити, що отримано значно гірші результати для моделей з менш розбудованою специфікацією основного рівняння регресії. Це означає, що на ПФТС виступає дуже сильна залежність між курсами, оборотами та міжнародними індексами і може бути корисною при поясненні курсових змін та в аналізі і прогнозуванню зворотних пунктів [43].

На закінчення варто звернути увагу на факт, що правильно сконструйовані моделі класу ARCH характеризуються нормальністю розкладу залишків скорегованих як квадратний корінь функції умовної варіації моделі ARCH:

$$v_t = \frac{\xi_t}{\sqrt{h_t}} \quad (2.29)$$

які беруться з відповідних моделей того класу. Застосування тесту Шапіро –Вілка не дає підстав до відкидання гіпотези  $H_0$  про нормальність розкладу  $v_t$ . Розклад  $v_t$  для цього випадку ілюструє рисунок 2.9.

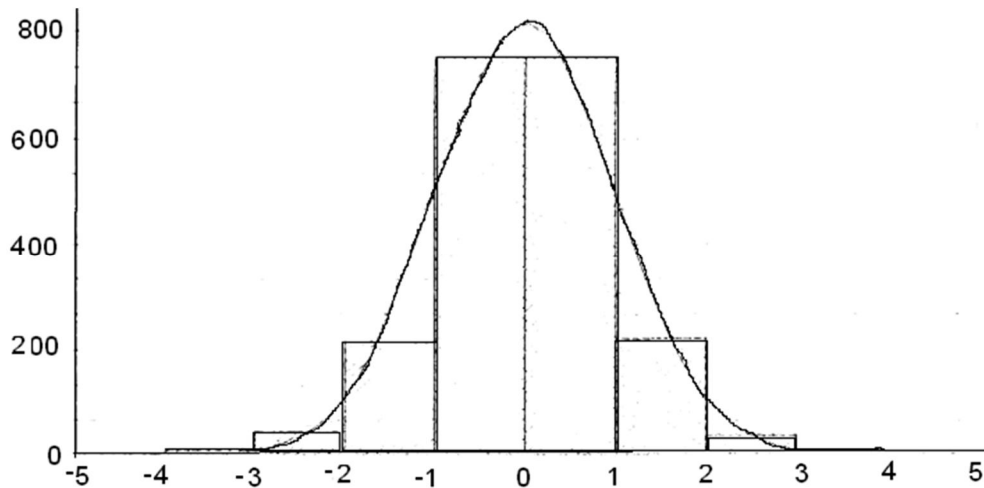


Рис. 2.9. Розклад  $v_t$  моделі GARCH(1,1) індексу ПФТС.

Подібні результати отримані для решти спостережуваних моделей.

Отримані результати оцінок параметрів, представлених моделлю, приводять до таких висновків.

З поміж аналізованих трьох основних видів моделей ARCH найкращою виявилася модель GARCH(1,1). Варто додати, що перевірка, яка стосується біржових компаній вказує, що для курсів окремих акцій часто най більш відповідною була модель ARCH(1). Це може свідчити про створення механізму між ризиком і ставкою обороту для акцій окремих фірм. Модель класу ARCH не знаходить правильного застосування для малих компаній. Міри узгодження керування є властивим знаряддям оцінки моделі з точки зору реалізацій інвестиційних стратегій.

### *2.3. Адитивна модель прогнозування індексу ПФТС*

У сучасній світовій фінансовій системі саме фондовий ринок може слугувати незалежним індикатором сталості та визначеності перерозподілу фінансових та грошових ресурсів. Тобто фондовий ринок розглядається у якості одного з найбільш ефективних механізмів регулювання перетоку фінансових ресурсів за допомогою різних інструментів.

Дослідження розвитку фондового ринку є тією основою, яка сприяє визначенню напрямків у розбудові економіки. Збалансованість та взаємопов'язаність різноманітних індикаторів фондового ринку є запорукою стійкості руху фінансових ресурсів між різним економічними агентами як в межах, так і поза межами країни. Найбільш відомим серед вітчизняних фондових індексів є індекс ПФТС, який розраховується на основі простих акцій підприємств, що пройшли лістинг в ПФТС [44].

Стан розвитку фондового ринку, умови та ефективність перерозподілу фінансових ресурсів багато в чому відображаються у відповідних фондових індексах, які уявляють собою агрегований показник змін у певних економічних подіях на цьому сегменті ринку. До того ж, щоб прогнозувати динаміку фондових ринків, потрібно чітко, на кількісному рівні знати відповідні тенденції. Це знов-таки знаходить певне відображення у динаміці фондових індексів та визначає їх множинність.

Втім слід зауважити, що саме у коливаннях фондових індексів проявляється невизначеність фондових ринків, яка є наслідком різних причин. Так, в основі невизначеності фондового ринку США, що спостерігається на цей час, знаходиться накопичений розрив між



споживанням та заощадженням, переоцінка акцій деяких компаній [45].

Розглянемо індекс ПФТС, який відображає понад 90% загального обсягу торгів організованого фондового ринку в Україні. Неупереджений аналіз його динаміки дає неабияку підставу говорити про невизначеність фондового ринку.

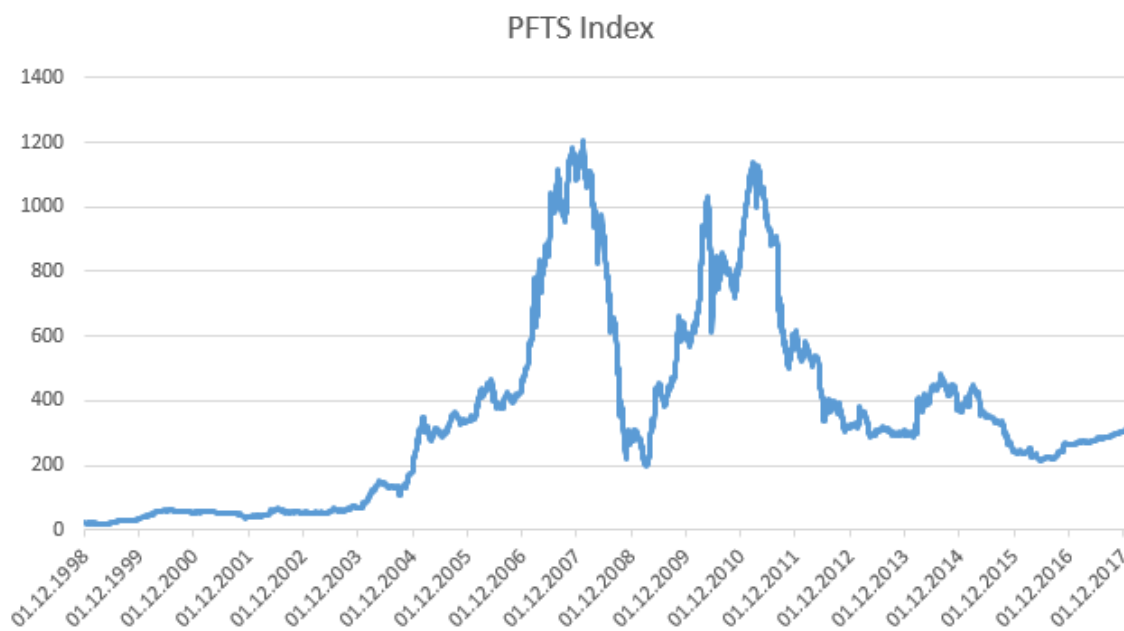


Рис. 2.10. Динаміка індексу ПФТС з 03.10.97 по 30.12.17.

Існуюча динаміка часових інтервалів значень фондового індексу ПФТС не дає можливості побудувати єдину модель відповідних прогнозних оцінок. Більш того, застосування вінеровської моделі опису такого процесу, як найбільш розповсюдженої серед брокерів та інвесторів, є також малоприсадною, що обумовлює іншу сторону невизначеності – побудову адекватної прогнозної моделі.

**Основні статистичні характеристики індексу ПФТС в 2017 р.**

Статистичні характеристики				
Середнє	Стандартне відхилення	Медіана	Ексцес	Асиметрія
277	88	285	2,19	0,22

Так середнє значення, яке характеризує розсіювання середньої дохідності є досить значним. Це, у свою чергу, ускладнює не лише вибір інвестора, а й свідчить про неоднозначність руху фінансових потоків на різних сегментах ринку.

Стандартне відхилення, що характеризує ступінь відповідного ризику вкладання в цінні папери підтверджує не однотайність у русі відповідних фінансових ресурсів та потоків. Підґрунтям останнього є значне розсіювання стандартного відхилення дохідностей за різними фондовими індексами.

Медіана, яка вказує на значення дохідності і ділить розподіл на рівні частини, показує, що індекс за досліджуваний період має переважне зростання в динаміці дохідностей;

Ексцес та асиметрія, які вказують на можливу відмінність, від нормального закону розподілу (який, до речі, покладено в основу класичних методів оцінки та управління фінансовими потоками на ринках розвинених країн) показують, що додатний ексцес визначає гостровершинність розподілу (чим він більший, тим гострішою є вершина розподілу, а додатна асиметрія свідчить про скошеність розподілу в бік додатних значень дохідностей [46]).

На різних проміжках індекс може мати різні розподіли, зокрема вибірка з 08.01.2017 по 13.11.2017 не підтверджує нормальний, а підтверджує показниковий розподіл.

**Перевірка гіпотези про показниковий розподіл індексу  
ПФТС за період з 08.01.2017 по 13.11.2017**

Інтервал	Верхня межа інтервалу	Частота $v_k$	Відносна частота $v_k / n$	Імовірність попадання на $k$ -й інтервал $p_k$	$\chi_k^2$
(199.1; 234.64 )	234.64	30	0.122	0.050	1.443
(234.64; 270.18)	270.18	16	0.065	0.046	0.415
(270.18; 305.72)	304.72	26	0.106	0.042	1.498
(305.72; 376.8)	376.8	15	0.061	0.075	-0.185
(376.8; 412.34)	412.34	34	0.138	0.033	3.185
(412.34; 447.88)	447.88	53	0.215	0.030	6.086
(447.88; 483.42)	483.42	29	0.118	0.028	3.211
(483.42; 554.5)	554.5	11	0.045	0.050	-0.097
(554.5; 590.04)	590.04	7	0.028	0.022	0.302
(590.04; 625.58)	624.58	12	0.049	0.020	1.425
(625.58; 661.12)	661.12	13	0.053	0.019	1.853

Просумувавши значення  $\chi_k^2$  (див. стовпець табл.2.11) одержуємо  $\chi^2 = 19.136$ . Таким чином, вибіркова статистика не перевищує критичного табличного значення  $\chi_{kr}^2 = 21.1$ , що відповідає  $\beta = 0,01$  і  $l - 3 = 8$  степеням свободи. Враховуючи це, можна прийняти гіпотезу щодо показникового розподілу індексу ПФТС.

**Перевірка гіпотези про розподіл Пуассона приростів, які  
відповідають щоденним значенням індексу ПФТС за період  
з 08.01.2017 р. по 13.11.2017 р.**

Інтервал	Верхня межа інтервалу	Частота $v_k$	Відносна частота $v_k / n$	Імовірність попадання на $k$ -й інтервал $P_k$	$\chi_k^2$
$(-\infty, \bar{m} - 3\bar{s})$	-24.05	2	0.009	0.007	0.163
$(\bar{m} - 3\bar{s}, \bar{m} - 2\bar{s})$	-14.51	2	0.009	0.022	1.576
$(\bar{m} - 2\bar{s}, \bar{m} - \bar{s})$	-6.98	25	0.116	0.092	1.378
$(\bar{m} - \bar{s}, \bar{m})$	1.56	86	0.400	0.378	0.275
$(\bar{m}, \bar{m} + \bar{s})$	10.10	73	0.340	0.378	0.842
$(\bar{m} + \bar{s}, \bar{m} + 2\bar{s})$	18.63	18	0.084	0.094	0.242
$(\bar{m} + 2\bar{s}, \bar{m} + 3\bar{s})$	27.17	7	0.033	0.022	1.089
$(\bar{m} + 3\bar{s}, +\infty)$		2	0.009	0.007	0.163

Просумувавши значення  $\chi_k^2$  (див. стовпець табл. 2.12) одержуємо  $\chi^2 = 5.727$ , вибіркова статистика не перевищує критичного табличного значення  $\chi_{kr}^2 = 12.6$ , що відповідає  $\beta = 0,05$  і  $l - 3 = 5$  степеням свободи. Отже, можна прийняти гіпотезу, щодо експоненціального розподілу, або розподілу Лапласа.

Проте дисперсія вибірки не співпадає з дисперсією генеральної сукупності, що підтверджує невизначеність фондового ринку.

В роботі [47] розроблено теорію адитивної та мультиплікативної моделей для нормально розподілених приростів і логонормально розподілених коефіцієнтів переходу.

Розроблено методи прогнозування і моніторингу, для розглянутої вибірки приростів щоденних та середньотижневих значень індексу ПФТС, підтверджено подвійний експоненціальний розподіл, або розподіл Пуассона.

Розподіл Пуассона приростів, що відповідають середньотижневим значенням індексу ПФТС за період з 08.01.2017 р. по 13.11.2017 р. теж підтверджується.

Враховуючи розподіл Пуассона, розглянемо адитивну стохастичну модель [48], а на її базі прогнозування індексу ПФТС

В загальному адитивна стохастична модель (АСМ) динаміки фінансового ресурсу може бути записана у вигляді рекурентного співвідношення

$$\tilde{x}_t = \tilde{x}_{t-1} + \tilde{\alpha}_t, \quad (2.30)$$

де  $\tilde{x}_t, \tilde{x}_{t-1}$  – обсяг фінансового ресурсу на момент часу  $t$  і  $t-1$  ( $t \in 0:T$ )

$\tilde{\alpha}_t$  – абсолютний приріст величини ресурсу за момент часу  $[t-1, t]$ .

Значення, які приймає  $\tilde{\alpha}_t$ , розглядаємо як реалізацію деякої випадкової величини.  $\tilde{\alpha}_t$  – називаються приростами. На основі (2.30) можна визначити стан ресурсу в будь-який момент часу через його стан у початковий момент часу  $x_0$ .

$$\tilde{x}_t = x_0 + \sum_{i=1}^t \tilde{\alpha}_i. \quad (2.31)$$

При цьому зв'язок між початковим моментом  $t=0$  і деяким довільним моментом  $t$ , абсолютного приросту величини ресурсу  $\tilde{\alpha}_{1,t} = \sum_{i=1}^t \tilde{\alpha}_i$ . Подальший розвиток АСМ пов'язаний з прийняттям передумов, що стосуються характеру розподілу випадкових величин  $\tilde{\alpha}_i$ .

Достатньо природнім є припущення про те, що  $\tilde{\alpha}_t$ , розподілені за подвійним показниковим розподілом, так званий розподіл Лапласа з деякими параметрами  $m_t, s_t$ , щільність цього розподілу має вигляд

$$f(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x-m|}, x \in R^1, \quad \lambda > 0 \quad (2.32)$$

де  $m_t$  – математичне сподівання має вигляд

$$M[\alpha] = \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\lambda|x-m|} dx = \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^m x e^{\lambda(x-m)} dx + \frac{\lambda}{2} \int_m^{+\infty} x e^{-\lambda(x-m)} dx = m. \quad (2.33)$$

дисперсія буде мати такий вигляд

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\lambda|x-m|} dx - m^2,$$

$$M[X^2] = \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\lambda|x-m|} dx = \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^m x^2 e^{\lambda(x-m)} dx + \frac{\lambda}{2} \int_m^{+\infty} x^2 e^{-\lambda(x-m)} dx = m^2 + \frac{2}{\lambda^2}, \quad (2.34)$$

$$D(X) = m^2 + \frac{2}{\lambda^2} - m^2 = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Також вважатимемо, що випадкові величини  $\tilde{\alpha}_t$ , є взаємно незалежними. Тоді для випадкової величини  $\tilde{\alpha}_{1,t}$ , математичне сподівання і дисперсія матимуть вигляд  $m_{1,t} = \sum_{i=1}^t m_i$ ,  $s_{1,m}^2 = \sum_{i=1}^t s_i^2$ .

Як правило, для нетривалих часових періодів, що характеризуються відносною стабільністю умов, може бути прийнята гіпотеза про те, що для будь-яких моментів  $t \in 0:T$  випадкові величини  $\tilde{\alpha}_t$ , мають однаковий розподіл і можуть розглядатись як серія реалізацій випадкової величини  $\tilde{\alpha}$ ,  $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}_t$ ,

де  $\tilde{\alpha} \in L(m, \lambda)$ . Математичне сподівання випадкового приросту  $\tilde{\alpha}_{1,t}$ , може бути виражене як:  $M[\tilde{\alpha}_{1,t}] = m_{1,t} = tm$ , а дисперсія:

$$D[\tilde{\alpha}_{1,t}] = s_{1,t}^2 = ts^2 = \frac{2t}{\lambda^2}$$

Значення  $M[\tilde{\alpha}_{1,t}]$  може бути використане при побудові прогнозу очікуваної величини ресурсу на момент  $t$  при відомому значенні  $x_0$  :

$$x_t = x_0 + M[\tilde{\alpha}_{1,t}] = x_0 + m_{1,t} = x_0 + tm \quad (2.35)$$

Відповідно, точність такого прогнозу може бути оцінена за допомогою стандартного відхилення

$$s_t = \sqrt{D[\tilde{x}_t]} = \sqrt{D[\tilde{\alpha}_{1,t}]} = \sqrt{2t}\lambda^{-1} \quad (2.36)$$

$s_t$  може бути використано при побудові довірчого інтервалу  $[x_t - \gamma s_t, x_t + \gamma s_t]$ , в який можливі значення спостережуваного ресурсу (у момент часу  $t$ ) потрапляють із заданою ймовірністю.

Вибір коефіцієнта  $\gamma > 0$  дозволяє забезпечити бажану ймовірність попадання значень випадкової величини ресурсу  $\tilde{x}_t$ , у вказаний інтервал.

При практичному використанні АСМ в наведених вище формулах відбувається заміна математичного сподівання і дисперсії на їх оцінки, побудованих по серіях емпіричних значень фінансового ресурсу, що аналізуємо.

Для розподіленої за Лапласом випадкової величини  $\tilde{\alpha}$ , як конзистентна, незміщена і ефективна оцінка параметра  $m$ , може використовуватися вибіркоче середнє  $\bar{m} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \alpha_i$ , де  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_k$

емпіричні (що спостерігалися протягом деякого проміжку часу) значення приростів ресурсу. В той же час, конзистентною і незміщеною оцінкою для параметра  $s^2$  служить виправлена вибіркова дисперсія

$\bar{s}^2 = \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k [\alpha_i - \bar{m}]^2$ , якій відповідає виправлене вибіркоче стандартне

відхилення. Підставивши оцінки параметрів  $m$  і  $s^2$ , одержуємо емпіричні формули як для прогнозу величини ресурсу на момент часу  $t$ ,  $x_t = x_0 + tm$ ,

так і для його точності (стандартного відхилення)  $\bar{s}_t = \sqrt{t} \cdot \bar{s}$ . На базі сформульованої вище адитивної стохастичної моделі може бути побудований наступний алгоритм процедури прогнозування очікуваних

значень фінансового ресурсу (щодо моменту часу  $t_0$  на  $n$  подальших періодів).

1. Визначення величини  $k$  – обсягу базової вибірки, по якій надалі здійснюється розрахунок вибіркового середнього ( $\bar{m}$ ) і вибіркового стандартного відхилення ( $\bar{s}$ ). Ясно, що  $k$  обмежене зверху фактичною довжиною ряду даних, який маємо до моменту  $t_0$ . Відзначимо також, що вибором  $k$  фактично задається ступінь обліку тенденцій, що мали місце раніше і, як очікується, що зберігаються в майбутньому (щонайменше протягом  $n$  наступних періодів).

2. Розрахунок серії з  $k$  приростів:  $\alpha_i = x_{t_0-k+i-1} - x_{t_0-k+i}$ ,  $i = 1, \dots, k$ .

3. Розрахунок вибіркового середнього  $\bar{m}$ , що використовується як оцінка математичного сподівання ( $m$ ) стохастичного приросту  $\tilde{\alpha}$ :

$$\bar{m} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \alpha_i,$$

4. Розрахунок виправленого стандартного відхилення  $\bar{s}$ :

$$\bar{s} = \sqrt{\frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k [\alpha_i - \bar{m}]^2}$$

5. Розрахунок прогнозних значень величини фінансового ресурсу (показника) на моменти часу  $t_0 + 1, \dots, t_0 + n$ :  $x_t = x_0 + tm$ ,  $t = 1 : n$ , де  $x_0$  – обсяг ресурсу у момент часу  $t_0$ .

6. Розрахунок оцінки стандартного відхилення випадкової величини  $\tilde{x}_t$ :  $\bar{s}_t = \sqrt{t} \cdot \bar{s}$ ,  $t = 1 : n$ .

7. Побудова нижньої ( $x_t - \gamma s_t$ ) і верхньої ( $x_t + \gamma s_t$ ) інтервальних оцінок можливих відхилень фактичних значень ресурсу від тих, що передбачаються (із заданою імовірністю, визначеною параметром  $\gamma$ ).

Запропонована схема прогнозування може бути проілюстрована на прикладі побудови прогнозу індексу ПФТС на основі ряду його щоденних чи середньо тижневих значень.



Таблиця 2.13.

**Прогнозні і фактичні значення індексу ПФТС за період з  
01.09.2017 р. по 06.10.2017 р.**

№	Дата	Значення $x_t$	Прогноз $\bar{x}_t$	Нижня межа-1 $\bar{x}_t - \bar{s}_t$	Верхня межа-1 $\bar{x}_t + \bar{s}_t$	Нижня межа-2 $\bar{x}_t - 2 \cdot \bar{s}_t$	Верхня межа-2 $\bar{x}_t + 2 \cdot \bar{s}_t$
0	01.09.2017	287,07	287,07	287,07	287,07	287,07	287,07
1	02.09. 2017	287,62	288,63	288,63	288,63	288,63	288,63
2	03.09. 2017	291,23	289,18	290,19	290,19	290,19	290,19
3	04.09. 2017	291,30	292,79	290,74	291,75	291,75	291,75
4	07.09. 2017	291,39	292,86	294,35	292,30	293,31	293,31
5	08.09. 2017	291,40	292,95	294,42	295,91	293,86	294,87
6	09.09. 2017	291,26	292,96	294,51	295,98	297,47	295,42
7	10.09. 2017	291,36	292,82	294,52	296,07	297,54	299,03
8	11.09. 2017	291,12	292,92	294,38	296,08	297,63	299,10
9	14.09. 2017	290,54	292,68	294,48	295,94	297,64	299,19
10	14.09. 2017	290,26	292,10	294,24	296,04	297,50	299,20
11	16.09. 2017	290,07	291,82	293,66	295,80	297,60	299,06
12	17.09. 2017	290,16	291,63	293,38	295,22	297,36	299,16
13	18.09. 2017	290,86	291,72	293,19	294,94	296,78	298,92
14	21.09. 2017	291,23	292,42	293,28	294,75	296,50	298,34
15	22.09. 2017	290,80	292,79	293,98	294,84	296,31	298,06
16	23.09. 2017	291,84	292,36	294,35	295,54	296,40	297,87
17	24.09. 2017	292,03	293,40	293,92	295,91	297,10	297,96
18	24.09. 2017	292,29	293,59	294,96	295,48	297,47	298,66
19	28.09. 2017	292,76	293,85	295,15	296,52	297,04	299,03
20	29.09. 2017	293,56	294,32	295,41	296,71	298,08	298,60
21	30.09. 2017	294,16	295,12	295,88	296,97	298,27	299,64
22	01.10. 2017	295,83	295,72	296,68	297,44	298,53	299,83
23	02.10. 2017	296,37	297,39	297,28	298,24	299,00	300,09
24	04.10. 2017	297,59	297,93	298,95	298,84	299,80	300,56
25	06.10. 2017	298,43	299,15	299,49	300,51	300,40	301,36

У табл. 2.13 наведено фактичні і прогнозні значення індексу, побудованими з 01.09.2017 р. на 25 днів наперед. При цьому як базова вибірка для визначення  $\bar{m}$  і  $\bar{s}$  використовувалися попередні значення на рік назад. В нас  $\bar{m}=1.56$ ,  $\bar{s}=8.53$ .

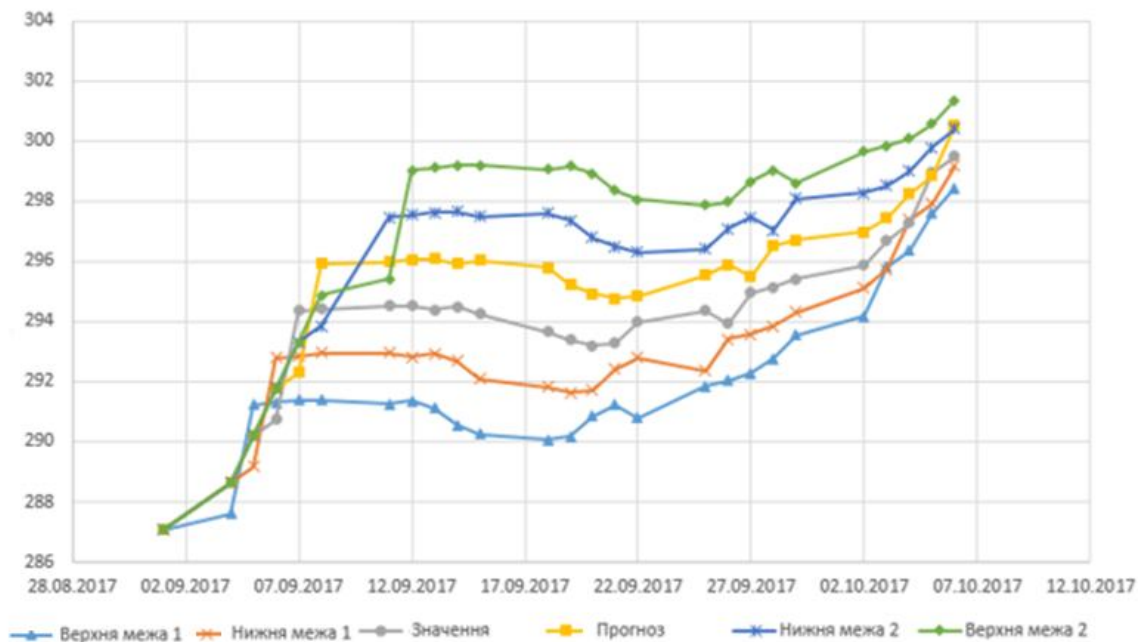


Рис. 2.11. Прогнозні і фактичні щоденні значення індексу ПФТС за період з 01.09.2017 р. по 06.10.2017 р.

На рис. 2.11 показані графіки, що відображають співвідношення між прогнозними і фактичними значеннями індексу ПФТС. На основі рис. 2.11 можна зробити висновок про те, що істотних відхилень прогнозних від фактичних величин, а також щодо коридору, що задається виразами  $\bar{x}_t \pm \bar{s}_t$  не спостерігається.

Зауважимо, що закон розподілу суми незалежних однаково розподілених приростів  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$  має вигляд

$$F(z) = \underbrace{\iint}_{\substack{n \\ \sum_{i=1}^n x_i \leq z}} \exp\left\{-\lambda \sum_{j=1}^n x_j - m\right\} dx_1 \dots dx_n = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{z-x_1} dx_2 \int_{-\infty}^{z-x_1-x_2} dx_3 \dots \int_{-\infty}^{z-\sum_{j=1}^n x_j} \exp\left\{-\lambda \sum_{j=1}^n x_j - m\right\} dx_n$$

що використовуються для підбору  $\gamma$ .

Сформулюємо теорему Ляпунова [50. С 303].

Якщо  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  – незалежні випадкові величини, що мають однаковий закон розподілу з математичним сподіванням  $m$  і дисперсією  $s^2$  то при необмеженому збільшенню  $n$  закон розподілу суми  $y_n = \sum_{j=1}^n \alpha_j$  необмежено наближаються до нормального розподілу.

На підставі цієї теореми, якщо для обчислення  $m$  і  $s^2$  використовується достатньо велике число однаковорозподілених приростів, то прогнозні значення мають нормальний розподіл і можна застосувати методику робіт [44-49] для моніторингу математичного сподівання і дисперсії.

Оскільки результати, одержані в ході застосування прогнозних методик, в переважній більшості випадків стають основою для ухвалення подальших управлінських рішень, вибір конкретної методики визначається технологіями управління, що склалися. Так, якщо управлінські рішення ухвалюються в моменти часу, які істотно відрізняються між собою тобто, по суті, мова йде про разові акти управлінських дій, то викладена вище схема є цілком ефективною і реалістичною.

Набір показників оцінки ефективності прогнозів є достатньо різноманітний. Серед них, наприклад, можуть бути. названі величина максимального відхилення між фактичними значеннями і прогнозними значеннями, відносна частка випадків перевищення величинами відхилень деякого заданого рівня тощо. Коефіцієнт відносного відхилення розраховується за формулою

$$\zeta_t = \frac{|x_t - \bar{x}_t|}{x_t} \cdot 100$$

де  $\zeta_t$  – коефіцієнт відносного відхилення фактичного значення від прогнозного в момент часу  $t$  (у відсотках);

$x_t$  – фактичне відхилення ресурсу (показника) в момент часу  $t$ ;

$\bar{x}_t$  – прогнозне значення фінансового ресурсу в момент часу  $t$ .

Серед переваг відносного відхилення є незалежність від розмірності і масштабів досліджуваного фінансового ресурсу, тому часовий ряд, як правило, дає об'єктивну картину точності і надійності використаної прогностичної методики.

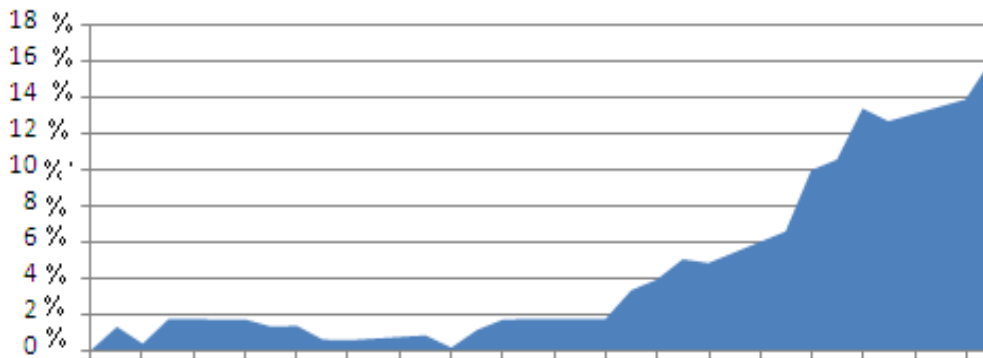


Рис. 2.12. Відносні відхилення фактичних щоденних значень індексу ПФТС від прогнозних за вересень 2017 р.

На рис. 2.12 наведена гістограма відносних відхилень фактичних значень індексу ПФТС від прогнозів. На основі даної ілюстрації стверджуємо, що для більшості днів даного періоду значення відносного відхилення не перевищує рівень 15%; що свідчить про точність прогнозу.

Розроблена адитивна модель з розподілом Пуассона для прогнозування індексу ПФТС має універсальний характер, що в свою чергу зумовлює можливості для ефективного і плідного використання при роботі з широким спектром фінансових ресурсів і показників.

## Висновки до розділу 2

1. На основі застосування моделі Гобсона-Роджерса досліджено динаміку індексу ПФТС та знайдено волатильність вартості фінансових інструментів, операції з якими відбуваються на фондовій площадці. Застосовуючи швидко середню зміну волатильності, запропоновано ефективний метод для моделювання, аналізу і стійкої оцінки важливих ринкових параметрів.

2. Встановлено ціни опціонів за допомогою моделі Гобсона-Роджерса яка дозволяє обрати найкращий варіант стратегії для підвищення продуктивності хеджування. Використано гнучку схему зважування, що відповідає скінченому горизонту часу в минулому. Запропонована модель має унікальну перевагу над іншими при встановленні цін на похідні фінансові інструменти.

3. Доведено, що шляхозалежна волатильність володіє минулою інформацією та дозволяє моделювати поведінку інвесторів в різних ринкових умовах, а також відображає позитивні або негативні тенденції фінансового інструменту. На відміну від стандартних локальних або стохастичних моделей волатильності, у випадку раптового падіння ринку, шляхозалежна модель волатильності використана для автоматичного підвищення рівня волатильності з метою гармонізації динаміки фондового ринку.

4. Розроблено адитивна модель з розподілом Пуассона для прогнозування індексу ПФТС, яка дозволяє досліджувати динаміку основних параметрів фінансових інструментів і фондових показників у випадку коли відсутній нормальний розподіл. Встановлено достатні умови, при яких результати досліджень наближаються до результатів з нормальним розподілом.

5. Враховуючи, що вітчизняна економіка є малою та відкритою, а фінансовий ринок України та його фондовий сегмент є незначним за розміром, та визнається таким, що може бути віднесеним до граничних ринків, він має значну залежність від стану світових фінансових ринків. В зв'язку з цим в роботі за допомогою моделей ARCH встановлено існування залежностей причинно–наслідкового характеру між індексом ПФТС та світовими індексами DJIA, NASDAQ Composite, DAX та PTC, що безпосередньо використовується для моделювання і прогнозування курсів окремих фінансових інструментів.

6. Досліджено динаміку волатильності індикаторів фондового ринку, які характеризують прибутковість або ціну ринкового портфеля та індексу ПФТС із застосуванням методів ARCH моделювання. За допомогою даної методики встановлено рівень системного ризику, та знайдено невизначеність, пов'язану з прогнозуванням динаміки індикаторів фондового ринку.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Black F , M. Scholes, (1973) The pricing of options and corporate liabilities, *Journal of Political Economy* 81, 637-659.
2. Rubinstein, M. (2001) Rational markets: Yes or no? The affirmative case / Rubinstein, M. // *Financial Analysts Journal*. 57(3), 15–29.
3. Cox, J. (1975) "Notes on Option Pricing I: Constant Elasticity of Diffusions." Unpublished draft, Stanford University.
4. Carr, P. and V. Linetsky (2006). A jump to default extended cev model: An application of bessel processes. *Finance and Stochastics* 10(3), 303–330
5. Schroder, M. (1989). Computing the Constant Elasticity of Variance Option Pricing Formula. *The Journal of Finance*, 44, 211–219
6. Cox, J.C., Ross, S., Rubinstein, M. (1976) The Valuation of options for alternative stochastic processes. *Journal of Financial economics* 3, 145-166
7. Hull, J. & A. White (1987). The pricing of options on assets with stochastic volatilities. *The Journal of Finance* 42(2), 281–300
8. Nelson, Daniel B. (1991), "Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach," *Econometrica*, 59, 347-370.
9. Bollerslev, T. (1986) Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics* 31,307-327.
10. Drost, F.C., Nijman, T.E. (1993) Temporal aggregation of GARCH processes. *Econometrica* 61, 909-927.
11. Drost, F.C., Werker, B.J.M. (1996). Closing the GARCH gap: Continuous time GARCH modeling. *Journal of Econometrics* 74, 31-57.
12. Hobson D. G., L. G. Rogers (1998) Complete models with stochastic volatility, *Mathematical Finance* 8, 27-48.

13. Буртняк І.В. Дослідження волатильності за допомогою модифікації моделі Блека–Шоулза/ І.В. Буртняк, Г.П. Малицька // *Бизнес Інформ.* – 2011. – №(5)1. – С. 72–74.
14. Буртняк І.В. Застосування моделі Гобсона-Роджерса для дослідження індексу ПФТС/ І.В. Буртняк, Г.П. Малицька // *Зб.наук.праць „Моделювання регіональної економіки”*. – Івано-Франківськ : 2011. –№2(18). – С. 13–19.
15. Tompkins R. G. (2001) Stock index futures markets: Stochastic volatility models and smiles, *Journal of Future Markets* 21, 43-78.
16. Merton R. C. (1980) On Estimating The Expected Return on The Market an Exploratory Investigation. / Robert C. Merton // *Journal of Financial Economics*. Vol. 8. – P. 323-361.
17. Drimus, G. G. (2012). Options on realized variance by transform methods: a non-affine stochastic volatility model. *Quant. Finance* 12(11), 1679–1694.
18. Forde, M., A. Jacquier, and R. Lee (2012). The small-time smile and term structure of implied volatility under the Heston model. *SIAM Journal on Financial Mathematics* 3(1), 690–708.
19. Piterbarg V. (2005), Stochastic Volatility Model with Time-dependent Skew, *Applied Mathematical Finance* 12, 147-184.
20. Офіційний сайт фондової біржі ПФТС [Електронний ресурс]. - Режим доступу: <http://www.pfts.com.ua/>
21. Буртняк І.В. Моделювання волатильності для індексу ПФТС за допомогою узагальненої моделі Гобсона-Роджерса / І. В. Буртняк, Г.П. Малицька// *Моделювання регіональної економіки: зб. наук. праць – Івано-Франківськ : Плай, 2014. – №2. – С. 446–452.*
22. Chernov M., A. R. Gallant E. Ghysels, and G. Tauchen (2003) *Alternative models for stock price dynamics.*
23. Engle, Robert F. (1990), "Discussion: Stock Market Volatility and the Crash of 87," *Review of Financial Studies*, 3, 103-106.



24. Anderson T. W. (1968), Introduction to Multivariate Statistical Analysis, New York,— P. 584.
25. Granger C. W. J., Hatanaka M. (1964.) Spectral Analysis of Economic Time Series, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J. — P.501.
26. Bollerslev, Tim, Ray Y. Chou and Kenneth F. Kroner (1992), "ARCH Modeling in Finance: A Review of the Theory and Empirical Evidence," Journal of Econometrics, 52, 5-59.
27. Andersen, T.G. (1994). Stochastic autoregressive volatility: A framework for volatility modeling. Mathematical Finance 4, 75-102.
28. Andersen, T.G. (1996). Return volatility and trading volume: An information flow interpretation of stochastic volatility. Journal of Finance 51, 169-204.
29. Baillie, R.T., Bollerslev, T. (1989). The message in daily exchange rates: A conditional variance tale. Journal of Business and Economic Statistics 7, 297-304.
30. Baillie, R.T., Bollerslev, T. (1991). Intra-day and inter-market volatility in foreign exchange rates. Review of Economic Studies 58, 565-584.
31. Bollerslev, T., Chou, R.Y., Kroner, K.F. (1992). ARCH modeling in finance. Journal of Econometrics 52, 5-59.
32. Bollerslev, T. and Engle, R.F. (1993). Common persistence in in conditional variances. Econometrica 61, 167-186.
33. Буртняк І.В. Моделирование динамики развития фондового рынка с помощью моделей ARCH // Бизнес Информ. – 2009. – №12. – С. 131–134.
34. Буртняк І.В. Дослідження взаємодії між фондовими індексами на основі моделей ARCH/ І.В. Буртняк, Г.П. Малицька // Вісник Східноукраїнського нац. у-ту ім. В. Даля.– Луганськ, 2009. – №12. – С. 102–110

35. . Буртняк І.В. Дослідження поведінки фондового ринку на основі моделей ARCH / І. В. Буртняк // Актуальні проблеми розвитку економіки регіону – Івано-Франківськ : 2016. –Т2. №14. – С. 63–80.
36. Vaynman, I. & B.K. Beare (2014) Stable limit theory for the variance targeting estimator, in Y. Chang, T.B. Fomby & J.Y. Park (eds), Essays in Honor of Peter C.B. Phillips, vol. 33 of Advances in Econometrics: Emerald Group Publishing Limited, chapter 24, 639-672
37. Kristensen, D. & O. Linton (2006) A closed form estimator for the GARCH(1,1)-model. *Econometric Theory* 22, 323-327.
38. Hill, J.B. & A. Prokhorov (2016) GEL estimation for heavy-tailed GARCH models with robust empirical likelihood inference. *Journal of Econometrics* 190, 18-44.
39. Hill, J.B. (2010) On tail index estimation for dependent, heterogeneous data. *Econometric Theory* 26, 1398-1436.
40. Giraitis, L. & P.M. Robinson (2001) Whittle estimation of ARCH models. *Econometric Theory* 17, 608-631
41. Dong, Y. & A. Lewbel (2015) A simple estimator for binary choice models with endogenous regressors. *Econometric Reviews* 34, 82-104.
42. Raja, M., & M. Selvam, (2011). Measuring the time varying volatility of futures and options. *International Journal Applied Economic Finance*, 5, 18-29.
43. Rousan, R., & Al-Khour, R. (2005). Modeling Market Volatility in Emerging Markets in the Case of daily Data in Amman Stock Exchange 1992-2004. *International Journal of Applied Econometrics and Quantitative Studies*, 2(4), 99-118.
44. Буртняк І.В. Модель шляхозалежної волатильності для індексу ПФТС/ І.В. Буртняк, Г.П. Малицька // *Бизнес Інформ.* – 2012. – №3. – С. 48–50.

45. Буртняк І.В. Моделювання процесів розвитку фондового ринку: монографія / І.В. Буртняк., І.С. Благун– Івано-Франківськ: Видавець Віктор Дяків, 2011. –155 с.
46. Буртняк І.В. Оцінка і прогнозування динаміки показників фондового ринку/ І.В. Буртняк., І.С. Благун // Современные проблемы моделирования социально-экономических систем: Монография.– Х.: ИД «ИНЖЕК», 2009–С. 135-150.
47. Буртняк И.В. Моделирование динамики индекса ПФТС/ И.В. Буртняк, А.П. Малицкая // Бизнес Информ. – 2010. – №1. – С. 60–64.
48. Буртняк І.В. Дослідження динаміки фінансових ресурсів на базі мультиплікативної стохастичної моделі/ І.В. Буртняк, Г.П. Малицька // Бізнес Інформ. – 2010. – №(4)1. – С. 11–14.
49. Буртняк І.В. Ретроспективний аналіз фондового ринку/ І.В. Буртняк, Г.П. Малицька // Актуальні проблеми розвитку економіки регіону. – Івано–Франківськ – 2010. – Т. 1. Вип. 6. – С. 175–181.
50. Вентцель Е.С. Теория вероятностей / Е.С. Вентцель. – М.: Высшая школа, 1969. С. 576.

## РОЗДІЛ 3.

### СПЕКТРАЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИФУЗІЙНИХ ПРОЦЕСІВ НА ФОНДОВОМУ РИНКУ

#### *3.1. Оцінювання двобар'єрних опціонів з локальною волатильністю*

Процеси Бесселя мають застосування в теорії масового обслуговування, зокрема в теорії черг. Вони є різного типу по відношенню до задач на знаходження власних значень та власних функцій, коли спектр оператора Бесселя є неперервним, або має скінчену кількість значень і неперервну частину то представлення щільності через функції Віттакера та поліноми Лагерра розглянуто в багатьох роботах, а найдетальніше в [1], де розв'язана крайова задача на проміжку  $x \in (0, \infty)$  з крайовими умовами накладеними на першу похідну функції щільності при  $x \rightarrow \infty$ .

Процеси Бесселя мають значне застосування фінансовій математиці, вони допускають явне представлення для функцій щільності деривативів, зокрема цін облігацій та опціонів це значно полегшує статистичну оцінку параметрів [2]. При накладених умовах дифузійний процес з оператором Бесселя ніколи не перетворюється в нуль [3], в роботі розглянуто ті випадки коли похідна фінансового потоку Бесселівського процесу може перетворитись в нуль. При таких умовах визначають надлишкову швидкість росту портфеля акцій, а також пояснюють як перевищення темпів зростання ринкового портфеля забезпечує вимір внутрішньої волатильності на ринку в будь-який момент часу [4].

Практичне значення процесів Бесселя на фінансових ринках та співвідношення з інтегралом від геометричного броунівського руху розглянуто в [5], а в [6] зроблено огляд ціноутворення азійських опціонів за допомогою процесів Бесселя.

Дифузія з оператором Бесселя досліджувалася в роботі [7] але при інших крайових умовах, та ортогональних системах функцій.

Метою даного розділу роботи є розробка зручного підходу моніторингу фінансових потоків, що продукуються двобарерними Бesselівськими процесами. Розклад щільності в ряди за функціями Бесселя є дуже зручним для використання на практиці при знаходженні цін опціонів з потрібною точністю.

Проблема такого типу розглядається вперше. До теперішнього часу була нерозв'язаною задача коли дифузія Бесселя має нелокальну волатильність залежну від різних чинників, але така проблема є лише частково розв'язана для звичайних дифузійних процесів породжених Броунівським рухом. Тому потрібні нові підходи і аналіз вже відомих для розв'язання задач такого типу.

Розроблений підхід можна застосувати для дослідження ціноутворення азійських опціонів породжених Бesselівськими процесами. Для цього потрібно розглянути фінансові потоки породжені процесами Бesselівської дифузії розклавши їх по системі функцій Бесселя першого роду при умові, яка враховує лінійну комбінацію фінансового потоку та його просторової похідної. Цей розклад дає можливість обчислити величину ринкового портфеля акцій та визначити рівень внутрішньої волатильності на ринку в будь-який момент часу, що дозволяє дослідити динаміку фондового ринку.

У загальній теорії розглядаються більш ширші припущення на стохастичні процеси, зокрема такі як мартингальні, але не завжди існує аналітична формула для відображення розв'язку. Тому потрібно зробити припущення, що процеси марківські.

Розглянемо одновимірну дифузію з процесом Бесселя з дрифтом (страховий внесок для кожного активу), який рівний нулю (є низка процесів цього типу де дрифт не рівний нулю, але їх дослідження можна звести до процесів з нульовим дрифтом). Такі процеси мають застосування при розв'язуванні економічних задач на знаходження короткострокових відсоткових ставок, кредитних спредів та стохастичної волатильності деривативів [8].

Спектральний метод застосовано до похідних фінансових інструментів, ціноутворення через представлення ціни деривативу  $w(t, x)$  функцією нейтральною до ризику від майбутньої вартості основного процесу  $X$ , тобто як

$$w(t, x) = \tilde{E}_x [H(X_t)] = \int H(y)p(t, x, y) dy.$$

де  $p(t, x, y)$  – щільність переходу  $X$  за ймовірністю  $P$ . Якщо інфінітезимальний генератор  $L$  базового процесу самоспряжений на гільбертовому просторі з приростом міри  $m(x)dx$ , і спектр  $L$  є дискретним, то щільність переходу  $X$  можна записати [9]:

$$p(t, x, y) = m(y) \sum_n e^{-\lambda_n t} \varphi_n(y) \varphi_n(x),$$

де  $\{\lambda_n\}$  – власні значення  $L$  і  $\{\varphi_n\}$  – власні функції: тобто  $L\varphi_n = \lambda_n\varphi_n$ .

Розглянемо процес для якого оператор  $L$  має вигляд

$$L = \partial_{xx}^2 + x^{-1}\partial_x - x^{-2}p^2, \quad (3.1)$$

де  $p$  стала, яку називають індексом,  $x > 0$ .

Зауважимо, що  $L$  – сингулярний параболічний оператор, інфінітезимальний, самоспряжений, до якого зводяться низка операторів де

$$\sigma^2 = 2x^2, L \text{ є оператором Бесселя.}$$

Дифузія з оператором Бесселя досліджувалась роботах [10-11] але при інших ніж розглянутих в роботі крайових умовах, та ортогональних системах функцій.

Для дослідження  $L$  на власні значення та власні функції, при певних крайових умовах, застосуємо рівняння Бесселя.

$$x^2 w'' + x w' + (x^2 - p^2) w = 0. \quad (3.2)$$

Розв'язок рівняння (3.2), за винятком частинних значень  $p$ , не можна виразити через елементарні функції (в скінченному вигляді). Оскільки рівняння Ейлера-Бесселя є лінійним, то його загальний інтеграл можна записати у вигляді

$$w = C_1 w_1 + C_2 w_2$$

де  $w_1, w_2$  два будь-які лінійно незалежні частинні розв'язки рівняння Ейлера-Бесселя, а  $C_1, C_2$  довільні сталі.

У випадку  $p \geq 0$  робимо підстановку  $w = x^p \omega$  отримаємо для функції  $\omega$  рівняння

$$\omega'' + \frac{2p+1}{x} \omega' + \omega = 0.$$

Розв'язок отриманого рівняння є степеневим рядом, який є абсолютно збіжним для всіх  $x \in (-\infty; \infty)$  і має вигляд

$$w = x^p \omega = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^p}{\Gamma(p+1)} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{p+2m}}{1 \cdot 2 \dots m(p+1) \dots (p+m)\Gamma(p+1)}, \quad (3.3)$$

Перетворивши (3.3) на основі властивостей гамма функції, отримаємо Бесселеву функцію першого роду, порядку  $p$ .

$$J_p(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{p+2m}}{\Gamma(m+1)\Gamma(p+m+1)},$$

Оскільки в рівняння (3.2) входить  $p^2$  то заміна  $p$  на  $-p$  не впливає на розв'язок рівняння, тому для будь-якого  $p$  існує розв'язок.

Якщо  $p$  не є цілим то функції Бесселя не можуть бути лінійно залежними і загальний інтеграл рівняння (3.2) має вигляд [12-13]

$$J = C_1 J_p(x) + C_2 J_{-p}(x),$$

при цілому  $p$  знаходимо ще один частинний розв'язок

$$Y_p(x) = \frac{J_p(x) \cos p\pi + J_{-p}(x)}{\sin p\pi},$$

який є бesselевою функцією другого роду, яка є невизначеною при  $x = 0$ . Користуючись правилом Лопіталя, знайдемо границю при  $x \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} Y_p(x) = Y_0 = \frac{2}{\pi} J_0(x) \left( \ln \frac{x}{2} + C \right) - \\ - \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left( \frac{x}{2} \right)^{2m} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m} \right),$$

Для будь якого  $p$  мають місце формули

$$\frac{d}{dx} \left( x^p J_p(x) \right) = x^p J_{p-1}(x),$$

$$\frac{d}{dx} \left( x^{-p} J_p(x) \right) = -x^{-p} J_{p+1}(x).$$

Функції Бесселя  $J_p(\lambda x), J_p(\mu x)$  де  $\lambda$  і  $\mu$  корені рівняння  $J_p(x) = 0$ , є ортогональними на відрізку  $[0, 1]$  з вагою  $x$  тобто

$$\int_0^1 x J_p(\lambda x) J_p(\mu x) dx = 0, \quad \lambda \neq \mu, \quad \text{а при } \lambda = \mu \text{ можливі два}$$

випадки



$$\int_0^1 x J_p^2(\lambda x) dx = \begin{cases} \frac{1}{2} J_p'^2(\lambda), & J_p(\lambda) = 0, \\ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{p^2}{\lambda^2}\right) J_p^2(\lambda), & J_p'(\lambda) = 0. \end{cases}$$

Для всіх  $\alpha, \beta \geq 0$ ,  $\alpha + \beta > 0$  існує зліченна множина додатних коренів

$$\alpha w_k'(\mu) + \beta \mu w_k(\mu) = 0,$$

гранична точка яких знаходиться на нескінченості.

Нехай  $w(x)$  розв'язок (3.2) то функція  $w(\lambda x)$  теж буде розв'язком рівняння такого виду

$$x^2 w'' + x w' + (\lambda^2 x^2 - p^2) w = 0 \quad (3.4)$$

Рівняння (3.4) є рівнянням Бесселя з параметром  $\lambda$ .

Будь який розв'язок рівняння (3.2), який є функцією Бесселя, має нескінчену множину додатних коренів, які близькі до коренів функції  $\sin(x + \omega)$ , вигляду  $k_n = n\pi - \omega$ ,  $\omega = const$ ,  $n$  — ціле (аналогічно для від'ємних коренів, бо вони знаходяться симетрично відносно початку координат), якщо  $k_n \neq 0$  то вони є прості корені і утворюють злічену множину.

Бесселеві функції це знакочергуючі ряди, тому обчислення значення можна здійснювати використовуючи лему Лейбніца, за якою можна визначити точність наближення.

Для знаходження власних функцій та власних значень розглянемо таку крайову задачу

$$x^2 w_k'' + x w_k' + (\lambda_k^2 x^2 - p^2) w_k = 0, \quad (3.5)$$

$$|w_k|_{x=0} < +\infty, \quad (3.6)$$

$$\alpha w_k'(x_0) + \beta w_k(x_0) = 0. \quad (3.7)$$

Тобто розглядаємо задачу Штурма-Ліувілля. Дана задача має єдиний розв'язок. Умова (3.6) має місце, коли  $x = 0$  і є особливою точкою рівняння (3.5) та оператора  $L$ .  $x_0$  регулярна точка рівняння (3.5). Ті значення  $\lambda_k$  при яких крайова задача (3.5)-(3.7) має нетривіальний розв'язок  $w_k$  називаються власними значеннями, а  $w_k$  власними функціями задачі. Відомо, що при умовах (3.6) оператор  $L$  має злічену кількість власних значень, вони прості та невід'ємні [13-16]. Множення  $L$  на  $x^2$  не змінює ні власних значень, ні власних функцій, ні їхньої кількості.

Розглянемо таку задачу

$$\begin{cases} x^2 w_k'' + x w_k' + (\lambda_k^2 x^2 - p^2) w_k = 0, \\ |w_k|_{x=0} < +\infty, \\ w_k(x_0) = 0. \end{cases} \quad (3.8)$$

З (3.6) випливає, що  $p \geq 0$ , розглянемо випадок  $p > 0$ . Легко перевірити, що  $\lambda = 0$  не є власним значенням задачі (3.8).

Оскільки (3.2) має своїм інтегралом  $w = C_1 J_p(x) + C_2 Y_p(x)$  то виходячи із властивостей функції Бесселя задача (3.8) має розв'язок

$$w = C_1 J_p(\lambda x) + C_2 Y_p(\lambda x)$$

Врахувавши крайові умови матимемо

$$C_2 = 0 \text{ і } C_1 J_p(\lambda_k x_0) = 0 \text{ тобто } J_p(\lambda_k x_0) = 0, \text{ отже } \lambda_k x_0 = \mu_k,$$

де

$$J_p(\mu_k) = 0, \quad \lambda_k = \frac{\mu_k}{x_0}, \quad 0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_k < \dots,$$

тому

$$w_k(x) = J_p\left(\frac{\mu_k}{x_0} x\right), \quad k = 1, 2, \dots$$

Знайдемо норму функції  $w_k(x)$

$$\|w_k(x)\|^2 = \int_0^{x_0} x J_p\left(\frac{\mu_k}{x_0} x\right) dx =$$

$$\frac{1}{2} \left[ x^2 \left( J_p'\left(\frac{\mu_k}{x_0} x\right) \right)^2 + \left( x^2 - \frac{p^2}{\mu_k^2} \right) \left( J_p\left(\frac{\mu_k}{x_0} x\right) \right)^2 \right] = \frac{x_0^2}{2} \left( J_p'(\mu_k) \right)^2.$$

Використовуючи властивості функцій Бесселя отримаємо

$$\|w_k(x)\|^2 = \frac{x_0^2}{2} \left( J_{p+1}(\mu_k) \right)^2, \quad k = 1, 2, \dots$$

Розглянемо випадок  $p = 0$  маємо таку задачу

$$\begin{cases} (xw')' + \lambda^2 xw = 0, \\ |w|_{x=0} < +\infty, \\ w(x_0) = 0. \end{cases} \quad (3.9)$$

При  $\lambda = 0$  маємо  $(xw')' = 0$  звідси випливає, що  $xw' = C_1$  або  $\frac{dw}{dx} = \frac{C_1}{x}$  тому загальний інтеграл має вигляд  $w = C_1 \ln x + C_2$ . З умови обмеженості маємо, що  $w_0 = C_2$ , з крайової умови робимо висновок про те що  $w \equiv 0$ , отже  $\lambda = 0$  не є власним значенням [17].

Нехай  $\lambda > 0$  то загальний розв'язок має вигляд

$$w = C_1 J_0(\lambda x) + C_2 Y_0(\lambda x)$$

Оскільки функція Бесселя другого роду  $Y_0(\lambda x)$  необмежена в нулі то  $C_2 = 0$ , тому  $w(x) = C_1 J_0(\lambda x)$ , задовольняючи крайову умову одержимо  $J_0(\lambda x_0) = 0$ . Одержимо корені цього рівняння

$$\mu_k, \quad 0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_k < \dots \quad \lambda_k = \frac{\mu_k}{x_0}, \quad w_k(x) = J_0\left(\frac{\mu_k}{x_0} x\right), \quad k = 1, 2, \dots$$

при цьому норма  $v_k(x)$  дорівнюватиме

$$\|w_k(x)\|^2 = \frac{x_0^2}{2} \left( J_1(\mu_k) \right)^2, \quad k = 1, 2, \dots$$

Зауважимо, що функції  $(1, J_p \frac{\mu_k}{x_0} x)$ ,  $k = 1, 2, \dots$  ортогональні між собою на  $[0, x_0]$  з вагою  $x$  [18].

Розглянемо Бесселівський процес, який описується

$$\frac{\partial w(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 w(t, x)}{\partial x^2} + x^{-1} \frac{\partial w(t, x)}{\partial x} - p^2 x^{-2} w(t, x),$$

$$0 < x < x_0, \quad (3.10)$$

і крайовою умовою

$$w(0, x) = K(e^x - 1)^+, \quad w(t, x_0) = 0, \quad (3.11)$$

де  $K$  — страйк (Страйк або ціна виконання — це наперед фіксована ціна основного активу чи товару, за якою власник опціону може купити (у випадку кол опціону) або продати (у випадку пут опціону) даний актив. Це ціна, за якою може бути продано або куплено актив коли опціон погашається). Процес є однорідним тому  $w(t, x) = \varphi(t)w(x)$ .

Із теорії Штурма-Ліувілля, маємо

$$w(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{n p} e^{-\frac{\mu_n^2 t}{x_0^2}} J_p \left( \frac{\mu_n}{x_0} x \right), \quad p \geq 0,$$

де  $\mu_n$  додатні корені рівняння  $J_p(\mu_n x_0) = 0$ ,

$$c_{n p} = \frac{K \int_0^{x_0} x(e^x - 1) J_p \left( \frac{\mu_n}{x_0} x \right) dx}{\int_0^{x_0} x J_p^2 \left( \frac{\mu_n}{x_0} x \right) dx},$$

Фінансові потоки мають вигляд

$$w(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} K c_{n p} e^{-\left(\frac{\mu_n}{\ln K}\right)^2 (T-t)} J_p \left( \mu_n \ln \frac{x}{K} \right),$$

у випадку, якщо процес закінчується в момент часу  $T$ , коли  $X_T = K$

$$w(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} K c_n e^{-\left(\frac{\mu_n}{\ln \frac{R}{L}}\right)^2 (T-t)} J_p \left( \frac{\mu_n (K - \ln \frac{x}{L})}{\ln \frac{R}{L}} \right),$$

де  $L < x < R$ ,  $L, R$  – бар'єри,  $K$  – страйк, а  $c_n$  обчислюються наступним чином

$$c_n = 2K \frac{\int_0^1 t(e^{Kt} - 1) J_p(\mu_n t) dt}{J_{p+1}^2(\mu_n)},$$

Ми обчислили розклад фінансового потоку по системі функцій Бесселя  $J_p$  першого роду, але розподіл потоків задається функцією Гріна відповідної задачі. Тому для обчислень зручно розкласти функцію Гріна по системі Бесселя. Розглянутому процесу відповідає неоднорідна крайова задача

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x^{-1} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{p^2 w(t, x)}{x^2} + f(t, x), \quad x > 0, \quad (3.12)$$

де  $f(t, x)$  двічі неперервно диференційовна по  $x$ , неперервно диференційовна по  $t$ , абсолютно інтегровна разом із похідними,  $(t, x) \in [0, +\infty)$  і має вигляд

$$f(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) J_p \left( \frac{\mu_n x}{x_0} \right), \quad 0 < x < x_0 < +\infty, \quad 0 < t < T,$$

$\mu_n$  корені рівняння  $J_p(\mu_n) = 0$ .

Розв'язок цієї задачі будемо шукати у вигляді

$$w(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) J_p \left( \frac{\mu_n x}{x_0} \right),$$

підставивши в (3.12) одержимо

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n'(t) J_p\left(\frac{\mu_n x}{x_0}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left[ \left( J_p\left(\frac{\mu_n x}{x_0}\right) \right)''_{x^2} + \frac{\left( J_p\left(\frac{\mu_n x}{x_0}\right) \right)'_x}{x} - \frac{p^2 J_p\left(\frac{\mu_n x}{x_0}\right)}{x^2} + \lambda_n^2 J_p\left(\frac{\mu_n x}{x_0}\right) \right] - \lambda_n^2 J_p\left(\frac{\mu_n x}{x_0}\right) \right\} T_n(t) + \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) J_p\left(\frac{\mu_n x}{x_0}\right),$$

тому

$$\sum_{n=0}^{\infty} [T_n'(t) + \lambda_n^2 T_n(t) - f_n(t)] J_p\left(\frac{\mu_n x}{x_0}\right) \equiv 0,$$

звідки

$$T_n'(t) + \lambda_n^2 T_n(t) - f_n(t) = 0, \quad \lambda_n = \frac{\mu_n}{x_0}, \quad n \in N$$

з початковою умовою  $T_n(0) = 0$ .

Неоднорідне диференціальне рівняння першого порядку розв'яжемо методом варіації сталої. Оскільки

$$T_n'(t) + \lambda_n^2 T_n(t) = 0,$$

має перший інтеграл  $T_n(t) = C e^{-\lambda_n^2 t}$  (розв'язок однорідного рівняння)

то

$$T_n(t) = C(t) e^{-\lambda_n^2 t}$$

тому

$$C'(t) = f_n(t) e^{\lambda_n^2 t}, \quad C(t) = \int_0^t e^{\lambda_n^2 \beta} f_n(\beta) d\beta + C_1.$$

$$T_n(t) = \int_0^t e^{\lambda_n^2 \beta} f_n(\beta) d\beta e^{-\lambda_n^2 t} + C_1 e^{-\lambda_n^2 t},$$

при  $t = 0$ ,  $C_1 = 0$

$$T_n(t) = \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\beta)} f_n(\beta) d\beta,$$

тому

$$w(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\beta)} f_n(\beta) d\beta J_p\left(\frac{\mu_n x}{x_0}\right).$$

Враховуючи, що

$$f_n(t) = \int_0^{x_0} \xi f_n(\xi, t) J_p\left(\frac{\mu_n \xi}{x_0}\right) d\xi \left( \int_0^{x_0} x J_p^2\left(\frac{\mu_n x}{x_0}\right) dx \right)^{-1}$$

маємо

$$w(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\beta)} \int_0^{x_0} \xi f(\xi, t) J_p\left(\frac{\mu_n \xi}{x_0}\right) d\beta d\xi$$

$$J_p\left(\frac{\mu_n x}{x_0}\right) \left( \int_0^{x_0} y J_p^2\left(\frac{\mu_n y}{x_0}\right) dy \right)^{-1} = \int_0^{x_0} \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} \left( y J_p^2\left(\frac{\mu_n y}{x_0}\right) dy \right)^{-2}$$

$$e^{-\lambda_n^2(t-\beta)} \xi J_p\left(\frac{\mu_n \xi}{x_0}\right) J_p\left(\frac{\mu_n x}{x_0}\right) f(\xi, t) d\xi d\beta,$$

тобто

$$G(t - \beta, x, \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \xi J_p\left(\frac{\mu_n \xi}{x_0}\right) J_p\left(\frac{\mu_n x}{x_0}\right) e^{-\frac{\mu_n^2}{x_0}(t-\beta)} \left( \frac{x_0^2}{2} J_{p+1}^2(\mu_n) \right)^{-1},$$

$$w(t, x) = \int_0^t G(t - \tau, x, \xi) f(\tau, \xi) d\xi.$$

Тому проблема оцінювання і дослідження двовимірних бар'єрних опціонів зводиться до дослідження і розв'язання крайової задачі [7-8]

$$\frac{\partial w(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 w(t, x)}{\partial x^2} + x^{-1} \frac{\partial w(t, x)}{\partial x} - \frac{p^2 w(t, x)}{x^2}, \quad x \in [L, H],$$

$$t \in [0, T], \quad w(t, L) = 0, \quad w(t, H) = 0,$$

$$w(T, x) = \max(\pm(x(T) - K), 0) \mathbb{I}_{(L < x(t) < H; t \in [0, T])}.$$

Ця задача зводиться до розв'язання наступної крайової задачі для сингулярного параболічного рівняння

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + y^{-1} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{p^2 w(t, x)}{y^2},$$

$$y = \ln x, \quad y \in [A, B], \quad t \in [0, T], \quad A = \ln L, \quad B = \ln H,$$

$$w(t, A) = 0, \quad w(t, B) = 0,$$

$$w(0, y) = \psi(e^{y(T)}) = \max(\pm(x(T) - K), 0) \mathbb{I}_{(L < x(t) < H; t \in [0, T])}.$$

Враховуючи всі міркування щодо встановлення розв'язку класичних крайових задач для сингулярного параболічного оператора  $L$ , маємо

$$w(T, x) = \int_0^{\ln \frac{H}{L}} (e^\xi L - K) \mathbb{I}_{(L < x(t) < H; t \in [0, T])} G(x, \xi) d\xi$$

$$= \int_0^{\ln \frac{H}{L}} (e^\xi L - K) \mathbb{I}_{(L < x(t) < H; t \in [0, T])}$$

$$2 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\left(\frac{\mu_n}{\ln \frac{H}{L}}\right)^2 t} J_p\left(\frac{\mu_n \xi}{\ln \frac{H}{L}}\right) J_p\left(\frac{\mu_n \ln \frac{x}{L}}{\ln \frac{H}{L}}\right) \left(\ln \frac{H}{L}\right)^{-2} \left(J_{p+1}^2(\mu_n)\right)^{-1},$$



де  $\mathbb{I}_{(L < x(t) < H; t \in [0, T])}$  ступінчаста функція Хевісайда [19].

Оскільки корені Бесселивих функцій першого роду близькі до коренів функції  $\sin(x + \omega)$ , вигляду  $k_n = n\pi - \omega$ ,  $\omega = \text{const}$ ,  $n$  – ціле, то при великих  $n$ ,  $\mu_n^2$  можна замінити через  $n^2$ , звідси випливає, що ряди для функції Гріна та її першої та другої похідної рівномірно збігаються та мають вигляд

$$C \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln^{2n+1} x}{(2n+1)!} < +\infty, \quad x \in [L, H], \quad C > 0,$$

тому при наближених обчисленнях через швидку збіжність не потрібно значної кількості коефіцієнтів ряду.

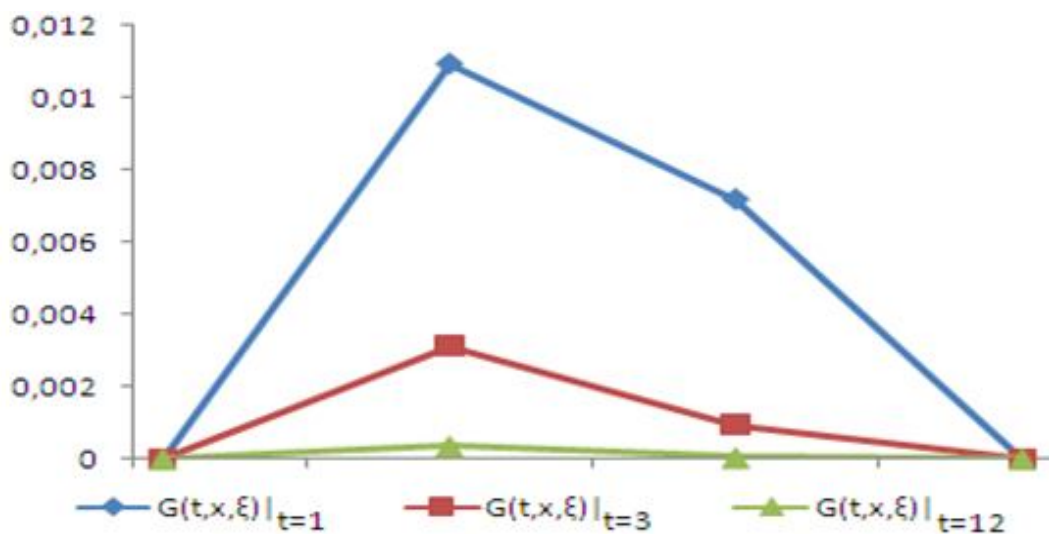


Рис. 3.1. Графік функції Гріна, як щільності розподілу при  $L = 90$ ,  $H = 120$ ,  $\xi = 0,4$ .

Одновимірною дифузійною моделлю використовується для опису основної динаміки фондового ринку, а спектральний метод служить потужним інструментом для аналітичного ціноутворення [20].

Побудована функцію Гріна для дифузійного процесу Бесселя двобар'єрного опціону, яка розкладена по системі функцій Бесселя. Записана аналітично і її представлення зручне та не завдає труднощів при обчисленні цін деривативів

Використовуючи дану методику, можна обчислити ціну опціону у вигляді ряду Фур'є-Бесселя з відповідними коефіцієнтами. Запропоновано простий метод оцінювання опціонів використовуючи розклад функції Гріна для крайової задачі для сингулярного параболічного рівняння, точність оцінювання збігається з точністю збіжності рядів Фур'є-Бесселя.

### ***3.2. Оцінка фінансових потоків методами спектрального аналізу***

Розглянемо Бесселівські процеси, які є узагальненням процесу Орнштейна-Уленбека для бар'єрних опціонів [22]. При певних характеристиках дифузійний процес з оператором Бесселя ніколи не перетворюється в нуль. Цим випадкам присвячено ряд робіт [23-24], будемо розглядати тільки випадки коли похідна фінансового потоку Бесселівського процесу може перетворитись в нуль. При таких умовах визначають надлишкову швидкість росту портфеля акцій, а також пояснюють як перевищення темпів зростання ринкового портфеля забезпечує вимір внутрішньої волатильності на ринку в будь-який момент часу [25]. В роботі [26] доведено, що дифузія Бесселя  $\{Z_t, t \geq 0\}$  зі сталим від'ємним дрефтом  $c$  та інфінітесимальним генератором має вигляд

$$(Gf)(z) = \frac{1}{2} \sigma^2 f''(z) + \left( \frac{d}{z} + c \right) f'(z).$$

Розглянемо процес для якого оператор  $L$  має вигляд (3.1).

Зауважимо, що  $L$  сингулярний параболічний оператор, інфінітесимальний, до нього зводяться ряд операторів де  $\sigma^2 = 2x^2$ ,  $L$  є оператором Бесселя.

Функції Бесселя  $J_p(\lambda x), J_p(\mu x)$  де  $\lambda$  і  $\mu$  корені рівняння  $J_p(x) = 0$ , є ортогональними на відрізку  $[0, 1]$  з вагою  $x$  тобто

$\int_0^1 x J_p(\lambda x) J_p(\mu x) dx = 0$ ,  $\lambda \neq \mu$ , а при  $\lambda = \mu$  можливі два випадки

$$\int_0^1 x J_p^2(\lambda x) dx = \begin{cases} \frac{1}{2} J_p'^2(\lambda), & J_p(\lambda) = 0, \\ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{p^2}{\lambda^2}\right) J_p^2(\lambda), & J_p'(\lambda) = 0. \end{cases}$$

Для всіх  $\alpha, \beta \geq 0$ ,  $\alpha + \beta > 0$  існує зліченна множина додатних коренів

$$\alpha w_k'(\mu) + \beta \mu w_k(\mu) = 0,$$

гранична точка яких знаходиться на нескінченості.

Нехай  $w(x)$  розв'язок (3.2) то функція  $w(\lambda x)$  теж буде розв'язком рівняння такого виду

$$x^2 w'' + x w' + (\lambda^2 x^2 - p^2) w = 0 \tag{3.13}$$

Рівняння (3.13) є рівнянням Бесселя з параметром  $\lambda$ . Будь який розв'язок рівняння (3.2), який є функцією Бесселя, має нескінчену множину додатних коренів, які близькі до коренів функції  $\sin(x + \omega)$ , вигляду  $k_n = n\pi - \omega$ ,  $\omega = const$ ,  $n$  — ціле (аналогічно для від'ємних коренів, бо вони знаходяться симетрично відносно початку координат), якщо  $k_n \neq 0$  то вони є прості корені і утворюють злічену множину [14].

Бесселеві функції це знакочергуючі ряди, тому обчислення значення можна здійснювати використовуючи лему Лейбніца, за якою можна визначити точність наближення [27-28].

Для знаходження власних функцій та власних значень розглянемо таку крайову задачу

$$x^2 w_k'' + x w_k' + (\lambda_k^2 x^2 - p^2) w_k = 0, \quad (3.14)$$

$$|w_k|_{x=0} < +\infty, \quad (3.15)$$

$$\alpha w_k'(x_0) + \beta w_k(x_0) = 0. \quad (3.16)$$

Тобто розглядаємо задачу Штурма-Ліувілля. Дана задача має єдиний розв'язок. Умову (3.15) накладемо коли  $x = 0$  є особливою точкою рівняння (3.14) і оператора  $L$ , а  $x_0$  регулярна точка рівняння (3.14). Ті значення  $\lambda_k$  при яких крайова задача (3.14)-(3.16) має нетривіальний розв'язок  $w_k$  називаються власними значеннями, а  $w_k$  власними функціями задачі. Відомо, що при умовах (3.15) оператор  $L$  має злічену кількість власних значень, вони прості та невід'ємні [29]. Домноження  $L$  на  $x^2$  не змінює ні власних значень, ні власних функцій, ні їхньої кількості.

Розглянемо таку задачу

$$\begin{cases} x^2 w_k'' + x w_k' + (\lambda_k^2 x^2 - p^2) w_k = 0, \\ |w_k|_{x=0} < +\infty, \\ w_k'(x_0) = 0. \end{cases} \quad (3.17)$$

З (3.15) випливає, що  $p \geq 0$ , розглянемо випадок  $p > 0$ , оскільки рівняння Бесселя має своїм інтегралом

$$w = C_1 J_p(x) + C_2 Y_p(x)$$

то виходячи із властивостей функції Бесселя задача (3.17) має розв'язок

$$w = C_1 J_p(\lambda x) + C_2 Y_p(\lambda x)$$

Врахувавши крайові умови матимемо  $C_2 = 0$  і  $C_1 J_p(\lambda_k x_0) = 0$ .

Тобто

$$J_p(\lambda_k x_0) = 0, \text{ отже } \lambda_k x_0 = \mu_k, \text{ де } \lambda_k = \frac{\mu_k}{x_0}, \quad 0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_k < \dots,$$

де  $\mu_k$  корені  $J'_p(\mu_k) = 0$ .

Норма  $w_k(x)$  матиме вигляд

$$\|w_k(x)\|^2 = \frac{1}{2} \left( x_0^2 - \frac{w^2}{\mu_k^2} \right) \left( J_p(\mu_k) \right)^2, \quad k = 1, 2, \dots$$

Розглянемо випадок  $p = 0$  маємо задачу

$$\begin{cases} (xw')' + \lambda^2 xw = 0, \\ |w|_{x=0} < +\infty, \\ w'(x_0) = 0. \end{cases} \quad (3.18)$$

При  $\lambda = 0$   $w(x) \equiv 1$  є розв'язком, тому  $\lambda = 0$  є власним значенням  $w_0(x) \equiv 1$  власна функція.

Розглянемо  $\lambda > 0$  аналогічно як в попередньому випадку знайдемо

$$w_k(x) = J_0\left(\frac{\mu_k}{x_0} x\right), \quad k = 1, 2, \dots, \quad \lambda_k = \frac{\mu_k}{x_0},$$

де  $\mu_k$  додатні корені рівняння  $J'_p(\mu) = 0$ , при цьому норма  $w_k(x)$  дорівнюватиме

$$\|w_k(x)\|^2 = \frac{x_0^2}{2} \left( J_0(\mu_k) \right)^2, \quad k = 1, 2, \dots$$

Розглянемо бesselівський процес, який описується

$$\frac{\partial w(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 w(t, x)}{\partial x^2} + x^{-1} \frac{\partial w(t, x)}{\partial x} - p^2 x^{-2} w(t, x), \quad 0 < x < x_0, \quad (3.19)$$

і крайовою умовою

$$w(0, x) = K(e^x - 1)^+, \quad w'_x(t, x_0) = 0; \quad (3.20)$$

де  $K$  — страйк. Процес є однорідним тому  $w(t, x) = \varphi(t)w(x)$ .

Із теорії Штурма-Ліувілля, маємо

$$w(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{np} e^{-\frac{\mu_n^2}{x_0^2} t} J_p\left(\frac{\mu_n}{x_0} x\right) + c_0, \quad p > 0, \quad \mu_n > 0,$$

де  $\mu_n$  додатні корені рівняння  $J'_p(\mu_n) = 0$ ,  $c_n$ ,  $n \in N$  обчислюються наступним чином, при  $p > 0$ ,  $c_{0p} = 0$ , якщо  $p = 0$  то

$$\begin{aligned} c_{0p} &= \frac{K_1 \int_0^{x_0} x(e^x - 1) dx}{\int_0^{x_0} x dx} = \frac{K_1 \left( x_0 e^x - e^{x_0} + 1 - \frac{x_0}{2} \right)}{\frac{x_0^2}{2}} \\ &= K_1 (2x_0^{-1} e^{x_0} - 2x_0^{-2} e^{x_0} + 2x_0^{-2} - 1), \quad K_1 = e^{-\lambda^2 T}, \\ c_{np} &= \frac{K \int_0^{x_0} x(e^x - 1) J_p\left(\frac{\mu_n}{x_0} x\right) dx}{\int_0^{x_0} x J_p^2\left(\frac{\mu_n}{x_0} x\right) dx}. \end{aligned}$$

Фінансові потоки мають вигляд

$$w(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} K c_{np} e^{-\left(\frac{\mu_n}{\ln K}\right)^2 (T-t)} J_p\left(\mu_n \ln \frac{x}{K}\right),$$

у випадку, якщо процес закінчується в момент часу  $T$ , коли  $X_T = K$

$$w(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} K c_n e^{-\left(\frac{\mu_n}{\ln L}\right)^2 (T-t)} J_p\left(\frac{\mu_n (\ln \frac{x}{L})}{\ln \frac{R}{L}}\right),$$

де  $L < x < R$ ,  $L, R$  — бар'єри,  $K$  — страйк, а  $c_{np}$  обчислюються наступним чином

$$c_{np} = 2K \frac{\int_0^1 t(e^{Kt} - 1) J_p(\mu_n t) dt}{J_{p+1}^2(\mu_n)}.$$

Знайдено розклад в ряд фінансового потоку по системі функцій Бесселя  $J_p$  першого роду, але розподіл потоків задається функцією Гріна відповідної задачі. Тому для обчислень зручно розкласти функцію Гріна по системі Бесселя. Розглянутому процесу відповідає неоднорідна крайова задача

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x^{-1} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{p^2 w(t, x)}{x^2} + f(t, x), \quad x > 0, \quad (3.21)$$

де  $f(t, x)$  двічі неперервно диференційовна по  $x$  неперервно диференційовна по  $t$ , абсолютно інтегровна разом із похідними,  $(t, x) \in [0, +\infty)$  і має представлення

$$f(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) J_p\left(\frac{\mu_n x}{x_0}\right), \quad 0 < x < x_0 < +\infty, \quad 0 < t < T,$$

$\mu_n$  корені рівняння  $J_p'(\mu_n) = 0$ .

Розв'язок цієї задачі будемо шукати у вигляді

$$w(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) J_p\left(\frac{\mu_n x}{x_0}\right),$$

підставивши в (3.21) одержимо

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} T_n'(t) J_p\left(\frac{\mu_n x}{x_0}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left[ \left( J_p\left(\frac{\mu_n x}{x_0}\right) \right)''_{x^2} + \frac{\left( J_p\left(\frac{\mu_n x}{x_0}\right) \right)'_x}{x} \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{p^2 J_p\left(\frac{\mu_n x}{x_0}\right)}{x^2} + \lambda_n^2 J_p\left(\frac{\mu_n x}{x_0}\right) \right] - \lambda_n^2 J_p\left(\frac{\mu_n x}{x_0}\right) \right\} T_n(t) + \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) J_p\left(\frac{\mu_n x}{x_0}\right), \end{aligned}$$

тому

$$\sum_{n=0}^{\infty} [T'_n(t) + \lambda_n^2 T_n(t) - f_n(t)] J_p \left( \frac{\mu_n x}{x_0} \right) \equiv 0.$$

Звідки

$$T'_n(t) + \lambda_n^2 T_n(t) - f_n(t) = 0, \quad \lambda_n = \frac{\mu_n}{x_0}, \quad n \in N$$

з початковою умовою  $T_n(0) = 0$ .

Неоднорідне диференціальне рівняння першого порядку розв'яжемо методом варіації сталої. Оскільки  $T'_n(t) + \lambda_n^2 T_n(t) = 0$  має перший інтеграл  $T_n(t) = C e^{-\lambda_n^2 t}$  (розв'язок однорідного рівняння) то  $T_n(t) = C(t) e^{-\lambda_n^2 t}$  тому  $C'(t) = f_n(t) e^{\lambda_n^2 t}$ ,  $C(t) = \int_0^t e^{\lambda_n^2 \beta} f_n(\beta) d\beta + C_1$ .

$$T_n(t) = \int_0^t e^{\lambda_n^2 \beta} f_n(\beta) d\beta e^{-\lambda_n^2 t} + C_1 e^{-\lambda_n^2 t}$$

при  $t = 0$ ,  $C_1 = 0$

$$T_n(t) = \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\beta)} f_n(\beta) d\beta$$

тому

$$w(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\beta)} f_n(\beta) d\beta J_p \left( \frac{\mu_n x}{x_0} \right).$$

Враховуючи, що

$$f_n(t) = \int_0^{x_0} \xi f_n(\xi, t) J_p \left( \frac{\mu_n \xi}{x_0} \right) d\xi \left( \int_0^{x_0} x J_p^2 \left( \frac{\mu_n x}{x_0} \right) dx \right)^{-1}.$$

Маємо



$$w(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\beta)} \int_0^{x_0} \xi f(\xi, t) J_p\left(\frac{\mu_n \xi}{x_0}\right) d\beta d\xi J_p\left(\frac{\mu_n x}{x_0}\right) \left( \int_0^{x_0} y J_p^2\left(\frac{\mu_n y}{x_0}\right) dy \right)^{-1} = \int_0^{x_0} \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} \left( y J_p^2\left(\frac{\mu_n y}{x_0}\right) dy \right)^{-2} e^{-\lambda_n^2(t-\beta)} \xi J_p\left(\frac{\mu_n \xi}{x_0}\right) J_p\left(\frac{\mu_n x}{x_0}\right) f(\xi, t) d\xi d\beta,$$

тобто

$$G(t - \beta, x, \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \xi J_p\left(\frac{\mu_n \xi}{x_0}\right) J_p\left(\frac{\mu_n x}{x_0}\right) e^{-\frac{\mu_n^2}{x_0^2}(t-\beta)} \left( \frac{1}{2} \left( x_0^2 - \frac{p^2}{\mu_k^2} \right) \left( J_p(\mu_k) \right)^2 \right)^{-1},$$

$$w(t, x) = \int_0^t G(t - \tau, x, \xi) f(\tau, \xi) d\xi.$$

Тоді проблема оцінювання і дослідження двовимірних бар'єрних опціонів зводиться до дослідження і розв'язання крайової задачі [30]

$$\frac{\partial w(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 w(t, x)}{\partial x^2} + x^{-1} \frac{\partial w(t, x)}{\partial x} - \frac{p^2 w(t, x)}{x^2}, \quad x \in [L, H],$$

$$w'_x(t, L) = 0, \quad w'_x(t, H) = 0, \quad t \in [0, T],$$

$$w'_x(T, x) = \max(\pm(x(T) - K), 0) \mathbb{I}_{(L < x(t) < H; t \in [0, T])}.$$

Ця задача зводиться до розв'язання крайової задачі для сингулярного параболічного рівняння

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + y^{-1} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{p^2 w(t, x)}{y^2},$$

$$y = \ln x, \quad y \in [A, B], \quad t \in [0, T], \quad A = \ln L, \quad B = \ln H,$$

$$w'_x(t, A) = 0, \quad w'_x(t, B) = 0,$$

$$w'_x(0, y) = \psi(e^{y(T)}) = \max(\pm(x(T) - K), 0) \mathbb{I}_{(L < x(t) < H; t \in [0, T])}.$$

Враховуючи всі міркування щодо встановлення розв'язку класичних крайових задач для сингулярного параболічного оператора  $L$ , маємо що

$$\begin{aligned} w(T, x) &= \int_0^{\ln \frac{H}{L}} (e^\xi L - K) \mathbb{I}_{(L < x(t) < H; t \in [0, T])} G(x, \xi) d\xi \\ &= \int_0^{\ln \frac{H}{L}} (e^\xi L - K) \mathbb{I}_{(L < x(t) < H; t \in [0, T])} \end{aligned}$$

$$2 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\left(\frac{\mu_n}{\ln \frac{H}{L}}\right)^2 t} J_p\left(\frac{\mu_n \xi}{\ln \frac{H}{L}}\right) J_p\left(\frac{\mu_n \ln \frac{x}{L}}{\ln \frac{H}{L}}\right) \left( \left( \left( \ln \frac{H}{L} \right)^2 - \frac{p^2}{\mu_k^2} \right) \left( J_p(\mu_k) \right)^2 \right)^{-1},$$

де  $\mathbb{I}_{(L < x(t) < H; t \in [0, T])}$  ступінчаста функція Хевісайда.

Оскільки корені Бесселевих функцій першого роду прості, то між двома сусідніми коренями Бесселевих функцій міститься корінь похідної. Тоді можна вважати що корені похідної розподіляються аналогічно до коренів функцій. Тому для функції Гріна та її першої та другої похідної оцінка має наступний вигляд

$$C \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln^{2n+1} x}{(2n+1)!} < +\infty, \quad x \in [L, H], \quad C > 0,$$

при наближених обчисленнях через швидку збіжність не потрібно значної кількості коефіцієнтів ряду.

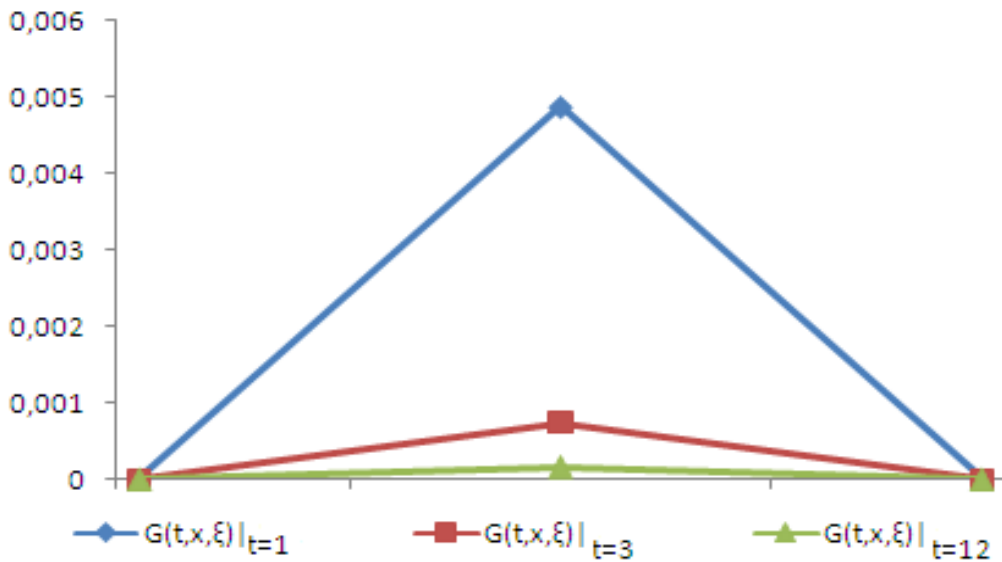


Рис.3.2. Графік функції Гріна, як щільності розподілу при  $L = 90$ ,  $H = 120$ ,  $\xi = 0,4$ .

Таким чином побудована функція Гріна для дифузійного процесу Бесселя двобар'єрного опціону, яка розкладена по системі функцій Бесселя першого роду. Бар'єри підібрані як точки в яких похідна фінансового потоку по ціні рівна нулю, тобто в точках де потік може приймати екстремальні значення. За допомогою функції Гріна обчислено величину цін деривативів. Бар'єри такого виду зручні для проведення моніторингу фондового ринку.

Розв'язано двопараметричну задачу оцінювання інтенсивності Беселівських дифузійних процесів методами спектральної теорії. Зокрема розглянуто бар'єри для вартості опціонів, в яких похідна фінансових потоків перетворюється в нуль, розв'язано задачу для двобар'єрного опціону, що відповідає процесу Бесселя.

Здійснено побудову функції Гріна для дифузійного процесу Бесселя двобар'єрного опціону, яка розкладена по системі функцій Бесселя першого роду. Бар'єри взяті таким чином, щоб в них похідна фінансового потоку за ціною перетворювалася в нуль, тобто це точки

де потік може набувати екстремальних значень. На основі функції Гріна проведено обчислення вартості похідних цінних паперів. Для проведення моніторингу фондового ринку зручно використовувати саме такі бар'єри. Функцію Гріна цієї задачі, яка репрезентує ймовірність поширення ціни опціону, представлено через ряди Фур'є Бесселя. Це дає можливість оцінити інтенсивність фінансових потоків фондових ринків.

### *3.3. Моделювання ціни похідних фінансових активів на фондовому ринку*

Стохастичні процеси Бесселя є різного типу по відношенню до задач на власні значення та власні функції. У випадку, коли спектр оператора Бесселя є неперервним, або має скінчену кількість значень і неперервну частину то представлення щільності через функції Віттакера та поліноми Лагерра розглянуто в багатьох роботах, а найдетальніше в [32].

Процеси дифузії Бесселя використовуються при дослідженні азійських опціонів. Розглянуто фінансові потоки породжені процесами Бесселівської дифузії представивши їх по системі функцій Бесселя першого роду при умові, яка враховує лінійну комбінацію потоку та його просторової похідної. Таке представлення дає можливість обчислити величину ринкового портфеля акцій та забезпечує вимір внутрішньої волатильності на ринку в будь-який момент часу та дозволяє дослідити динаміку фондового ринку.

Розклад функції Гріна по системі Бесселивих функцій задається аналітичною формулою за допомогою якої зручно обчислювати величину фінансових потоків.

У роботі [33], описано застосування процесів Бесселя на фінансових ринках за допомогою співвідношення з геометричним броунівським рухом. В [34] зроблено огляд ціноутворення азійських опціонів за допомогою процесів Бесселя.

Розроблений підхід можна застосувати для дослідження ціноутворення азійських опціонів, породжених Бesselівськими процесами. Для цього потрібно розглянути фінансові потоки породжені процесами Бesselівської дифузії розклавши їх по системі функцій Бесселя першого роду. Цей розклад дає можливість обчислити величину ринкового портфеля акцій та визначити рівень внутрішньої волатильності на ринку в будь-який момент часу, а також дозволяє дослідити динаміку фондового ринку.

У загальній теорії розглядаються більш ширші припущення на стохастичні процеси, зокрема такі як мартингальні, але не завжди існує аналітична формула для запису розв'язку.

Розглянемо задачу Штурма-Ліувілля де граничні умови використовують функції Бесселя та їх похідні.

Для знаходження власних функцій та власних значень розглянемо таку крайову задачу

$$x^2 w_k'' + x w_k' + (\lambda_k^2 x^2 - p^2) w_k = 0, \quad (3.22)$$

$$|w_k|_{x=0} < +\infty, \quad (3.23)$$

$$\alpha w_k'(x_0) + \beta w_k(x_0) = 0. \quad (3.24)$$

Дана задача має єдиний розв'язок. Умову (3.23) накладемо тому, що  $x = 0$  є особливою точкою рівняння (3.22) і оператора  $L$ , а  $x_0$  регулярна точка рівняння (3.22). Ті значення  $\lambda_k$  при яких крайова задача (3.22)-(3.24) має нетривіальний розв'язок  $w_k$  називаються власними значеннями, а  $w_k$  власними функціями задачі. Відомо, що при умовах (3.23) оператор  $L$  має злічену кількість власних значень,

вони вони прості та невід'ємні [15]. Домноження  $L$  на  $x^2$  не змінює ні власних значень, ні власних функцій, ні їхньої кількості.

Розглянемо (3.22) при умові  $\alpha = 1$ ,  $\beta = h > 0$ . Тоді маємо крайову задачу

$$\begin{cases} x^2 w_k'' + x w_k' + (\lambda_k^2 x^2 - p^2) w_k = 0, \\ |w_k|_{x=0} \leq +\infty, \\ w_k'(x_0) + h w_k(x_0) = 0. \end{cases} \quad (3.25)$$

Легко бачити, що  $\lambda = 0$  не є власним значенням задачі (3.25). Загальний інтеграл має вигляд

$$w = C_1 J_p(\lambda x) + C_2 Y_p(\lambda x),$$

підставивши в крайові умови (3.23)-(3.24) одержимо [35]

$$\lambda J_p'(\lambda x_0) + h J_p(\lambda x_0) = 0,$$

зробимо заміну змінних  $\lambda x_0 = \mu$  отримаємо

$$\mu J_p'(\mu) + h x_0 J_p(\mu) = 0. \quad (3.26)$$

Рівняння (3.26) має злічену множину додатних коренів

$$\mu_k, \quad 0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_k < \dots \text{ Тому } \lambda_k = \frac{\mu_k}{x_0},$$

де  $\mu_k$  корінь (3.26), а  $w_k(x) = J_p\left(\frac{\mu_k}{x_0} x\right)$ ,  $k = 1, 2, \dots$

Знайдемо норму  $w_k(x)$

$$\|w_k(x)\|^2 = \frac{1}{2} \left( x_0^2 \left( J_p'(\mu_k) \right)^2 + \left( x_0^2 - \frac{v^2}{\mu_k^2} \right) \left( J_p(\mu_k) \right)^2 \right), \quad k = 1, 2, \dots$$

Оскільки з (3.26) при  $\mu = \mu_k$  маємо

$$J_p'(\mu_k) = -\frac{h x_0}{\mu_k} J_p(\mu_k)$$

то норма дорівнює

$$\|w_k(x)\|^2 = \frac{x_0^2}{2} \left( 1 + \frac{hx_0^4 - v^2}{\mu_k^2 x_0^2} \right) (J_p(\mu_k))^2, \quad k = 1, 2, \dots$$

У випадку коли  $p = 0$  маємо задачу

$$\begin{cases} (xw')' + \lambda^2 xw = 0, \\ |w|_{x=0} < +\infty, \\ w'_k(x_0) + hw_k(x_0) = 0, \quad h > 0. \end{cases} \quad (3.27)$$

Легко перевірити, що  $\lambda = 0$  не є власним значенням задачі.

При  $\lambda > 0$  з умови обмеженості випливає  $w = C_1 J_0(\lambda x)$ ,  $C_2 = 0$ ,

$$C_1(\lambda J'_0(\lambda x_0) + hJ_0(\lambda x_0)) = 0,$$

при  $C_1 = 1$  маємо рівняння

$$\mu J'_0(\mu) + hx_0 J_0(\mu) = 0.$$

Як у випадку (3.26) всі корені є додатними та утворюють злічену множину

$$0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_k < \dots \quad \lambda_k = \frac{\mu_k}{x_0}, \quad w_k(x) = J_0\left(\frac{\mu_k}{x_0}x\right), \quad k = 1, 2, \dots$$

при цьому норма  $w_k(x)$  дорівнюватиме

$$\|w_k(x)\|^2 = \frac{x_0^2}{2} \left( 1 + \frac{h^2 x_0^2}{\mu_k^2} \right) (J_0(\mu_k))^2, \quad k = 1, 2, \dots$$

Зауважимо, що функції  $1, J_p\left(\frac{\mu_k}{x_0}x\right), k = 1, 2, \dots$  ортогональні між собою на  $[0, x_0]$  з вагою  $x$  [30].

Розглянемо бesselівський процес, який описується

$$\begin{aligned} \frac{\partial w(t, x)}{\partial t} &= \frac{\partial^2 w(t, x)}{\partial x^2} + x^{-1} \frac{\partial w(t, x)}{\partial x} - p^2 x^{-2} w(t, x), \\ 0 < x < x_0, \end{aligned} \quad (3.28)$$

і крайовою умовою

$$\begin{aligned} w(0, x) &= K(e^x - 1)^+, \quad |w(t, 0)| < +\infty, \\ w'_x(t, x_0) + hw(t, x_0) &= 0, \quad h > 0, \end{aligned} \quad (3.29)$$

де  $K$  — константа. Процес є однорідним тому  $w(t, x) = \varphi(t)w(x)$ .

Із теорії Штурма-Ліувілля, маємо

$$w(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{n p} e^{-\frac{\mu_n^2 t}{x_0^2}} J_p\left(\frac{\mu_n}{x_0} x\right), \quad p \geq 0,$$

де  $\mu_n$   $0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_n < \dots$ , додатні корені рівняння

$$J'_p(\mu_k)\mu_k + h J_p(\mu_k) = 0,$$

$$c_{n p} = \frac{K \int_0^{x_0} x(e^x - 1) J_p\left(\frac{\mu_n}{x_0} x\right) dx}{\int_0^{x_0} x J_p^2\left(\frac{\mu_n}{x_0} x\right) dx},$$

Для обчислення

$$\int_0^{x_0} x(e^x - 1) J_p\left(\frac{\mu_n}{x_0} x\right) dx$$

використаємо зображення  $J_p\left(\frac{\mu_n}{x_0} x\right)$  та  $e^x$  через степеневі ряди

$$x(e^x - 1) = x \left( x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!},$$

$\forall x \in (-\infty, +\infty)$

$$J_p\left(\frac{\mu_n}{x_0} x\right) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{\Gamma(l+p+1)\Gamma(l+1)} \left(\frac{\mu_n}{2x_0} x\right)^{2l+p}.$$



Оскільки ці ряди збігаються абсолютно  $\forall x \in R^1$  то добуток цих рядів абсолютно збіжний  $\forall x \in R^1$  і його можна визначати за будь-яким із правил або за Коші, або за Діріхле [36-38]

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{\infty} a_n \sum_{l=0}^{\infty} b_n &= \sum_{l=0}^{\infty} b_n \sum_{l=0}^{\infty} a_n \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \dots + a_n b_0) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_n + \dots + a_n b_n + a_n b_{n-1} + a_n b_{n-2} + \dots + a_n b_0), \end{aligned}$$

тому  $c_n$  обчислюються за формулою з відповідним  $\mu_n$ .

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{K_1 \int_0^{x_0} x(e^x - 1) J_p \left( \frac{\mu_n}{x_0} x \right) dx}{\int_0^{x_0} x J_p^2 \left( \frac{\mu_n}{x_0} x \right) dx} \\ &= K_1 \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{x_0^{n+3}}{(n+1)! \Gamma(p+1) \Gamma(1) (p+1)} \left( \frac{\mu_n}{2} \right)^p \right. \\ &\quad - \frac{x_0^{n+2}}{n! \Gamma(p+2) \Gamma(2) (p+3)} \left( \frac{\mu_n}{2} \right)^{p+2} \\ &\quad + \frac{x_0^{n+1}}{(n-1)! \Gamma(p+3) \Gamma(3) (p+5)} \left( \frac{\mu_n}{2} \right)^{p+4} + \dots \\ &\quad + \frac{(-1)^k x_0^{n-k+1}}{(n-k-1)! \Gamma(k+p+1) \Gamma(p+1) (2k+p+1)} \left( \frac{\mu_n}{2} \right)^{2k+p} \\ &\quad \left. + \frac{(-1)^n x_0^3}{\Gamma(2n+p+1) \Gamma(p+1) (2n+p+1)} \left( \frac{\mu_n}{2} \right)^{2n+p} \right] \Big/ \int_0^{x_0} x J_p^2 \left( \frac{\mu_n}{x_0} x \right) dx. \end{aligned}$$

Фінансові потоки мають вигляд

$$w(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} K c_{n p} e^{-\left(\frac{\mu_n}{\ln K}\right)^2 (T-t)} J_p \left( \mu_n \ln \frac{x}{K} \right),$$

у випадку, якщо процес закінчується в момент часу  $T$ , коли  $X_T = K$

$$w(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} K c_n e^{-\left(\frac{\mu_n}{\ln \frac{R}{L}}\right)^2 (T-t)} J_p \left( \frac{\mu_n (\ln \frac{x}{L})}{\ln \frac{R}{L}} \right),$$

де  $L < x < R$ ,  $L, R$  – бар'єри,  $K$  – страйк, а  $c_{n p}$  обчислюються наступним чином

$$c_{n p} = 2K \frac{\int_0^1 t (e^{Kt} - 1) J_p(\mu_n t) dt}{\frac{x_0^2}{2} \left( 1 + \frac{h x_0^4 - v^2}{\mu_n^2 x_0^2} \right) (J_p(\mu_n))^2}.$$

Знайдено розклад фінансового потоку по системі функцій Бесселя  $J_p$  першого роду, але розподіл потоків задається функцією Гріна відповідної задачі [39-41]. Тому для обчислень зручно розкласти функцію Гріна по системі Бесселя. Цьому процесу відповідає неоднорідна крайова задача

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x^{-1} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{p^2 w(t, x)}{x^2} + f(t, x), \quad x > 0, \quad (3.30)$$

де  $f(t, x)$  двічі неперервно диференційовна по  $x$  та неперервно диференційовна по  $t$ , абсолютно інтегровна разом із похідними,  $(t, x) \in [0, +\infty)$  і має представлення [42]

$$f(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) J_p \left( \frac{\mu_n x}{x_0} \right), \quad 0 < x < x_0 < +\infty, \quad 0 < t < T,$$

$\mu_n$  корені рівняння  $J_p(\mu_n) = 0$ .

Розв'язок цієї задачі будемо шукати у вигляді

$$w(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) J_p \left( \frac{\mu_n x}{x_0} \right),$$

підставивши в (3.28) одержимо

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} T_n'(t) J_p \left( \frac{\mu_n x}{x_0} \right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left[ \left( J_p \left( \frac{\mu_n x}{x_0} \right) \right)'' + \frac{\left( J_p \left( \frac{\mu_n x}{x_0} \right) \right)'_x}{x} \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{p^2 J_p \left( \frac{\mu_n x}{x_0} \right)}{x^2} + \lambda_n^2 J_p \left( \frac{\mu_n x}{x_0} \right) \right] - \lambda_n^2 J_p \left( \frac{\mu_n x}{x_0} \right) \right\} T_n(t) + \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) J_p \left( \frac{\mu_n x}{x_0} \right), \end{aligned}$$

тому

$$\sum_{n=0}^{\infty} [T_n'(t) + \lambda_n^2 T_n(t) - f_n(t)] J_p \left( \frac{\mu_n x}{x_0} \right) \equiv 0,$$

звідки

$$T_n'(t) + \lambda_n^2 T_n(t) - f_n(t) = 0, \quad \lambda_n = \frac{\mu_n}{x_0}, \quad n \in N$$

з початковою умовою  $T_n(0) = 0$ .

Неоднорідне диференціальне рівняння першого порядку розв'яжемо методом варіації сталої. Оскільки  $T_n'(t) + \lambda_n^2 T_n(t) = 0$  має перший інтеграл  $T_n(t) = C e^{-\lambda_n^2 t}$  (розв'язок однорідного рівняння) то  $T_n(t) = C(t) e^{-\lambda_n^2 t}$  тому

$$C'(t) = f_n(t) e^{\lambda_n^2 t}, \quad C(t) = \int_0^t e^{\lambda_n^2 \beta} f_n(\beta) d\beta + C_1,$$

$$T_n(t) = \int_0^t e^{\lambda_n^2 \beta} f_n(\beta) d\beta e^{-\lambda_n^2 t} + C_1 e^{-\lambda_n^2 t}$$

при  $t = 0$ ,  $C_1 = 0$

$$T_n(t) = \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\beta)} f_n(\beta) d\beta$$

ТОМУ

$$w(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\beta)} f_n(\beta) d\beta J_p \left( \frac{\mu_n x}{x_0} \right).$$

Враховуючи, що

$$f_n(t) = \int_0^{x_0} \xi f_n(\xi, t) J_p \left( \frac{\mu_n \xi}{x_0} \right) d\xi \left( \int_0^{x_0} x J_p^2 \left( \frac{\mu_n x}{x_0} \right) dx \right)^{-1},$$

МАЄМО

$$w(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\beta)} \int_0^{x_0} \xi f(\xi, t) J_p \left( \frac{\mu_n \xi}{x_0} \right) d\beta d\xi J_p \left( \frac{\mu_n x}{x_0} \right)$$

$$\left( \int_0^{x_0} y J_p^2 \left( \frac{\mu_n y}{x_0} \right) dy \right)^{-1} = \int_0^{x_0} \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} \left( y J_p^2 \left( \frac{\mu_n y}{x_0} \right) dy \right)^{-2}$$

$$e^{-\lambda_n^2(t-\beta)} \xi J_p \left( \frac{\mu_n \xi}{x_0} \right) J_p \left( \frac{\mu_n x}{x_0} \right) f(\xi, t) d\xi d\beta,$$

ТОБТО

$$G(t - \beta, x, \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \xi J_p \left( \frac{\mu_n \xi}{x_0} \right) J_p \left( \frac{\mu_n x}{x_0} \right) e^{-\frac{\mu_n^2}{x_0}(t-\beta)}$$

$$\left( \frac{x_0^2}{2} \left( 1 + \frac{hx_0^4 - v^2}{\mu_k^2 x_0^2} \right) \left( J_p(\mu_k) \right)^2 \right)^{-1}.$$

$$w(t, x) = \int_0^t G(t - \tau, x, \xi) f(\tau, \xi) d\xi.$$

Таким чином проблема оцінювання і дослідження двовимірних бар'єрних опціонів зводиться до дослідження і розв'язання крайової задачі [43-45]

$$\frac{\partial w(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 w(t, x)}{\partial x^2} + x^{-1} \frac{\partial w(t, x)}{\partial x} - \frac{p^2 w(t, x)}{x^2}, \quad x \in [L, H],$$

$$w'_x(t, L) + hw(t, L) = 0, \quad w'_x(t, H) + hw(t, H) = 0, \quad h > 0, \quad t \in [0, T],$$

$$w(T, x) = \max(\pm(x(T) - K), 0) \mathbb{I}_{(L < x(t) < H; t \in [0, T])}.$$

Ця задача зводиться до розв'язання такої крайової задачі для сингулярного параболічного рівняння

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + y^{-1} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{p^2 w(t, x)}{y^2},$$

$$y = \ln x, \quad y \in [A, B], \quad t \in [0, T], \quad A = \ln L, \quad B = \ln H,$$

$$w'_x(t, A) + hw(t, A) = 0, \quad w'_x(t, B) + hw(t, B) = 0, \quad h > 0,$$

$$w(0, y) = \psi(e^{y(T)}) = \max(\pm(x(T) - K), 0) \mathbb{I}_{(L < x(t) < H; t \in [0, T])}.$$

Враховуючи всі міркування щодо встановлення розв'язку класичних крайових задач для сингулярного параболічного оператора  $L$ , маємо що

$$\begin{aligned} w(T, x) &= \int_0^{\ln \frac{H}{L}} (e^\xi L - K) \mathbb{I}_{(L < x(t) < H; t \in [0, T])} G(x, \xi) d\xi \\ &= \int_0^{\ln \frac{H}{L}} (e^\xi L - K) \mathbb{I}_{(L < x(t) < H; t \in [0, T])} \left( \left( 1 + \frac{h \left( \ln \frac{H}{L} \right)^4 - v^2}{\mu_k^2 \left( \ln \frac{H}{L} \right)^2} \right) \left( J_p(\mu_k) \right)^2 \right)^{-1} \end{aligned}$$

$$2 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\left(\frac{\mu_n}{\ln \frac{H}{L}}\right)^2 t} J_p\left(\frac{\mu_n \xi}{\ln \frac{H}{L}}\right) J_p\left(\frac{\mu_n \ln \frac{x}{L}}{\ln \frac{H}{L}}\right) \left(\ln \frac{H}{L}\right)^{-2}$$

де  $\mathbb{I}_{(L < x(t) < H; t \in [0, T])}$  ступінчаста функція Хевісайда.

Оскільки корені Бесселевої функції першого роду і її похідної є прості то існує зв'язок між похідною та Бесселевими функціями сусідніх порядків, то звідси випливає, що рівняння  $J_p'(x) + h J_p(x) = 0$  має злічену множину додатних коренів. Тому при великих  $n$ , квадрати цих коренів ведуть себе як  $n^2$ . Тому для функції Гріна та її першої та другої існує оцінка

$$C \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln^{2n+1} x}{(2n+1)!} < +\infty, \quad \forall x \in [L, H], \quad C > 0,$$

а при наближених обчисленнях через швидку збіжність не потрібно значної кількості коефіцієнтів ряду [45].

Таким чином побудовано функцію Гріна для дифузійного процесу Бесселя двобар'єрного опціону, яка розкладена по системі функцій Бесселя першого роду. Бар'єри підібрані як точки в яких похідна фінансового потоку по ціні рівна нулю, тобто в точках де потік може приймати екстремальні значення. За допомогою функції Гріна обчислено величину цін деривативів. Бар'єри такого виду зручні для проведення моніторингу фондового ринку.

Запропоновано застосування спектральних методів для обчислення значення подвійного бар'єрного опціону породженого дифузійним процесом Бесселя. Використовуючи дану методику, можна обчислити ціну опціону у вигляді ряду Фур'є Бесселя з відповідними коефіцієнтами. Запропоновано метод оцінювання опціонів використовуючи розклад функції Гріна для крайової задачі для сингулярного параболічного рівняння, точність оцінювання збігається з точністю збіжності рядів Фур'є Бесселя.

### Висновки до розділу 3

1. Запропоновано для обчислення цін деривативів використовувати функцію Гріна (функцію розподілу) для дифузійного процесу Бесселя двобар'єрного опціону, яка розкладена по системі функцій Бесселя. Така методика, на відміну від існуючих методів дозволяє визначати ціну опціонів на відсоткову ставку, визначити ризик і дохідність похідних фінансових інструментів фондового ринку.

2. Встановлено, що поведінка похідних фінансових інструментів, зокрема облігацій та опціонів, яка описується стохастичними процесами допускає явне представлення їх функцій щільності розподілів, це значно полегшує статистичну оцінку їхніх параметрів в процесі моніторингу ціноутворення деривативів та дослідження поведінки волатильності для аналізу дохідності та прийняття стратегічних управлінських рішень щодо здійснення операцій на фондовому ринку.

3. Доведено, що спектральні методи, є потужним інструментом для аналітичного ціноутворення деривативів. Ефективне знаходження швидкості зміни росту портфеля акцій, величину фінансового потоку, а також дослідження темпів зростання ринкового портфеля забезпечує вимір внутрішньої волатильності на ринку в будь-який момент часу, реалізується за допомогою розв'язання задачі Штурма-Ліувілля для дифузії Бесселя з крайовими умовами в яких похідна фінансового потоку по цінній змінній в комбінації з величиною потоку перетворюється в нуль.

4. Встановлено, що обґрунтованість стратегічних рішень для здійснення інвестицій з метою збереження стратегічних позицій

компанії на фондовому ринку реалізовується за допомогою оцінювання інтенсивності Беселівських дифузійних процесів методами спектральної теорії. Зокрема розглянуто бар'єри для ціни опціонів, в яких похідна фінансових потоків перетворюється в нуль. Функцію Гріна цієї задачі, яка репрезентує ймовірну ціну опціону, представлено через ряди Фур'є Бесселя. Це дає можливість оцінити інтенсивність фінансових потоків фондових ринків.

5. В роботі розроблено підхід до дослідження ціноутворення європейських опціонів породжених Беселівськими процесами. Для цього розглянуто фінансові потоки породжені процесами Беселівської дифузії, які розкладено по системі функцій Бесселя першого роду при умові, яка враховує лінійну комбінацію потоку та його просторової похідної. Цей розклад дозволяє обчислити величину ринкового портфеля акцій, визначити рівень внутрішньої волатильності на ринку, а також дає можливість дослідити динаміку фондового ринку.



## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Black, F & Scholes, M. (1973). The Pricing of Options and Other Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*.
2. Cox J.C., Ingersoll J.E., Ross S.A. (1985). A theory of the term structure of interest rates // *Econometrica*.— Vol.53. — № 2. — P.385—408.
3. Carr, P., and Schroder M. (2003). Bessel processes, the integral of geometric Brownian motion, and Asian options. Preprint. University of Mannheim.
4. Carr, P. & Linetsky, V. (2006) A Jump to Default Extended CEV Model: An Application of Bessel Processes. *Finance and Stochastics*, 10, 303–330.
5. Coffman, E. G., Puhalskii, A. A. and Reiman, M. I. (1998). Polling systems in heavy traffic: a Bessel process limit. *Math. Operat. Res.* 23, 257–304.
6. Davydov, D. & Linetsky, V. (2003). Pricing options on scalar diffusions: an eigenfunction expansion approach. *Operat. Res.* 51, 185–209.
7. Yor M. and A. Going-Jaesche (1999). A Survey and Some Generalizations of Bessel Processes, ETH, Zurich.
8. Going-Jaesche, A. & Yor, M. (2003). A Survey and Some Generalizations of Bessel Processes. *Bernoulli* 9, 313–349.
9. Gorovoi, V. & V. Linetsky (2004). Black's model of interest rates as options, eigenfunction expansions and Japanese interest rates. *Mathematical finance* 14(1), 49–78.
10. Hull, J. & A. White (1987). The pricing of options on assets with stochastic volatilities. *The Journal of Finance* 42(2), 281–300.
11. Pelsser A. (2000). Pricing double barrier options using Laplace transforms, *Finance and Stochastics*, 4, pp. 95–104.
12. Borodin A. and P. Salminen (2002). *Handbook of Brownian motion: facts and formulae*. Birkhauser.

13. Lebedev, N.N. (1972). *Special Functions and Their Applications*. New York: Dover.
14. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики: учеб. пособие для ун-тов / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. М.: Наука, 1972. 736 с.
15. Vladimirov, V.S. (1981). *Equations of Mathematical Physics*. Moscow: Science, 512 P.
16. Linetsky, V. (2004). The Spectral Representation of Bessel Processes with Drift: Applications in Queueing and Finance, *Journal of Applied Probability* 41, 327344.
17. Linetsky, V. (2007). Chapter 6 spectral methods in derivatives pricing. In J. R. Birge and V. Linetsky (Eds.), *Financial Engineering*, Volume 15 of *Handbooks in Operations Research and Management Science*, pp. 223–299. Elsevier
18. Lorig M. J. (2014) Pricing Derivatives on Multiscale Diffusions: an Eigenfunction Expansion Approach. *Mathematical Finance* 24:2, 331–363
19. Mendoza-Arriaga, R., P. Carr, and V. Linetsky (2010). Time-changed markov processes in unified credit-equity modeling. *Mathematical Finance* 20, 527–569.
20. Burtnyak, I.V. & Malytska, A. (2017). The Evaluation of Derivatives of Double Barrier Options of the Bessel Processes by Methods of Spectral Analysis, *Investment Management and Financial Innovations*, Vol. 14, Issue 3, pp. 126–134.
21. Cox, J.C., Ross, S., Rubinstein, M. (1976). The Valuation of options for alternative stochastic processes. *Journal of Financial economics* 3, 145-166.
22. Буртняк І.В. Дослідження процесу Орнштейна–Уленбека методами спектрального аналізу/ І.В. Буртняк, Г.П. Малицька // *Проблеми економіки*. – 2014. – №2. – С. 349–356.

23. Merton R. C. (1973). Theory of Rational Option Pricing // Bell Journal of Economics and Management Science.- № 4. - P. 141- 183.
24. Sharpe W. (1985). Factor Models, CAPMs, and APT//Journal of Portfolio Management. Fall, 1984, pp. 21-25; Asset Allocation Tools. The Scientific Press.
25. Yor, M. (1984). On square-root boundaries for Bessel processes, and pole-seeking Brownian motion. Stochastic Analysis and Applications (Lecture Notes Math. 1095), eds A. Truman and D. Williams, Springer, Berlin, pp. 100–107.
26. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. / В.С. Владимиров М.: Наука, 1981. 512 с.
27. Янке Е. Специальные функции, формулы, графики, таблицы / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. М.: Наука, 1977. 342 с.
28. Geman, H. and M. Yor (1993), "Bessel Processes, Asian Options and Perpetuities," Mathematical Finance, 3, 349-374.
29. Kent, J. (1978), "Some probabilistic properties of Bessel functions," Ann. Probab., 6, 760-770.
30. Dufresne, D. (2000). "Laguerre Series for Asian and Other Options", Mathematical Finance 10,407-428.
31. Burtnyak, I.V. & Malytska, A. (2017). Evaluating the financial flows of Bessel processes by using spectral analysis, Business Inform, 7, pp. 120–124.
32. Aboulaich, R., Baghery, F. & Jrai A., (2013) Option Pricing for a Stochastic Volatility Jump-Diffusion Model, International Journal of Mathematics and Statistics, 13 (1), pp. 1-19.
33. Andersen, L., (2011), "Option pricing with quadratic volatility: a revisit", Finance and Stochastics, Volume 15, Issue 2, pp. 191–219.
34. Corielli, F., Foschi, P. and Pascucci, A., (2010), "Parametrix approximation of diffusion transition densities", SIAM Journal on Financial Mathematics, Volume 1, pp. 833–867.

35. H. Geman and M. Yor (1993). Bessel processes, Asian options, and perpetuities, *Math. Finance*, 3, pp. 349–374.
36. Carr, P., and Schroder, M. (2003). Bessel processes, the integral of geometric Brownian motion, and Asian options. Preprint. University of Mannheim.
37. Shiga, T., and S. Watanabe, (1973). Bessel Diffusions as a One-Parameter Family of Diffusion Processes, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Geb.*, 27, 37-46.
38. Mendoza-Arriaga, R., Carr, P., & Linetsky, V. (2010). Time-Changed Markov Processes in unified Credit equity Modeling. *Mathematical Finance*, 20, 527-569.
39. Hernandez-del-Valle, G. (2012). On the first time that a 3-D Bessel bridge hits a boundary. *Stochastic Models* 28, 649–662.
40. Salminen, P. and Yor, M. (2011). On hitting times of affine boundaries by reflecting Brownian motion and Bessel processes. *Periodica Math. Hungar.* 62, no. 1, 75–101.
41. Dubins L: B. Shepp L: A. and Shiryaev A: N. (1993). Optimal stopping rules and maximal inequalities for Bessel processes: *Theory Probab: Appl:* 38 (226-261).
42. Dufresne, D. (2001). An affine property of the reciprocal Asian process. *Osaka Journal of Mathematics* 38: 379-381.
43. Jeanblanc, M., Yor, M. and Chesney, M. (2009): *Mathematical Methods for Financial Markets*. Springer
44. Bruss T. and Yor M. (2012). Stochastic processes with proportional increments and the last-arrival problem, *Stoch. Proc. and Th. Applic.*, Vol. 122 (9), 3239-3261.
45. Burtnyak, I.V. & Malytska, H.P. (2017). Calculating the price for derivative financial assets of Bessel processes using the Sturm-Liouville theory, *Problems of Economics*,. 2, pp. 310–316.

## РОЗДІЛ 4

### РЕАЛІЗАЦІЯ МОДЕЛЕЙ БАГАТОФАКТОРНОЇ ВОЛАТИЛЬНОСТІ ДЕРИВАТИВІВ МЕТОДАМИ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛІЗУ

#### 4.1. Багатофакторні моделі ціноутворення деривативів

Нехай  $(Q, F, P)$  є простором ймовірностей, який підтримує корельований броунівський рух  $(W^x, W^{y_1}, \dots, W^{y_l}, W^{z_1}, \dots, W^{z_n})$  і експоненціальна випадкова змінна  $\varepsilon \sim \text{Exp}(1)$ , яка є незалежною від  $(W^x, W^{y_1}, \dots, W^{y_l}, W^{z_1}, \dots, W^{z_n})$ . Будемо вважати, що економіка з  $l+n$  чинниками, описана неперервним часом та неперервним Марківським процесом  $\chi = (X, Y_1, \dots, Y_l, Z_1, \dots, Z_n)$ , який визначений в деякому просторі станів  $E = I \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^n$ , де  $(Y_1, \dots, Y_l) \in \mathbb{R}^l$ ,  $(Z_1, \dots, Z_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $I$  - інтервал в  $\mathbb{R}$  з точками  $e_1$  та  $e_2$ , такими, що  $-\infty \leq e_1 < e_2 \leq \infty$ . Припускаємо, що  $\chi$  має початок в  $E$  і миттєво зникає як тільки  $X$  виходить за межі  $I$ . Зокрема, динаміка  $\chi$  з фізичною мірою  $P$ , є наступною [1]:

$$\chi_t = \begin{cases} (X_t, Y_{1t}, \dots, Y_{lt}, Z_{1t}, \dots, Z_{nt}), & \tau_I > t, \\ \Delta, & \tau_I \leq t, \end{cases} \quad \tau_I = \inf(t > 0: X_t \notin I),$$

де  $(X, Y_1, \dots, Y_l, Z_1, \dots, Z_n)$ , задаються

$$\left\{ \begin{array}{l}
dX_t = v(X_t)dt + a(X_t)f(Y_{1t}, \dots, Y_{lt}, Z_{1t}, \dots, Z_{nt})dW_t^x, \\
dY_{jt} = \frac{1}{\epsilon_j} \alpha_j(Y_{jt})dt + \frac{1}{\sqrt{\epsilon_j}} \beta_j(Y_{jt})dW_t^{y_j}, \quad j = \overline{1, l}. \\
dZ_{it} = \delta_i c_i(Z_{it})dt + \sqrt{\delta_i} g_i(Z_{it})dW_t^{z_i}, \quad i = \overline{1, n}. \\
d(W^x, W^{y_j})_t = \rho_{xy_j} dt, \quad j = \overline{1, l}. \\
d(W^x, W^{z_i})_t = \rho_{xz_i} dt, \quad i = \overline{1, n}. \\
d(W^{y_j}, W^{z_i})_t = \rho_{y_j z_i} dt, \quad j = \overline{1, l}, \quad i = \overline{1, n}. \\
d(W^{y_j}, W^{y_r})_t = \rho_{y_j y_r} dt, \quad j = \overline{1, l}, \quad r = \overline{1, l}. \\
d(W^{z_i}, W^{z_k})_t = \rho_{z_i z_k} dt, \quad i = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, n}. \\
(X_0, Y_{10}, \dots, Y_{l0}, Z_{10}, \dots, Z_{n0}) = (x, y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n) \in E.
\end{array} \right. \quad (4.1)$$

де  $\rho_{xy_j}, \rho_{xz_i}, \rho_{y_j z_i}, \rho_{y_j y_r}, \rho_{y_j y_r}$  задовольняють умову

$|\rho_{xy_j}|, |\rho_{xz_i}|, |\rho_{y_j z_i}|, |\rho_{y_j y_r}|, |\rho_{y_j y_r}| \leq 1$ , а кореляційні матриці виду:

$$\begin{pmatrix}
1 & \rho_{xy_j} & \rho_{xz_i} \\
\rho_{y_j x} & 1 & \rho_{y_j z_i} \\
\rho_{z_i x} & \rho_{z_i y_j} & 1
\end{pmatrix}$$

напівдодатно визначені, тобто

$$1 + 2\rho_{xy_j}\rho_{xz_i}\rho_{y_j z_i} - \rho_{xy_j}^2 - \rho_{xz_i}^2 - \rho_{y_j z_i}^2 \geq 0.$$

Процес  $X$  може репрезентувати багато економічних явищ, та процесів. Наприклад, величину запасів, ціну індексу, надійний короткий відсоток, тощо. Більш ширше,  $X$  це зовнішній чинник, який характеризує кількісні значення згаданих вище процесів. Під фізичною мірою  $\mathbb{P}$  процесу  $X$ , розуміють процес  $X$ , який має миттєвий дрейф  $v(X_t)$  і стохастичну волатильність  $a(X_t)f(Y_{1t}, \dots, Y_{lt}, Z_{1t}, \dots, Z_{nt}) > 0$ , який містить обидві компоненти: локальну  $a(X_t)$  і нелокальну  $f(Y_{1t}, \dots, Y_{lt}, Z_{1t}, \dots, Z_{nt})$ . Нескінченно малі генератори (інфінітіземальні)  $Y_j$  та  $Z_i$  мають вигляд [2]

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}_{Y_j}^{\epsilon_j} &= \frac{1}{\epsilon_j} \left( \frac{1}{2} \beta_j^2(y_j) \partial_{y_j y_j}^2 + \alpha_j(y_j) \partial_{y_j} \right), \\ \mathfrak{L}_{Z_i}^{\delta_i} &= \delta_i \left( \frac{1}{2} g_i^2(z_i) \partial_{z_i z_i}^2 + c_i(z_i) \partial_{z_i} \right),\end{aligned}\quad (4.2)$$

характеризуються відповідно величинами  $\frac{1}{\epsilon_j}$  та  $\delta_i$ . Таким чином,  $Y_1, \dots, Y_l$  та  $Z_1, \dots, Z_n$  мають внутрішню шкалу часу  $\epsilon_j > 0$  і  $\frac{1}{\delta_i} >$

0 причому

$$0 < \epsilon_l < \epsilon_{l-1} < \dots < \epsilon_1 < 1.$$

Для того, щоб внутрішня шкала часу  $Y_j$  була малою, а внутрішня шкала часу  $Z_i$  великою. Будемо вважати  $\epsilon \ll 1$  і  $\delta \ll 1$ ,  $Y_j$  це швидко змінний чинник, а  $Z_i$  повільно змінний чинник. Зауважимо, що  $\mathfrak{L}_{Y_j}^{\epsilon_j}$  та  $\mathfrak{L}_{Z_i}^{\delta_i}$  задані як

$$L = \frac{1}{2} a^2(x) \partial_{xx}^2 + b(x) \partial_x - k(x), \quad x \in (e_1, e_2),$$

з  $k(x) = 0$  для всіх  $x \in I$ ,  $\epsilon$  завжди самоспряженим в гільбертовому просторі  $H = L^2(I, m)$ , де  $I \in \mathbb{R}$  інтервал з кінцями  $e_1$  і  $e_2$  та  $m$  – швидкість щільності дифузії.

$\text{Dom}(\mathfrak{L}) \{ f \in L^2(I, m) : f, \partial_x f \in AC_{\text{loc}}(I), \mathfrak{L}f \in L^2(I, m), BCs \text{ на } e_1 \text{ та } e_2 \}$  де  $AC_{\text{loc}}(I)$  є простором функцій, абсолютно неперервних на кожному компактному підінтервалі  $I$  [3]. Крайові умови на  $e_1$  та  $e_2$  накладаються для натуральних, вихідних, вхідних і регулярних меж.

Оцінимо похідний актив, з виплатою в час  $t > 0$ , яка може залежати від траєкторії  $X$ . Зокрема, розглянемо форми виплати (отримання доходу у вигляді відсотків власником цінного паперу):

$$\text{Виплата} = H(X_t) \mathbb{I}_{(\tau > t)}. \quad (4.3)$$

де  $\tau$  – випадковий момент часу, протягом якого є невиплачується премія за похідний актив. Оскільки нас цікавлять оцінки деривативів

то потрібно визначити динаміку  $(X, Y_1, \dots, Y_l, Z_1, \dots, Z_n)$  під оцінкою міри при нейтральному ризику, який позначимо, як  $\tilde{\mathbb{P}}$ . Маємо таку динаміку:

$$\left\{ \begin{array}{l} dX_t = (b(X_t) - a(X_t)f(Y_{1t}, \dots, Y_{lt}, Z_{1t}, \dots, Z_{nt}))\Omega(Y_{1t}, \dots, Y_{lt}, Z_{1t}, \dots, Z_{nt})dt \\ \quad + a(X_t)f(Y_{1t}, \dots, Y_{lt}, Z_{1t}, \dots, Z_{nt})d\tilde{W}_t^x, \\ dY_{jt} = \left( \frac{1}{\epsilon_j} \alpha_j(Y_{jt}) - \frac{1}{\sqrt{\epsilon_j}} \beta_j(Y_{jt})\Lambda_j(Y_{1t}, \dots, Y_{lt}, Z_{1t}, \dots, Z_{nt}) \right) dt + \frac{1}{\sqrt{\epsilon_j}} \beta_j(Y_{jt})d\tilde{W}_t^{y_j}, \\ dZ_{it} = \left( \delta_i c_i(Z_{it}) - \sqrt{\delta_i} g_i(Z_{it})\Gamma_i(Y_{1t}, \dots, Y_{lt}, Z_{1t}, \dots, Z_{nt}) \right) dt + \sqrt{\delta_i} g_i(Z_{it})d\tilde{W}_t^{z_i}, \\ d\langle \tilde{W}^x, \tilde{W}^{y_j} \rangle_t = \rho_{xy_j} dt, \quad j = \overline{1, l}. \\ d\langle \tilde{W}^x, \tilde{W}^{z_i} \rangle_t = \rho_{xz_i} dt, \quad i = \overline{1, n}. \\ d\langle \tilde{W}^{y_j}, \tilde{W}^{z_i} \rangle_t = \rho_{y_j z_i} dt, \quad j = \overline{1, l}, \quad i = \overline{1, n}. \\ d\langle \tilde{W}^{y_j}, \tilde{W}^{y_r} \rangle_t = \rho_{y_j y_r} dt, \quad j = \overline{1, l}, \quad r = \overline{1, l}. \\ d\langle \tilde{W}^{z_i}, \tilde{W}^{z_k} \rangle_t = \rho_{z_i z_k} dt, \quad i = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, n}. \\ (X_0, Y_{10}, \dots, Y_{l0}, Z_{10}, \dots, Z_{n0}) = (x, y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n) \in E, \end{array} \right. \quad (4.4)$$

де

$$\begin{aligned} d\tilde{W}_t^x &:= dW_t^x + \left( \frac{v(X_t) - b(X_t)}{a(X_t)f(Y_{1t}, \dots, Y_{lt}, Z_{1t}, \dots, Z_{nt})} + \Omega(Y_{1t}, \dots, Y_{lt}, Z_{1t}, \dots, Z_{nt}) \right) dt, \\ d\tilde{W}_t^{y_j} &:= dW_t^{y_j} + \Lambda_j(Y_{1t}, \dots, Y_{lt}, Z_{1t}, \dots, Z_{nt})dt, \\ d\tilde{W}_t^{z_i} &:= dW_t^{z_i} + \Gamma_i(Y_{1t}, \dots, Y_{lt}, Z_{1t}, \dots, Z_{nt})dt, \end{aligned}$$

Потрібно накласти такі умови щоб система (4.4) мала єдиний сильний розв'язок.

Як згадано вище, випадковий час  $\tau \in$  часом функціонування похідного фінансового інструменту. У цьому випадку, дефолт може відбутися одним із двох способів:

- 1) коли  $X$  виходить за інтервал  $I$ ,
- 2) у випадковий час  $\tau_h$ , яким керує рівень ризику  $h(X_t) \geq 0$ .

Це можна виразити наступним чином:



$$\left\{ \begin{array}{l} \tau = \tau_I \wedge \tau_h, \\ \tau_I = \inf\{t \geq 0: X_t \notin I\}, \\ \tau_h = \inf\left\{t \geq 0: \int_0^t h(X_s) ds \geq \varepsilon(X, Y_1, \dots, Y_l, Z_1, \dots, Z_n)\right\}, \\ \varepsilon \sim \text{Exp}(1) \text{ ш.} \end{array} \right. \quad (4.5)$$

Зауважимо, що по випадкова змінна  $\varepsilon$  незалежна від  $(X, Y_1, \dots, Y_l, Z_1, \dots, Z_n)$ .

Щоб відстежувати  $\tau_h$ , використаємо індикатор процесу:  $D_t = \mathbb{I}_{\{t \geq \tau_h\}}$ . де  $\mathbb{D} = \{\mathcal{D}_t, t \geq 0\}$ , – фільтр породжений  $D$  та  $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$  – фільтр генератора  $(W^x, W^{y_1}, \dots, W^{y_l}, W^{z_1}, \dots, W^{z_n})$ . Використаємо фільтрацію

$\mathbb{G} = \{\mathcal{G}_t, t \geq 0\}$ , де  $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t \vee \mathcal{D}_t$ . Зауважимо, що  $(X, Y_1, \dots, Y_l, Z_1, \dots, Z_n)$  застосовується до  $\mathbb{G}$  і  $\tau$  – час зупинки ( $\{\{\tau \leq t\}\} \in \mathcal{G}_t$  для всіх  $t \geq 0$ ) [4].

Вважатимемо, що наша економіка включає надійний актив, який росте миттєво на величину  $r(X_t) \geq 0$ . Таким чином, якщо економіка включає, момент наприклад, "не платити дивіденди " чи продаж неплатіжного активу  $S$ , ціновий процес якого описується як  $S_t = \mathbb{I}_{\{t \geq \tau_h\}} X_t$ , де простір станів  $X$ ,

$I = (0, \infty)$ , то тоді ціна активу обчислюється за допомогою формули  $\{e^{-\int_0^t r(X_s) ds} S_t, t \geq 0\}$ , процес  $(\tilde{\mathbb{P}}, \mathbb{G})$  – є мартингальним. Величину

мартингала знаходимо, підставляючи  $b(X_t) = [r(X_t) + h(X_t)]X_t$  і  $\Omega(Y_1, \dots, Y_l, Z_1, \dots, Z_n) = 0$  у (4.4). Рівень ризику  $h(X_t)$  у відсотковій ставці  $r(X_t)$  та в дрейфі  $X$  повинна дати компенсацію за можливість неплатежу [3]. З іншого боку, якщо  $X$  тільки описує надійний відсоток через  $r(X_t)$ , то при переході від фізичної міри  $\mathbb{P}$  до оцінки виміру  $\tilde{\mathbb{P}}$ , немає потреби змінювати дрейф від  $X$  до  $v(X_t)$  або до  $b(X_t)$  [5]. Однак, можна розглянути, ефект включення ринкової ціни ризику. У цьому

випадку можна підставити в (4.4)  $b(X_t) = v(X_t)$ , та  $\Omega(Y_1, \dots, Y_l, Z_1, \dots, Z_n) \neq 0$ .

Розглядаємо економіку з фізичним нейтральним ризиком. Нехай маємо зазначений вид похідного активу, який можна оцінити за таких припущень:

1. Існує єдиний розв'язок  $(X, Y_1, \dots, Y_l, Z_1, \dots, Z_n)$  систем (4.1) та (4.4).
2. Існують додатні константи  $C_{\Lambda_j} < \infty$  і  $C_{\Gamma_i} < \infty$ , такі, що  $\|\Lambda_j\|_\infty < C_{\Lambda_j}$  і  $\|\Gamma_i\|_\infty < C_{\Gamma_i}$ ,  $j = \overline{1, l}$ ,  $i = \overline{1, n}$ .
3. Процес  $Y_j^{(1)}$  має нескінченно малий генератор  $\mathfrak{L}_{0j}$ ,  $j = \overline{1, l}$ .
  - 3.1. Процес  $Y_j^{(1)}$  ергодичний і має єдиний інваріантний розподіл  $\Pi$  з щільністю  $\pi$ .
  - 3.2. Оператор  $\mathfrak{L}_{0j}$  має додатний спектральний розклад - тобто найменше ненульове власне значення  $\lambda_{min}$  оператора  $(-\mathfrak{L}_{0j})$  є додатним, а також  $\mathfrak{L}_{0j}$  є самоспряженим і визначеним в  $L^2(\mathbb{R}, \pi)$ .
  - 3.3. В (див. [4] ст. 93) доведено експоненціальну збіжність  $Y_j^{(1)}$  до його інваріантного розподілу

$$\left| \mathbb{E} \left[ g(Y_{jt}^{(1)}) \right] - \langle g \rangle \right| \leq C \exp(-\lambda_{min} t), \quad \forall g \in L^2(\mathbb{R}, \pi).$$

а також для всіх  $k \in \mathbb{N}$  існує  $C(k) < \infty$  таке, що  $\sup_t \mathbb{E} \left[ \left| Y_{jt}^{(1)} \right|^k \right] \leq C(k)$ .

4. Процес  $Z_i^{(1)}$  має інфінітезимальний генератор  $\mathcal{M}_2$ . З мірою  $\mathbb{P}$  процес  $Z_i^{(1)}$  складається з моментів, які рівномірно обмежені в  $s < t$ . Тобто, для всіх  $k \in \mathbb{N}$  існує  $C(t, k) < \infty$  таке, що

$$\sup_{s \leq t} \mathbb{E} \left[ \left| Z_s^{(1)} \right|^k \right] \leq C(t, k).$$

4. Функції  $f(y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n)$  і  $\Omega(y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n)$  задовольняють

$$\bar{\sigma}^2(z) = \int_{R^l} f^2(y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n) \pi_1(y_1) \dots \pi_l(y_l) dy_1 \dots dy_l < \infty,$$

$$\overline{f\Omega}(z) = \int_{R^l} f(y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n) \Omega(y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n)$$

$$\pi_1(y_1) \dots \pi_l(y_l) dy_1 \dots dy_l < \infty$$

і розв'язки  $\phi_j(y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n)$  і  $\eta_i(y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n)$  системи рівнянь Пуассона зростають поліноміальним чином.

6. Функції  $a(x), b(x), r(x)$  та  $h(x)$  задовольняють умови  $a > 0, a \in C^2(I), b \in C^1(I), r \geq 0, r \in C(I), h \geq 0$  і  $h \in C(I)$ .

7. Спектр оператора  $\langle \mathcal{L}_2 \rangle$ , визначений за допомогою формули  $\langle \mathcal{L}_2 \rangle = \frac{1}{2} \bar{\sigma}^2 a^2(x) \partial_{xx}^2 + (b(x) - \overline{f\Omega}a(x)) \partial_x - k(x), x \in (e_1, e_2)$ , простий і дискретний [6].

Нехай потрібно оцінити похідний актив деякого виграшу (виплати), який має вигляд:

$$\text{Виплата} = H(X_t) \mathbb{I}_{(\tau > t)},$$

де час дефолту виражається формулою

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau = \tau_I \wedge \tau_h, \\ \tau_I = \inf\{t \geq 0: X_t \notin I\}, \\ \tau_h = \inf\left\{t \geq 0: \int_0^t h(X_s) ds \geq \varepsilon(X, Y_1, \dots, Y_l, Z_1, \dots, Z_n)\right\}, \\ \varepsilon \sim \text{Exp}(1) \text{ п.} \end{array} \right\},$$

Використовуючи нейтральний ризик ціноутворення і Марківський ланцюг  $X$ , ціна  $w^{\bar{\varepsilon}, \bar{\delta}'}(t, x, y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n)$  деяких похідних активів в початковий момент часу має вигляд:

$$w^{\bar{\varepsilon}, \bar{\delta}'}(t, x, y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n) =, \\ \tilde{\mathbb{E}}_{x, y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n} \left[ \exp\left(-\int_0^t r(X_s) ds\right) H(X_t \mathbb{I}_{\{t > \tau\}}) \right],$$

де  $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_l)$ ,  $\bar{\delta}' = (\delta_1, \dots, \delta_n)$ , а  $(x, y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n) \in E$  є початкова точка процесу  $(X, Y_1, \dots, Y_l, Z_1, \dots, Z_n)$ . за допомогою

формули Фейнмана-Каца, [7] можна показати, що  $w^{\bar{\epsilon}, \bar{\delta}'}(t, x, y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n)$  задовольняє наступній задачі Коші [8]:

$$\left(-\partial_t + \mathfrak{L}^{\bar{\epsilon}, \bar{\delta}'}\right) w^{\bar{\epsilon}, \bar{\delta}'} = 0, \quad (y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n) \in E, t \in \mathbb{R}^+, \quad (4.6)$$

$$w^{\bar{\epsilon}, \bar{\delta}'}(0, x, y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n) = H(x), \quad (4.7)$$

де оператор  $\mathfrak{L}^{\bar{\epsilon}, \bar{\delta}'}$  має вигляд:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}^{\bar{\epsilon}, \bar{\delta}'} = & \sum_{j=1}^l \left( \frac{1}{\epsilon_j} \mathfrak{L}_{0j} + \frac{1}{\sqrt{\epsilon_j}} \mathfrak{L}_{1j} \right) + \mathfrak{L}_2 + \sum_{k,j} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_k \epsilon_j}} \mathfrak{L}_{3kj} + \sum_{i,j} \sqrt{\frac{\delta_i}{\epsilon_j}} \mathfrak{M}_{3ij} + \\ & \sum_i \sqrt{\delta_i} \mathfrak{M}_{1i} + \sum_i \delta_i \mathfrak{M}_{2i} + \sum_{i,r} \sqrt{\delta_i \delta_r} \mathfrak{M}_{4ri}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\mathfrak{L}_{0j} = \frac{1}{2} \beta_j^2(y_j) \partial_{y_j y_j}^2 + \alpha_j(y_j) \partial_{y_j}, \quad j = \overline{1, l}.$$

$$\mathfrak{L}_{1j} = \beta_j(y_j) (\rho_{xy_j} a(x) f(y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n) \partial_x - \Lambda_j(y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n)) \partial_{y_j}, \quad (4.9)$$

$$\mathfrak{L}_{2j} = \frac{1}{2} a^2(x) f^2(y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n) \partial_{xx}^2$$

$$+ (b(x) - a(x) \Omega(y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n) f(y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n)) \partial_x - k(x),$$

$$\mathfrak{L}_{3kj} = \rho_{y_k y_j} \beta_j(y_j) \beta_k(y_k) \partial_{y_j y_k}^2,$$

$$\mathfrak{M}_{4ri} = \rho_{z_i z_r} g_i(z_i) g_r(z_r) \partial_{z_i z_r}^2,$$

$$\mathfrak{M}_{3ij} = \rho_{x z_i} \beta_j(y_j) g_i(z_i) \partial_{y_j z_i}^2,$$

$$\mathfrak{M}_{1i} = g_i(z_i) \left( \rho_{x z_i} a(x) f(y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n) \partial_x - \Gamma_i(y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n) \right) \partial_{z_i},$$

$$\mathfrak{M}_{2i} = \frac{1}{2} g_i^2(z_i) \partial_{z_i z_i}^2 + c_i(z_i) \partial_{z_i},$$

$$k(x) = r(x) + h(x).$$

Крім початкової умови (4.7) функція  $w^{\bar{\epsilon}, \bar{\delta}'}(t, x, y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n)$  повинна задовольняти на кінцях  $e_1$  та  $e_2$  інтервалу  $I$  крайові умови. Крайові умови в точках  $e_1$  та  $e_2$  належать області  $\mathfrak{L}^{\bar{\epsilon}, \bar{\delta}'}$  і будуть залежати від природи процесу  $X$  на кінцях  $I$  та класифікуються як: дійсні, вихідні, вхідні або регулярні. Класифікація [9], здійснюється

наступним чином. Для загального нескінченно малого генератора  $\mathfrak{L}$  можна знайти щільність виміру

$$\varsigma(x) := \exp\left(-\int_{x_0}^x \frac{2b(y)}{a^2(y)} dy\right),$$

де нижня межа інтегрування  $x_0 \in (e_1; e_2)$  може бути вибрана довільно.

З  $\varsigma$  можна визначити вигляд функції  $\mathcal{S}$

$$\mathcal{S}([x, y]) := \int_x^y \varsigma(z) dz, \quad x, y \in (e_1; e_2),$$

$$\mathcal{S}((e_1, y]) := \lim_{x \searrow e_1} \mathcal{S}([x, y]), \quad \mathcal{S}([x, e_2)) := \lim_{x \nearrow e_2} \mathcal{S}([x, y]).$$

Зауважимо, що ці обмеження можуть бути нескінченними. Для будь-яких  $y \in (e_1; e_2)$  визначаємо [10]

$$I_1 := \int_{e_1}^y \mathcal{S}((e_1, x])(1 + k(x))m(x)dx, I_2 := \int_y^{e_2} \mathcal{S}([x, e_2))(1 + k(x))m(x)dx,$$

$$J_1 := \int_{e_1}^y \mathcal{S}([x, y])(1 + k(x))m(x)dx, J_2 := \int_y^{e_2} \mathcal{S}([y, x])(1 + k(x))m(x)dx .$$

Крайні точки класифікуються як:

- Натуральна, якщо  $I_i = \infty$  і  $J_i = \infty$ . Інтервал  $I$  прийнято вважати відкритим.

- Вихідна, якщо  $I_i < \infty$  і  $J_i = \infty$ . Відповідна крайова умова має вигляд:

$$\lim_{x \rightarrow e_i} \psi(x) = 0.$$

- Вхідна, якщо  $I_i = \infty$  і  $J_i < \infty$ . Відповідна крайова умова

$$\lim_{x \rightarrow e_i} \frac{\partial_x \psi(x)}{\varsigma(x)} = 0.$$

- Регулярна, якщо  $I_i < \infty$  і  $J_i < \infty$ . Потрібно вказати поведінку дифузії на межі, оскільки розглядаємо тільки кіллінг, а також миттєво відображаємо поведінку, тобто крайові умови є такими

$$\lim_{x \rightarrow e_i} \psi(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow e_i} \frac{\partial_x \psi(x)}{\varsigma(x)} = 0$$

Область визначення оператора має вигляд

$$\text{Dom}(\mathfrak{L})\{f \in L^2(I, m): f, \partial_x f \in AC_{\text{loc}}(I), \mathfrak{L}f \in L^2(I, m), \}$$

де  $AC_{loc}(I)$  є простором функцій, абсолютно неперервних на кожному компактному підінтервалі  $I$  [6], [10].

З рівняння (4.2) видно, що  $\mathfrak{L}_0 = \sum_{j=1}^l \mathfrak{L}_{Y_j}^1$ . Припустимо, що дифузія генератора  $\mathfrak{L}_{Y_0}^1$  має інваріантний розподіл  $\Pi$  з щільністю  $\pi$ . Зауважимо, що оператор  $\mathfrak{L}_0$  з  $dom(\mathfrak{L}_0) = L^2(\mathbb{R}, \pi)$  є самоспряженим в Гільбертовому просторі  $L^2(\mathbb{R}, \pi)$ .

Задача Коші (4.6)(4.7) [11-12] для  $(f, \alpha_1, \dots, \alpha_l, \beta_1, \dots, \beta_n, \Lambda_1, \dots, \Lambda_l, c_1, \dots, c_n, g_1, \dots, g_n, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n)$  не має аналітичного розв'язку. Однак, для фіксованого  $\bar{\delta}'$ , умови (4.8), які містять  $\bar{\epsilon}$  та відхиляються як завгодно мало в  $\bar{\epsilon}$ околі, що зумовлює сингулярні збурення. Для фіксованого  $\epsilon_j$  умови, які містять  $\delta_i$  є малими для деякого малого  $\bar{\delta}'$  околу, що спричиняє регулярні збурення. Таким чином, окіл  $\bar{\epsilon}$  та окіл  $\bar{\delta}'$  дає початок об'єднаному сингулярно-регулярному збуренню  $\mathcal{O}(1)$  оператора  $\mathfrak{L}_2$ . Для того щоб знайти асимптотичний розв'язок задачі Коші (4.6) (4.7) потрібно розкласти в ряд  $w^{\bar{\epsilon}, \bar{\delta}'}$  за степенями  $\sqrt{\epsilon_j}$  та  $\sqrt{\delta_i}$ :

$$w^{\bar{\epsilon}, \bar{\delta}'} = \sum_{i_1 \geq 0} \dots \sum_{i_l \geq 0} \sum_{j_1 \geq 0} \dots \sum_{j_n \geq 0} \sqrt{\epsilon_1}^{i_1} \dots \sqrt{\epsilon_l}^{i_l} \sqrt{\delta_1}^{j_1} \dots \sqrt{\delta_n}^{j_n} w_{i_1, \dots, i_l, j_1, \dots, j_n},$$

де

$$\begin{aligned} & \sum_{i_1 \geq 0} \dots \sum_{i_l \geq 0} \sum_{j_1 \geq 0} \dots \sum_{j_n \geq 0} \sqrt{\epsilon_1}^{i_1} \dots \sqrt{\epsilon_l}^{i_l} \sqrt{\delta_1}^{j_1} \dots \sqrt{\delta_n}^{j_n} w_{i_1, \dots, i_l, j_1, \dots, j_n} = \\ \lim & \sum_{i_1 \geq 0}^{m_1} \dots \sum_{i_l \geq 0}^{m_l} \sum_{j_1 \geq 0}^{m_{l+1}} \dots \sum_{j_n \geq 0}^{m_{l+n}} \sqrt{\epsilon_1}^{i_1} \dots \sqrt{\epsilon_l}^{i_l} \sqrt{\delta_1}^{j_1} \dots \sqrt{\delta_n}^{j_n} w_{i_1, \dots, i_l, j_1, \dots, j_n}, \\ & m_1 \rightarrow \infty, \dots, m_{l+n} \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Наближена ціна обчислюється

$$w_{0, \dots, 0} + \sqrt{\epsilon_1} w_{1, \dots, 0} + \sqrt{\epsilon_2} w_{0, 1, 2, \dots, 0} + \dots + \sqrt{\epsilon_l} w_{0, \dots, 1, l, 0, \dots, 0}$$

$$w^{\bar{\epsilon}, \bar{\delta}'} \approx +\sqrt{\delta_1} w_{0, \dots, 0, 1_{l+1}, \dots, 0} + \dots + \sqrt{\delta_n} w_{0, \dots, 1_n}.$$

Вибір розкладу в напівцілих степенях  $\epsilon_j$  та  $\delta_i$  є природнім для  $\Omega^{\bar{\epsilon}, \bar{\delta}'}$ .

Оскільки, проведено  $l + n$ кратний розклад в ряд по напівцілих степенях  $\epsilon_j$  та  $\delta_i$ , то потрібно визначитися, які з цих параметрів розкладати. Спочатку виконаємо регулярний розклад збурень, які породжуються  $\bar{\delta}'$ . Потім розглянемо сингулярні збурення, які стосуються  $\bar{\epsilon}$ .

Розклад збурень продовжується, шляхом поділу термінів  $\Omega^{\bar{\epsilon}, \bar{\delta}'}$  і  $w^{\bar{\epsilon}, \bar{\delta}'}$ , які стосуються  $\sqrt{\delta_i}$ .

$$\Omega^{\bar{\epsilon}, \bar{\delta}'} = \Omega^{\bar{\epsilon}} + \sum_{i=1}^n (\sqrt{\delta_i} \mathfrak{M}_i^{\bar{\epsilon}} + \delta_i \mathfrak{M}_{2i}) + \sum_{r=1}^n \sum_{i=1}^n \sqrt{\delta_i} \sqrt{\delta_r} \mathfrak{M}_{4ri}, \quad (4.10)$$

$$w^{\bar{\epsilon}, \bar{\delta}'} = \sum_{o_1 \geq 0} \dots \sum_{o_n \geq 0} (\sqrt{\delta_1})^{o_1} \dots (\sqrt{\delta_n})^{o_n} w_{o_1, \dots, o_n}^{\bar{\epsilon}},$$

де

$$\begin{aligned} \Omega^{\bar{\epsilon}} &= \sum_{j=1}^l \frac{1}{\epsilon_j} \mathfrak{L}_{0j} + \sum_{j=1}^l \frac{1}{\sqrt{\epsilon_j}} \mathfrak{L}_{1j} + \mathfrak{L}_2 + \sum_{k=1}^l \sum_{j=1}^l \frac{1}{\sqrt{\epsilon_k} \sqrt{\epsilon_j}} \mathfrak{L}_{3kj}, \\ \mathfrak{M}_i^{\bar{\epsilon}} &= \sum_{j=1}^l \left( \frac{1}{\sqrt{\epsilon_i}} \mathfrak{M}_{3ji} + \mathfrak{M}_{1i} \right). \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$w_{o_1, \dots, o_n}^{\bar{\epsilon}} = \sum_{i_1 \geq 0} \dots \sum_{i_l \geq 0} \sqrt{\epsilon_1}^{i_1} \dots \sqrt{\epsilon_l}^{i_l} w_{i_1, \dots, i_l, j_1, \dots, j_n}, \quad (4.12)$$

Підставивши розклад (4.10) в диференціальне рівняння (4.6) і збираючи члени з степенями  $\sqrt{\delta_i}$  одержуємо низку рівнянь з регулярним розкладом збурень [13]:

$$0 = (-\partial_t + \Omega^{\bar{\epsilon}}) u_{\bar{0}'}^{\bar{\epsilon}}, \quad \bar{0} = (0, \dots, 0) \in R^l, \quad \bar{0}' = (0, \dots, 0) \in R^n. \quad (4.13)$$

$$0 = (-\partial_t + \mathfrak{L}^{\bar{\epsilon}})u_{1_i}^{\bar{\epsilon}} + \mathfrak{M}_i^{\bar{\epsilon}}u_{0'}^{\bar{\epsilon}}, i = \overline{1, l}. \quad (4.14)$$

В рівняннях (4.13) і (4.14) зробимо сингулярний розклад збурень по відношенню до параметрів  $\epsilon_j$ ,  $j = \overline{1, l}$ .

Підставивши (4.11) та (4.12) в (4.13) і зберемо члени зі степенями  $\sqrt{\epsilon_j}$ . З розгляду еквівалентних величин маємо порядок  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\epsilon_j}\right)$  і  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon_j}}\right)$  рівняння:

$$\mathcal{O}\left(\frac{1}{\epsilon_j}\right): 0 = \mathfrak{L}_{0j}w_{\overline{0,0'}}^{\bar{\epsilon}}, j = \overline{1, l}. \quad (4.15)$$

$$\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon_j}}\right): 0 = \mathfrak{L}_{0j}u_{\overline{1j,0'}}^{\bar{\epsilon}} + \mathfrak{L}_{1j}u_{\overline{0,0'}}^{\bar{\epsilon}}. \quad (4.16)$$

Зауважимо, що всі умови в  $\mathfrak{L}_{0j}$  і  $\mathfrak{L}_{1j}$  мають похідні відносно змінних  $y_j$ , тому, якщо  $w_{\overline{0,0'}}^{\bar{\epsilon}}$  і  $w_{\overline{1j,0'}}^{\bar{\epsilon}}$  є незалежними від  $y_1, \dots, y_l$ , то вони будуть розв'язками рівнянь (4.15) і (4.16). Таким чином  $w_{\overline{0,0'}}^{\bar{\epsilon}} = w_{\overline{0,0'}}^{\bar{\epsilon}}(t, x, z_1, \dots, z_n)$  і  $w_{\overline{1j,0'}}^{\bar{\epsilon}} = w_{\overline{1j,0'}}^{\bar{\epsilon}}(t, x, z_1, \dots, z_n)$ . Продовжуючи асимптотичний аналіз  $\mathcal{O}(1)$  і  $\mathcal{O}(\sqrt{\epsilon_j})$  маємо рівняння:

$$\mathcal{O}(1): 0 = \sum_{j=1}^l \mathfrak{L}_{0j}u_{\overline{2j,0'}}^{\bar{\epsilon}} + \sum_{j=1}^l \mathfrak{L}_{1j}w_{\overline{1j,0'}}^{\bar{\epsilon}} + (-\partial_t + \mathfrak{L}_2)w_{\overline{0,0'}}^{\bar{\epsilon}}, \quad (4.17)$$

$$\mathcal{O}(\sqrt{\epsilon_j}): 0 = \mathfrak{L}_{0j}w_{\overline{3j,0'}}^{\bar{\epsilon}} + \mathfrak{L}_{1j}w_{\overline{2j,0'}}^{\bar{\epsilon}} + \sum_{k \neq j} \mathfrak{L}_{1k}w_{\overline{1kj,0'}}^{\bar{\epsilon}} + (-\partial_t + \mathfrak{L}_2)w_{\overline{1j,0'}}^{\bar{\epsilon}}, \quad (4.18)$$

використаємо [15-17], що  $\mathfrak{L}_{1j}w_{\overline{1j,0'}}^{\bar{\epsilon}} = 0$  і  $w_{\overline{1kj,0'}}^{\bar{\epsilon}}$  не залежать від  $y_1, \dots, y_l$  при  $k \neq j$ .

Тоді (4.17) і (4.18) набудуть вигляду

$$\sum_{j=1}^l \mathfrak{L}_{0j}w_{\overline{2j,0'}}^{\bar{\epsilon}} + (-\partial_t + \mathfrak{L}_2)w_{\overline{0,0'}}^{\bar{\epsilon}} = 0,$$



$$\mathfrak{L}_{0j}w_{\overline{3j,0'}} + \mathfrak{L}_{1j}w_{\overline{2j,0'}} + (-\partial_t + \mathfrak{L}_2)w_{\overline{1j,0'}} = 0,$$

$$\overline{1}_{kj} = \left( \underbrace{0, \dots, 1}_k \underbrace{0, 1, 0, \dots, 0}_j \right), \text{ для } k < j, \text{ або } \overline{1}_{kj} = \left( \underbrace{0, \dots, 1}_j \underbrace{0, 1, 0, \dots, 0}_k \right)$$

для  $k > j$ .

(4.17) і (4.18) є рівняннями Пуассона виду:

$$0 = \mathfrak{L}_{0j}w + \mathcal{X}, \quad j = \overline{1, l}. \quad (4.19)$$

Оскільки  $\mathfrak{L}_{0j}$  – самоспряжений оператор, який діє на  $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}, \pi)$  то за альтернативою Фредгольма для рівнянь типу (4.19) для того що існував розв'язок  $u \in \text{dom}(\mathfrak{L}_0) = \mathbb{L}^2(\mathbb{R}, \pi)$  необхідно виконання умови центрування [8]:

$$\langle \mathcal{X} \rangle_j := \int_{\mathbb{R}^l} \mathcal{X}(y_1, \dots, y_l) \pi_j(y_j) dy_j = 0 \quad (4.20)$$

де

$$\pi_j(y_j) = \frac{2}{\beta_j^2(y_j)} \exp \left\{ \int_{y_{j0}}^{y_j} \frac{2\alpha_j(\theta)}{\beta_j^2(\theta)} d\theta \right\}, \quad \forall j = \overline{1, l}.$$

За стохастичними рівняннями

$$\left( -\frac{1}{\epsilon_j} Y_{jt} - \frac{\beta_j}{\sqrt{\epsilon_j}} \text{erf} Y_{jt} \right) dt + \frac{1}{\sqrt{\epsilon_j}} \beta_j d\tilde{W}_t^{y_j}, \quad j = \overline{1, l},$$

запишемо відповідні рівняння в частинних похідних

$$\partial_t w_j = \frac{1}{\epsilon_j} \left( \frac{1}{2} \beta_j^2 \partial_{y_j^2}^2 w - y_j \partial_{y_j} w \right), \quad j = \overline{1, l},$$

тому  $\mathfrak{L}_{0j} = \frac{1}{2} \beta_j^2 \partial_{y_j^2}^2 w - y_j \partial_{y_j} w$ .

Знайдемо 2l розв'язків з таких рівнянь Пуассона  $\phi_j$  і  $\eta_j$  [8]

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_{01}\phi_1 &= f^2 - \bar{\sigma}_1^2, \quad \mathfrak{L}_{02}\phi_2 = \bar{\sigma}_1^2 - \bar{\sigma}_{12}^2, \dots, \\ \mathfrak{L}_{0j}\phi_j &= \bar{\sigma}_{j-2, j-1}^2 - \bar{\sigma}_{j-1, j}^2, \dots, \quad \mathfrak{L}_{0l}\phi_l = \bar{\sigma}_{l-2, l-1}^2 - \bar{\sigma}^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}_{01}\eta_1 &= f\Omega - \overline{f\Omega}_1, \mathfrak{L}_{02}\eta_2 = \overline{f\Omega}_1 - \overline{f\Omega}_{12}, \dots, \\ \mathfrak{L}_{0j}\eta_j &= \overline{f\Omega}_{j-2,j-1} - \overline{f\Omega}_{j-1,j} \dots, \mathfrak{L}_{0l}\eta_l = \overline{f\Omega}_{l-2,l-1} - \overline{f\Omega},\end{aligned}$$

де

$$f(y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_r) = \prod_{j=1}^l f_j(y_j) \prod_{i=1}^r F_i(z_i),$$

$$f_j(y_j) = \sigma \exp Y_{jt} \exp \left\{ -\frac{\beta_j^2}{2} \right\}, \quad F_i(z_i) = \sigma \exp Z_{it} \exp \{-z_{oi}\}.$$

Отже

$$f(y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_r) = \sigma^{l+r} \prod_{j=1}^l e^{y_j + \frac{\beta_j^2}{2}} \prod_{i=1}^r e^{z_i - z_{oi}}.$$

Враховуючи, що:

$$\bar{\sigma}_1^2 := \int_{R^1} f^2 \pi_1(y_1) dy_1,$$

$$\bar{\sigma}_{12}^2 := \int_{R^2} f^2 \pi_1(y_1) \pi_2(y_2) dy_1 dy_2,$$

$$\bar{\sigma}_{23}^2 := \int_{R^3} f^2 \pi_1(y_1) \pi_2(y_2) \pi_3(y_3) dy_1 dy_2 dy_3, \bar{\sigma}_{l-2,l-1}^2$$

$$:= \int_{R^{l-1}} f^2 \pi_1(y_1) \dots \pi_{l-1}(y_{l-1}) dy_1 \dots dy_{l-1}, \dots$$

$$\bar{\sigma}^2 = \bar{\sigma}_{l-1,l}^2 := \int_{R^l} f^2 \pi_1(y_1) \dots \pi_l(y_l) dy_1 \dots dy_l,$$

де

$$\pi_j(y_j) = \frac{2}{\beta_j^2} \exp \left\{ \int_{y_{j0}}^{y_j} \frac{2y_j}{\beta_j^2} dy_j \right\} = \frac{2}{\beta_j^2} e^{-\frac{y_j^2}{\beta_j^2} + \frac{y_{0j}^2}{\beta_j^2}},$$

Припустимо, що  $y_{0j} = 0$ , тоді  $\pi_j(y_j) = \frac{2}{\beta_j^2} e^{-\frac{y_j^2}{\beta_j^2}}$ . [18]

Знайдемо  $\bar{\sigma}_1^2$ :

$$\bar{\sigma}_1^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2y_1 - \beta_1^2} \frac{2}{\beta_1^2} e^{-\frac{y_1^2}{\beta_1^2}} dy_1 \sigma^{l+r} e^{2 \sum_{j=2}^l \left( y_j - \frac{\beta_j^2}{2} \right)} e^{2 \sum_{i=1}^r (z_i - z_{0i})},$$

Розглянемо:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{\beta_1^2} e^{-\frac{y_1^2}{\beta_1^2} + 2y_1 - \beta_1^2} dy_1 &= \frac{2}{\beta_1^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{\beta_1^2} (y_1^2 - 2y_1 \beta_1^2 + \beta_1^4)} dy_1 \\ &= \frac{2}{\beta_1^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{\beta_1^2} (y_1^2 - \beta_1^2)^2} dy_1 = \frac{\sqrt{2}}{\beta_1} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\theta^2}{2}} d\theta = \frac{2\sqrt{\pi}}{\beta_1}; \end{aligned}$$

$$\bar{\sigma}_1^2 = \frac{2\sigma^{2(l+r)}\sqrt{\pi}}{\beta_1} e^{2 \sum_{j=2}^l \left( y_j - \frac{\beta_j^2}{2} \right) + 2 \sum_{i=1}^r (z_i - z_{0i})}.$$

Аналогічно обчислюючи, маємо

$$\bar{\sigma}_{12}^2 = \frac{2^2 \sigma^{2(l+r)} \sqrt{\pi}}{\beta_1 \beta_2} e^{2 \sum_{j=3}^l \left( y_j - \frac{\beta_j^2}{2} \right) + 2 \sum_{i=1}^r (z_i - z_{0i})}, \dots$$

$$\bar{\sigma}_{j-2, j-1}^2 = \frac{2^{j-1} \sigma^{2(l+r)} \sqrt{\pi}^{j-1}}{\beta_1 \dots \beta_{j-1}} e^{2 \sum_{k=j}^l \left( y_k - \frac{\beta_k^2}{2} \right) + 2 \sum_{i=1}^r (z_i - z_{0i})}, \dots$$

$$\bar{\sigma}_{j-2, j-1}^2 = \frac{\sigma^{2(l+r)} \sqrt{\pi}^{\frac{l}{2}}}{\beta_1 \dots \beta_l} e^{2 \sum_{i=1}^r (z_i - z_{0i})} = \bar{\sigma}^2.$$

Знайдемо  $\phi_j(y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_r)$  як частинний розв'язок рівняння

Пуассона

$$\mathcal{L}_{01} \phi_1 = f^2 - \bar{\sigma}_1^2,$$

Тобто

$$\frac{1}{2} \beta_1^2 \phi_{1y_1}'' - y_1 \phi_{1y_1}' = \left( e^{2y_1 - \beta_1^2} - \frac{\sqrt{\pi}}{\beta_1} \right) \sigma^{2(l+r)} e^{2 \sum_{j=2}^l \left( y_j - \frac{\beta_j^2}{2} \right) + 2 \sum_{i=1}^r (z_i - z_{0i})}.$$

Спочатку розв'яжемо відповідне однорідне рівняння

$$\frac{1}{2}\beta_1^2 w''_{y^2} - y\varphi'_y = 0,$$

$$\frac{w''}{w'} = \frac{2y}{\beta_1^2}, \quad \ln|u'| = \ln c_1 + \frac{y^2}{\beta_1^2}, \quad c_1 > 0.$$

$$w' = c_1 e^{\frac{y^2}{\beta_1^2}}, \quad w = c_1 \int_0^{y_1} e^{\frac{y^2}{\beta_1^2}} dy_1 + c_2,$$

Фундаментальна система розв'язків

$$w_2 = 1, w_2 = \int_0^{y_1} e^{\frac{y^2}{\beta_1^2}} dy.$$

Загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння має вигляд

$$w_{з.ор} = c_1 w_1 + c_2 w_2.$$

Загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння

$$K(y)w''_{y_1} + M(y)w' + N(y)w = f(y),$$

$$w_{з.н} = c_1 w_1 + c_2 w_2 + \int_{y_{10}}^{y_1} \frac{w_1(y_1)w_2(t) - w_1(t)w_2(y_1)}{w_1'(t)w_2(y_1) - w_2'(t)w_1(y_1)} \frac{f(t)}{K(t)} dt.$$

Тобто за

$$\varphi_1(y_1 \dots y_l, z_1 \dots z_r) = \int_0^{y_1} \frac{\int_0^t e^{\frac{y^2}{\beta_1^2}} dy - \int_0^{y_1} e^{\frac{y^2}{\beta_1^2}} dy}{-e^{\frac{t^2}{\beta_1^2}}} \frac{2}{\beta_1^2} \left( e^{2t - \beta_1^2} - \frac{2\sqrt{\pi}}{\beta_1} \right) dt$$

$$\sigma^{2(l+r)} e^{2 \sum_{j=2}^l \left( y_j - \frac{\beta_j^2}{2} \right) + 2 \sum_{i=1}^r (z_i - z_{0i})} = \frac{2\sigma^{2(l+r)}}{\beta_1^2} e^{2 \sum_{j=2}^l \left( y_j - \frac{\beta_j^2}{2} \right) + 2 \sum_{i=1}^r (z_i - z_{0i})}$$

$$\int_0^{y_1} e^{-\frac{t^2}{\beta_1^2}} \left( \int_0^t e^{\frac{y^2}{\beta_1^2}} dy \right) \left( e^{2t - \beta_1^2} - \frac{2\sqrt{\pi}}{\beta_1} \right) dt = \frac{\sigma^{2(l+r)}}{\beta_1^2} e^{2 \sum_{j=2}^l \left( y_j - \frac{\beta_j^2}{2} \right) + 2 \sum_{i=1}^r (z_i - z_{0i})}$$

$$\left[ \int_0^{y_1} e^{-\frac{1}{\beta_1^2}(t - \beta_1^2)^2} \left( \int_t^{y_1} e^{\frac{y^2}{\beta_1^2}} dy \right) dt - \int_0^{y_1} e^{-\frac{t^2}{\beta_1^2}} \int_0^t e^{\frac{y^2}{\beta_1^2}} dy \frac{2\sqrt{\pi}}{\beta_1} dt \right],$$

тому

$$\varphi_1 = \frac{\sigma^{2(l+r)}\sqrt{\pi}}{\beta_1} \left[ \int_0^{y_1} e^{\frac{y^2}{\beta_1^2}} \left( \operatorname{Erf} \left( \frac{y - \beta_1^2}{\beta_1} \right) - \operatorname{Erf} \beta_1 \right) dy - \frac{\pi}{2\beta_1^2} \int_0^{y_1} e^{\frac{y^2}{\beta_1^2}} \operatorname{Erf} \left( \frac{y}{\beta_1} \right) \right].$$

Знайдемо  $\varphi_2$

$$\mathfrak{L}_{02}\varphi_2 := \frac{1}{2}\beta_2^2\varphi_2'' - y_1\varphi_2' = \bar{\sigma}_1^2 - \bar{\sigma}_{12}^2.$$

Підставивши значення  $\bar{\sigma}_1^2 - \bar{\sigma}_{12}^2$  маємо таке рівняння Пуассона

$$\frac{1}{2}\beta_2^2\varphi_2'' - y_1\varphi_2' = \frac{2\sqrt{\pi}\sigma^{2(l+r)}}{\beta_1}$$

$$e^{2\sum_{j=2}^l\left(y_j - \frac{\beta_j^2}{2}\right) + 2\sum_{i=1}^r(z_i - z_{0i})} - \frac{2^2\pi\sigma^{2(l+r)}}{\beta_1\beta_2} e^{2\sum_{j=3}^l\left(y_j - \frac{\beta_j^2}{2}\right) - 2\sum_{i=1}^r(z_i - z_{0i})}.$$

Розв'язуючи однорідне рівняння

$$\frac{1}{2}\beta_2^2 w_{y^2}'' - y\varphi_y' = 0,$$

знайдемо фундаментальну систему розв'язків

$$w_1 = \int_0^{y_2} e^{\frac{y^2}{\beta_2^2}} dy, \quad w_2 = 1, \quad y_{20} = 0.$$

Аналогічно як для  $\mathfrak{L}_{01} = \chi$  знайдемо частинний розв'язок рівняння Пуассона

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \int_{y_{02}}^{y_2} \frac{w_1(y_2)w_2(t) - w_1(t)w_2(y_2)}{w_1'(t)w_2(y_1) - w_2'(t)w_1(y_1)} \frac{(\bar{\sigma}_1^2 - \bar{\sigma}_{12}^2)^2}{\beta_2^2} dt. \\ \varphi_2 &= \int_{y_{02}}^{y_2} \frac{\int_0^{y_2} e^{\frac{y^2}{\beta_2^2}} dy - \int_0^t e^{\frac{y^2}{\beta_2^2}} dy}{\frac{t^2}{e^{\frac{t^2}{\beta_2^2}}}} \frac{2}{\beta_2} \frac{2\sqrt{\pi}}{\beta_1} \left( e^{2t - \beta_2^2} - \frac{2\sqrt{\pi}}{\beta_2} \right) dt \\ &= \frac{2\sqrt{\pi}}{\beta_1} \sigma^{2(l+r)} e^{2\sum_{j=3}^l\left(y_j - \frac{\beta_j^2}{2}\right) + 2\sum_{i=1}^r(z_i - z_{0i})} = \end{aligned}$$

$$\left[ \frac{2\sqrt{\pi}}{\beta_1\beta_2^2} \int_0^{y_2} e^{-\frac{(t-\beta_2^2)^2}{\beta_2^2}} \int_t^{y_2} e^{\frac{y^2}{\beta_2^2}} dy dt - \frac{2^3\pi}{\beta_2^3\beta_1} \int_0^{y_2} e^{-\frac{t}{\beta_2^2}} \int_t^{y_2} e^{\frac{y^2}{\beta_2^2}} dy dt \right]$$

$$\sigma^{2(l+r)} e^{2\sum_{j=3}^l \left(y_j - \frac{\beta_j^2}{2}\right) + 2\sum_{i=1}^r (z_i - z_{0i})}$$

В подвійних інтегралах поміняємо порядки інтегрування

$$\varphi_2 = \left[ \frac{2^2\sqrt{\pi}}{\beta_1\beta_2^2} \int_0^{y_2} e^{\frac{y^2}{\beta_2^2}} dy \int_0^y e^{-\frac{1}{\beta_2^2}(t-\beta_2^2)^2} dt - \frac{2^3\pi}{\beta_2^3\beta_1} \int_0^{y_2} e^{\frac{y^2}{\beta_2^2}} dy \int_0^y e^{-\frac{t}{\beta_2^2}} dt \right]$$

$$\sigma^{2(l+r)} e^{2\sum_{j=3}^l \left(y_j - \frac{\beta_j^2}{2}\right) + 2\sum_{i=1}^r (z_i - z_{0i})}$$

Зробивши заміни

$$\frac{(t - \beta_2^2)}{\beta_2} = \alpha \text{ і } \frac{t}{\beta_2} = d\alpha,$$

одержимо

$$\varphi_2 = \left[ \int_0^{y_2} e^{\frac{y^2}{\beta_2^2}} dy \int_{\beta_2}^{(y-\beta_2^2)/\beta_2} e^{-\alpha^2} d\alpha - \frac{2^2\pi}{\beta_2^2\beta_1} \int_0^{y_2} e^{\frac{y^2}{\beta_2^2}} dy \int_0^{\frac{y}{\beta_2}} e^{-\alpha^2} d\alpha \right]$$

$$\sigma^{2(l+r)} e^{2\sum_{j=3}^l \left(y_j - \frac{\beta_j^2}{2}\right) + 2\sum_{i=1}^r (z_i - z_{0i})}$$

$$\varphi_2 = \left[ \int_0^{y_2} e^{\frac{y^2}{\beta_2^2}} \left( \text{Erf} \left( \frac{y - \beta_2^2}{\beta_2} \right) - \text{Erf} \beta_2 \right) dy \right.$$

$$\left. - \int_0^{y_2} e^{\frac{y^2}{\beta_2^2}} \left( \text{Erf} \left( \frac{y}{\beta_2} \right) - \beta_2 \right) dy \frac{2\sqrt{\pi}}{\beta_2} \right]$$

$$\frac{4\pi}{\beta_2\beta_1} \sigma^{2(l+r)} e^{2\sum_{j=3}^l \left(y_j - \frac{\beta_j^2}{2}\right) + 2\sum_{i=1}^r (z_i - z_{0i})}$$

Крок за кроком одержимо частинний розв'язок  $\varphi_j$  рівняння Пуассона [8].

$$\mathfrak{L}_{0j}\varphi_j = \bar{\sigma}_{j-2,j-1}^2 - \bar{\sigma}_{j-2,j}^2 ,$$

фундаментальна система розв'язків

$$u_1 = \int_0^{y_j} e^{\frac{y^2}{\beta_j^2}} dy, \quad u_2 = 1,$$

$$\varphi_j = \int_0^{y_j} \frac{\int_0^{y_j} e^{\frac{y^2}{\beta_j^2}} dy - \int_0^t e^{\frac{y^2}{\beta_j^2}} dy}{e^{\frac{t^2}{\beta_j^2}}} \frac{2}{\beta_j^2} \sigma^{2(l+r)} \frac{2^{j-1} \pi^{\frac{j-1}{2}}}{\beta_1 \dots \beta_{j-1}} \left( e^{2t-\beta_j^2} - \frac{2\sqrt{\pi}}{\beta_j} \right) dt$$

$$e^{2 \sum_{k=j+1}^l \left( y_k - \frac{\beta_k^2}{2} \right) + 2 \sum_{i=1}^r (z_i - z_{0i})} = \frac{\sigma^{2(l+r)} 2^j}{\beta_1 \dots \beta_{j-1} \beta_j^2} e^{2 \sum_{k=j+1}^l \left( y_k - \frac{\beta_k^2}{2} \right) + 2 \sum_{i=1}^r (z_i - z_{0i})}$$

$$\left[ \int_0^{y_j} e^{-\frac{t^2}{\beta_j^2}} - e^{2t-\beta_j^2} dt - \int_t^{y_j} e^{\frac{y^2}{\beta_j^2}} dy - \frac{2\sqrt{\pi}}{\beta_j} \int_0^{y_j} e^{-\frac{t^2}{\beta_j^2}} dt \int_t^{y_j} e^{\frac{y^2}{\beta_j^2}} dy \right].$$

Змінивши порядок інтегрування і відповідні заміни змінних інтегрування одержимо

$$\operatorname{Erf} y = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-\alpha^2} d\alpha.$$

$$\varphi_j = \left\{ \int_0^{y_j} e^{\frac{y^2}{\beta_j^2}} \left[ \operatorname{Erf} \frac{y - \beta_j^2}{\beta_j} - \operatorname{Erf} \beta_j \right] dy - \int_0^{y_j} e^{\frac{y^2}{\beta_j^2}} \operatorname{Erf} \frac{y}{\beta_j} dy \frac{\sqrt{\pi}}{\beta_j} \right\} \frac{2^j \pi^{j/2}}{\beta_1 \dots \beta_j}$$

$$= \int_0^{y_j} e^{\frac{y^2}{\beta_j^2}} \left[ \operatorname{Erf} \frac{y - \beta_j^2}{\beta_j} - \operatorname{Erf} \beta_j - \frac{\sqrt{\pi}}{\beta_j} \operatorname{Erf} \frac{y}{\beta_j} \right] dy$$

$$\frac{(2\pi^{j/2})^j \sigma^{2(l+r)}}{\beta_1 \dots \beta_j} \exp \left\{ 2 \sum_{k=j+1}^l \left( y_k - \frac{\beta_k^2}{2} \right) + 2 \sum_i z_i - z_{i1} \right\}.$$

По аналогії

$$\phi_l = \int_0^{y_l} e^{\frac{y^2}{\beta_l^2}} \left[ \operatorname{Erf} \frac{y - \beta_l^2}{\beta_l} - \operatorname{Erf} \beta_l - \frac{\sqrt{\pi}}{\beta_l} \operatorname{Erf} \frac{y}{\beta_l} \right] dy$$

$$\frac{2^l (\sqrt{\pi})^l \sigma^{2r(l+r)}}{\beta_1 \dots \beta_l} \exp \left\{ \sum_i z_i - z_{i0} \right\}.$$

Отже,

$$\phi_j = \int_0^{y_j} e^{\frac{y^2}{\beta_j^2}} \left[ \operatorname{Erf} \frac{y - \beta_j^2}{\beta_j} - \operatorname{Erf} \beta_j \frac{\sqrt{\pi}}{\beta_j} \operatorname{Erf} \frac{y}{\beta_j} - \right] dy \frac{(2\pi^{1/2})^j \sigma^{2(l+r)}}{\beta_1 \dots \beta_j}$$

$$\exp \left\{ 2 \sum_{k=j+1}^l \left( y_k - \frac{\beta_k^2}{2} \right) + 2 \sum_{i=1}^r z_i - z_{i0} \right\}, \forall j = \overline{1, l}.$$

Коли  $\Omega = 0$ , то в якості беремо  $\eta_j \equiv 1 \forall j = \overline{1, l}$ , або

$$\eta_j = \int_0^{y_j} e^{\frac{y^2}{\beta_j^2}} dy, \text{ або } \eta_j \equiv 0, \text{ що підходить для обчислення.}$$

Розглянемо випадок, коли  $\Omega \neq 0$  зокрема  $\Omega = 0,1 e^{\sum_{j=1}^l \beta_j^2/4}$

$$f = \sigma^{l+r} \exp \left\{ \sum_{k=1}^l \left( y_k - \frac{\beta_k^2}{2} \right) + 2 \sum_{i=1}^r z_i - z_{i0} \right\},$$

$$f\Omega = \sigma^{l+r} 0,1 \exp \left\{ \sum_{k=1}^l \left( y_k - \frac{\beta_k^2}{4} \right) + 2 \sum_{i=1}^r z_i - z_{i0} \right\},$$

$$\overline{f\Omega}_1 = \sigma^{l+r} 0,1 \int_{-\infty}^{\infty} f\Omega \pi_1(y_1) dy,$$

$$\langle \overline{f\Omega} \rangle_{12} = \int_{-\infty}^{\infty} \langle \overline{f\Omega} \rangle_1 \pi_2(y_2) dy_2,$$



$$\langle \overline{f\Omega} \rangle_{23} = \int_{-\infty}^{\infty} \langle \overline{f\Omega} \rangle_{12} \pi_3(y_3) dy_3,$$

.....

$$\langle \overline{f\Omega} \rangle_{l-1l} = \int_{-\infty}^{\infty} \langle \overline{f\Omega} \rangle_{l-2,l-1} \pi_l(y_l) dy_l = \overline{f\Omega}.$$

Маємо

$$\begin{aligned} \langle \overline{f\Omega} \rangle_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \sigma^{l+r} e^{y_1 - \frac{\beta_1^2}{4}} e^{-\frac{y_1^2}{\beta_1^2}} \frac{2}{\beta_1^2} dy \exp \left\{ - \sum_{j=2}^l \left( y_j - \frac{\beta_j^2}{2} \right) + 2 \sum_{i=1}^r (z_i - z_{i0}) \right\} \\ &= \sigma^{l+r} 0,1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{y_1 - \frac{\beta_1^2}{4}} e^{-\frac{y_1^2}{\beta_1^2}} dy \exp \left\{ - \sum_{j=2}^l \left( y_j - \frac{\beta_j^2}{2} \right) + 2 \sum_{i=1}^r (z_i - z_{i0}) \right\} \frac{2}{\beta_1^2} \\ &= \left| -\frac{y_1^2}{\beta_1^2} - y_1 + \frac{\beta_1^2}{4} = \frac{1}{\beta_1^2} \left( y_1^2 - \frac{2y_1\beta_1^2}{2} + \frac{\beta_1^4}{4} \right) = \frac{1}{\beta_1^2} \left( y_1 - \frac{\beta_1^2}{2} \right)^2, \frac{1}{\beta_1^2} \left( y_1 - \frac{\beta_1^2}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}, \frac{dy}{\beta_1} = \frac{d\alpha}{\sqrt{2}}, dy = \frac{\beta_1}{\sqrt{2}} d\alpha \right| \\ &= \frac{\sqrt{2}\beta_1}{\sqrt{2}\beta_1^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} d\alpha \exp \left\{ - \sum_{j=2}^l \left( y_j - \frac{\beta_j^2}{2} \right) + 2 \sum_{i=1}^r (z_i - z_{i0}) \right\} \sigma^{l+r} 0,1 \\ &= \frac{2\sqrt{\pi}}{\beta_1} \exp \left\{ - \sum_{j=2}^l \left( y_j - \frac{\beta_j^2}{2} \right) + 2 \sum_{i=1}^r (z_i - z_{i0}) \right\} \sigma^{l+r} 0,1. \\ \langle \overline{f\Omega} \rangle_{12} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{y_2 - \frac{\beta_2^2}{4}} e^{-\frac{y_2^2}{\beta_2^2}} \frac{2}{\beta_1^2} dy_2 \sigma^{l+r} \end{aligned}$$

$$0,1 \exp \left\{ - \sum_{j=3}^l \left( y_j - \frac{\beta_j^2}{2} \right) + 2 \sum_{i=1}^r (z_i - z_{i0}) \right\} \beta_1^{-1} (\sqrt{\pi})^2 =$$

$$\beta_1^{-1} \beta_2^{-1} 4\pi \sigma^{l+r} 0,1 \exp \left\{ - \sum_{j=3}^l \left( y_j - \frac{\beta_j^2}{2} \right) + 2 \sum_{i=1}^r (z_i - z_{i0}) \right\}.$$

Звідси випливає

$$\langle \overline{f\Omega} \rangle_{j-1,j} = \int_{-\infty}^{\infty} \langle \overline{f\Omega} \rangle_{j-2,j-1} dy_j \neq 1,$$

$$\langle \overline{f\Omega} \rangle_{j-1,j} = \frac{2^{j-1} \pi^{\frac{j-1}{2}} 0,1}{\beta_1 \dots \beta_{j-1}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{y_j - \frac{\beta_j^2}{4}} e^{-\frac{y_j^2}{\beta_j^2}} \frac{2}{\beta_j^2} dy_j \sigma^{l+r}$$

$$\exp \left\{ - \sum_{k=j+1}^l \left( y_k - \frac{\beta_k^2}{2} \right) + 2 \sum_{i=1}^r (z_i - z_{i0}) \right\}$$

$$= \frac{2^j \pi^{\frac{j-1}{2}} 0,1}{\beta_1 \dots \beta_{j-1} \beta_j^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\left( y_j - \frac{\beta_j^2}{4} \right)^2} dy_j \sigma^{l+r}$$

$$\exp \left\{ - \sum_{k=j+1}^l \left( y_k - \frac{\beta_k^2}{2} \right) + 2 \sum_{i=1}^r (z_i - z_{i0}) \right\} = \frac{2^j \pi^{\frac{j-1}{2}} 0,1}{\beta_1 \dots \beta_{j-1}}.$$

Позначимо

$$\langle \mathcal{X} \rangle_{1,2} = \int_{R^2} \mathcal{X}(y_1, \dots, y_l) \pi_1(y_1) dy_1 \pi_2(y_2) dy_2 =$$

$$\int_{R^2} \mathcal{X}(y_1, \dots, y_l) \pi_1(y_1) \pi_2(y_2) dy_1 dy_2,$$

$$\langle \mathcal{X} \rangle_{l-1,l} = \int_{R^l} \mathcal{X}(y_1, \dots, y_l) \pi_1(y_1) dy_1 \dots \pi_l(y_l) dy_l$$

$$= \int_{R^l} \mathcal{X}(y_1, \dots, y_l) \pi_1(y_1) \dots \pi_l(y_l) dy_1 \dots dy_l,$$

$$\langle \mathcal{X} \rangle_{l-1,l} = \langle \mathcal{X} \rangle, \quad \langle f\Omega \rangle := \overline{f\Omega}, \quad \langle f^2 \rangle = \overline{\sigma^2}, \quad \overline{\sigma_{j-1,j}^2} = \langle f^2 \rangle_{j-1,j},$$

$f$  і  $\Omega$  неперервно диференційовні по  $z_1, \dots, z_n$  і абсолютно інтегровні по  $y_1, \dots, y_l$  з вагою  $\pi_j(y_j)$  по кожному  $y_j$ .

У рівняннях (4.17) і (4.18) проведемо умову центрування (4.20) по всіх  $y_1, \dots, y_l$  відповідно маємо [19-20]:

$$\mathcal{O}(1): \quad 0 = (-\partial_t + \langle \mathfrak{L}_2 \rangle) w_{\overline{0,0'}}, \quad (4.21)$$

$$\mathcal{O}(\sqrt{\epsilon_j}): \quad 0 = \langle \mathfrak{L}_{1j} u_{\overline{2j,0'}} \rangle + (-\partial_t + \langle \mathfrak{L}_2 \rangle) w_{\overline{1j,0'}}. \quad (4.22)$$

де оператор  $\langle \mathfrak{L}_2 \rangle$  має вигляд:

$$\langle \mathfrak{L}_2 \rangle = \frac{1}{2} \overline{\sigma^2} a^2(x) \partial_{xx}^2 + (b(x) - \overline{f\Omega} a(x)) \partial_x - k(x), \quad x \in (e_1, e_2), \quad (4.23)$$

Зауважимо, що  $\overline{\sigma^2}(z_1, \dots, z_n) < \infty$  і  $\overline{f\Omega}(z_1, \dots, z_n) < \infty$ .

Враховуючи відповідні крайові умови для  $e_1$  та  $e_2$ , знаходимо єдиний розв'язок  $w_{\overline{0,0'}}$  диференціального рівняння (4.21). Однак, щоб використовувати (4.22) знайдемо  $\langle \mathfrak{L}_{0j} w_{\overline{2j,0'}} \rangle$

$$\sum_{j=1}^l \mathfrak{L}_{0j} w_{\overline{2j,0'}} = -(-\partial_t + \mathfrak{L}_2) w_{\overline{0,0'}} = -(-\partial_t + \mathfrak{L}_2) w_{\overline{0,0'}} + (-\partial_t + \langle \mathfrak{L}_2 \rangle) w_{\overline{0,0'}}$$

$$= -\left( \frac{1}{2} a^2 (f^2 - \overline{\sigma^2}) \partial_{xx}^2 - a(f\Omega - \overline{f\Omega}) \partial_x \right) w_{\overline{0,0'}}.$$

$$\sum_{j=1}^l \mathfrak{L}_{0j} w_{\overline{2j,0'}} = -\left( \frac{1}{2} a^2 (f^2 - \overline{\sigma^2} \mp \overline{\sigma_1^2} \mp \overline{\sigma_{12}^2} \mp \dots \mp \overline{\sigma_{l-2,l-1}^2}) \partial_{xx}^2 \right.$$

$$\left. - a(f\Omega - \overline{f\Omega} \mp \overline{f\Omega_1} \mp \overline{f\Omega_{12}} \mp \dots \mp \overline{f\Omega_{l-2,l-1}}) \partial_x \right),$$

$$w_{\bar{0},\bar{0}'} = -\left(\frac{1}{2}a^2[(f^2 - \bar{\sigma}_1^2) + (\bar{\sigma}_1^2 - \bar{\sigma}_{12}^2) + \dots + (\bar{\sigma}_{l-2,l-1}^2 - \bar{\sigma}^2)]\partial_{xx}^2 - a\left((f\Omega - \bar{f}\bar{\Omega}_1) + \dots + (\bar{f}\bar{\Omega}_{l-2,l-1} - \bar{f}\bar{\Omega})\right)\partial_x\right)w_{\bar{0},\bar{0}'}$$

Тепер  $\phi_j(y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n)$  і  $\eta_j(t, y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n)$ , як розв'язки рівнянь Пуассона:

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}_{01}\varphi_1 &= f^2 - \bar{\sigma}_1^2, \quad \mathfrak{L}_{02}\varphi_2 = \bar{\sigma}_1^2 - \bar{\sigma}_{12}^2, \dots, \\ \mathfrak{L}_{0j}\varphi_j &= \bar{\sigma}_{j-2,j-1}^2 - \bar{\sigma}_{j-1,j}^2, \dots, \quad \mathfrak{L}_{0l}\varphi_l = \bar{\sigma}_{l-2,l-1}^2 - \bar{\sigma}_{l-1,l}^2, \\ \mathfrak{L}_{01}\eta_1 &= f\Omega - \bar{f}\bar{\Omega}_1, \dots, \quad \mathfrak{L}_{0l}\eta_l = \bar{f}\bar{\Omega}_{l-2,l-1} - \bar{f}\bar{\Omega},\end{aligned}\quad (4.24)$$

тоді

$$\sum_{j=1}^l \mathfrak{L}_{0j}u_{\bar{2}j,\bar{0}'} = \sum_{j=1}^l \mathfrak{L}_{0j}\left(-\frac{1}{2}a^2\phi_j\partial_{xx}^2 + a\eta_j\partial_x\right)w_{\bar{0},\bar{0}'},$$

тому  $w_{\bar{2}j,\bar{0}'}$ , має вигляд

$$w_{\bar{2}j,\bar{0}'} = -\left(\frac{1}{2}a^2\phi_j\partial_{xx}^2 - a\eta_j\partial_x\right)w_{\bar{0},\bar{0}'} + C_j. \quad (4.25)$$

Зауважимо, що  $C_j$  – константа незалежна від  $y_1, \dots, y_l$  а  $\phi_j$  та  $\eta_j$  не залежать від  $y_1, \dots, y_{j-1}$ ,  $\forall j = \overline{1, l}$ . [21]. Підставивши (4.9) та (4.25) в  $\langle \mathfrak{L}_{1j}w_{\bar{2}j,\bar{0}'} \rangle$  отримаємо:

$$\begin{aligned}\langle \mathfrak{L}_{1j}w_{\bar{2}j,\bar{0}'} \rangle &= \langle (\beta_j(\rho_{xy_j}af\partial_x - \Lambda_j)\partial_{y_j})\left(\frac{a^2\phi_j\partial_{xx}^2}{2} - a\eta_j\partial_x\right)w_{\bar{0},\bar{0}'} \rangle \\ &= -\mathcal{A}_jw_{\bar{0},\bar{0}'}.\end{aligned}\quad (4.26)$$

Оператор  $\mathcal{A}_j$  має вигляд  $\forall j = \overline{1, l}$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_j &= -v_{3j}a(x)\partial_x a^2(x)\partial_{xx}^2 - v_{2j}a^2(x)\partial_{xx}^2 - u_{2j}a(x)\partial_x a(x)\partial_x \\ &\quad - u_{1j}a(x)\partial_x,\end{aligned}\quad (4.27)$$

де визначено чотири параметри групи  $\forall j = \overline{1, l}$ .

$$\begin{aligned}v_{3j} &= -\frac{\rho_{xy_j}}{2}\langle \beta_j f \partial_{y_j} \phi_j \rangle, \quad v_{2j} = \frac{1}{2}\langle \beta_j \Lambda_j \partial_{y_j} \phi_j \rangle, \\ u_{2j} &= \rho_{xy_j} \langle \beta_j f \partial_{y_j} \eta_j \rangle, \quad u_{1j} = -\langle \beta_j \Lambda_j \partial_{y_j} \eta_j \rangle.\end{aligned}$$

Підставимо (4.26) в (4.22) отримаємо:

$$\mathcal{A}_j w_{\bar{0},\bar{0}'} = (-\partial_t + \langle \mathfrak{L}_2 \rangle) w_{\bar{1},\bar{0}'}. \quad (4.28)$$

Враховуючи вираз для  $w_{\bar{0},\bar{0}'}$  і відповідні крайові умови, використавши диференціальне рівняння (4.28) можна знайти вираз для  $w_{\bar{1},\bar{0}'}$ . Це залежить від того, який взяти вигляд рівняння (4.13), повернемося до рівняння  $\mathcal{O}(\sqrt{\delta_i})$ .

Для проведення сингулярного аналізу збурень рівняння (4.14), потрібно підставити (4.11) і (4.12) в (4.14) та згрупувати степенях  $\sqrt{\epsilon_j}$ . В результаті вибираємо еквівалентні величини  $\mathcal{O}(\sqrt{\delta_i}/\epsilon_j)$  і  $\mathcal{O}(\sqrt{\delta_i}/\sqrt{\epsilon_j})$  маємо рівняння:

$$\mathcal{O}\left(\frac{\sqrt{\delta_i}}{\epsilon_j}\right): \quad 0 = \mathfrak{L}_{0j} w_{\bar{0},\bar{1}'_i}, \quad (4.29)$$

$$\mathcal{O}\left(\frac{\sqrt{\delta_i}}{\sqrt{\epsilon_j}}\right): \quad 0 = \mathfrak{L}_{0j} u_{\bar{1}j\bar{1}'_i} + \mathfrak{L}_{1j} w_{\bar{0},\bar{1}'_i}, \quad (4.30)$$

де використано, що  $\mathfrak{M}_{3ij} u_{\bar{0},\bar{0}'_i} = 0$ . Зауважимо, якщо  $w_{\bar{0},\bar{1}'_i}$  і  $w_{\bar{1}j\bar{1}'_i}$  не залежать від  $y_1, \dots, y_l$ , то вони автоматично будуть задовольняти рівняння (4.29) та (4.30). Таким чином, вибираємо

$$w_{\bar{0},\bar{1}'_i} = w_{\bar{0},\bar{1}'_i}(x, z_1, \dots, z_n) \text{ і } w_{\bar{1}j\bar{1}'_i} = w_{\bar{1}j\bar{1}'_i}(x, z_1, \dots, z_n).$$

Продовжуючи асимптотичний аналіз, переходимо величин  $\mathcal{O}(\sqrt{\delta_i})$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(\sqrt{\delta_i}): 0 = & \sum_{j=1}^l \mathfrak{L}_{0j} w_{\bar{2}j\bar{1}'_i} + (-\partial_t + \mathfrak{L}_2) w_{\bar{0},\bar{1}'_i} + \mathfrak{M}_{1i} w_{\bar{0},\bar{0}'} + \\ & \sum_{j=1}^l \mathfrak{M}_{3ij} w_{\bar{1}j,\bar{0}'} + \mathfrak{L}_{1j} w_{\bar{1}j\bar{1}'_i}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Використовуючи, що

$$\mathfrak{L}_{1j} w_{\bar{1}j\bar{1}'_i} = 0 \text{ та } \sum_{j=1}^l \mathfrak{M}_{3ij} w_{\bar{1}j,\bar{0}'} = 0.$$

тому (4.31) має вигляд

$$\sum_{j=1}^l \mathfrak{L}_{0j} w_{\overline{2j1'_i}} + (-\partial_t + \mathfrak{L}_2) w_{\overline{0,1'_i}} + \mathfrak{M}_{1i} w_{\overline{0,0'}} = 0$$

і є рівнянням Пуассона для  $w_{\overline{2j1'_i}}$  у формі (4.19). За альтернативою Фредгольма, для (4.31) знайдемо розв'язок  $w_{\overline{2j1'_i}} \in L^2(\mathbb{R}, \pi)$ , згідно з умовою центрування (4.19) матимемо

$$0 = (-\partial_t + \langle \mathfrak{L}_2 \rangle) w_{\overline{0,1'_i}} + \langle \mathfrak{M}_{1i} \rangle w_{\overline{0,0'}}. \quad (4.32)$$

Звернемо увагу, що  $w_{\overline{0,0'}}(t, x, z_1, \dots, z_n)$  залежить від  $z_1, \dots, z_n$  тому в (4.32)  $\langle \mathfrak{M}_{1i} \rangle$  має вигляд:

$$\begin{aligned} \langle \mathfrak{M}_{1i} \rangle &= -\mathcal{B}_i \partial_{z_i}, \quad \mathcal{B}_i = -v_{1i} a(x) \partial_x - v_{0i}, \\ v_{1i} &:= g_i \rho_{xz_i} \langle f \rangle, \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} v_0 = g_i \langle \Gamma \rangle, \langle \Gamma \rangle &= \int_{R^l} \Gamma(y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n) \pi_1(y_1) \pi_l(y_l) dy_1 \dots dy_l, \\ \partial_{z_i} &= \partial_{z_i} \bar{\sigma} \partial_{\bar{\sigma}} + \overline{f \Omega'} \partial_{\overline{f \Omega}}, \end{aligned} \quad (4.34)$$

маємо введені чотири групи параметрів:  $v_{1i}, v_{0i}, \partial_{z_i} \overline{f \Omega}, \partial_i \overline{f \Omega}$ . [22].

Основні результати асимптотичного аналізу наведені за допомогою наступних формул

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(1): \quad &(-\partial_t + \langle \mathfrak{L}_2 \rangle) u_{\overline{0,0'}} = 0, \\ &w_{\overline{0,0'}}(0, x, z_1, \dots, z_n) = H(x), \end{aligned} \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(\sqrt{\epsilon_j}): \quad &(-\partial_t + \langle \mathfrak{L}_2 \rangle) w_{\overline{1j,0'}} = \mathcal{A}_j w_{\overline{0,0'}}, \\ w_{\overline{1j,0'}}(0, x, z_1, \dots, z_n) &= 0, \quad j = \overline{1, l}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(\sqrt{\delta_i}): \quad &(-\partial_t + \langle \mathfrak{L}_2 \rangle) w_{\overline{0,1'_i}} = \mathcal{B}_i \partial_{z_i} w_{\overline{0,0'}}, \\ w_{\overline{0,1'_i}}(0, x, z_1, \dots, z_n) &= 0, \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Оператори  $\langle \mathcal{L}_2 \rangle$ ,  $\mathcal{A}_j$ ,  $\mathcal{B}_i$  та  $\partial_{z_i}$  визначені за формулами (4.23), (4.27), (4.33) та (4.34) відповідно.

Знайдемо розв'язки рівнянь (4.35), (4.36) і (4.37) на основі власних функцій  $\{\psi_n\}$ , власних значень  $\{\lambda_n\}$  оператора  $\langle \mathcal{L}_2 \rangle$ . Зазначимо, що сингулярний оператор  $\langle \mathcal{L}_2 \rangle$ , визначений за допомогою (4.23), має вигляд інфінітезимального генератора дифузії з волатильністю  $\bar{\sigma}a(x)$ , відхиленням  $(b(x) - \overline{f\Omega}a(x))$  і кілінгом  $k(x)$ . Область визначення оператора  $dom(\langle \mathcal{L}_2 \rangle)$  включає крайові умови, які накладені на кінцях  $e_1$  та  $e_2$  [23-27].

Припустимо, що  $\langle \mathcal{L}_2 \rangle$  має дискретний спектр,  $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(I, m)$  Гільбертовий простір, де

$$m(x) = \frac{2}{a^2(x)\bar{\sigma}^4} \exp \left\{ \int_{x_0}^x \frac{b(\xi) - \overline{f\Omega}a(\xi)}{a^2(\xi)} d\xi \right\},$$

щільність швидкості, яка відповідає  $\langle \mathcal{L}_2 \rangle$ . Оператор  $\langle \mathcal{L}_2 \rangle$  самоспряжений в  $\mathcal{H}$  і його область визначення є щільною підмножиною в  $\mathcal{H}$ . Таким чином, власні функції  $\{\psi_n\}$  оператора  $\langle \mathcal{L}_2 \rangle$  формують ортогональну основу в  $\mathcal{H}$ , а також будь-які оператори діють  $\mathcal{A}_j: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ ,  $\mathcal{B}_i: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ ,  $\partial_{z_i}: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ . Також, визначаємо [28-30]

$$\begin{aligned} dom(\mathcal{A}_j) &:= \{\psi \in \mathcal{H}, \mathcal{A}_j\psi \in \mathcal{H}\}, \quad dom(\mathcal{B}_i) := \{\psi \in \mathcal{H}, \mathcal{B}_i\psi \in \mathcal{H}\}, \\ dom(\partial_{z_i}) &:= \{\psi \in \mathcal{H}, \partial_{z_i}\psi \in \mathcal{H}\}. \end{aligned}$$

Для знаходження розв'язків рівнянь (4.35), (4.36) і (4.37) сформулюємо та доведемо наступні теореми [1].

**Теорема 4.1:** Припустимо, розв'язане наступне рівняння для знаходження власного значення:

$$-\langle \mathcal{L}_2 \rangle \psi_n = \lambda_n \psi_n, \quad \psi_n \in dom(\langle \mathcal{L}_2 \rangle), \quad (4.38)$$

а також що  $H \in \mathcal{H}$ . Тоді розв'язок  $w_{\overline{0,0'}}$  має вигляд:

$$w_{\overline{0,0'}} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n T_n, \quad c_n = (\psi_n, H), \quad T_n = e^{-t\lambda_n}.$$

*Доведення.* Так як  $w_{\overline{0,0'}}$  задовольняє диференціальне рівняння (4.35), то припустимо, що має місце (4.38). крайові умови виконано

$$w_{\overline{0,0'}}(0, x, z_1, \dots, z_n) = H(z_1, \dots, z_n),$$

бо  $T_n(0, z_1, \dots, z_n) = 1$  і  $\phi(\lambda) = \text{Id}$  (id тотожне відображення) це означає

$$\text{Id}f = \sum_{n=1}^{\infty} (\psi_n, f)\psi_n, \quad \forall f \in \mathcal{H},$$

це еквівалентно тому, що власні функції  $\{\psi_n\}$  щільних самосопряжених операторів в  $\mathcal{H}$  утворюють базис Шаудера. Фактично, базис може бути вибраний ортонормований  $(\psi_n, \psi_m) = \delta_{n,m}$ . Також зауважимо, що  $\phi(\lambda) = R_\lambda$  дає власне представлення резольвенти оператора [31]

$$R_\lambda f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\psi_n, f)}{\lambda_n - \lambda} \psi_n, \quad \forall f \in \mathcal{H}, \lambda \in \rho(\mathcal{L}),$$

до функції виплати  $H$  :

$$\text{Id} H = \sum_{n=1}^{\infty} (\psi_n, f)\psi_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n.$$

**Теорема 4.2:** Нехай  $c_n, \psi_n, T_n$  описуються за допомогою Теорема 4.1. визначимо

$$\mathcal{A}_{jk,n} := (\psi_k, \mathcal{A}_j \psi_n), \quad U_{k,n} := \frac{T_k - T_n}{\lambda_k - \lambda_n}, \quad k \neq n.$$

Тоді розв'язок  $u_{\overline{1j,0'}}$  рівняння (4.36) має вигляд:

$$w_{\overline{1j,0'}} = \sum_n \sum_{k \neq n} c_n \mathcal{A}_{jk,n} \psi_k U_{k,n} - \sum_n c_n \mathcal{A}_{jn,n} \psi_n t T_n, \quad (4.39)$$

*Доведення.* Покажемо що  $w_{\overline{1j,0'}}$ , який задається за допомогою (4.39) задовольняє диференціальне рівняння і крайові умови (4.36).



Видно, що крайові умови для  $w_{\bar{1}j, \bar{0}'}(0, x, z_1, \dots, z_n) = 0$  виконуються.

Щоб показати, що  $w_{\bar{1}j, \bar{0}'}$  задовольняє диференціальне рівняння (4.36)

зауважимо, що

$$\mathcal{A}_j w_{\bar{0}, \bar{0}'} = \sum_n c_n (\mathcal{A}_j \psi_n) T_n = \sum_n \sum_k c_n \mathcal{A}_{jk, n} \psi_k T_n,$$

згідно з доведенням теореми 4.1. Тепер, використовуючи (4.38) і наступні рівності

$$(-\partial_t - \lambda_k) U_{k, n} = T_n, \quad (-\partial_t - \lambda_n) t T_n = -T_n,$$

легко бачити, що

$$(-\partial_t + \langle \mathcal{L}_2 \rangle) w_{\bar{1}j, \bar{0}'} = \mathcal{A}_j w_{\bar{0}, \bar{0}'} = \sum_n c_n (\mathcal{A}_j \psi_n) T_n = \sum_n \sum_k c_n \mathcal{A}_{jk, n} \psi_k T_n.$$

Зауважимо, що  $u_{\bar{1}j, \bar{0}'}$  є лінійним у групі параметрів  $(\vartheta_{3j}, \vartheta_{2j}, u_{2j}, u_{1j})$   $j = \bar{1}, \bar{l}$ .

**Теорема 4.3:** Нехай  $c_n$ ,  $\psi_n$  і  $T_n$  визначені з теореми 4.1, а  $U_{k, n}$  з теореми 4.2 то матимемо

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{B}}_{ik, n} &:= (\psi_k, \mathcal{B}_i \partial_{z_i} \psi_n), \quad \mathcal{B}_{ik, n} := (\psi_k, \mathcal{B}_i \psi_n), \\ V_{ik, n} &:= \frac{T_k - T_n}{(\lambda_k - \lambda_n)^2} + \frac{t T_n}{\lambda_k - \lambda_n}, \quad k \neq n. \end{aligned}$$

Тоді розв'язок  $w_{\bar{0}, \bar{1}'_i}$  рівняння (4.36) має вигляд:

$$\begin{aligned} w_{\bar{0}, \bar{1}'_i} &= \sum_n \sum_{k \neq n} c_n \tilde{\mathcal{B}}_{ik, n} \psi_k U_{ik, n} - \sum_n c_n \tilde{\mathcal{B}}_{in, n} \psi_n t T_n + \\ &+ \sum_n \sum_{k \neq n} (\partial_{z_i} c_n) \mathcal{B}_{ik, n} \psi_k U_{ik, n} - \sum_n (\partial_{z_i} c_n) \mathcal{B}_{in, n} \psi_n t T_n \\ &+ \sum_n \sum_{k \neq n} c_n \mathcal{B}_{ik, n} \psi_k (\partial_{z_i} \lambda_n) V_{ik, n} - \sum_n c_n \mathcal{B}_{in, n} \psi_n (\partial_{z_i} \lambda_n) \frac{1}{2} t^2 T_n. \end{aligned} \quad (4.40)$$

*Доведення.* Потрібно показати, що  $w_{\bar{0}, \bar{1}'_i}$  задається (4.40)

задовольняє диференціальне рівняння та крайові умови (4.37). Бачимо,

що крайова умова  $w_{\overline{0,1'_i}}(0, x, z_1, \dots, z_n) = 0$  виконується. Щоб показати, що  $w_{\overline{0,1'_i}}$  задовольняє диференціальне рівняння (4.37) зауважимо, що

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_i \partial_{z_i} w_{\overline{0,0'}} &= \sum_n c_n (\mathcal{B}_i \partial_{z_i} \psi_n) T_n + \sum_n (\partial_{z_i} c_n) (\mathcal{B}_i \psi_n) T_n \\ &+ \sum_n c_n (\mathcal{B}_i \psi_n) (\partial_{z_i} T_n) = \sum_n \sum_k c_n \tilde{\mathcal{B}}_{ik,n} \psi_k T_n \\ &+ \sum_n \sum_k \partial_{z_i} c_n \mathcal{B}_{ik,n} \psi_k T_n - \sum_n \sum_k c_n \mathcal{B}_{ik,n} \psi_k (\partial_{z_i} \lambda_n) t T_n, \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

де використали [32]

$$\text{Id } H = \sum_{n=1}^{\infty} (\psi_n, f) \psi_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n,$$

у другій рівності, використовуючи (4.38) та рівності

$$\begin{aligned} (-\partial_t - \lambda_k) U_{k,n} &= T_n, \quad (-\partial_t - \lambda_n) t T_n = -T_n, \\ (-\partial_t - \lambda_k) V_{k,n} &= -t T_n, \quad (-\partial_t - \lambda_k) \frac{1}{2} t^2 T_n = -t T_n, \end{aligned}$$

легко бачити, що

$$\begin{aligned} (-\partial_t + \langle \mathcal{L}_2 \rangle) w_{\overline{0,1'_i}} &= \mathcal{B}_i \partial_{z_i} w_{\overline{0,0'}} = \sum_n c_n (\mathcal{B}_n \partial_{z_n} \psi_n) T_n \\ &+ \sum_n (\partial_{z_n} c_n) (\mathcal{B}_n \psi_n) T_n + \sum_n c_n (\mathcal{B}_n \psi_n) (\partial_{z_n} T_n) = \sum_n \sum_k c_n \tilde{\mathcal{B}}_{ik,n} \psi_k T_n \\ &+ \sum_n \sum_k \partial_{z_i} c_n \mathcal{B}_{ik,n} \psi_k T_n - \sum_n \sum_k c_n \mathcal{B}_{ik,n} \psi_k (\partial_{z_i} \lambda_n) t T_n, \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Звернемо увагу на те, що  $w_{\overline{0,1'_i}}$  є лінійним в

$$(v_{1i} \bar{\sigma}', v_{1i} \bar{f} \bar{\Omega}', v_{0i} \bar{\sigma}', v_{0i} \bar{f} \bar{\Omega}'), \quad \forall i = \overline{1, n}.$$

Отримавши наближений розв'язок [1]

$$w^{\bar{\epsilon}, \bar{\delta}'} \approx w_{\overline{0,0'}} + \sum_{j=1}^l \sqrt{\epsilon_j} w_{\overline{1j,0'}} + \sum_{i=1}^n \sqrt{\delta_i} w_{\overline{0,1'_i}}$$

для ціни похідного активу. Для більш точного результату припустимо, що Функція виплати  $H(x)$  та  $H'(x)$  неперервні і обмежені, ясно що деякі види деривативів не підходять під таке припущення наприклад опціони колл та пут. Для доведення точності наближення цін [33-35] обмежуємо аналіз деривативів гладкою і обмеженою виплатою, в цьому випадку точність оцінки ґрунтується на такій теоремі:

**Теорема 4.4:** Для фіксованих  $(t, x, y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n)$  існує стала  $C$  така, що для будь-якого  $\epsilon_j \leq 1, \delta_i \leq 1$  маємо:

$$\left| w^{\bar{\epsilon}, \bar{\delta}'} - \left( w_{\bar{0}, \bar{0}'} + \sum_{j=1}^l \sqrt{\epsilon_j} w_{\bar{1}, \bar{0}'} + \sum_{i=1}^n \sqrt{\delta_i} w_{\bar{0}, \bar{1}'_i} \right) \right| \leq C \left( \sum_{j=1}^l \epsilon_j + \sum_{i=1}^n \delta_i \right).$$

*Доведення.* До встановлення основного результату точності сформулюємо таку лему.

*Лема 4.1.* Нехай  $J(y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n)$  зростає поліноміально. Тоді для кожного  $(y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n)$  і  $s < t$ , існує додатна стала  $C < \infty$  така, що для будь-якого  $\epsilon_j \leq 1$ , та  $\delta_i \leq 1$ , маємо наступну нерівність

$$\tilde{\mathbb{E}}_{y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n} [|J(Y_{1s}, \dots, Y_{ls}, Z_{1s}, \dots, Z_{ns})|] \leq C.$$

*Доведення лемати 4.1.* Достатньо, довести результат для  $J(y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n) = y_j^k$  і  $J(y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n) = z_i^k$  для будь-якого  $k \in \mathbb{N}$ . Доведемо спочатку  $J(y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n) = z_i^k$ . Під фізичною мірою  $\mathbb{P}$  розуміємо

$$\mathbb{E}[|Z_{is}|^k] = \mathbb{E}\left[|Z_{i\delta_{is}}^{(1)}|^k\right] \leq \sup_{\delta_{is} \leq 1} \mathbb{E}\left[|Z_{i\delta_{is}}^{(1)}|^k\right] \leq C_i(s, k) \leq C_i(t, k), \quad i = \overline{1, n}.$$

Тепер визначимо експоненціальні мартингали  $M_t^{(\Gamma_i)}$ , які пов'язують динаміку  $Z_i$  під нейтральним ризиком вимірювання  $\tilde{\mathbb{P}}$  в його динаміці відповідно до фізичної міри  $\mathbb{P}$  [36-40]. Маємо

$$M_t^{(\Gamma_i)} := \exp\left(-\int_0^t \Gamma_i(Y_{1s}, \dots, Y_{ls}, Z_{1s}, \dots, Z_{ns}) dW_s^{z_i} - \frac{1}{2} \int_0^t \Gamma_i^2(Y_{1s}, \dots, Y_{ls}, Z_{1s}, \dots, Z_{ns}) ds\right) = \frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} \Big|_{\mathcal{F}_t}.$$

математичне сподівання  $|Z_s|^k$  можна знайти наступним чином:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{E}}[|Z_{is}|^k] &= \mathbb{E}\left[|Z_{is}|^k M_s^{(\Gamma_i)}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[|Z_{is}|^k \exp\left(\frac{1}{2} \int_0^s \Gamma_i^2(Y_{1u}, \dots, Y_{lu}, Z_{1u}, \dots, Z_{nu}) du\right) \left(M_s^{(2\Gamma_i)}\right)^{1/2}\right] \\ &\leq \left(\mathbb{E}\left[|Z_{is}|^{2k} \exp\left(\int_0^s \Gamma_i^2(Y_{1u}, \dots, Y_{lu}, Z_{1u}, \dots, Z_{nu}) du\right)\right]\right)^{1/2} \\ &\quad \left(\mathbb{E}\left[M_s^{(2\Gamma_i)}\right]\right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{за Коші – Шварцом}) \\ &= \left(\mathbb{E}\left[|Z_{is}|^{2k} \exp\left(\int_0^s \Gamma_i^2(Y_{1u}, \dots, Y_{lu}, Z_{1u}, \dots, Z_{nu}) du\right)\right]\right)^{1/2} \\ &\quad (M^{(2\Gamma_i)} - \epsilon \mathbb{P} - \text{мартингалом}) \\ &\leq \left(\mathbb{E}\left[|Z_{i\delta_{is}}^{(1)}|^{2k} \exp(s\|\Gamma_i\|_\infty^2)\right]\right)^{\frac{1}{2}} \leq C. \end{aligned}$$

Розглянемо тепер випадок  $J(y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n) = y_j^k$ . Маємо

$$\mathbb{E}\left[|Y_{js}|^k\right] = \mathbb{E}\left[|Y_{js/\varepsilon_j}^{(1)}|^k\right] \leq \sup_{\varepsilon_j \leq 1} \mathbb{E}\left[|Y_{js/\varepsilon_j}^{(1)}|^k\right] \leq C_j(k).$$

Використовуючи вище наведені міркування, легко показати [37],

$$\tilde{\mathbb{E}}\left[|Y_{js}|^k\right] = \mathbb{E}\left[|Y_{js}|^k M_s^{(\Lambda_j)}\right] \leq \left(\mathbb{E}\left[|Y_{js/\varepsilon_j}^{(1)}|^{2k} \exp(s\|\Lambda_j\|_\infty^2)\right]\right)^{\frac{1}{2}} \leq C_j.$$

**Лему доведено.**

*Доведемо теорему 4.4.* Почнемо з визначення залишкового члена  $R_{\bar{\varepsilon}, \bar{\delta}'}$

$$\begin{aligned}
& w_{\bar{0},\bar{0}'} + \sum_{j=1}^l \sqrt{\epsilon_j} w_{\bar{1}j,\bar{0}'} + \sum_{i=1}^n \sqrt{\delta_i} w_{\bar{0},\bar{1}'_i} + \sum_{j=1}^l \epsilon_j \left( w_{\bar{2}j,\bar{0}'} + \sum_{j=1}^l \sqrt{\epsilon_j} w_{\bar{3}j,\bar{0}'} \right) \\
& w_{\bar{\epsilon},\bar{\delta}'} = + \sum_{k \neq j}^l \sqrt{\epsilon_k} \sqrt{\epsilon_j} w_{\bar{1}kj,\bar{0}'} + \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^n \sqrt{\delta_i} \left( \sqrt{\epsilon_j} w_{\bar{1}j\bar{1}'_i} + \sum_{j=1}^l \epsilon_j w_{\bar{2}j\bar{1}'_i} \right) \\
& \quad + \sum_{k \neq j}^l \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^n \sqrt{\delta_i} \sqrt{\epsilon_k} \sqrt{\epsilon_j} w_{\bar{1}kj,\bar{1}'_i} + R_{\bar{\epsilon},\bar{\delta}'}.
\end{aligned}$$

Функції  $w_{\bar{0},\bar{0}'}$ ,  $w_{\bar{1}j,\bar{0}'}$  і  $w_{\bar{0},\bar{1}'_i}$  є єдиним розв'язком рівнянь (4.35), (4.36) і (4.37), відповідно. Функція  $w_{\bar{2}j,\bar{0}'}$  задається (4.25),  $w_{\bar{2}j,\bar{0}'}$  є розв'язком рівняння Пуассона (4.15). Щоб охарактеризувати  $w_{\bar{1}j\bar{1}'_i}$  і  $w_{\bar{2}j\bar{1}'_i}$  продовжимо сингулярний аналіз збурень рівняння (4.14).

$$\begin{aligned}
\left( \sqrt{\epsilon_j \delta_i} \right) 0 = \mathfrak{L}_{0j} w_{\bar{3}j\bar{1}'_i} + \mathfrak{L}_{1j} w_{\bar{2}j\bar{1}'_i} + \sum_{k \neq j}^l \mathfrak{L}_{1k} w_{\bar{1}kj,\bar{1}'_i} + (-\partial_t + \mathfrak{L}_2) w_{\bar{1}j\bar{1}'_i} \\
0 + \mathfrak{M}_{3ij} w_{\bar{2}j,\bar{0}'} + \mathfrak{M}_{1i} w_{\bar{1}j,\bar{0}'}, \tag{4.41}
\end{aligned}$$

Рівняння (4.41) є рівнянням Пуассона виду (4.19). Для того, щоб для (4.41) визначити розв'язок  $w_{\bar{3}j\bar{1}'_i}$  в  $L^2(\mathbb{R}, \pi)$ , повинна виконуватися умова центрування (4.19). В (4.41) умовою центрування є

$$0 = \langle \mathfrak{L}_{1j} w_{\bar{2}j\bar{1}'_i} \rangle + (-\partial_t + \langle \mathfrak{L}_2 \rangle) w_{\bar{1}j\bar{1}'_i} + \langle \mathfrak{M}_{3ij} w_{\bar{2}j,\bar{0}'} \rangle + \langle \mathfrak{M}_{1i} \rangle w_{\bar{1}j,\bar{0}'}, \tag{4.42}$$

віднявши (4.32) від (4.31), можемо виразити  $w_{\bar{2}j\bar{1}'_i}$ ,

$$\begin{aligned}
0 = (-\partial_t + \langle \mathfrak{L}_2 \rangle) w_{\bar{0},\bar{1}'_i} + \langle \mathfrak{M}_{1i} \rangle w_{\bar{0},\bar{0}'} - \sum_{j=1}^l \mathfrak{L}_{0j} w_{\bar{2}j\bar{1}'_i} + (-\partial_t + \mathfrak{L}_2) w_{\bar{0},\bar{1}'_i} \\
+ \mathfrak{M}_{1i} w_{\bar{0},\bar{0}'} + \sum_{j=1}^l \mathfrak{M}_{3ij} w_{\bar{1}j,\bar{0}'} + \mathfrak{L}_{1j} w_{\bar{1}j\bar{1}'_i},
\end{aligned}$$

зведемо подібні доданки

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{j=1}^l \mathfrak{L}_{0j} w_{\overline{2j1'_i}} + (\mathfrak{L}_2 - \langle \mathfrak{L}_2 \rangle) w_{\overline{0,1'_i}} + \mathfrak{M}_{1i} w_{\overline{0,0'}} - \langle \mathfrak{M}_{1i} \rangle w_{\overline{0,0'}} = \sum_{j=1}^l \mathfrak{L}_{0j} w_{\overline{2j1'_i}} + \\
&\quad \left( \left( -\frac{1}{2} a^2 (\bar{\sigma}^2 - f^2) \right) \partial_{xx}^2 + a(f\Omega - \overline{f\Omega}) \partial_x \right) w_{\overline{0,1'_i}} + \\
&\quad [g_i(\rho_{xz_i} a f \partial_x - \Gamma_i) \partial_{z_i} - g_i(\rho_{xz_i} a \langle f \rangle \partial_x - \langle \Gamma_i \rangle) \partial_{z_i}] w_{\overline{0,0'}} \\
&= \sum_{j=1}^l \mathfrak{L}_{0j} w_{\overline{2j1'_i}} + \left( \left( -\frac{1}{2} a^2 (\bar{\sigma}^2 - f^2 \mp \bar{\sigma}_1^2 \mp \bar{\sigma}_{12}^2 \mp \dots \mp \bar{\sigma}_{l-2,l-1}^2) \right) \partial_{xx}^2 \right. \\
&\quad + a(f\Omega - \overline{f\Omega} \mp \overline{f\Omega}_1 \mp \overline{f\Omega}_{12} \mp \dots \mp \overline{f\Omega}_{l-2,l-1}) \partial_x \left. \right) w_{\overline{0,1'_i}} + \\
&\quad [g_i(\rho_{xz_i} a (f - \langle f \rangle \mp \langle f \rangle_1 \mp \langle f \rangle_{12} \mp \dots \mp \langle f \rangle_{l-2,l-1}) \partial_x \\
&\quad - (\Gamma - \langle \Gamma \rangle \mp \langle \Gamma \rangle_1 \mp \langle \Gamma \rangle_{12} \mp \dots \mp \langle \Gamma \rangle_{l-2,l-1}) \partial_{z_i}) w_{\overline{0,0'}}]
\end{aligned}$$

Розглянемо такі системи рівнянь Пуассона

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}_{01} \varphi_1 &= f^2 - \bar{\sigma}_1^2, \quad \mathfrak{L}_{02} \varphi_2 = \bar{\sigma}_1^2 - \bar{\sigma}_{12}^2, \dots, \\
\mathfrak{L}_{0j} \varphi_j &= \bar{\sigma}_{j-2,j-1}^2 - \bar{\sigma}_{j-1,j}^2, \dots, \\
\mathfrak{L}_{0l} \varphi_l &= \bar{\sigma}_{l-2,l-1}^2 - \bar{\sigma}_{l-1,l}^2, \quad \mathfrak{L}_{01} \eta_1 = f\Omega - \overline{f\Omega}_1, \dots, \\
\mathfrak{L}_{0l} \eta_l &= \overline{f\Omega}_{l-2,l-1} - \overline{f\Omega}, \\
\mathfrak{L}_{01} \xi_1 &= f - \langle f \rangle_1, \quad \mathfrak{L}_{02} \xi_2 = \langle f \rangle_1 - \langle f \rangle_{12}, \dots, \\
\mathfrak{L}_{0l} \xi_l &= \langle f \rangle_{l-2,l-1} - \langle f \rangle, \quad \mathfrak{L}_{01} \zeta_1 \\
&= \Gamma - \langle \Gamma \rangle_1, \dots, \quad \mathfrak{L}_{0l} \zeta_l = \langle \Gamma \rangle_{l-2,l-1} - \langle \Gamma \rangle,
\end{aligned}$$

Функції  $\xi_j(y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n)$ ,  $\eta_j(y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n)$  є розв'язки відповідних рівнянь Пуассона, має місце формула

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^l \mathfrak{L}_{0j} w_{\overline{2j1'_i}} + \sum_{j=1}^l \mathfrak{L}_{0j} \left( -\frac{1}{2} a^2 \varphi_j \partial_{xx}^2 + a \eta_j \partial_x \right) w_{\overline{0,1'_i}} \\
&\quad + [g_i(\rho_{xz_i} a \xi_j \partial_x - \zeta_j) \partial_{z_i}] w_{\overline{0,0'}}.
\end{aligned}$$

Тому [42-45]

$$w_{\overline{2j1'_i}} = - \left( \frac{1}{2} a^2 \varphi_j \partial_{xx}^2 - a \eta_j \partial_x \right) w_{\overline{0,1'_i}}$$

$$-g_j(\rho_{xz_i} a \xi_j \partial_x - \zeta_j) \partial_{z_i} w_{\overline{0,0'}} + D_j, \forall j = \overline{1, l}, i = \overline{1, n}. \quad (4.43)$$

$D_j(x, z_1, \dots, z_n)$  є константою, яка не залежить від  $y$ . Підставляючи (4.43) в (4.42) знайдемо  $w_{\overline{1j1'_i}}$  знаючи  $w_{\overline{0,0'}}$ ,  $u_{\overline{1j,0'}}$  і  $w_{\overline{0,1'_i}}$ .  $w_{\overline{1j1'_i}}$  є розв'язком (4.42) з крайовими умовами  $w(0, x, z_1, \dots, z_n) = 0$ .

Візьмемо

$$w_{\overline{1k_j0'}} \equiv 0, \forall k \neq j, k = \overline{1, l}.$$

Обчислимо

$$\begin{aligned} 0 = & (-\partial_t + \mathfrak{L}^{\overline{\epsilon, \delta'}}) w^{\overline{\epsilon, \delta'}} \left( -\partial_t + \mathfrak{L}^{\overline{\epsilon, \delta'}} \right) R^{\overline{\epsilon, \delta'}} \\ & + \sum_{j=1}^l \frac{1}{\epsilon_j} F_{0j} + \sum_{j=1}^l \frac{1}{\sqrt{\epsilon_j}} F_{1j} + \sum_{j=1}^l F_{2j} \\ & + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^l \sqrt{\delta_i} \left( \frac{1}{\epsilon_j} F_{3ji} + \frac{1}{\sqrt{\epsilon_j}} F_{4ji} + F_{5ji} \right) \\ & + \sum_{j=1}^l \epsilon_j R_{1j}^{\epsilon_j} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^l \sqrt{\epsilon_j \delta_i} R_{2j}^{\epsilon_j} + \sum_{i=1}^n \delta_i R_{3j}^{\epsilon_j}, \end{aligned} \quad (4.44)$$

де

$$\begin{aligned} F_{0j} &= \mathfrak{L}_{0j} w_{\overline{0,0'}}, & F_{1j} &= \mathfrak{L}_{0j} w_{\overline{1j,0'}} + \mathfrak{L}_{1j} w_{\overline{0,0'}}, \\ \sum_{j=1}^l F_{2j} &= \sum_{j=1}^l \mathfrak{L}_{0j} w_{\overline{2j,0'}} + \sum_{j=1}^l \mathfrak{L}_{1j} w_{\overline{1j,0'}} + (-\partial_t + \mathfrak{L}_2) w_{\overline{0,0'}}, \\ F_{3ji} &= \mathfrak{L}_{0j} w_{\overline{0,1'_i}}, & F_{4ji} &= \mathfrak{L}_{0j} w_{\overline{1j1'_i}} + \mathfrak{L}_{1j} w_{\overline{0,1'_i}} + \mathfrak{M}_{3ij} w_{\overline{0,0'}}, \\ \sum_{j=1}^l F_{5ji} &= \sum_{j=1}^l \mathfrak{L}_{0j} w_{\overline{2j1'_i}} + \sum_{k \neq j} \mathfrak{L}_{1j} w_{\overline{1j1'_i}} + \mathfrak{M}_{3ij} w_{\overline{1j,0'}} + \mathfrak{M}_{1i} w_{\overline{0,0'}} \\ & \quad + (-\partial_t + \mathfrak{L}_2) w_{\overline{0,1'_i}}, \\ R_{1j}^{\epsilon_j} &= (-\partial_t + \mathfrak{L}_2) w_{\overline{2j,0'}} + \mathfrak{L}_{1j} w_{\overline{3j,0'}} + \sqrt{\epsilon_j} (-\partial_t + \mathfrak{L}_2) w_{\overline{3j,0'}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{2ij}^{\epsilon_j} &= (-\partial_t + \mathfrak{L}_2)w_{\frac{-}{1j1'_i}} + \mathfrak{L}_{1j}w_{\frac{-}{2j1'_i}} + \mathfrak{M}_{1i}w_{\frac{-}{1j,0'}} + \mathfrak{M}_{3ij}w_{\frac{-}{2j,0'}} \\
&+ \sqrt{\epsilon_j} \left( (-\partial_t + \mathfrak{L}_2)w_{\frac{-}{2j,1'}} + \mathfrak{M}_{1i}w_{\frac{-}{2j,0'}} + \mathfrak{M}_{3j}w_{\frac{-}{3ij,0'}} \right) + \epsilon_j \mathfrak{M}_{1j}w_{\frac{-}{3j,0'}}, \\
R_{3ij}^{\epsilon_j} &= \mathfrak{M}_{1j}w_{\frac{-}{0,1'_i}} + \mathfrak{M}_{2j}w_{\frac{-}{0,0'}} + \mathfrak{M}_{3j}w_{\frac{-}{1j1'_i}} \\
&+ \sqrt{\epsilon_j} \left( \mathfrak{M}_{1j}w_{\frac{-}{1j1'_i}} + \mathfrak{M}_{2j}w_{\frac{-}{1j,0'}} + \mathfrak{M}_{3j}w_{\frac{-}{1j1'_i}} \right) \\
&+ \epsilon_j \left( \mathfrak{M}_{1j}w_{\frac{-}{2j1'_i}} + \mathfrak{M}_{2j}w_{\frac{-}{2j,0'}} \right).
\end{aligned}$$

Легко бачити,  $F_{0j} = F_{1j} = F_{3ij} = F_{4ij} = F_{5ij} = 0$ .

Отже маємо

$$0 = \left(-\partial_t + \mathfrak{L}^{\bar{\epsilon}, \bar{\delta}'}\right) R^{\bar{\epsilon}, \bar{\delta}'} + \sum_{j=1}^l \epsilon_j R_{1j}^{\epsilon_j} + \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^n \left( \sqrt{\epsilon_j} \delta_i R_{2ij}^{\epsilon_j} + \delta_i R_{3ij}^{\epsilon_j} \right), \quad (4.45)$$

$$\begin{aligned}
R^{\bar{\epsilon}, \bar{\delta}'}(0, x, y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n) &= \sum_{j=1}^l \epsilon_j G_{1j}^{\epsilon_j}(x, y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n) \\
&+ \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^n \sqrt{\epsilon_j} \delta_i G_{2ij}^{\epsilon_j}(x, y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n), \quad (4.46)
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
G_{1j}^{\epsilon_j}(x, y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n) &:= -w_{\frac{-}{2j,0'}}(0, x, y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n) \\
&- \sqrt{\epsilon_j} w_{\frac{-}{3j,0'}}(0, x, y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n), \\
G_{2ij}^{\epsilon_j}(x, y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n) &:= -w_{\frac{-}{1j1'_i}}(0, x, y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n) \\
&- \sqrt{\epsilon_j} w_{\frac{-}{2j1'_i}}(0, x, y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n).
\end{aligned}$$

Використовуючи формули Фейнмана-Каца, виразимо  $R^{\bar{\epsilon}, \bar{\delta}'}(t, x, y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n)$  розв'язок рівняння (4.45) з крайовими умовами (4.46), як математичне сподівання [46-48]

$$R^{\bar{\epsilon}, \bar{\delta}'}(t, x, y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n) =$$



$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^l \epsilon_j \tilde{\mathbb{E}}_{x,y_1,\dots,y_l,z_1,\dots,z_n} \left[ e^{-\int_0^t k(X_s) ds} G_{1j}^{\epsilon_j}(X_t, Y_{1t}, \dots, Y_{lt}, Z_{1t}, \dots, Z_{nt}) \right] \\
&+ \int_0^t e^{-\int_0^s k(X_u) du} R_{1j}^{\epsilon_j}(s, X_s, Y_{1s}, \dots, Y_{ls}, Z_{1s}, \dots, Z_{ns}) ds + \sqrt{\epsilon} \delta \tilde{\mathbb{E}}_{x,y_1,\dots,y_l,z_1,\dots,z_n} \\
&\quad \left[ e^{-\int_0^t k(X_s) ds} G_2^\epsilon(X_t, Y_{1t}, \dots, Y_{lt}, Z_{1t}, \dots, Z_{nt}) \right. \\
&\quad \left. + \int_0^t e^{-\int_0^s k(X_u) du} R_{2ij}^{\epsilon_j}(s, X_s, Y_{1s}, \dots, Y_{ls}, Z_{1s}, \dots, Z_{ns}) ds \right] \\
&+ \delta \tilde{\mathbb{E}}_{x,y_1,\dots,y_l,z_1,\dots,z_n} \left[ e^{-\int_0^s k(X_u) du} R_{3ij}^{\epsilon_j}(s, X_s, Y_{1s}, \dots, Y_{ls}, Z_{1s}, \dots, Z_{ns}) ds \right].
\end{aligned}$$

Можна зробити висновок, що функції  $(R_{1j}^{\epsilon_j}, R_{2ij}^{\epsilon_j}, R_{3ij}^{\epsilon_j}, G_{1j}^{\epsilon_j}, G_{2ij}^{\epsilon_j})$  обмежені по  $x$  і поліноміально зростають по  $(y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n)$  [4]. Таким чином, по за лемою 1 маємо

$$\left| R^{\bar{\epsilon}, \bar{\delta}'} \right| \leq \sum_{j=1}^l \epsilon_j C_{1j} + \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^n \sqrt{\epsilon_j \delta_i} C_{2ij} + \sum_{i=1}^n \delta_i C_{3i} \leq \left( \sum_{j=1}^l \epsilon_j + \sum_{i=1}^n \delta_i \right) C_4.$$

а значить

$$\begin{aligned}
&\left| w^{\bar{\epsilon}, \bar{\delta}'} - \left( w_{\bar{0}, \bar{0}'} + \sum_{j=1}^l \epsilon_j w_{\bar{1}j, \bar{0}'} + \sum_{i=1}^n \delta_i w_{\bar{0}, \bar{1}'i} \right) \right| \leq \left| R^{\bar{\epsilon}, \bar{\delta}'} \right| + \\
&\left| \sum_{j=1}^l \epsilon_j w_{\bar{2}j, \bar{0}'} + \sum_{j=1}^l \epsilon_j^{3/2} w_{\bar{3}j, \bar{0}'} + \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^n \sqrt{\epsilon_j \delta_i} w_{\bar{1}j \bar{1}'i} + \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^n \sqrt{\delta_i} \epsilon_j w_{\bar{2}j \bar{1}'i} \right| \\
&\leq \left( \sum_{j=1}^l \epsilon_j + \sum_{i=1}^n \delta_i \right) C_4 + \sum_{j=1}^l \epsilon_j \left| w_{\bar{2}j, \bar{0}'} + \sqrt{\epsilon_j} w_{\bar{3}j, \bar{0}'} \right| \\
&+ \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^n \sqrt{\epsilon_j \delta_i} \left| w_{\bar{1}j \bar{1}'i} + \sum_{j=1}^l \epsilon_j w_{\bar{2}j \bar{1}'i} \right| \leq \left( \sum_{j=1}^l \epsilon_j + \sum_{i=1}^n \delta_i \right) C,
\end{aligned}$$

точність результату доведено.

Теорема 4.4 дає нам інформацію про те, як наближена ціна веде себе при

$\epsilon_j \rightarrow 0$  і  $\delta_i \rightarrow 0$ . На практиці  $\epsilon_j$  і  $\delta_i$  є малими, але фіксованими (вони не прямують до нуля). Не знаючи, якою є стала  $C$  в Теоремі 4.4, важко добитися великої точності наближення.

#### **4.2. Моделі двобар'єрних опціонів з багатofакторною волатильністю**

Спектральне зображення щільності одновимірної дифузії отримано в [10]. Спектральна теорія є важливим інструментом для аналізу фінансових моделей дифузії, при дослідженні розкладу по власних функціях лінійних операторів. Спектральну теорію використовували багато науковців, а саме для прогнозування цін опціонів [49], знаходження відсоткової ставки на цінні папери [50], моделювання волатильності фінансових активів [51]. Як спектральна теорія так і стохастичні моделі волатильності стали незамінним інструментом у фінансовій математиці, це пов'язано з тим, що ціни деривативів підпорядковуються броунівському руху і корелюють з волатильністю [52]. Дослідження стохастичної волатильності, зокрема волатильності активу, що контролюється нелокальною дифузиею [53].

Процес Орнштейна–Уленбека описується диференціальним рівнянням параболічного типу другого порядку виду

$$\partial_t w(t, x) = \frac{\sigma^2}{2} \partial_x^2 w(t, x) + k(\theta - x) \partial_x w(t, x) \quad (4.47)$$

де  $k, \sigma, \theta$

Обчислимо щільність розподілу цього процесу. Для цього розглянемо задачу Коші для (4.47). З початковою умовою

$$w(0, x) = w_0(x) - \delta \quad (4.48)$$

$w_0(x)$ - гладка фінітна функція.

Застосуємо перетворення Фур'є. Зокрема

$$w(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} v(t, \xi) d\xi,$$

тобто

$$v(t, \xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} w(t, x) dx.$$

Тоді рівняння (4.47) зведеться до рівняння

$$\partial_t v = \frac{\sigma^2}{2} (-i\xi)^2 v + k\xi \partial_\xi v + k(1 - i\theta\xi)v = 0 \quad (4.49)$$

При цьому будемо враховувати, що

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} w'_x(t, x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ e^{ix\xi} xw \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \left( \int_{-\infty}^{+\infty} i\xi e^{ix\xi} x w(t, x) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} u(t, x) dx \right) \right] = -\xi \partial_\xi v - v.$$

Початкова умова має вигляд

$$v(0, \xi) = v_0(\xi) \quad (4.50)$$

Задача Коші (4.49), (4.50) для лінійного неоднорідного диференціального рівняння в частинних похідних першого порядку, розв'язується методом характеристик

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} - k\xi \frac{\partial v}{\partial \xi} &= \left( -\frac{\sigma^2 \xi^2}{2} + (1 - i\theta\xi) \right) v \\ dt &= \frac{d\xi}{k\xi} \end{aligned} \quad (4.51)$$

$$dt = \frac{dv}{\left( -\frac{\sigma^2 \xi^2}{2} + (1 - i\theta\xi) \right) v} \quad (4.52)$$

(4.51) і (4.52) – рівняння характеристик.

З (4.51) рівняння маємо

$$\ln|\xi| = -kt + \ln C, \quad C > 0, \quad \xi = Ce^{-kt}$$

Підставимо в (4.52)

$$dt = \frac{dv}{\left(-\frac{\sigma^2 C^2 e^{-2kt}}{2} + (1 - i\theta C e^{-kt})\right)v};$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int_0^t \left(-\frac{\sigma^2 C e^{-k\beta}}{2} + k(1 - i\theta C e^{-k\beta})\right) d\beta + \ln C_1, \quad C_1 > 0.$$

$$v = C_1 \exp \left\{ \int_0^t \left(-\frac{\sigma^2 C e^{-k\beta}}{2} + k(1 - i\theta C e^{-k\beta})\right) d\beta \right\}.$$

При  $t = 0$ ,  $v_0(\hat{C}) = C_1$ ,  $\hat{C} = \hat{\xi}$ .

Тоді  $v$  на характеристиках має вигляд

$$v = v_0(\xi \exp\{kt\}) \exp \left\{ -\frac{\sigma^2 (e^{-2kt} - 1)\xi^2 e^{2kt}}{2 \cdot -2k} + k \left( t - i\theta \frac{(e^{-kt} - 1)\xi e^{kt}}{-k} \right) \right\}$$

$$v(t, \xi) = v_0(\xi \exp\{kt\}) \exp \left\{ -\frac{\sigma^2 (e^{-2kt} - 1)\xi^2 e^{2kt}}{2 \cdot -2k} + k \left( t - i\theta \frac{(e^{-kt} - 1)\xi e^{kt}}{-k} \right) \right\}$$

$$w(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int (\exp\{-i\xi x\}) v(t, \xi) d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\exp\{-i\xi x\})$$

$$\exp \left\{ -\frac{\sigma^2 (e^{-2kt} - 1)\xi^2 e^{2kt}}{2 \cdot -2k} + k \left( t - i\theta \frac{(e^{-kt} - 1)\xi e^{kt}}{-k} \right) \right\} v(t, \xi) d\xi =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ -i\gamma x \exp \left\{ -kt - \frac{\sigma^2 (e^{-2kt} - 1)\gamma^2}{2 \cdot -2k} + k \right. \right.$$

$$\left( t - i\theta \frac{(e^{-kt} - 1)\gamma}{-k} \right) \left. \vphantom{\frac{v_0(\gamma)}{e^{kt}}} \right\} \frac{v_0(\gamma)}{e^{kt}} d\gamma =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(\gamma) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ -i\gamma x \exp \left\{ (-kt - y) - \frac{\sigma^2 (e^{-2kt} - 1)\gamma^2}{-2k} \right. \right.$$

$$\left. \left. + k \left( t - i\theta \frac{(e^{-kt} - 1)\gamma}{-k} \right) \right\} \frac{d\gamma dy}{e^{kt}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} e^{kt}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iy(xe^{-kt} - y)} \right.$$

$$\left. \exp \left\{ -\frac{\sigma^2 (e^{-2kt} - 1)\gamma^2 e^{2kt}}{-2k} + k \left( t - i\theta \frac{(e^{-kt} - 1)\gamma e^{kt}}{-k} \right) \right\} d\gamma.$$

Виділимо повний квадрат по  $\gamma$

$$\frac{\sigma^2 (1 - e^{-2kt})\gamma^2}{2} + 2i\gamma \left( \frac{xe^{kt} - y}{2} - \frac{\theta(e^{-kt} - 1)}{2} \right) \frac{\sigma(1 - e^{-2kt})^{1/2}}{2\sqrt{k}}$$

$$\frac{2\sqrt{k}}{\sigma(1 - e^{-2kt})^{1/2}} \pm i^2 \left( \frac{xe^{kt} - y}{2} - \frac{\theta(e^{-kt} - 1)}{2} \right)^2 \frac{4k}{\sigma^2(1 - e^{-2kt})} =$$

$$\left( \frac{\sigma(1 - e^{-2kt})^{1/2}}{2\sqrt{k}} \gamma + i \left( \frac{xe^{kt} - y}{2} + \frac{\theta(e^{-kt} - 1)}{2} \right) \frac{2\sqrt{k}}{\sigma(1 - e^{-2kt})^{1/2}} \right)^2$$

$$+ \left( \frac{xe^{kt} - y}{2} + \frac{\theta(e^{-kt} - 1)}{2} \right)^2 \frac{4k}{\sigma^2(1 - e^{-2kt})};$$

Зробивши заміну

$$\frac{\sigma(1 - e^{-2kt})^{1/2}}{2\sqrt{k}} \gamma + i \left( \frac{xe^{kt} - y}{2} + \frac{\theta(e^{-kt} - 1)}{2} \right) \frac{2\sqrt{k}}{\sigma(1 - e^{-2kt})^{1/2}} = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}$$

використавши інтегральну теорему Коші

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} d\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty + i \left( \frac{xe^{-kt} + \theta(e^{-kt} - 1)}{\sigma(1 - e^{-2kt})^{1/2}} \right)}^{+\infty + i \left( \frac{xe^{-kt} + \theta(e^{-kt} - 1)}{\sigma(1 - e^{-2kt})^{1/2}} \right)} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} d\alpha. \quad (4.53)$$

Дійсно  $\oint_{(T)} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} d\alpha = 0$ ,  $(T)$  – замкнутий контур,  $e^{-\frac{\alpha^2}{2}}$  – аналітична функція, тому за інтегральною теоремою Коші інтеграл дорівнює нулю.

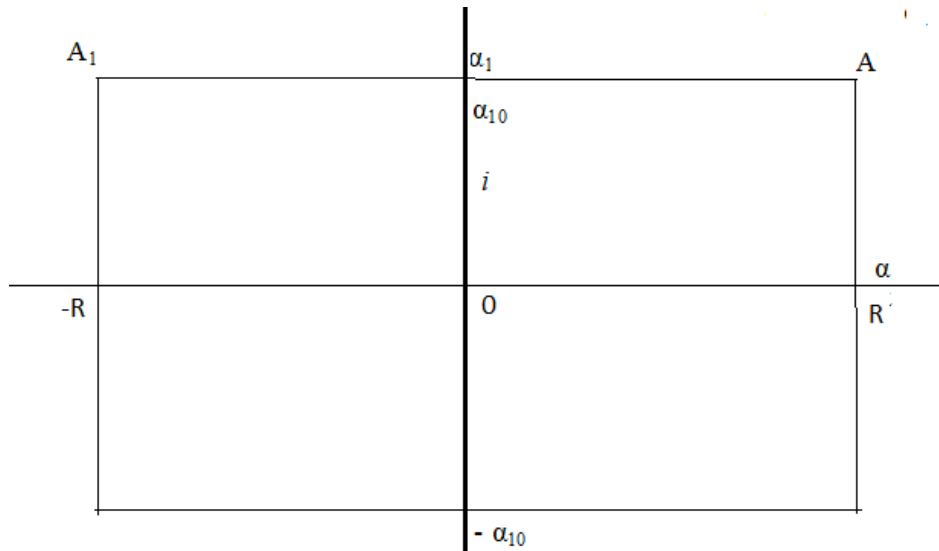


Рис. 4.1. Контур інтегрування.

В якості  $(T)$  візьмемо контур  $(-RRAA_1(R))$  де

$$\alpha_{10} = \frac{(xe^{-kt} + \theta(e^{-kt} - 1))\sqrt{k}}{\sigma(1 - e^{-2kt})^{1/2}},$$

при  $(xe^{-kt} + \theta(e^{-kt} - 1)) > 0$ , якщо  $\alpha_{10} < \infty$ , контур розміщується симетрично по осі  $O\alpha_1$  при  $R \rightarrow +\infty$ ,  $\int_{-R}^R$  перейде в  $\int_{-\infty}^{+\infty}$ , а  $\int_{-A}^A \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}$ .

$$\int_R^A e^{-\frac{\alpha^2}{2}} d\alpha \rightarrow 0, \quad \int_{A_1}^{-R} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} d\alpha \rightarrow 0, \quad (4.54)$$

при  $R \rightarrow \infty$ , тому має місце рівність (4.53).

Перевіримо, що прямує до нуля при  $R \rightarrow +\infty$ .

$$\left| \int_R^A e^{-\frac{\alpha^2}{2}} d\alpha \right| = \left| \int_0^{|\alpha_{10}|} e^{-\frac{(R+i\alpha_1)^2}{2}} d\alpha_1 \right| \leq e^{-R^2} e^{|\alpha_{10}|} |\alpha_{10}|.$$

При фіксованому  $x, \theta, k, t, \sigma$ ,  $e^{|\alpha_{10}|} = const$ , тому оскільки

$$e^{-R^2} \rightarrow 0, \lim_{R \rightarrow \infty} \int_R^A e^{-\frac{\alpha^2}{2}} d\alpha = 0.$$

Аналогічно  $\int_{A_1}^{-R} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} d\alpha \rightarrow 0, R \rightarrow +\infty$ . Одержимо

$$w(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(\gamma) \exp \left\{ - \left( \frac{x e^{kt} - y}{2} + \frac{\theta(e^{-kt} - 1)}{2} \right)^2 \frac{4k}{\sigma^2(1 - e^{-2kt})} \right\} dy,$$

тому фундаментальний розв'язок, або функція Гріна має вигляд

$$p(t, x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi \frac{\sigma^2}{k} (1 - e^{-2kt})}} \exp \left\{ - \frac{(x e^{kt} - y + \theta(e^{-kt} - 1))^2}{\frac{\sigma^2}{k} (1 - e^{-2kt})} \right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi \frac{\sigma^2}{k} (1 - e^{-2kt})}} \exp \left\{ - \frac{(y - x + (x - \theta)(1 - e^{-kt}))^2}{\frac{\sigma^2}{k} (1 - e^{-2kt})} \right\}.$$

З іншого боку, з ймовірнісної сторони функція Гріна є щільністю розподілу.

Використовуючи методи з спектральної теорії та теорії сингулярних і регулярних збурень, можна знайти наближену ціну двобарерних опціонів Орнштейна-Уленбека з багатофакторною волатильністю, як розклад за власними функціями використовуючи інфінітезимальні генератори  $(l+n+1)$  вимірної дифузії,  $l \geq 1, n \geq 1, l \in N, n \in N$  тобто дифузія залежить від однієї локальної змінної,  $l-$

вимірного швидкозмінного чинника і  $n$ -вимірного повільно змінного чинника. Дана робота є розширенням робіт [54-56], в [56]  $l=1$  та  $n=1$ .

Процес  $X$  може репрезентувати багато економічних явищ, та процесів. Наприклад, величину запасів, ціну індексу, надійний короткий відсоток і т.д. Ще ширше,  $X$  це зовнішній чинник, який характеризує вартість будь-яких із згаданих вище процесів. Під фізичною мірою  $\mathbb{P}$  процесу  $X$ , розуміють процес  $X$ , який має миттєвий дрейф  $v(X_t)$  і стохастичну волатильність  $a(X_t)f(Y_{1t}, \dots, Y_{lt}, Z_{1t}, \dots, Z_{nt}) > 0$ , який містить обидві компоненти: локальну  $a(X_t)$  і нелокальну  $f(Y_{1t}, \dots, Y_{lt}, Z_{1t}, \dots, Z_{nt})$ . Зауважимо, що нескінченно малі генератори (інфінітіземальні) для  $Y_j$  та  $Z_i$  мають вигляд  $\forall i, j$

$$\mathfrak{L}_{Y_j}^{\epsilon_j} = \frac{1}{\epsilon_j} \left( \frac{1}{2} \beta_j^2(y_j) \partial_{y_j y_j}^2 + \alpha_j(y_j) \partial_{y_j} \right), \mathfrak{L}_{Z_i}^{\delta_i} = \delta_i \left( \frac{1}{2} g_i^2(z_i) \partial_{z_i z_i}^2 + c_i(z_i) \partial_{z_i} \right),$$

характеризуються величинами  $\frac{1}{\epsilon_j}$  та  $\delta_i$  відповідно. Таким чином,

$Y_1, \dots, Y_l$  та  $Z_1, \dots, Z_n$  мають внутрішню шкалу часу  $\epsilon_j > 0$  і  $\frac{1}{\delta_i} > 0$ .

Важатимемо  $\epsilon_j \ll 1$  і  $\delta_i \ll 1$ , щоб внутрішня шкала часу  $Y_j$  була малою, а внутрішня шкала часу  $Z_i$  великою. Отже,  $Y_j, j = \overline{1, l}$ , це швидко змінні чинники, а  $Z_i, i = \overline{1, n}$  повільно змінні чинники.

Зауважимо, що  $\mathfrak{L}_{Y_j}^{\epsilon_j}$  та  $\mathfrak{L}_{Z_i}^{\delta_i}$  мають форму виду процесу Орнштейна-

Уленбека

$$\partial_t w = \frac{1}{2} \bar{\sigma}^2 x^2 \partial_{xx}^2 w + rx \partial_x w - rw,$$

права частина якого має вигляд

$$\frac{1}{2} \bar{\sigma}^2 x^2 y'' + rxy' - ry = 0, \tag{4.55}$$



Зведемо (4.55) до рівняння  $y'' + \lambda y = 0$ , де  $\lambda = \text{const}$ , щоб не було першої похідної в одержаному рівнянні тобто шукаємо розв'язок у вигляді

$$y = s(x)v(x),$$

де  $v(x)$  – нова невідома функція, а  $s(x)$  – виберемо так, щоб

$$v'' + \lambda(x)v = 0. \quad (4.56)$$

Підставивши у рівняння (4.55) матимемо  $\bar{\sigma}^2 x^2 s' + rxs = 0$ , звідси

$$s(x) = \exp \left\{ - \int \frac{rx}{\bar{\sigma}^2 x^2} dx \right\} = \exp \left\{ - \frac{r}{\bar{\sigma}^2} \ln x \right\}.$$

$$\lambda(x) = - \frac{d}{dx} \left( \frac{rx}{\bar{\sigma}^2 x^2} \right) - \left( \frac{rx}{\bar{\sigma}^2 x^2} \right)^2 - \frac{2r}{\bar{\sigma}^2 x^2} = - \frac{r}{\bar{\sigma}^2 x^2} - \frac{r^2}{\bar{\sigma}^4 x^2},$$

отримаємо

$$v'' - \frac{r}{\bar{\sigma}^2 x^2} \left( 1 + \frac{1}{\bar{\sigma}^2} \right) v = 0.$$

Отже

$$y = s(x)v(x), \text{ де } s(x) = \exp \left\{ - \frac{r}{\bar{\sigma}^2} \ln x \right\}.$$

У нашому випадку

$$m(x) = \frac{2}{\bar{\sigma}^2 x^2} \exp \left\{ \frac{2r}{\bar{\sigma}^2} \ln x \right\}, \quad \varepsilon(x) = s^2(x).$$

Для того щоб в рівнянні (4.56) була не функція  $\lambda(x)$ , а  $\lambda = \text{const}$  то зробимо заміну змінних  $x = \sigma(\theta)$  в (4.55).

$$y'_\theta \theta'_x = \frac{1}{\sigma'_\theta} y'_\theta; \quad y''_{x^2} = y''_{\theta^2} \frac{1}{\sigma'^2_\theta} - y'_\theta \frac{\sigma''_\theta}{\sigma'^3_\theta},$$

підставивши в (4.55) отримаємо

$$\frac{1}{2}\bar{\sigma}^2\sigma'x^2y'' + \left(rx\sigma'^2 - \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2\sigma''x^2\right)y' - r\sigma'^3y = 0, \quad (4.57)$$

Застосуємо до (4.57) ті ж самі міркування що й у (4.54)  $y = s^*v$  тоді

$$s^* = \exp \left\{ - \int \frac{rx\sigma'^2 - \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2\sigma''x^2}{\bar{\sigma}^2\sigma'x^2} d\theta \right\} = \sqrt{\sigma'} s.$$

Запишемо значення нового  $\lambda^*(\theta)$ .

$$\lambda^*(\theta) = -\frac{d}{d\theta} \left( \frac{rx\sigma'^2 - \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2\sigma''x^2}{\bar{\sigma}^2\sigma'x^2} \right) - \left( \frac{rx\sigma'^2 - \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2\sigma''x^2}{\bar{\sigma}^2\sigma'x^2} \right)^2 - \frac{2r}{\bar{\sigma}^2x^2},$$

З міркувань відносно розв'язку зробимо підстановку  $x = \exp \left\{ \frac{\bar{\sigma}^2}{\sqrt{2}} \theta \right\}$  щоб знайти  $\lambda^*$

$$\begin{aligned} \lambda^* &= -\frac{d}{d\theta} \left( \frac{r}{\sqrt{2}\bar{\sigma}} - \frac{\bar{\sigma}}{2\sqrt{2}} \right) - \left( \frac{r}{\sqrt{2}\bar{\sigma}} - \frac{\bar{\sigma}}{2\sqrt{2}} \right)^2 - r = -\left( \frac{r}{\sqrt{2}\bar{\sigma}} - \frac{\bar{\sigma}}{2\sqrt{2}} \right)^2 - r \\ &= -\frac{1}{2} \left( \frac{r}{\bar{\sigma}} - \frac{\bar{\sigma}}{2} \right)^2 - r, \end{aligned}$$

будемо мати

$$v'' - \left( \frac{1}{2} \left( \frac{r}{\bar{\sigma}} - \frac{\bar{\sigma}}{2} \right)^2 + r \right) v = 0,$$

$$k^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{r}{\bar{\sigma}} - \frac{\bar{\sigma}}{2} \right)^2 - r = 0, \quad k_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{r}{\bar{\sigma}} - \frac{\bar{\sigma}}{2} \right)^2 + r},$$

потрібно щоб в точках  $L$  і  $R$  розв'язок дорівнював 0, а  $x^{k_1}$  і  $x^{k_2}$  не дають такої картини, тому зробимо заміну змінних  $x = Le^\theta$ , будемо мати

$$\frac{\bar{\sigma}^2}{2} v'' - \left( \frac{1}{2} \left( \frac{r}{\bar{\sigma}} - \frac{\bar{\sigma}}{2} \right)^2 + r \right) v = 0,$$

або

$$\frac{\bar{\sigma}^2}{2} v'' - \left( \frac{v^2}{2} + r \right) v = 0,$$

на власні значення і власні функції будемо досліджувати

$$\frac{\bar{\sigma}^2}{2} v'' - \left( \frac{v^2}{2} + r \right) v = \lambda v, \quad \frac{\bar{\sigma}^2}{2} v'' = -\lambda_n^2 v, \quad L \leq x \leq R,$$

$$0 \leq \theta \leq \ln \frac{R}{L},$$

тоді

$$\frac{\bar{\sigma}^2}{2} k^2 = -\lambda_n^2, \quad \lambda_n > 0, \quad k^2 = -\frac{2}{\bar{\sigma}^2} \lambda_n^2, \quad k_{1,2} = \pm \frac{i\sqrt{2}}{\bar{\sigma}} \lambda_n.$$

Загальний розв'язок має вигляд

$$v = C_1 \cos \left( \frac{\sqrt{2}}{\bar{\sigma}} \lambda_n \theta \right) + C_2 \sin \left( \frac{\sqrt{2}}{\bar{\sigma}} \lambda_n \theta \right),$$

перевіримо виконання граничних умов, якщо  $\theta = 0$ , то  $C_1 = 0$ , при

$$\theta = \ln \frac{R}{L}, \quad \sin \left( \frac{\sqrt{2}}{\bar{\sigma}} \lambda_n \ln \frac{R}{L} \right) = 0, \quad \frac{\sqrt{2}}{\bar{\sigma}} \lambda_n \ln \frac{R}{L} = n\pi,$$

звідси

$$\lambda_n = \frac{n\pi\bar{\sigma}}{\sqrt{2} \ln \frac{R}{L}}, \quad v_n(\theta) = \sin \frac{n\pi\bar{\sigma}}{\sqrt{2} \ln \frac{R}{L}} \theta.$$

З того що

$$\int_0^{\ln \frac{R}{L}} \sin^2 \frac{n\pi \bar{\sigma}}{\sqrt{2} \ln \frac{R}{L}} \theta d\theta = \frac{1}{2} \ln \frac{R}{L}.$$

Маємо

$$v_n = \frac{\sin \frac{n\pi \bar{\sigma}}{\sqrt{2} \ln \frac{R}{L}} \theta}{\sqrt{\frac{1}{2} \ln \frac{R}{L}}} = \frac{\sin \frac{n\pi \bar{\sigma} \ln \frac{x}{L}}{\sqrt{2} \ln \frac{R}{L}}}{\sqrt{\frac{1}{2} \ln \frac{R}{L}}}.$$

$$\begin{aligned} \psi_n(x) = & \left( \frac{n\pi \bar{\sigma}}{2 \ln \frac{R}{L}} \right)^2 \left( \lambda_n^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{r}{\bar{\sigma}} - \frac{\bar{\sigma}}{2} \right)^2 \right. \\ & \left. + r \right) \sqrt{\frac{2x}{\ln \frac{R}{L}}} \exp \left\{ -\frac{r}{\bar{\sigma}^2} \ln x \right\} \sin \frac{n\pi \bar{\sigma} \ln \frac{x}{L}}{\sqrt{2} \ln \frac{R}{L}}, \end{aligned}$$

Знайдемо скалярний добуток

$$(\psi_n(x), \psi_m(x)) = \int_L^R \frac{x \bar{\sigma}^2}{\ln \frac{R}{L}} \exp \left\{ -\frac{2r}{\bar{\sigma}^2} \ln x \right\} \sin \left( \frac{n\pi \ln \frac{x}{L}}{\sqrt{2} \ln \frac{R}{L}} \right) \sin \left( \frac{m\pi \ln \frac{x}{L}}{\sqrt{2} \ln \frac{R}{L}} \right)$$

$$\frac{2}{x^2 \bar{\sigma}^2} \exp \left\{ \frac{2r}{\bar{\sigma}^2} \ln x \right\} dx = \frac{1}{\ln \frac{R}{L}} \int_L^R \frac{2}{x} \sin \left( \frac{n\pi \ln \frac{x}{L}}{\ln \frac{R}{L}} \right) \sin \left( \frac{m\pi \ln \frac{x}{L}}{\ln \frac{R}{L}} \right) dx =$$

$$2 \int_0^1 \sin n\pi t \sin m\pi t dt = 2 \int_0^1 [\cos(n-m)\pi t + \cos(n+m)\pi t] dt =$$

$$-\frac{\sin(n-m)\pi t}{(n-m)\pi} \Big|_0^1 - \frac{\sin(n+m)\pi t}{\pi} \Big|_0^1 = 0, \quad n \neq m.$$

При  $n = m$

$$\int_0^1 \sin^2 n\pi t dt = \int_0^1 (1 - \cos 2n\pi t) dt = 1 - \frac{\sin 2n\pi t}{2n\pi} \Big|_0^1 = 1.$$

Отже

$$(\psi_n(x), \psi_m(x)) = \begin{cases} 1, & n = m, \\ 0, & n \neq m. \end{cases}$$

Нехай  $X$  цінний папір без виплат дивідендів по активу (наприклад, акція, індекс тощо). Часто  $X$  моделюється як геометричний броунівський рух з сталою волатильністю (наприклад формула Блека-Шоулза) [6]. Розглянемо  $X$  – як модель геометричного броунівського руху з багатовимірною стохастичною волатильністю. Зокрема,  $\mathbb{F}$  динаміки в  $X$  задані:

$$dX_t = rX_t dt + f(Y_1, \dots, Y_l, Z_1, \dots, Z_n) X_t d\widetilde{W}_t^x, \quad h(X_t) = 0,$$

Обчислимо наближену ціну подвійного бар'єрного опціону визначеного на  $X$ .

Запишемо оператор  $\langle \mathcal{L}_2 \rangle$  і пов'язані з ним щільності зі швидкістю  $m(x)$

$$\langle \mathcal{L}_2 \rangle = \frac{1}{2} \bar{\sigma}^2 x^2 \partial_{xx}^2 + r x \partial_x - r, \quad m(x) = \frac{2}{\bar{\sigma}^2 x^2} \exp\left(\frac{2r}{\bar{\sigma}^2} \ln x\right). \quad (4.58)$$

Для подвійного бар'єрного опціону з величиною бар'єрів  $L$  і  $R$ , виплата має вигляд:

$$H(X_t) \mathbb{I}_{\{\tau > t\}} = (X_t - K)^+ \mathbb{I}_{\{\tau > t\}}, \quad I = (L, R), \quad 0 < L < K < R,$$

Щоб обчислити значення цього параметра, потрібно спочатку знайти власні значення оператора  $\langle \mathcal{L}_2 \rangle$  з крайовими умовами

$$\lim_{x \rightarrow L} \psi_n(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow R} \psi_n(x) = 0.$$

Зауважимо, що введено регулярний кілінг крайових умов на кінцях  $L$  і  $R$ . Рівняння

$$-\langle \mathcal{L}_2 \rangle \psi_n = \lambda_n \psi_n, \quad \psi_n \in \text{dom}(\langle \mathcal{L}_2 \rangle)$$

із зазначеним вище крайовими умовами можна знайти в [57]

$$\psi_n(x) = \frac{\bar{\sigma}\sqrt{x}}{\sqrt{\ln\left(\frac{R}{L}\right)}} \exp\left(-\frac{r}{\bar{\sigma}^2} \ln x\right) \sin\left(\frac{n\pi \ln\left(\frac{x}{L}\right)}{\ln\left(\frac{R}{L}\right)}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

$$\lambda_n = \frac{1}{2} \left( \frac{n\pi\bar{\sigma}}{\ln\left(\frac{R}{L}\right)} \right)^2 + \left( \frac{v^2}{2} + r \right), \quad v = \frac{r}{\bar{\sigma}} - \frac{\bar{\sigma}}{2}.$$

Запишемо вирази для операторів  $\mathcal{A}_j$  та  $\mathcal{B}_i$

$$\mathcal{A}_j = -\vartheta_{3j} x \partial_x x^2 \partial_{xx}^2 - \vartheta_{2j} x^2 \partial_{xx}^2, \quad \mathcal{B}_i = -\vartheta_{1i} x \partial_x - \vartheta_{0i}. \quad (4.59)$$

На основі (4.59) обчислимо  $\mathcal{A}_{jk,n}$ ,  $\mathcal{B}_{ik,n}$  і  $\tilde{\mathcal{B}}_{ik,n}$ . Для  $k \neq n$  знайдемо

$$\mathcal{A}_{jk,n} = -\vartheta_{2j} \left( \frac{(-1 + (-1)^{k+n}) knr}{(k^2 - n^2) \bar{\sigma}^2 \ln\left(\frac{R}{L}\right)} \right) - \vartheta_{3j} \left( \frac{(-1 + (-1)^{k+n}) kn \left( 4n^2 \pi^2 \bar{\sigma}^4 + (-12r^2 + 4r\bar{\sigma}^2 + \bar{\sigma}^4) \ln^2\left(\frac{R}{L}\right) \right)}{2(k^2 - n^2) \bar{\sigma}^4 \ln^3\left(\frac{R}{L}\right)} \right),$$

$$\mathcal{B}_{ik,n} = \vartheta_{i1} \frac{2(-1 + (-1)^{k+n}) kn}{(k - n)(k + n) \ln\left(\frac{R}{L}\right)},$$

$$\tilde{\mathcal{B}}_{ik,n} = -\vartheta_{1i} \bar{\sigma}'(Y_{k,n}) - \vartheta_{i0} \bar{\sigma}' \left( \frac{8(-1 + (-1)^{k+n}) knr \ln\left(\frac{R}{L}\right)}{(k^2 - n^2)^2 \pi^2 \bar{\sigma}^3} \right),$$

$$v_{k,n} := \frac{4nkr(\ln(L) - (-1)^{k+n} \ln(R))}{(k^2 - n^2) \bar{\sigma}^3 \ln\left(\frac{R}{L}\right)}$$

$$\frac{2(-1 + (-1)^{k+n}) kn \left( (k - n)(k + n) \pi^2 \bar{\sigma}^4 - 2r(-2r + \bar{\sigma}^2) \ln^2\left(\frac{R}{L}\right) \right)}{(k^2 - n^2)^2 \pi^2 \bar{\sigma}^5 \ln\left(\frac{R}{L}\right)},$$

і для  $k = n$  знайдемо

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{jn,n} &= -\vartheta_{3j} \left( \frac{1}{\bar{\sigma}^3} \left( \frac{3n^2\pi^2\nu}{\ln^2\left(\frac{R}{L}\right)} - \nu^3 \right) - \frac{1}{\bar{\sigma}^2} \left( \nu^2 - \frac{n^2\pi^2}{\ln^2\left(\frac{R}{L}\right)} \right) \right. \\
&\quad \left. - \vartheta_{j2} \left( \frac{1}{\bar{\sigma}^2} \left( \nu^2 - \frac{n^2\pi^2}{\ln^2\left(\frac{R}{L}\right)} \right) + \frac{\nu}{\bar{\sigma}} \right) \right), \\
\mathcal{B}_{in,n} &= \vartheta_{i1} \left( \frac{2r - \bar{\sigma}^2}{2\bar{\sigma}^2} \right) - \vartheta_{i0}, \\
\tilde{\mathcal{B}}_{in,n} &= -\vartheta_{i1}\bar{\sigma}' \left( \frac{1}{\bar{\sigma}} - \frac{r\nu(\ln^2(R) - \ln^2(L))}{\bar{\sigma}^4 \ln\left(\frac{R}{L}\right)} \right) - \vartheta_{i0}\bar{\sigma}' \left( \frac{1}{\bar{\sigma}} - \frac{r(\ln^2(R) - \ln^2(L))}{\bar{\sigma}^3 \ln\left(\frac{R}{L}\right)} \right).
\end{aligned}$$

Розрахунок  $c_n$  можна знайти в [58-60]

$$c_n = (\psi_T(\cdot), (\cdot - K)^+) = \frac{L\bar{\sigma}^\nu}{\log\left(\frac{R}{L}\right)} (L\Phi_n(\nu + \bar{\sigma}) - K\Phi_n(\nu)),$$

$$\Phi_n(\gamma) := \frac{2}{\omega_n^2 + z^2}$$

$$(\exp(\mathfrak{K}\gamma) (\omega_n \cos(\omega_n \mathfrak{K}) - \gamma \sin(\omega_n \mathfrak{K}) - \exp(\mathfrak{U}\gamma) (-1)^n \omega_n),$$

$$\omega_n := \frac{n\pi}{\mathfrak{U}}, \quad \mathfrak{K} := \frac{1}{\bar{\sigma}} \ln\left(\frac{K}{L}\right), \quad \mathfrak{U} := \frac{1}{\bar{\sigma}} \ln\left(\frac{R}{L}\right).$$

Наближену ціну опціонів можна обчислити за допомогою теорем 4.1 – 4.3

Зауважимо, що рисунки будуються покомпонентно в кожній відповідній часовій шкалі, аналогічно як для двох компонент як в роботах [56] та [59].

### *4.3. Моделі визначення цін деривативів методами спектрального аналізу*

Моделі динаміки короткострокових відсоткових ставок розглядались в роботі Васічека [61] для ціноутворення деривативів. Значний внесок у теорію відсоткових ставок зроблено в роботах [62-67] а саме: знаходження кредитного спреду інструментів кредитного ринку, визначення цін опціонів на відсоткову ставку, визначення ризику і доходності похідних фінансових інструментів фондового ринку. Розроблені цими вченими моделі мають свої переваги та недоліки, але кожна з них застосовується для підвищення ліквідності фінансових ринків. Використання складніших моделей, незважаючи на свою теоретичну обґрунтованість, зумовлює отримання складних багатопараметричних функцій кривої прибутковості, а це спричиняє значні похибки в обчисленнях.

Використовуючи спектральний аналіз Лінецький [68] застосував спектральну теорію самоспряжених операторів до різних моделей, а зокрема до моделі Васічека. В роботі Лоріга [56] розглядалися короткострокові відсоткові ставки, описані моделлю Васічека з стохастичною волатильністю, залежною від двох чинників, один з яких швидко, а другий повільно мінливий. Спектральна теорія та теорія сингулярних і регулярних збурень застосована до самоспряжених операторів у гільбертових просторах, які описують процеси з багатовимірною стохастичною волатильністю, що має  $l$ -швидко мінливих,  $n$ -повільно мінливих чинників,  $l \geq 1, n \geq 1, l \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$ . Зокрема дана теорія застосована до короткострокових відсоткових ставок, що описуються моделлю Васічека. Обчислено наближену ціну облігацій та їх дохідність. Застосувавши теорію Штурма-Ліувілля, альтернативи Фредгольма, а також аналіз



сингулярних і регулярних збурень в різних часових шкалах, отримали явні формули для наближень цін облігацій та дохідності.

Нехай  $X$  являють собою короткі відсоткові ставки. Однією з найбільш широко відомих моделей коротких курсів відсоткових ставок є модель Васічека, в якій  $X$  моделюється як процес Орнштейна-Уленбека з багатовимірною стохастичною волатильністю. Зокрема,  $\mathbb{P}$  динаміки  $X$  задані

$$dX_t = (\kappa(\theta - X_t) - f(Y_1, \dots, Y_l, Z_1, \dots, Z_r)\Omega(Y_1, \dots, Y_l, Z_1, \dots, Z_r))dt + f(Y_1, \dots, Y_l, Z_1, \dots, Z_r) + d\tilde{W}_t^x, \quad r(X_t) = X_t, \quad h(X_t) = 0,$$

де  $Y_1, \dots, Y_l$  та  $Z_1, \dots, Z_r$  є швидко і повільно змінними чинниками волатильності, як описано. Обчислимо наближену ціну облігації з нульовим купоном.

Запишемо оператор  $\langle \mathfrak{L}_2 \rangle$  і пов'язані з ним щільності зі швидкістю  $m(x)$

$$\langle \mathfrak{L}_2 \rangle = \frac{1}{2} \bar{\sigma}^2 \partial_{xx}^2 + \kappa(\bar{\theta} - x) \partial_x - x, \quad (4.60)$$

$$m(x) = \frac{2}{\bar{\sigma}^2} \exp\left(\frac{-k}{\bar{\sigma}^2} (\bar{\theta} - x)^2\right), \quad \bar{\theta} = \theta - \frac{1}{\kappa} f \bar{\Omega}.$$

Для облігації з нульовим купоном, повна виплата є:

$$H(X_t) = \mathbb{I}_{\{\tau > t\}} = 1. \quad (4.61)$$

Оператору  $\mathfrak{L}_2$  відповідає диференціальне рівняння

$$\frac{1}{2} \bar{\sigma}^2 y'' + \kappa(\theta - x) y' - xy = 0,$$

Зробимо заміну, щоб не було першої похідної в одержаному рівнянні:

$$y = s(x)u(x), \quad y'(x) = s'(x)u(x) + s(x)u'(x),$$

$$y''(x) = s''(x)u(x) + 2s'(x)u'(x) + s(x)u''(x),$$

де  $u(x)$  – невідома функція,  $s(x)$  – підберемо з одержаного рівняння

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2 s(x)u''(x) + \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2 2s'(x)u'(x) + \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2 s''(x)u(x) \\ + \kappa(\theta - x)(s(x)u'(x) + s'(x)u(x)) - xs(x)u(x) = 0, \end{aligned}$$

звідки

$$\kappa(\theta - x)s(x) + \bar{\sigma}^2 s'(x) = 0,$$

тобто

$$\frac{s'(x)}{s(x)} = -\frac{\kappa(\theta - x)}{\bar{\sigma}^2}, \quad s(x) = \exp\left\{\frac{\kappa(\theta - x)^2}{2\bar{\sigma}^2}\right\}.$$

Одержимо рівняння

$$\frac{1}{2}\bar{\sigma}^2 s(x)u''(x) + \left(\frac{1}{2}\bar{\sigma}^2 s''(x) + \kappa(\theta - x)s'(x) - xs(x)\right)u(x) = 0.$$

оскільки

$$s(x) = \exp\left\{\frac{\kappa(\theta - x)^2}{2\bar{\sigma}^2}\right\},$$

то

$$\begin{aligned} s'(x) &= -\frac{\kappa(\theta - x)}{\bar{\sigma}^2} \exp\left\{\frac{\kappa(\theta - x)^2}{2\bar{\sigma}^2}\right\}, \\ s''(x) &= \left(\frac{\kappa}{2} - x + \frac{\kappa^2(\theta - x)^2}{\bar{\sigma}^2}\right) \exp\left\{-\frac{\kappa(\theta - x)^2}{2\bar{\sigma}^2}\right\}, \end{aligned}$$

підставивши одержимо

$$c_n = (\psi_n, 1) = \frac{2}{\bar{\sigma}} \sqrt{\frac{\pi}{\kappa}} \mathcal{N}_n A^n e^{-A^2/4},$$

$$\psi_n = \mathcal{N}_n \exp\left(-A\xi - \frac{1}{2}A^2\right) H_n(\xi + A),$$

$$\mathcal{N}_n = \left(\sqrt{\frac{\kappa}{\pi}} \frac{\bar{\sigma}}{2^{n+1}n!}\right)^{1/2}, A = \frac{\bar{\sigma}}{\kappa^{3/2}},$$

$$\xi = \frac{\sqrt{\kappa}}{\bar{\sigma}}(x - \bar{\theta}), \quad \lambda_n = \bar{\theta} - \frac{\bar{\sigma}^2}{2\kappa^2} + \kappa n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Підставимо всі значення змінних в  $\psi_n$

$$\psi_n = \left(\sqrt{\frac{\kappa}{\pi}} \frac{\bar{\sigma}}{2^{n+1}n!}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\bar{\sigma}}{\kappa^{3/2}} \frac{\sqrt{\kappa}}{\bar{\sigma}}(x - \bar{\theta}) - \frac{1}{2} \frac{\bar{\sigma}^2}{\kappa^3}\right) H_n\left(\frac{\sqrt{\kappa}}{\bar{\sigma}}(x - \bar{\theta}) + \frac{\bar{\sigma}}{\kappa^{3/2}}\right),$$

де  $\bar{\theta} = \theta - \frac{1}{\kappa} f\Omega$ , а  $H_n$ - многочлен Ерміта.

Знайдемо скалярний добуток  $(\psi_n(x), \psi_m(x))$ :

$$(\psi_n(x), \psi_m(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{\kappa}{\pi}} \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{2^{n+1}2^{m+1}n!m!}} \exp\left(-\frac{2\bar{\sigma}}{\kappa}(x - \bar{\theta}) - \frac{\bar{\sigma}^2}{\kappa^3}\right)$$

$$H_n\left(\frac{\sqrt{\kappa}}{\bar{\sigma}}(x - \bar{\theta}) + \frac{\bar{\sigma}}{\kappa^{3/2}}\right) H_m\left(\frac{\sqrt{\kappa}}{\bar{\sigma}}(x - \bar{\theta}) + \frac{\bar{\sigma}}{\kappa^{3/2}}\right) + \frac{\bar{\sigma}}{\kappa^{3/2}} \frac{2}{\bar{\sigma}^2} \exp\left(\frac{\kappa}{\bar{\sigma}^2}(x - \bar{\theta})^2\right) dx$$

$$= \sqrt{\frac{\kappa}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{2^n 2^m n! m!}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\left(\frac{\kappa}{\bar{\sigma}^2}(x - \bar{\theta}) + \frac{\bar{\sigma}}{\kappa^{3/2}}\right)^2\right\}$$

$$H_n\left(\frac{\sqrt{\kappa}}{\bar{\sigma}}(x - \bar{\theta}) + \frac{\bar{\sigma}}{\kappa^{3/2}}\right) H_m\left(\frac{\sqrt{\kappa}}{\bar{\sigma}}(x - \bar{\theta}) + \frac{\bar{\sigma}}{\kappa^{3/2}}\right) dx.$$

Зробивши заміну змінної  $\frac{\sqrt{\kappa}}{\bar{\sigma}}(x - \bar{\theta}) + \frac{\bar{\sigma}}{\kappa^{3/2}} = \alpha$  матимемо

$$\begin{aligned} (\psi_n(x), \psi_m(x)) &= \frac{1}{\sqrt{\pi 2^n 2^m n! m!}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-\alpha^2\} H_n(\alpha) H_m(\alpha) d\alpha = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi n! m!}} \int_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{n+m} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \frac{d^m}{dx^m} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} d\alpha. \end{aligned}$$

Оскільки

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{-\frac{\alpha^2}{2}}\right)^{(n)} \left(e^{-\frac{\alpha^2}{2}}\right)^{(m)} d\alpha &= (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{-\frac{\alpha^2}{2}}\right)^{(m+n)} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} d\alpha = \\ &= (-1)^m \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{-\frac{\alpha^2}{2}}\right)^{m+n} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} d\alpha. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{-\frac{\alpha^2}{2}}\right)^{(n)} \left(e^{-\frac{\alpha^2}{2}}\right)^{(m)} d\alpha &= \begin{cases} \neq 0, & m = n, \\ 0, & m \neq n. \end{cases} \\ \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{\alpha^2}{2}}\right)^2 d\alpha &= \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \left(e^{-\frac{\alpha^2}{2}}\right)^{(2n)} d\alpha. \end{aligned}$$

Інтегруючи частинами, враховуючи, що такий інтеграл містить парні степені  $\alpha^k$  понижується і зводиться до  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} d\alpha$ , а інтеграл який містить  $\alpha^k$ ,  $k$ - непарні дорівнює нулю,  $2n$  разів взявши частинами одержимо  $(\psi_n(x), \psi_m(x)) = 1$ .

Щоб знайти ціну облігації з виплатами  $H(X_t) = \mathbb{I}_{\{\tau > t\}} = 1$ , потрібно розв'язати рівняння (4.61) на знаходження власних значень

на відрізку  $I = (-\infty, \infty)$  з  $\langle \mathcal{L}_2 \rangle$ , згідно з (4.61). Оскільки обидва кінці  $-\infty$  і  $\infty$  є природними границями, то розв'язок має вигляд [69-70].

$$\psi_n = \left( \sqrt{\frac{\kappa}{\pi}} \frac{\bar{\sigma}}{2^{n+1} n!} \right)^{1/2} \exp \left( -\frac{\bar{\sigma}}{\kappa^{3/2}} \frac{\sqrt{\kappa}}{\bar{\sigma}} (x - \bar{\theta}) - \frac{1}{2} \frac{\bar{\sigma}^2}{\kappa^3} \right) H_n \left( \frac{\sqrt{\kappa}}{\bar{\sigma}} (x - \bar{\theta}) + \frac{\bar{\sigma}}{\kappa^{3/2}} \right),$$

$H_n$  -поліноми Ерміта [71], які мають вигляд

$$H_n = (-1)^n e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} \left( e^{-\frac{x^2}{2}} \right) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^j}{2^j} \frac{n!}{j! (n-2j)!} x^{n-2j}.$$

Запишемо вирази для операторів  $\mathcal{A}_j$  та  $\mathcal{B}_j$ :

$$\mathcal{A}_j = -\vartheta_{j3} \partial_{xxx}^3 - (\vartheta_{j2} + \mathfrak{U}_{j2}) \partial_{xx}^2 - \mathfrak{U}_{j1} \partial_x, \quad \mathcal{B}_j = \vartheta_{j1} \partial_x - \vartheta_{j0}.$$

Оператори  $\mathcal{A}_{jk,n}$ ,  $\mathcal{B}_{jk,n}$ , і  $\tilde{\mathcal{B}}_{jk,n}$  записуються на основі рекурентних співвідношень:

$$\partial_x H_n = 2n H_{n-1}, \quad 2x H_n = H_{n+1} + \partial_x H_n,$$

$$\mathcal{A}_{jk,n} = -\vartheta_{j3} \left\{ \sum_{m=0}^{3 \wedge n} \binom{3}{m} \left( \frac{-1}{\kappa} \right)^{3-m} \left( \frac{2\sqrt{\kappa}}{\bar{\sigma}} \right)^m \frac{n! \mathcal{N}_n}{(n-m)! \mathcal{N}_{n-m}} \delta_{k,n-m} \right\}$$

$$- (\vartheta_{j2} + \mathfrak{U}_{j2}) \left\{ \sum_{m=0}^{3 \wedge n} \binom{2}{m} \left( \frac{-1}{\kappa} \right)^{2-m} \left( \frac{2\sqrt{\kappa}}{\bar{\sigma}} \right)^m \frac{n! \mathcal{N}_n}{(n-m)! \mathcal{N}_{n-m}} \delta_{k,n-m} \right\}$$

$$- \mathfrak{U}_{j1} \left\{ \left( \frac{-1}{\kappa} \right) \delta_{k,n} + \left( \frac{2\sqrt{\kappa}}{\bar{\sigma}} \right) \frac{n! \mathcal{N}_n}{(n-1)! \mathcal{N}_{n-1}} \delta_{k,n-1} \right\},$$

$$\mathcal{B}_{jk,n} = -\vartheta_{j1} \left\{ \left( \frac{-1}{\kappa} \right) \delta_{k,n} + \left( \frac{2\sqrt{\kappa}}{\bar{\sigma}} \right) \frac{n! \mathcal{N}_n}{(n-1)! \mathcal{N}_{n-1}} \delta_{k,n-1} \right\} - \vartheta_{j0} \delta_{k,n},$$

$$\tilde{\mathcal{B}}_{jk,n} = -\vartheta_{j1} \bar{\sigma}' \left\{ \left[ \left( \frac{-1}{\kappa} \right) \left( \frac{1}{2\bar{\sigma}} - \frac{\bar{\sigma}}{\kappa^3} - \frac{n}{\bar{\sigma}} \right) \right] \delta_{k,n} \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \left[ \left( \frac{-1}{\kappa} \right) \left( \frac{4}{\kappa^{\frac{3}{2}}} \right) + \left( \frac{2\sqrt{\kappa}}{\bar{\sigma}} \right) \left( \frac{1}{2\bar{\sigma}} - \frac{\bar{\sigma}}{\kappa^3} - \frac{n}{\bar{\sigma}} \right) \right] \frac{n! \mathcal{N}_n}{(n-1)! \mathcal{N}_{n-1}} \delta_{k,n-1} \\
& + \left[ \left( \frac{-1}{\kappa} \right) \left( \frac{-2}{\bar{\sigma}} \right) + \left( \frac{2\sqrt{\kappa}}{\bar{\sigma}} \right) \left( \frac{4}{\kappa^{\frac{3}{2}}} \right) \right] \frac{n! \mathcal{N}_n}{(n-2)! \mathcal{N}_{n-2}} \delta_{k,n-2} \\
& + \left[ \left( \frac{2\sqrt{\kappa}}{\bar{\sigma}} \right) \left( \frac{-2}{\bar{\sigma}} \right) \right] \frac{n! \mathcal{N}_n}{(n-3)! \mathcal{N}_{n-3}} \delta_{k,n-3} \} - \vartheta_{i_0} \bar{\sigma}' \\
& \left\{ \left( \frac{1}{2\bar{\sigma}} - \frac{\bar{\sigma}}{\kappa^3} - \frac{n}{\bar{\sigma}} \right) \delta_{k,n} + \left( \frac{4}{\kappa^{\frac{3}{2}}} \right) \frac{n! \mathcal{N}_n}{(n-1)! \mathcal{N}_{n-1}} \delta_{k,n-1} + \left( \frac{-2}{\bar{\sigma}} \right) \frac{n! \mathcal{N}_n}{(n-2)! \mathcal{N}_{n-2}} \delta_{k,n-2} \right\} \\
& - \vartheta_{i_1} \bar{f} \bar{\Omega}' \left\{ \left( \frac{1}{\kappa^3} \right) \delta_{k,n} + \left( \frac{-4}{\bar{\sigma} \kappa^{\frac{3}{2}}} \right) \frac{n! \mathcal{N}_n}{(n-1)! \mathcal{N}_{n-1}} \delta_{k,n-1} + \left( \frac{4}{\bar{\sigma}^2} \right) \frac{n! \mathcal{N}_n}{(n-2)! \mathcal{N}_{n-2}} \delta_{k,n-2} \right\} \\
& - \vartheta_{i_0} \bar{f} \bar{\Omega}' \left\{ \left( \frac{-1}{\kappa^2} \right) \delta_{k,n} + \left( \frac{2}{\bar{\sigma} \sqrt{\kappa}} \right) \frac{n! \mathcal{N}_n}{(n-1)! \mathcal{N}_{n-1}} \delta_{k,n-1} \right\}.
\end{aligned}$$

Розрахунок  $c_n$  можна знайти в [58-60]

$$c_n = (\psi_n, 1) = \frac{2}{\bar{\sigma}} \sqrt{\frac{\pi}{\kappa}} \mathcal{N}_n A^n e^{-A^2/4}.$$

Наближена ціна облігації тепер може бути розрахована з використанням теорем 4.1 4.3.

Для облігації з нульовим купоном, часто розглядають криву прибутковості, а не саму ціну облігації. Дохід  $R^{\bar{\epsilon}, \bar{\delta}'}$  в облігації з нульовим купоном, за якою виплачується один долар в момент часу  $t$  визначається через співвідношення:

$$w^{\bar{\epsilon}, \bar{\delta}'} = \exp(-R^{\bar{\epsilon}, \bar{\delta}'} t),$$

Отримаємо наближення для облигації з нульовим купоном, розкладаючи в ряд, як ціни облигації,  $w_{\bar{\epsilon}, \bar{\delta}'}$  таким і дохід  $R_{\bar{\epsilon}, \bar{\delta}'}$  за степенями  $\sqrt{\epsilon_j}$  і  $\sqrt{\delta_i}$ :

$$\begin{aligned} & w_{\bar{0}, \bar{0}'} + \sum_{j=1}^l \sqrt{\epsilon_j} w_{\bar{1}j, \bar{0}'} + \sum_{i=1}^r \sqrt{\delta_i} w_{\bar{0}, \bar{1}'_i} + \dots = \\ & \exp \left\{ - \left( R_{\bar{0}, \bar{0}'} + \sum_{j=1}^l \sqrt{\epsilon_j} R_{\bar{1}j, \bar{0}'} + \sum_{i=1}^r \sqrt{\delta_i} R_{\bar{0}, \bar{1}'_i} \right) t \right\} \\ & = e^{-R_{\bar{0}, \bar{0}'} t} + \sum_{j=1}^l \sqrt{\epsilon_j} R_{\bar{1}j, \bar{0}'} e^{-R_{\bar{0}, \bar{0}'} t} + \sum_{i=1}^r \sqrt{\delta_i} R_{\bar{0}, \bar{1}'_i} e^{-R_{\bar{0}, \bar{0}'} t} + \dots \end{aligned}$$

Згрупувавши по степенях  $\sqrt{\epsilon_j}$  і  $\sqrt{\delta_i}$  отримаємо:

$$\begin{aligned} R_{\bar{\epsilon}, \bar{\delta}'} & \approx R_{\bar{0}, \bar{0}'} + \sum_{j=1}^l \sqrt{\epsilon_j} R_{\bar{1}j, \bar{0}'} + \sum_{i=1}^r \sqrt{\delta_i} R_{\bar{0}, \bar{1}'_i}, \\ R_{\bar{0}, \bar{0}'} & = -\frac{1}{t} \ln \left( w_{\bar{0}, \bar{0}'} \right), \quad R_{\bar{1}j, \bar{0}'} = \frac{-w_{\bar{1}j, \bar{0}'}}{t w_{\bar{0}, \bar{0}'}} , \quad R_{\bar{0}, \bar{1}'_i} = \frac{-w_{\bar{0}, \bar{1}'_i}}{t w_{\bar{0}, \bar{0}'}} . \end{aligned}$$

Зауваження: рисунки будуються покомпонентно в кожній відповідній часовій шкалі, аналогічно як для двох компонент як в роботах [56] та [60].

Основною перевагою розглянутої методології ціноутворення є те, що, комбінуючи методи з спектральної теорії, регулярної теорії збурень і теорії сингулярних збурень зводиться все до розв'язання рівнянь на знаходження власних функцій та власних значень.

#### 4.4. Спектральне дослідження деривативів на базі моделі *CEV* з багатовимірною волатильністю

Модель *CEV* є узагальненням моделей геометричного броунівського руху. Вперше ця модель запропонована для дослідження ціни європейського опціону [71-73]. Вона ґрунтується на припущенні, що ризик-нейтральний процес, який описує ціну акції  $S$  має вигляд

$$dS = (r - q)Sdt + \sigma S^\alpha dz,$$

де  $r$ -безризикова відсоткова ставка,  $q$ -дивідендна дохідність,  $\sigma$ -параметр волатильності,  $\alpha$ -додатня константа,  $dz$ -вінерівський процес. При  $\alpha = 1$  модель *CEV* співпадає з моделлю геометричного броунівського руху, якщо  $\alpha < 1$  то при зменшенні вартості активу його волатильність збільшується, якщо  $\alpha > 1$  то при зростанні вартості активу його волатильність також зростає. Це відповідає усміщці волатильності і означає, що волатильність є зростаючою функцією залежною від ціни активу.

Порівнюючи з моделями геометричного броунівського руху переваги моделі *CEV* полягають у тому, що коефіцієнт нестабільності співвідноситься з ціною ризикованих активів і може пояснити емпіричні упередження, такі як нестабільність посмішки волатильності [74]. Модель *CEV* зазвичай застосовується для розрахунку теоретичної ціни, чутливості та передбачуваної волатильності опціонів [75-77]. Протягом останніх років проблема інвестицій для пенсійного фонду є дуже важливою, виявилось що модель *CEV* успішно застосовується для вивчення оптимальної інвестиційної стратегії [78-81].



В кінці минулого століття увагу вчених фінансистів привернула проблема зв'язку між ціною активу та його волатильністю [82]. Було встановлено, що ціна активу веде себе як волатильність. У відомій моделі Блека-Шоулза волатильність є сталою [83]. Це зумовило низку праць для уточнення цієї моделі. Емпіричними дослідженнями встановлено, що волатильність є випадковою величиною залежною від часу [84-86]. В [87-88] запропоновано аналітичні моделі, що мають стохастичну волатильність. Лінецький та низка інших авторів [89-91] досліджували модель стохастичної волатильності зі стрибками. Модель CEV є узагальненням моделей динамічної волатильності. Зокрема вона дає можливість дослідити ціну активів, які змінюються неперервно в часі [92-94]. У роботі розглядається модель CEV з багатовимірною стохастичною волатильністю. Використовуючи спектральну теорію самоспряжених операторів у гільбертовому просторі та хвильову теорію сингулярних і регулярних збурень встановлено аналітичну формулу наближеної ціни активів, які описуються моделлю CEV з стохастичною волатильністю залежною від  $l$ -швидко змінних та  $l$ -повільно змінних чинників,  $l \geq 1, n \geq 1, l \in N, n \in N$  і локальної змінної.

Вважатимемо, що актив задається через  $S_t = \mathbb{I}_{\{\tau > t\}} X_t$ . Оскільки  $S$  повинно бути додатним, простором станів  $X$  буде  $e_1, e_2 = (0, \infty)$ .

Багатовимірна дифузія утворюється на скачку дефолту моделі сталої варіації [95]. Зокрема,  $\tilde{\mathbb{P}}$  динаміка  $X$  до дефолту задаються:

$$dX_t = (\mu + cX_t^{2\eta})X_t dt + (f(Y_1, \dots, Y_l, Z_1, \dots, Z_n)X_t^\eta)X_t d\tilde{W}_t^x,$$

$$h(X_t) = \mu + cX_t^{2\eta}.$$

Для зручності обчислень безризикова відсоткова ставка рівна нулю:

$r = 0$ . Константи  $\mu$  і  $c$  строго додатні. Як завжди,  $Y_1, \dots, Y_l$  і  $Z_1, \dots, Z_n$  є швидко і повільно змінні чинники волатильності. Зауважимо, що

волатильність  $X$  має і локальну компоненту  $X_t^\eta$  і нелокальні чинники багато вимірності  $f(Y_1, \dots, Y_l, Z_1, \dots, Z_n)$ . Припустимо, що  $\eta < 0$ , тобто  $X_t^\eta$  зростає при спаданні  $X_t$ , відображаючи той факт, що ціни і волатильність мають відємну кореляцію. Стохастичний рівень ризику  $h(X_t)$  також зростає, коли  $X$  спадає, тобто ймовірність дефолту збільшується коли  $X$  прямує до нуля. Відзначимо, що  $S$  є  $\tilde{\mathbb{P}}$ -мартингалом. Обчислимо наближену ціну європейського опціону що описується за допомогою  $S$ .

Запишемо оператор  $\langle \mathcal{L}_2 \rangle$  і пов'язані з ним щільності зі швидкістю  $m(x)$ :

$$\langle \mathcal{L}_2 \rangle = \frac{1}{2} \bar{\sigma}^2 x^{2\eta+2} \partial_{xx}^2 + (\mu + cx^{2\eta}) x \partial_x - (\mu + cx^{2\eta}), \quad (4.62)$$

$$m(x) = \frac{2}{\bar{\sigma}^2} x^{\frac{2c}{\bar{\sigma}^2 - 2 - 2\eta}} \exp(Ax^{-2\eta}), \quad A = \frac{\mu}{\bar{\sigma}^2 |\eta|}.$$

Розглянемо диференціальне рівняння

$$\frac{1}{2} \bar{\sigma}^2 x^{2\eta+2} y'' + (\mu + cx^{2\eta}) xy' - (\mu + cx^{2\eta}) y = 0,$$

Зробимо заміну, щоб не було першої похідної в одержаному рівнянні:

$$y = s(x)u(x), \quad y'(x) = s'(x)u(x) + s(x)u'(x),$$

$$y''(x) = s''(x)u(x) + 2s'(x)u'(x) + s(x)u''(x),$$

де  $u(x)$  – невідома функція,  $s(x)$  – підберемо з одержаного рівняння

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \bar{\sigma}^2 x^{2\eta+2} s(x)u''(x) + \bar{\sigma}^2 x^{2\eta+2} s'(x)u'(x) + \frac{1}{2} \bar{\sigma}^2 x^{2\eta+2} s''(x)u(x) \\ & + (\mu + cx^{2\eta}) xs(x)u'(x) + (\mu + cx^{2\eta}) xu(x)s'(x) - (\mu + cx^{2\eta}) s(x)u(x) \\ & = 0, \end{aligned}$$

звідки

$$\bar{\sigma}^2 x^{2\eta+2} s'(x) + (\mu + cx^{2\eta})xs(x) = 0,$$

тобто

$$\frac{s'(x)}{s(x)} = -\frac{(\mu + cx^{2\eta})x}{\bar{\sigma}^2 x^{2\eta+2}}, \quad \frac{s'(x)}{s(x)} = -\frac{\mu + cx^{2\eta}}{\bar{\sigma}^2 x^{2\eta+1}},$$

$$\ln s(x) = -\int \frac{\mu + cx^{2\eta}}{\bar{\sigma}^2 x^{2\eta+1}} dx, \quad \ln s(x) = -\frac{\mu x^{-2\eta}}{2\bar{\sigma}^2 |\eta|} - \frac{c}{\bar{\sigma}^2} \ln x, \quad (\eta < 0).$$

$$s = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\mu x^{-2\eta}}{2\bar{\sigma}^2 |\eta|} - \frac{c}{\bar{\sigma}^2} \ln x \right\} = \exp \left\{ -\frac{A}{2} x^{-2\eta} - \frac{c}{\bar{\sigma}^2} \ln x \right\},$$

$$A = \frac{\mu}{2\bar{\sigma}^2 |\eta|}$$

Знайдемо похідні

$$s' = \left( \frac{A\eta}{x^{2\eta+1}} - \frac{c}{\bar{\sigma}^2 x} \right) s = \left( A\eta x^{-2\eta-1} - \frac{c}{\bar{\sigma}^2 x} \right) s,$$

$$s'' = \left[ \left( A\eta(-2\eta - 1)x^{-2\eta-2} + \frac{c}{\bar{\sigma}^2 x^2} \right) + \left( A\eta x^{-2\eta-1} - \frac{c}{\bar{\sigma}^2 x} \right)^2 \right] s.$$

підставимо в рівняння, маємо

$$\begin{aligned} & \frac{\bar{\sigma}^2}{2} x^{2\eta+2} u''_{x^2} + \left\{ \frac{\bar{\sigma}^2}{2} x^{2\eta+2} \left[ A\eta(-2\eta - 1)x^{-2\eta-2} + \frac{c}{\bar{\sigma}^2 x^2} + \left( A\eta x^{-2\eta-1} - \frac{c}{\bar{\sigma}^2 x} \right)^2 \right] \right. \\ & \left. + x(\mu + cx^{2\eta}) \left( A\eta x^{-2\eta-1} - \frac{c}{\bar{\sigma}^2 x} \right) - (\mu + cx^{2\eta}) \right\} u = 0, \end{aligned}$$

Спростивши, отримаємо

$$\frac{\bar{\sigma}^2}{2} x^{2\eta+2} u''_{x^2} + \left[ -\frac{\mu}{2} + \mu \left( \eta + \frac{c}{\bar{\sigma}^2} \right) - x^{-2\eta} \frac{\mu}{2\bar{\sigma}^2} - x^{2\eta} c \left( \frac{1}{2} - \frac{c+1}{\bar{\sigma}^2} \right) \right] u = 0.$$

Зробимо заміну змінних

$$\sqrt{Ax}^{-2\eta} = \theta, \quad \text{тоді } x = \theta^{-\frac{1}{\eta}} A^{\frac{1}{2\eta}}, \text{ а відповідні похідні набудуть вигляду}$$

$$u'_x = u'_\theta \theta'_x = u'_\theta \sqrt{A}(-\eta)x^{-\eta-1},$$

$$\theta''_{x^2} = \sqrt{A}(-\eta)(-\eta-1)x^{-\eta-2},$$

$$u''_{x^2} = (u'_\theta \theta'_x)'_x = u''_{\theta^2}(u'_\theta)^2 + u'_\theta \theta''_{x^2},$$

$$u''_{x^2} = u''_{\theta^2} A \eta^2 x^{-2\eta-2} + u'_\theta \sqrt{A}(-\eta)(-\eta-1)x^{-\eta-2},$$

$$\frac{\mu}{|\eta|} x^{-2\eta-2} x^{2\eta+2} u''_{\theta^2} + \frac{\bar{\sigma}^2}{2} \sqrt{A}(-\eta)(-\eta-1)x^{-\eta-2} x^{2\eta+2} u'_\theta$$

$$+ \left[ \left( -\frac{\mu}{\sigma^2} (-2\eta-1)x^{-2\eta-2} + \frac{c}{\sigma^2 x^2} \right) + \left( \frac{\mu}{\sigma^2} x^{-2\eta-1} + \frac{c}{\sigma^2 x} \right) \right] u = 0,$$

$$\frac{\mu|\eta|}{2} u''_{\theta^2} + \frac{\bar{\sigma}^2}{2} \sqrt{A} \eta (\eta+1) x^\eta u'_\theta + \left[ \left( -\frac{\mu}{\sigma^2} (-2\eta-1)x^{-2\eta-2} + \frac{c}{\sigma^2 x^2} \right) \right] u = 0,$$

$$\frac{\mu|\eta|}{2} u''_{\theta^2} + \frac{\mu(-\eta-1)}{2} \theta^{-1} u'_\theta + \left[ \left( -\frac{\mu}{\sigma^2} (-2\eta-1)x^{-2\eta-2} + \frac{c}{\sigma^2 x^2} \right) \right] u = 0,$$

$$\frac{\mu|\eta|}{2} u''_{\theta^2} + \frac{\mu(|\eta|-1)}{2} \theta^{-1} u'_\theta + \left[ \left( -\frac{\mu}{\sigma^2} (-2\eta-1)x^{-2\eta-2} + \frac{c}{\sigma^2 x^2} \right) \right] u = 0,$$

Зробимо заміну  $u = v s$

$$\begin{aligned} & \frac{\mu|\eta|}{2} v'' s + \mu|\eta| v' s' + \frac{\mu|\eta|}{2} v s'' + \frac{\mu(|\eta|-1)}{2} \theta^{-1} v' s + \frac{\mu(|\eta|-1)}{2} v s' \theta^{-1} \\ & + \left[ \left( -\frac{\mu}{\sigma^2} (-2\eta-1)x^{-2\eta-2} + \frac{c}{\sigma^2 x^2} \right) \right] v s = 0, \end{aligned}$$

звідси

$$\mu|\eta| s' + \frac{\mu(|\eta|-1)}{2} \theta^{-1} s = 0,$$

тобто

$$\frac{s'}{s} = -\frac{(|\eta|-1)}{2|\eta|\theta}, \quad \ln s = -\frac{(|\eta|-1)}{2|\eta|} \ln \theta,$$

$$s = \exp \left\{ -\frac{(|\eta| - 1)}{2|\eta|} \ln \theta \right\}, \quad s' = \frac{|\eta| - 1}{2|\eta|\theta}, \quad s'' = \frac{|\eta| - 1}{2|\eta|\theta^2},$$

$$\frac{\mu|\eta|}{2} v''_{\theta^2} + \frac{\mu(|\eta|^2 - |\eta|)}{4|\eta|\theta^2} - \frac{\mu(|\eta|^2 - 2|\eta| + 1)}{4|\eta|\theta^2} + \left[ \left( -\frac{\mu}{\sigma^2} (-2\eta - 1)x^{-2\eta-2} + \frac{c}{\sigma^2 x^2} \right) \right] v = 0,$$

Потрібно щоб в точках L і R розв'язок дорівнював нулю, тому для зручності зробимо заміну  $x = \sigma(\theta) = Le^\theta$  тоді будемо мати

$$\frac{\sigma^2}{2} V''_{\theta^2} - \left( \frac{1}{2} \left( \frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2} \right)^2 + r \right) V = 0,$$

Тому на власні значення і власні функції досліджуємо

$$\frac{\sigma^2}{2} V''_{\theta^2} - \left( \frac{V^2}{2} + r \right) V = \lambda V.$$

Маємо

$$\lambda_n = \frac{n\pi\sigma}{\sqrt{2} \ln \frac{R}{L}}, \quad V_n(\theta) = \sin \frac{n\pi\sigma}{\sqrt{2} \ln \frac{R}{L}} \theta,$$

з того що

$$\int_0^{\ln \frac{L}{R}} \sin^2 \frac{n\pi\sigma}{\sqrt{2} \ln \frac{R}{L}} \theta d\theta = \frac{1}{2} \ln \frac{R}{L}$$

маємо

$$V_n(\theta) = \left( \sqrt{\frac{\ln \frac{R}{L}}{2}} \right)^{-1} \sin \frac{n\pi \ln \frac{x}{L}}{\ln \frac{R}{L}},$$

$$\psi_n(x) = \left( \frac{n\pi\sigma}{2 \ln \frac{R}{L}} \right)^2 \left( \lambda_n^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2} \right)^2 + r \right) \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{\ln \frac{R}{L}}} \exp \left\{ -\frac{r}{\sigma^2} \ln x \right\} \sin \frac{n\pi \ln \frac{x}{L}}{\ln \frac{R}{L}}.$$

Запишемо оператор  $\langle \mathcal{L}_2 \rangle$  і пов'язані з ним щільності зі швидкістю  $m(x)$ :

$$\langle \mathcal{L}_2 \rangle = \frac{1}{2} \bar{\sigma}^2 x^{2\eta+2} \partial_{xx}^2 + (\mu + cx^{2\eta}) x \partial_x - (\mu + cx^{2\eta}), \quad (4.63)$$

$$m(x) = \frac{2}{\bar{\sigma}^2} x^{\frac{2c}{\bar{\sigma}^2 - 2 - 2\eta}} \exp(Ax^{-2\eta}), \quad A = \frac{\mu}{\bar{\sigma}^2 |\eta|}.$$

Для дифузії, пов'язаної з нескінченно малим генератором (4.63), кінець інтервалу  $e_2 = \infty$  є природною границею. Однак, класифікація кінцевої точки  $e_1 = 0$  залежить від величини  $\eta$  і  $c/\bar{\sigma}^2$ , а саме:

- 1)  $c/\bar{\sigma}^2 \geq 1/2$ ,  $\eta < 0$ ,  $e_1 = 0$  – тривіальний випадок,
- 2)  $c/\bar{\sigma}^2 \in (0, 1/2)$ ,  $\eta \in \left[ \frac{c}{\bar{\sigma}^2} - 1/2, 0 \right)$ ,  $e_1 = 0$  – це число

відіграє роль початкового моменту,

- 3)  $c/\bar{\sigma}^2 \in (0, 1/2)$ ,  $\eta < \frac{c}{\bar{\sigma}^2} - \frac{1}{2}$ ,  $e_1 = 0$  при такій умові

початок інтервалу є сталим.

Якщо параметри  $(c, \bar{\sigma}, \eta)$  задовольняють  $c/\bar{\sigma}^2 \in (0, 1/2)$ , а  $\eta \in \left[ \frac{c}{\bar{\sigma}^2} - \frac{1}{2}, 0 \right)$ ,  $e_1 = 0$ , то  $e_1$  вважають кіллінговою межею. Щоб обчислити наближену ціну європейського опціону, потрібно знайти власні функції та власні значення (4.53) на інтервалі  $(0, \infty)$  для оператора  $\langle \mathcal{L}_2 \rangle$  записаного за допомогою (4.54) та з крайовими умовами

$$\lim_{x \rightarrow 0} \psi_n = 0, \quad \text{якщо} \quad \frac{c}{\bar{\sigma}^2} \in \left( 0, \frac{1}{2} \right).$$

Розв'язок має вигляд [95]

$$\psi_n = A^{\frac{v}{2}} \sqrt{\frac{(n-1)! \mu}{\Gamma(v+n)}} x \exp(-Ax^{-2\eta}) L_{n-1}^{(v)}(Ax^{-2\eta}), n = 1, 2, 3, \dots,$$

$$\lambda_n = 2\mu|\eta|(n+v), \quad v = \frac{1 + 2(\frac{2}{\sigma^2})}{2|\eta|},$$

де  $L_n^{(v)}$  є узагальненими поліномами Лагерра, які мають наступний вигляд

$$L_n^{(v)} = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n+v}{n-i} \frac{x^i}{i!}.$$

Запишемо вирази для операторів  $\mathcal{A}_j$  і  $\mathcal{B}_j$ :

$$\mathcal{A}_j = -v_{j3} x^{\eta+1} \partial_x x^{2\eta+2} \partial_{xx}^2 - v_{j2} x^{2\eta+2} \partial_{xx}^2,$$

$$\mathcal{B}_j = -v_{j1} x^{\eta+1} \partial_x - v_{j0}.$$

Аналітичні вирази для  $\mathcal{A}_{jk,n}$ ,  $\mathcal{B}_{jk,n}$  і  $\tilde{\mathcal{B}}_{jk,n}$  легко отримати, зробивши заміну змінних  $Ax^{-2\eta} \rightarrow y$ , використовуючи

$$\partial_y L_n^v(y) = -L_{n-1}^{(v+1)}(y),$$

$$\int_0^\infty y^\gamma e^{-y} L_n^{(\alpha)}(y) L_m^{(\beta)}(y) dy = \frac{\Gamma(\alpha - \gamma + n) \Gamma(\beta + 1 + m) \Gamma(\gamma + 1)}{\Gamma(\alpha - \gamma) \Gamma(\beta + 1) n! m!}$$

$${}_3F_2 \left( \begin{matrix} \gamma + 1, & -m, & \gamma + 1 - \alpha \\ \beta + 1, & \gamma + 1 - \alpha - n, & \end{matrix} ; 1 \right)$$

де  ${}_3F_2$  є узагальненою гіпергеометричною функцією [96] і має вигляд

$${}_3F_2 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\gamma + 1)(\gamma + 2) \dots (\gamma + n)(-m)(-m + 1) \dots (-m + n - 1)}{n! (\beta + 1)(\beta + 2) \dots (\beta + n)(\gamma + 1 - \alpha - n)}$$

$$\frac{(\gamma + 1 - \alpha)(\gamma + 2 - \alpha) \dots (\gamma - \alpha + n)}{(\gamma + 1 - \alpha - n + 1) \dots (\gamma - \alpha)} x^n.$$

Виграш європейського опціону з ціною виконання  $K > 0$  можна розкласти наступним чином:

$$(K - S_t)^+ = (K - X_t)^+ \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} + K(1 - \mathbb{1}_{\{\tau > t\}}). \quad (4.63)$$

Перший доданок в правій частині (4.63) є виграш опціону до дефолту в час  $t$ . Другий член представляє виграш опціону даного після дефолту, який може відбутися в час  $t$ . Таким чином, вартість опціону з ціною виконання  $K$  позначається  $w^{\bar{\epsilon}, \bar{\delta}'}(t, x; K)$  може бути виражена у вигляді суми двох частин:

$$w^{\bar{\epsilon}, \bar{\delta}'}(t, x; K) = w_0^{\bar{\epsilon}, \bar{\delta}'}(t, x; K) + w_D^{\bar{\epsilon}, \bar{\delta}'}(t, x; K),$$

де

$$w_0^{\bar{\epsilon}, \bar{\delta}'}(t, x; K) = \tilde{\mathbb{E}}_{x, y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_r} [(K - X_t)^+ \mathbb{1}_{\{\tau > t\}}],$$

$$w_D^{\bar{\epsilon}, \bar{\delta}'}(t, x; K) = K - K \tilde{\mathbb{E}}_{x, y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_r} [\mathbb{1}_{\{\tau > t\}}] =$$

$$K - K \int_0^{\infty} \tilde{\mathbb{E}}_{x, y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_r} [\delta_{x'}(X_t) \mathbb{1}_{\{\tau > t\}}] dx'$$

$$= K - K \int_0^{\infty} w_1^{\bar{\epsilon}, \bar{\delta}'}(t, x; x') dx',$$

$$w_1^{\bar{\epsilon}, \bar{\delta}'}(t, x; x') = \tilde{\mathbb{E}}_{x, y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_r} [\delta_{x'}(X_t) \mathbb{1}_{\{\tau > t\}}].$$

Зауважимо, що  $1 \notin L^2(\mathbb{R}^+, m)$  використано той факт, що



$1 = \int_0^\infty \delta_{x'}(X_t) d x'$  на множині  $\{\tau > T\}$ . Так, як функції виграшу  $H_0(x) = (K - x)^+$  і  $H_1(x) = \delta_{x'}(x)$  належать  $L^2(\mathbb{R}^+, m)$ , можемо обчислити:

$$c_{0,n} = (\psi_n(\cdot), (k - \cdot)^+), \quad c_{1,n} = (\psi_n, \delta_{x'}).$$

Вираз для  $c_{0,n}$  можна знайти в [96].  $c_{1,n}$  обчислюється тривіально. У роботі

$$c_{0,n} = \frac{A^{\frac{v}{2}+1} K^{\frac{2c}{\sigma^2}+1-2\eta} \sqrt{\Gamma(v+n)}}{\Gamma(v+n) \sqrt{\mu(n-1)!}} \times$$

$$\left[ \frac{|\eta|}{\frac{c}{\sigma^2}+|\eta|} {}_2F_2 \left( \begin{matrix} 1-n & \frac{c}{\sigma^2}+1 \\ v+1 & \frac{c}{\sigma^2}+2 \end{matrix} ; AK^{-2\eta} \right) - \frac{\Gamma(v+1)(n-1)!}{\Gamma(v+n+1)} L_{n-1}^{(v+1)}(AK^{-2\eta}) \right],$$

$$c_{1,n} = \psi_n(x') m(x').$$

Наближену ціну європейського опціону тепер можна обчислити за допомогою теорем 4.1 4.3 [60].

Зауважимо, що волатильність  $I^{\bar{\epsilon}, \bar{\delta}'}$  опціону з ціною  $w^{\bar{\epsilon}, \bar{\delta}'}(t, x; K)$  визначається за допомогою формули

$$w^{\bar{\epsilon}, \bar{\delta}'}(t, x; K) = w^{BS}(t, x, I^{\bar{\epsilon}, \bar{\delta}'}; K)$$

де  $w^{BS}(t, x, I^{\epsilon, \delta}; K)$  ціна Блека-Шоулза з волатильністю  $I^{\bar{\epsilon}, \bar{\delta}'}$ .

Зауважимо, що рисунки будуються покомпонентно в кожній відповідній часовій шкалі, аналогічно як для двох компонент як в роботах [56] та [97].

Спектральна теорія стала важливим інструментом для аналізу дифузії, а саме в дослідженні розвинень за власними функціями лінійних операторів. Для фінансових моделей дифузії є основним процесом, тому не дивно, що методи спектральної теорії внесли свій вклад у фінансову математику. Зокрема, багато проблем, пов'язаних з оцінкою похідних активів були розв'язані аналітично за допомогою методів спектральної теорії. Використовуючи методи з спектральної теорії та теорії сингулярних і регулярних збурень, можна знайти наближену ціну деривативів як розклад за власними функціями. Використовуючи інфінітезимальні генератори  $(l+n+1)$  вимірної дифузії, при  $l=1$  та  $n=1$  отримаємо методику роботи [56], тобто дифузія залежить від однієї локальної змінної, одновимірного швидкозмінного чинника і одновимірного повільно змінного чинника.

Спектральний метод застосовувався до ціноутворення похідних фінансових інструментів через представлення ціни активу  $w(t, x)$  функцією від майбутньої вартості основного процесу  $X$ . Математично це виражається, як [52]

$$w(t, x) = \tilde{E}_x [H(X_t)] = \int H(y)p(t, x, y) dy. \quad (4.65)$$

де  $p(t, x, y)$  – щільність переходу  $X$  по  $P$ . Якщо інфінітезимальний (нескінченно малий) генератор  $L$  базового процесу самоспряжений в гільбертовому просторі з приростом міри  $m(x)dx$ , і спектр  $L$  є дискретним, то щільність переходу  $X$  має розклад в ряд за власними функціями:

$$p(t, x, y) = m(y) \sum_n e^{-\lambda_n t} \varphi_n(y) \varphi_n(x), \quad (4.66)$$

де  $\{\lambda_n\}$  – власні значення  $(-L)$  і  $\{\varphi_n\}$  – власні функції: тобто

$$-L\varphi_n = \lambda_n \varphi_n.$$

Значення ціни деривативу може бути виражене аналітично шляхом підстановки (4.66) в (4.65):

$$w(t, x) = \sum c_n e^{-\lambda n t} \varphi_n(x), \quad c_n = (\varphi_n, H) := \int H(y) \varphi_n(y) m(y) dy.$$

Розглянемо інфінітезимальний генератор загальної одномірної дифузії:

$$L = \frac{1}{2} a^2(x) \partial_{xx}^2 + b(x) \partial_x - k(x), \quad x \in (e_1, e_2), \quad (4.67)$$

з областю визначення  $\text{dom}(L)$ , який завжди самоспряжений в гільбертовому просторі  $H = L^2(I, m)$ , де  $I \in \mathbb{R}$ ,  $I = (e_1, e_2)$  та  $m$ –швидкість щільності дифузії.

$$m(x) := \frac{2}{a^2(x)} \exp \left( \int_{x_0}^x \frac{2b(y)}{a^2(y)} dy \right).$$

Нижня межа інтегрування  $x_0 \in I$  є довільною. Таким чином, при одномірній дифузії для опису основної динаміки, спектральний метод є потужним інструментом для аналітичного ціноутворення.

Одномірні дифузії широко застосовуються в фінансах, але існують випадки, у яких одномірні дифузії не є адекватними для опису динаміки базового активу [98]. Це стосується, наприклад, досліджень стохастичної волатильності, зокрема волатильності активу, та контролюється нелокальною дифузиею, в цьому випадку інфінітезимальний генератор багатовимірної дифузії буде самоспряженим тільки тоді, коли вектор зсуву задовольняє певні обмеження, пов'язані з волатильністю кореляційної матриці [99].

Комбінуючи методи з теорії сингулярних збурень і спектральної теорії, можна наближено обчислити ціну деривативу, як розклад в ряд за власними функціями, використовуючи інфінітезимальні не самоспряжені генератори двовимірної дифузії.

Спочатку розглянемо загальну одномірну дифузю

$$dX_t = v(X_t)dt + a(X_t)dW_t,$$

в якій є можливість проявляти кілінг (стрибок дефолту) на швидкості  $h(X_t) \geq 0$ ,  $W_t$  – геометричний броунівський рух (ГБР),  $X$  завжди строго додатній. До загальної дифузії додаємо два чинники нелокальної волатильності:  $a(X_t) \rightarrow a(X_t)f(Y_t, Z_t)$ . Перший  $Y$  – вектор швидко змінних чинників. Другий чинник  $Z$  змінюється повільно. Таким чином, наша модель є багатовимірною стохастичною волатильною моделлю.

Нехай  $(\Omega, F, P)$  ймовірнісний простір, який підтримує корельований броунівський рух  $(W^x, W^y, W^z)$ . Експоненціальна випадкова змінна  $\varepsilon \sim \text{Exp}(1)$ , не залежить від  $(W^x, W^y, W^z)$ . Будемо вважати, що економіка з трьома чинниками, описана однорідним часом, неперервним процесом Маркова  $\chi = (X, Y, Z)$ , який приймає значення в деякому просторі станів

$E = I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ,  $I = (e_1, e_2)$ ,  $-\infty \leq e_1 < e_2 \leq \infty$ . Припустимо, що  $\chi$  починається в  $E$  і миттєво зникає, як тільки  $X \notin I$ , тобто:

$$\chi_t = \begin{cases} (X_t, Y_t, Z_t), & \tau_I > t \\ \Delta, & \tau_I \leq t \end{cases}, \quad \tau_I = \inf(t > 0: X_t \notin I),$$

де  $(X, Y, Z)$ , задаються

$$\left\{ \begin{array}{l} dX_t = v(X_t)dt + a(X_t)f(Y_t, Z_t)dW_t^x, \\ dY_t = \frac{1}{\varepsilon}\alpha(Y_t)dt + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\beta(Y_t)dW_t^y, \\ dZ_t = \delta c(Z_t)dt + \sqrt{\delta}g(Z_t)dW_t^z, \\ d\langle W^x, W^y \rangle_t = \rho_{xy}dt, \\ d\langle W^x, W^z \rangle_t = \rho_{xz}dt, \\ d\langle W^y, W^z \rangle_t = \rho_{yz}dt, \\ (X_0, Y_0, Z_0) = (x, y, z) \in E. \end{array} \right. \quad (4.68)$$

$|\rho_{xy}|, |\rho_{xz}|, |\rho_{yz}| \leq 1$  та  $1 + 2\rho_{xy}\rho_{xz}\rho_{yz} - \rho_{xy}^2 - \rho_{xz}^2 - \rho_{yz}^2 \geq 0$  так, щоб матриця кореляції броунівського руху була додатно визначена.

Генератори  $Y$  та  $Z$  мають вигляд

$$\mathfrak{L}_Y^\epsilon = \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{1}{2} \beta^2(y) \partial_{yy}^2 + \alpha(y) \partial_y \right), \mathfrak{L}_Z^\delta = \delta \left( \frac{1}{2} g^2(z) \partial_{zz}^2 + c(z) \partial_z \right), \quad (4.69)$$

узгоджені з чинниками  $\frac{1}{\epsilon}$  та  $\delta$  відповідно. Таким чином,  $Y$  та  $Z$  мають внутрішню шкалу часу  $\epsilon > 0$  і  $\frac{1}{\delta} > 0$ . Зауважимо, що  $\mathfrak{L}_Y^\epsilon$  і  $\mathfrak{L}_Z^\delta$  мають вид (4.66) з  $k(x) = 0$  для всіх  $x \in I$ . Нас цікавить оцінка похідного активу, з виплатою в час  $t > 0$ , яка залежить від траєкторії  $X$ . Зокрема, розглянемо форми виплати:

$$H(X_t) \mathbb{I}_{(\tau > t)}, \quad (4.70)$$

де  $\tau$  – випадковий час, несплати похідного активу, визначимо динаміку  $(X, Y, Z)$  за оцінкою міри з нейтральним ризиком, яку позначимо, як  $\tilde{\mathbb{P}}$

$$\left\{ \begin{array}{l} dX_t = (b(X_t) - a(X_t)f(Y_t, Z_t)\Omega(Y_t, Z_t))dt + a(X_t)f(Y_t, Z_t)d\tilde{W}_t^x, \\ dY_t = \left( \frac{1}{\epsilon} \alpha(Y_t) - \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \beta(Y_t)\Lambda(Y_t, Z_t) \right) dt + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \beta(Y_t) d\tilde{W}_t^y, \\ dZ_t = \left( \delta c(Z_t) - \sqrt{\delta} g(Z_t)\Gamma(Y_t, Z_t) \right) dt + \sqrt{\delta} g(Z_t) d\tilde{W}_t^z, \\ d\langle \tilde{W}^x, \tilde{W}^y \rangle_t = \rho_{xy} dt, \\ d\langle \tilde{W}^x, \tilde{W}^z \rangle_t = \rho_{xz} dt, \\ d\langle \tilde{W}^y, \tilde{W}^z \rangle_t = \rho_{yz} dt, \\ (X_0, Y_0, Z_0) = (x, y, z) \in E, \end{array} \right. \quad (4.71)$$

де

$$d\tilde{W}_t^x := dW_t^x + \left( \frac{v(X_t) - b(X_t)}{a(X_t)f(Y_t, Z_t)} + \Omega(Y_t, Z_t) \right) dt, d\tilde{W}_t^y := dW_t^y + \Lambda(Y_t, Z_t) dt,$$

$$d\tilde{W}_t^z := dW_t^z + \Gamma(Y_t, Z_t) dt.$$

Припустимо, що (4.71) має єдиний сильний розв'язок,  $\tau$  – час похідного активу, дефолт може відбутися одним із двох способів:  $X$  виходить за інтервал  $I$ , або у випадковий час  $\tau_h$ , яким управляє рівень небезпеки  $h(X_t) \geq 0$ . Математично виражаємо час дефолту  $\tau$  наступним чином:

$$\begin{cases} \tau = \tau_I \wedge \tau_h, \\ \tau_I = \inf\{t \geq 0: X_t \notin I\}, \\ \tau_h = \inf\left\{t \geq 0: \int_0^t h(X_s) ds \geq \varepsilon\right\}, \varepsilon \sim \text{Exp}(1), \varepsilon \perp (X, Y, Z). \end{cases} \quad (4.72)$$

Припустимо, що економіка включає надійний актив, який росте миттєво на короткий рівень  $r(X_t) \geq 0$ . Таким чином, якщо економіка включає, наприклад, "не платити дивіденди" виносить на обговорення неплатіжний актив  $S$ , цінний процес, який описується:  $S_t = \mathbb{1}_{\{t \geq \tau_h\}} X_t$ , де простір станів  $X$  на  $I = (0, \infty)$ , тоді ціна активу має вигляд:

$$\left\{ e^{-\int_0^t r(X_s) ds} S_t, t \geq 0 \right\},$$

$(\tilde{\mathbb{P}}, \mathbb{G})$  – повинен бути мартингальним,  $\mathbb{G}$  – розширена фільтрація процесу.  $b(X_t) = [r(X_t) + h(X_t)]X_t$  і  $\Omega(Y_t, Z_t) = 0$  у (4.25). З іншого боку, якщо  $X$  тільки описує надійний відсоток через  $r(X_t)$ , то зміна ймовірнісної міри  $\mathbb{P}$  на  $\tilde{\mathbb{P}}$ , не має причини змінити дрейф від  $X$  до  $v(X_t)$ , до  $b(X_t)$ . Однак, якщо є ефект включення ринкової ціни ризику, то в цьому випадку можливе  $b(X_t) = v(X_t)$ , і  $\Omega(Y_t, Z_t) \neq 0$  в (4.71).

Оцінимо похідний актив деякого виграшу, який має вигляд (4.70), де час дефолту виражається формулою (4.72). Використовуючи нейтральний ризик ціноутворення і властивість Маркова  $X$ , ціна  $u^{\varepsilon, \delta}(t, x, y, z)$  деяких похідних активів при  $t=0$  має вигляд:

$$w^{\varepsilon, \delta}(t, x, y, z) = \tilde{\mathbb{E}}_{x, y, z} \left[ \exp\left(-\int_0^t r(X_s) ds\right) H(X_t \mathbb{1}_{\{t > \tau\}}) \right],$$

де  $(x, y, z) \in E$  вихідна точка процесу  $(X, Y, Z)$ ,  $u^{\epsilon, \delta}(t, x, y, z)$  задовольняє наступній задачі Коші:

$$w^{\epsilon, \delta} = 0, \quad (x, y, z) \in E, t \in \mathbb{R}^+, \quad (4.73)$$

$$w^{\epsilon, \delta}(0, x, y, z) = H(x), \quad (4.74)$$

де оператор  $\mathfrak{Q}^{\epsilon, \delta}$  має вигляд:

$$\mathfrak{Q}^{\epsilon, \delta} = \frac{1}{\epsilon} \mathfrak{Q}_0 + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \mathfrak{Q}_1 + \mathfrak{Q}_2 + \sqrt{\frac{\delta}{\epsilon}} \mathfrak{M}_3 + \sqrt{\delta} \mathfrak{M}_1 + \delta \mathfrak{M}_2, \quad (4.75)$$

$$\mathfrak{Q}_0 = \frac{1}{2} \beta^2(y) \partial_{yy}^2 + \alpha(y) \partial_y,$$

$$\mathfrak{Q}_1 = \beta(y) (\rho_{xy} a(x) f(y, z) \partial_x - \Lambda(y, z)) \partial_y, \quad (4.76)$$

$$\mathfrak{Q}_2 = \frac{1}{2} a^2(x) f^2(y, z) \partial_{xx}^2 + (b(x) - a(x) \Omega(y, z) f(y, z)) \partial_x - k(x),$$

$$\mathfrak{M}_3 = \rho_{xz} \beta(y) g(z) \partial_{yz}^2, \quad \mathfrak{M}_1 = g(z) (\rho_{xz} a(x) f(y, z) \partial_x - \Gamma(y, z)) \partial_z,$$

$$\mathfrak{M}_2 = \frac{1}{2} g^2(z) \partial_{zz}^2 + c(z) \partial_z, \quad k(x) = r(x) + h(x).$$

Крім початкової умови (4.66) функція  $w^{\epsilon, \delta}(t, x, y, z)$  повинна задовольняти на кінцях інтервалу  $I$  додаткові крайові умови. З рівняння (4.67) бачимо, що  $\mathfrak{Q}_0 = \mathfrak{Q}_Y^1$ . Вважаємо, що дифузія з генератором  $\mathfrak{Q}_Y^1$  має інваріантний розподіл з щільністю  $\pi$ , оператор  $\mathfrak{Q}_0$  з  $dom(\mathfrak{Q}_0) = L^2(\mathbb{R}, \pi)$  є самоспряженим в Гільбертовому просторі  $L^2(\mathbb{R}, \pi)$ .

Розв'яжемо задачу Коші (4.73)–(4.74). Для сукупності  $(f, \alpha, \beta, \Lambda, c, g, \Gamma)$  не існує ніякого аналітичного розв'язку. Однак, для фіксованого  $\delta$ , умови (4.75), які містять  $\epsilon$  відхиляються в як завгодно

малому околі  $\epsilon$ , що призводить до сингулярних збурень. Тим часом, для фіксованого  $\epsilon$  умови, які містять  $\delta \in$  малими для деякого малого околу  $\delta$ , що зумовлює регулярні збурення. Таким чином,  $\epsilon$ -окіл та  $\delta$ -окіл дають початок об'єднаному сингулярно-регулярному збуренню  $\mathcal{O}(1)$  оператора  $\mathfrak{L}_2$ . Це говорить про те, що потрібно шукати асимптотичний розв'язок задачі Коші (4.73) – (4.74). Для цього розкладемо  $w^{\epsilon,\delta}$  по степенях  $\sqrt{\epsilon}$  та  $\sqrt{\delta}$  наступним чином:  $u^{\epsilon,\delta} = \sum_{j \geq 0} \sum_{i \geq 0} \sqrt{\epsilon}^i \sqrt{\delta}^j u_{i,j}$ . Тому наближення цін має вигляд

$$w^{\epsilon,\delta} \approx w_{0,0} + \sqrt{\epsilon} w_{1,0} + \sqrt{\delta} w_{0,1}.$$

Розглянемо регулярний розклад збурень, які породжені  $\delta$  а потім здійснимо сингулярний аналіз збурень, які стосуються  $\epsilon$ .

Регулярне розклад збурень для  $\mathfrak{L}^{\epsilon,\delta}$  і  $w^{\epsilon,\delta}$ , що стосується  $\sqrt{\delta}$ .

$$\mathfrak{L}^{\epsilon,\delta} = \mathfrak{L}^\epsilon + \sqrt{\delta} \mathfrak{M}^\epsilon + \delta \mathfrak{M}_2, \quad u^{\epsilon,\delta} = \sum_{o \geq 0} (\sqrt{\delta})^o w_j^\epsilon, \quad (4.77)$$

де

$$\mathfrak{L}^\epsilon = \frac{1}{\epsilon} \mathfrak{L}_0 + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_2, \quad \mathfrak{M}^\epsilon = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \mathfrak{M}_3 + \mathfrak{M}_1. \quad (4.78)$$

$$w_j^\epsilon = \sum_{i \geq 0} (\sqrt{\epsilon})^i w_{i,j}, \quad (4.79)$$

Підставивши розклад (4.77) в (4.73) і збираючи члени з степенями  $\sqrt{\delta}$  отримаємо рівняння з регулярним розкладом збурень:

$$\mathcal{O}(1): \quad 0 = (-\partial_t + \mathfrak{L}^\epsilon) w_0^\epsilon, \quad (4.80)$$

$$\mathcal{O}(\sqrt{\delta}): \quad 0 = (-\partial_t + \mathfrak{L}^\epsilon) w_1^\epsilon + \mathfrak{M}^\epsilon w_0^\epsilon. \quad (4.81)$$



В рівняннях (4.80) і (4.61) застосуємо сингулярний розклад збурень по відношенню до  $\epsilon$ . Підставимо (4.78) – (4.79) в (4.80) і зберемо члени зі степенями  $\sqrt{\epsilon}$ . В результаті порядок  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\epsilon}\right)$  і  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\right)$  рівняння:

$$\mathcal{O}\left(\frac{1}{\epsilon}\right): \quad 0 = \mathfrak{L}_0 w_{0,0}, \quad (4.82)$$

$$\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\right): \quad 0 = \mathfrak{L}_0 w_{1,0} + \mathfrak{L}_1 w_{0,0}. \quad (4.83)$$

якщо  $w_{0,0}$  і  $w_{1,0}$  не залежать від  $y$ , то вони задовольняють рівняння (4.82) і (4.83), тому вибираємо  $w_{0,0} = w_{0,0}(t, x, z)$  і  $w_{1,0} = w_{1,0}(t, x, z)$ . Проведемо асимптотичний аналіз для порядку  $\mathcal{O}(1)$  і  $\mathcal{O}(\sqrt{\epsilon})$ :

$$\mathcal{O}(1): \quad 0 = \mathfrak{L}_0 w_{2,0} + (-\partial_t + \mathfrak{L}_2)w_{0,0}, \quad (4.84)$$

$$\mathcal{O}(\sqrt{\epsilon}): \quad 0 = \mathfrak{L}_0 w_{3,0} + \mathfrak{L}_1 w_{2,0} + (-\partial_t + \mathfrak{L}_2)w_{1,0}, \quad (4.85)$$

Рівняння (4.3) і (4.85) є рівняннями Пуассона виду:

$$0 = \mathfrak{L}_0 w + \mathcal{X}. \quad (4.86)$$

$w \in \text{dom}(\mathfrak{L}_0) = \mathbb{L}^2(\mathbb{R}, \pi)$ .

$$\langle \mathcal{X} \rangle := \int \mathcal{X}(y)\pi(y)dy = 0, \quad (4.87)$$

З рівнянь (4.82) і (4.85) і умови центрованості (4.87) випливає:

$$\mathcal{O}(1): \quad 0 = (-\partial_t + \langle \mathfrak{L}_2 \rangle)w_{0,0}, \quad (4.88)$$

$$\mathcal{O}(\sqrt{\epsilon}): \quad 0 = \langle \mathfrak{L}_1 w_{2,0} \rangle + (-\partial_t + \langle \mathfrak{L}_2 \rangle)w_{1,0}. \quad (4.89)$$

Оператор  $\langle \mathfrak{L}_2 \rangle$  має вигляд:

$$\langle \mathfrak{L}_2 \rangle = \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2 a^2(x)\partial_{xx}^2 + (b(x) - \bar{f}\bar{\Omega}a(x))\partial_x - k(x), \quad x \in (e_1, e_2), \quad (4.90)$$

$$\bar{\sigma}^2 := \langle f^2(\cdot, z) \rangle, \quad \overline{f\Omega} := \langle f(\cdot, z)\Omega(\cdot, z) \rangle.$$

Враховуючи відповідні крайові умови знайдемо розв'язок рівняння (4.88)

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_1 w_{2,0} &= -(-\partial_t + \mathfrak{L}_2)w_{0,0} = -(-\partial_t + \mathfrak{L}_2)w_{0,0} + (-\partial_t + \langle \mathfrak{L}_2 \rangle)w_{0,0} \\ &= -\left(\frac{1}{2}a^2(f^2 - \bar{\sigma}^2)\partial_{xx}^2 - a(f\Omega - \overline{f\Omega})\partial_x\right)w_{0,0}. \end{aligned}$$

Позначимо  $\phi(y, z)$  і  $\eta(y, z)$  розв'язки рівнянь Пуассона:

$$\mathfrak{L}_0\phi = f^2 - \bar{\sigma}^2, \quad \mathfrak{L}_0\eta = f\Omega - \overline{f\Omega}. \quad (4.91)$$

Використовуючи (4.91) знайдемо  $w_{2,0}$ , як:

$$w_{2,0} = -\left(\frac{1}{2}a^2\phi\partial_{xx}^2 - a\eta\partial_x\right)w_{0,0} + C, \quad (4.92)$$

де  $C$  – константа незалежна від  $y$ . Підставимо (4.76) та (4.92) в  $\langle \mathfrak{L}_0 w_{2,0} \rangle$  отримаємо:

$$\langle \mathfrak{L}_1 w_{2,0} \rangle = \langle (\beta(\rho_{xy}af\partial_x - \Lambda)\partial_y) \left(\frac{1}{2}a^2\phi\partial_{xx}^2 - a\eta\partial_x\right) w_{0,0} \rangle = -\mathcal{A}w_{0,0}. \quad (4.93)$$

Оператор  $\mathcal{A}$  має вигляд:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= -v_3 a(x)\partial_x a^2(x)\partial_{xx}^2 - v_2 a^2(x)\partial_{xx}^2 - \mathcal{U}_2 a(x)\partial_x a(x)\partial_x \\ &\quad - \mathcal{U}_1 a(x)\partial_x, \end{aligned} \quad (4.94)$$

де

$$\begin{aligned} v_3 &= -\frac{\rho_{xy}}{2} \langle \beta f \partial_y \phi \rangle, & v_2 &= \frac{1}{2} \langle \beta \Lambda \partial_y \phi \rangle, \\ \mathcal{U}_2 &= \rho_{xy} \langle \beta f \partial_y \eta \rangle, & \mathcal{U}_1 &= -\langle \beta \Lambda \partial_y \eta \rangle. \end{aligned}$$

Підставивши (4.93) в (4.89) отримаємо:

$$\mathcal{A}w_{0,0} = (-\partial_t + \langle \mathfrak{L}_2 \rangle)w_{1,0}. \quad (4.95)$$

Враховуючи вираз для  $w_{0,0}$  і відповідні крайові умови, можна знайти вираз для  $w_{1,0}$ . Повернемося до рівняння  $\mathcal{O}(\sqrt{\delta})$ . Для сингулярного аналізу збурень рівняння (4.81), підставимо (4.78) і (4.79) в (4.81) згрупуємо по степенях  $\sqrt{\epsilon}$ . В результаті для  $\mathcal{O}(\sqrt{\delta}/\epsilon)$  і  $\mathcal{O}(\sqrt{\delta}/\sqrt{\epsilon})$  маємо рівняння:

$$\mathcal{O}\left(\frac{\sqrt{\delta}}{\epsilon}\right): \quad 0 = \mathfrak{L}_0 w_{0,1}, \quad (4.96)$$

$$\mathcal{O}\left(\frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{\epsilon}}\right) \quad 0 = \mathfrak{L}_0 w_{1,1} + \mathfrak{L}_1 w_{0,1}, \quad (4.97)$$

де  $\mathfrak{M}_3 w_{0,0} = 0$ . Якщо  $w_{0,1}$  і  $w_{1,1}$  не залежать від  $y$ , то вони автоматично будуть задовольняти рівняння (4.96) та (4.97), тому  $w_{0,1} = w_{0,1}(x, z)$  і  $w_{1,1} = w_{1,1}(x, z)$ . Продовжуючи асимптотичний аналіз, для  $\mathcal{O}(\sqrt{\delta})$  маємо рівняння:

$$\mathcal{O}(\sqrt{\delta}) \quad 0 = \mathfrak{L}_0 w_{2,1} + (-\partial_t + \mathfrak{L}_2)w_{0,1} + \mathfrak{M}_1 w_{0,0}, \quad (4.98)$$

оскільки  $\mathfrak{L}_1 w_{1,1} = 0$  і  $\mathfrak{M}_3 w_{1,0} = 0$  для (4.98) знайдемо розв'язок

$w_{2,1} \in L^2(\mathbb{R}, \pi)$ , умова центрування (4.87) виконується. В (4.98) умові центрування відповідає

$$0 = (-\partial_t + \mathfrak{L}_2)w_{0,1} + \langle \mathfrak{M}_1 \rangle w_{0,0}. \quad (4.99)$$

де  $w_{0,0}(t, x, z)$  залежить від  $z$  тільки через  $\bar{\sigma}$  і  $\overline{f\Omega}(z)$ . Таким чином, в (4.99)  $\langle \mathfrak{M}_1 \rangle$  можна записати:  $\langle \mathfrak{M}_1 \rangle = -\mathcal{B}\partial_z$ ,

$$\mathcal{B} = -v_1 a(x)\partial_x - v_0, \quad v_1 := g\rho_{xz}\langle f \rangle, \quad v_0 = g\langle \Gamma \rangle, \quad (4.100)$$

$$\partial_z = \bar{\sigma}'\partial_{\bar{\sigma}} + \overline{f\Omega}'\partial_{\overline{f\Omega}}, \quad \bar{\sigma}' := \partial_z \overline{f\Omega}. \quad (4.101)$$

$$\mathcal{O}(1): \quad (-\partial_t + \langle \mathcal{L}_2 \rangle) u_{0,0} = 0 \quad w_{0,0}(0, x, z) = H(x), \quad (4.102)$$

$$\mathcal{O}(\sqrt{\epsilon}): \quad (-\partial_t + \langle \mathcal{L}_2 \rangle) w_{1,0} = \mathcal{A} w_{0,0}, \quad w_{1,0}(0, x, z) = 0, \quad (4.103)$$

$$\mathcal{O}(\sqrt{\delta}): \quad (-\partial_t + \langle \mathcal{L}_2 \rangle) w_{0,1} = \mathcal{B} \partial_z w_{0,0}, \quad w_{0,1}(0, x, z) = 0. \quad (4.104)$$

Оператори  $\langle \mathcal{L}_2 \rangle$ ,  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  та  $\partial_z$  визначені в (4.90), (4.94), (4.100) та (4.101) відповідно, та введені крайові умови при  $t = 0$ .

Розв'яжемо рівняння (4.102) – (4.104) з точки зору власних функцій  $\{\psi_n\}$ , власних значень  $\{\lambda_n\}$  оператора  $\langle \mathcal{L}_2 \rangle$ . Зауважимо, що  $\langle \mathcal{L}_2 \rangle$ , поданий у (4.90), має вигляд інфінітезимального генератора одномірної дифузії (4.67) з волатильністю  $\bar{\sigma}a(x)$ , відхиленням  $(b(x) - \bar{f}\bar{\Omega}a(x))$  і кілінг з рівнем  $k(x)$ ,  $dom(\langle \mathcal{L}_2 \rangle)$  включає крайові умови, які накладені на кінцях  $e_1$  та  $e_2$ . Припустимо що  $\langle \mathcal{L}_2 \rangle$  має чисто дискретний спектр. Зафіксуємо Гільбертів простір  $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(I, m)$ , де  $m$  – щільність швидкості, яка відповідає  $\langle \mathcal{L}_2 \rangle$ . Оператор  $\langle \mathcal{L}_2 \rangle$  самоспряжений в  $\mathcal{H}$  і його область визначення є щільною підмножиною в  $\mathcal{H}$ . Таким чином, власні функції  $\{\psi_n\}$  оператора  $\langle \mathcal{L}_2 \rangle$  формують ортогональну базу в  $\mathcal{H}$ . Позначимо [75]:

$$dom(\mathcal{A}) := \{\psi \in \mathcal{H}, \mathcal{A}\psi \in \mathcal{H}\}, \quad dom(\mathcal{B}) := \{\psi \in \mathcal{H}, \mathcal{B}\psi \in \mathcal{H}\},$$

$$dom(\partial_z) := \{\psi \in \mathcal{H}, \partial_z \psi \in \mathcal{H}\}.$$

Сформулюємо та доведемо наступні теореми [59-60]

**Теорема 4.5:** Нехай рівняння власного значення:

$$-\langle \mathcal{L}_2 \rangle \psi_n = \lambda_n \psi_n, \quad \psi_n \in dom(\langle \mathcal{L}_2 \rangle) \quad (4.105),$$

і припустимо, що  $H \in \mathcal{H}$ . Тоді розв'язок  $w_{0,0}$  можна подати у вигляді:

$$w_{0,0} = \sum_n c_n \psi_n T_n, \quad c_n = (\psi_n, H), \quad T_n = e^{-t\lambda_n}.$$

**Теорема 4.6:** Нехай  $c_n, \psi_n, T_n$  є такими, як описано в теоремі 4.1 і визначимо

$$\mathcal{A}_{k,n} := (\psi_k, \mathcal{A}\psi_n), U_{k,n} := \frac{T_k - T_n}{\lambda_k - \lambda_n}.$$

Тоді розв'язок  $w_{1,0}$  рівняння (4.104) має вигляд:

$$w_{1,0} = \sum_n \sum_{k \neq n} c_n \mathcal{A}_{k,n} \psi_k U_{k,n} - \sum_n c_n \mathcal{A}_{n,n} \psi_n t T_n \quad (4.106)$$

**Теорема 4.7:** Нехай  $c_n, \psi_n$  і  $T_n$  є такими, як описано в теоремі 4.5, нехай  $U_{k,n}$  є таким, як в Теоремі 4.6, визначимо

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{B}}_{k,n} &:= (\psi_k, \mathcal{B} \partial_z \psi_n), \quad \mathcal{B}_{k,n} := (\psi_k, \mathcal{B} \psi_n), \quad V_{k,n} \\ &:= \frac{T_k - T_n}{(\lambda_k - \lambda_n)^2} + \frac{t T_n}{\lambda_k - \lambda_n}. \end{aligned}$$

Тоді розв'язок  $w_{0,1}$  рівняння (4.103) має вигляд:

$$\begin{aligned} w_{0,1} &= \sum_n \sum_{k \neq n} c_n \tilde{\mathcal{B}}_{k,n} \psi_k U_{k,n} - \sum_n c_n \tilde{\mathcal{B}}_{n,n} \psi_n t T_n \quad (4.107) \\ &+ \sum_n \sum_{k \neq n} (\partial_z c_n) \mathcal{B}_{k,n} \psi_k U_{k,n} - \sum_n (\partial_z c_n) \mathcal{B}_{n,n} \psi_n t T_n + \\ &\sum_n \sum_{k \neq n} c_n \mathcal{B}_{k,n} \psi_k (\partial_z \lambda_n) V_{k,n} - \sum_n c_n \mathcal{B}_{n,n} \psi_n (\partial_z \lambda_n) \frac{1}{2} t^2 T_n. \end{aligned}$$

Отримані наближення для ціни похідного активу мають вигляд

$$w^{\epsilon, \delta} \approx w_{0,0} + \sqrt{\epsilon} w_{1,0} + \sqrt{\delta} w_{0,1}$$

Однак, дана похідна покладена на формальні сингулярні і регулярні аргументи збурень. Для більш точного результату, потрібно

вимагати щоб функція виплати  $H(x)$  і всі її похідні були гладкими і обмеженими. Тоді уточнення виглядає наступним чином:

**Теорема 4.8:** Для фіксованих  $(t, x, y, z)$  існує стала  $C$  така, що для будь-якого  $\epsilon \leq 1, \delta \leq 1$  маємо:

$$|w^{\epsilon, \delta} - (w_{0,0} + \sqrt{\epsilon}w_{1,0} + \sqrt{\delta}w_{0,1})| \leq C(\epsilon + \delta).$$

Нехай  $X$  цінний папір, по якому не виплачуються дивіденди. В цьому випадку  $X$  – модель ГБР з багатовимірною стохастичною волатильністю. Зокрема,  $\tilde{\mathbb{P}}$  динаміки в  $X$  задані:

$$dX_t = rX_t dt + f(Y_t, Z_t)X_t d\tilde{W}_t^x, h(X_t) = 0,$$

де  $r$  – без ризикова відсоткова ставка, а  $Y$ , і  $Z$  є швидкими і повільними чинниками нестабільності, які описані в (4.71). Відзначимо, що за зниженою ціною активу,  $e^{-rt}X_t$  є мартингалом з мірою  $\tilde{\mathbb{P}}$ . Обчислимо наближену ціну опціону подвійного бар'єру визначеного на  $X$ , спочатку, використаємо рівняння (4.68) і (4.90), щоб записати оператор  $\langle \mathcal{L}_2 \rangle$  і пов'язані з ним щільності зі швидкістю  $m(x)$

$$\langle \mathcal{L}_2 \rangle = \frac{1}{2} \bar{\sigma}^2 x^2 \partial_{xx}^2 + rx \partial_x - r \quad m(x) = \frac{2}{\bar{\sigma}^2 x^2} \exp\left(\frac{2r}{\bar{\sigma}^2} \ln x\right) \quad (4.108)$$

Для подвійного бар'єру опціону з бар'єрами  $L$  і  $R$ , опціон виплат:

$$H(X_t) \mathbb{I}_{\{\tau > t\}} = (X_t - K)^+ \mathbb{I}_{\{\tau > t\}}, I = (L, R), 0 < L < K < R,$$

Щоб обчислити значення цього параметра, потрібно спочатку знайти власні значення рівняння (4.108) з  $\langle \mathcal{L}_2 \rangle$  і з крайовими умовами

$$\lim_{x \searrow L} \psi_n(x) = 0, \quad \lim_{x \nearrow R} \psi_n(x) = 0.$$

$$\psi_n(x) = \frac{\bar{\sigma} \sqrt{x}}{\sqrt{\ln\left(\frac{R}{L}\right)}} \exp\left(\frac{-r}{\bar{\sigma}^2} \ln x\right) \sin\left(\frac{n\pi \ln\left(\frac{x}{L}\right)}{\ln\left(\frac{R}{L}\right)}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\lambda_n = \frac{1}{2} \left( \frac{n\pi\bar{\sigma}}{\ln\left(\frac{R}{L}\right)} \right)^2 + \left( \frac{v^2}{2} + r \right), \quad v = \frac{r}{\bar{\sigma}} - \frac{\bar{\sigma}}{2}.$$

розрахуємо коефіцієнти  $\mathcal{A}_{k,n}$ ,  $\mathcal{B}_{k,n}$  і  $\tilde{\mathcal{B}}_{k,n}$ . Для  $k \neq n$  знайдемо

$$\mathcal{A}_{k,n} = -\vartheta_3$$

$$\left( \frac{(-1 + (-1)^{k+n})kn(4n^2\pi^2\bar{\sigma}^4 + (-12r^2 + 4r\bar{\sigma}^2 + \bar{\sigma}^4)\ln^2\left(\frac{R}{L}\right))}{2(k^2 - n^2)\bar{\sigma}^4\ln^3\left(\frac{R}{L}\right)} \right)$$

$$-\vartheta_2 \left( \frac{(-1 + (-1)^{k+n})knr}{(k^2 - n^2)\bar{\sigma}^2 \ln\left(\frac{R}{L}\right)} \right),$$

$$\mathcal{B}_{k,n} = \vartheta_1 \frac{2(-1 + (-1)^{k+n})kn}{(k - n)(k + n) \ln\left(\frac{R}{L}\right)},$$

$$\tilde{\mathcal{B}}_{k,n} = -\vartheta_1 \bar{\sigma}'(Y_{k,n}) - \vartheta_0 \bar{\sigma}' \left( \frac{8(-1 + (-1)^{k+n})knr \ln\left(\frac{R}{L}\right)}{(k^2 - n^2)^2 \pi^2 \bar{\sigma}^3} \right),$$

$$Y_{k,n} := \frac{4nkr(\ln(L) - (-1)^{k+n} \ln(R))}{(k^2 - n^2)\bar{\sigma}^3 \ln\left(\frac{R}{L}\right)}$$

$$\frac{2(-1 + (-1)^{k+n})kn \left( (k - n)(k + n)\pi^2\bar{\sigma}^4 - 2r(-2r + \bar{\sigma}^2)\ln^2\left(\frac{R}{L}\right) \right)}{(k^2 - n^2)^2 \pi^2 \bar{\sigma}^5 \ln\left(\frac{R}{L}\right)},$$

і для  $k = n$  знайдемо

$$\mathcal{A}_{n,n} = -\vartheta_3 \left( \frac{1}{\bar{\sigma}^3} \left( \frac{3n^2\pi^2\nu}{\ln^2\left(\frac{R}{L}\right)} - \nu^3 \right) - \frac{1}{\bar{\sigma}^2} \left( \nu^2 - \frac{n^2\pi^2}{\ln^2\left(\frac{R}{L}\right)} \right) \right. \\ \left. - \vartheta_2 \left( \frac{1}{\bar{\sigma}^2} \left( \nu^2 - \frac{n^2\pi^2}{\ln^2\left(\frac{R}{L}\right)} \right) + \frac{\nu}{\bar{\sigma}} \right) \right)$$

$$\mathcal{B}_{n,n} = \vartheta_1 \left( \frac{2r - \bar{\sigma}^2}{2\bar{\sigma}^2} \right) - \vartheta_0,$$

$$\tilde{\mathcal{B}}_{n,n} = -\vartheta_1 \bar{\sigma}' \left( \frac{1}{\bar{\sigma}} - \frac{r\nu(\ln^2(R) - \ln^2(L))}{\bar{\sigma}^4 \ln\left(\frac{R}{L}\right)} \right)$$

$$- \vartheta_0 \bar{\sigma}' \left( \frac{1}{\bar{\sigma}} - \frac{r(\ln^2(R) - \ln^2(L))}{\bar{\sigma}^3 \ln\left(\frac{R}{L}\right)} \right).$$

$$c_n = (\psi_T(\cdot), (\cdot - K)^+) = \frac{L^{\frac{\nu}{\bar{\sigma}}}}{\ln\left(\frac{R}{L}\right)} (L\Phi_n(\nu + \bar{\sigma}) - K\Phi_n(\nu)),$$

$$\Phi_n(z) := \frac{2}{\omega_n^2 + z^2} (\exp(\mathfrak{K}z) (\omega_n \cos(\omega_n \mathfrak{K}) - z \sin(\omega_n \mathfrak{K}) - \exp(\mathfrak{U}z) (-1)^n \omega_n),$$

$$\omega_n := \frac{n\pi}{\mathfrak{U}}, \quad \mathfrak{K} := \frac{1}{\bar{\sigma}} \ln\left(\frac{K}{L}\right), \quad \mathfrak{U} := \frac{1}{\bar{\sigma}} \ln\left(\frac{R}{L}\right).$$

Наближені ціни опціонів обчислимо за допомогою теорем 4.5 – 4.7.



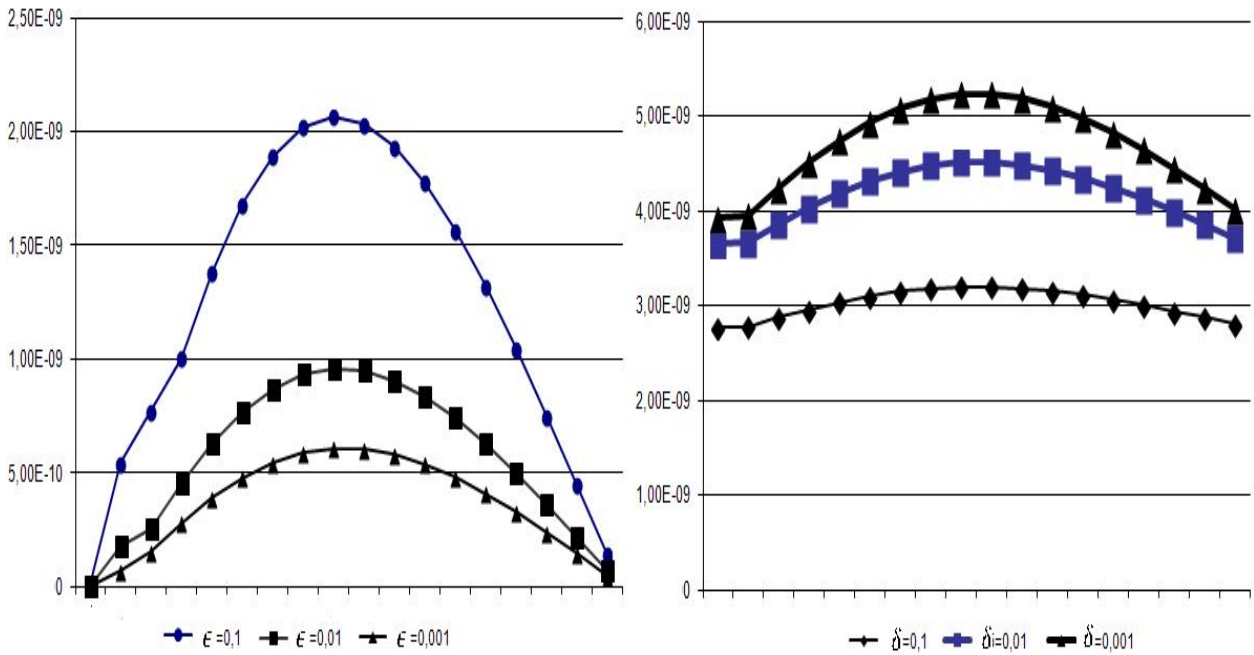


Рис. 4.1. Ціна опціону з подвійним бар'єром,

$$L = 300, K = 350, R = 400, \quad y = 0, z = 2, \beta = 1, \sigma = 0,34,$$

$$r = 0,05, g = 2, \rho_{xy} = 0,5, \rho_{xz} = 0,18, \rho_{yz} = 0,18.$$

На лівій частині рисунку 4.1 зображена наближена ціна

$w_{0,0} + \sqrt{\epsilon}w_{1,0}$  з подвійним бар'єром опціону для конкретної моделі, яка має тільки швидко змінні чинники волатильності у припущенні, що відома динаміка  $Y$  і функції волатильності [58]

$$f := \sigma \exp(Y_t + Z_t) \exp\left(\frac{\beta^2}{2} - z\right):$$

$$dY_t = \left(-\frac{1}{\epsilon}Y_t - \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\frac{\beta}{\sqrt{\epsilon}}\text{erf}(Y_t)\right)dt + \beta d\tilde{W}_t^y, \quad f(Y_t) = \frac{\sigma \exp(Y_t)}{\exp\left(-\frac{\beta^2}{2}\right)}, \quad (4.109)$$

$$\text{erf}(y) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-t^2} dt.$$

Права частина рисунку 4.1 репрезентує наближену ціну  $w_{0,0} + \sqrt{\delta}w_{0,1}$  з подвійним бар'єром опціону на конкретну модель, яка містить чинники волатильності, що змінюються повільно, за умови, що динаміка  $Z$  і функції волатильності задана

$$dZ_t = \left(-\delta Z_t - \sqrt{\delta}g \operatorname{erf}(Z_t)\right)dt + \sqrt{\delta}gd\tilde{W}_t^Z, \quad f(Z_t) = \frac{\sigma \exp(Z_t)}{\exp(z)}. \quad (4.110)$$

Розвинуто загальний метод отримання наближеної ціни для широкого класу похідних активів. Виграш похідних може бути шляхо-залежним і процесом, що лежить в основі деривативу може проявляти стрибок, також комбіновані нелокальні стохастичні волатильності. Інтенсивність стрибка може бути залежною. Нелокальна компонента волатильності може бути багатовимірною. Її спонукають один швидко мінливий і один повільно чинники. Однією з ключових переваг нашої методології ціноутворення є те, що, комбінуючи методи з спектральної теорії, теорії сингулярних збурень і регулярної теорії збурень, зводимо обчислення ціни активу до розв'язання одного рівняння для знаходження власних значень.

Продовжуючи тематику роботи [1], поширюючи її на теорію відсоткових ставок, які описуються процесом Орнштейна–Уленбека, застосовуючи методику [58-60] розглянемо приклад. Нехай  $X$  репрезентують короткі відсоткові ставки. Однією з найвідоміших моделей коротких курсів є модель Васічека, в якій  $X$  моделюється як процес Орнштейна–Уленбека з багатовимірною стохастичною волатильністю. Зокрема,  $\tilde{\mathbb{P}}$  динаміки  $X$  задані

$$dX_t = (\kappa(\theta - X_t) - f(Y_t, Z_t)\Omega(Y_t, Z_t))dt + f(Y_t, Z_t) + d\tilde{W}_t^x, \\ r(X_t) = X_t, h(X_t) = 0,$$

де  $Y$  та  $Z$  є швидко і повільно змінними чинниками волатильності, обчислимо наближену ціну облигації з нульовим купоном. запишемо оператор  $\langle \mathcal{Q}_2 \rangle$  і пов'язану з ним щільність  $m(x)$

$$\langle \mathcal{Q}_2 \rangle = \frac{1}{2} \bar{\sigma}^2 \partial_{xx}^2 + \kappa(\bar{\theta} - x) \partial_x - x,$$

$$m(x) = \frac{2}{\bar{\sigma}^2} \exp\left(\frac{-k}{\bar{\sigma}^2} (\bar{\theta} - x)^2\right), \bar{\theta} = \theta - \frac{1}{\kappa} f \bar{\Omega}. \quad (4.111)$$

Повна виплата за облигацію з нульовим купоном має вигляд:

$$H(X_t) = \mathbb{I}_{\{\tau > t\}} = 1. \quad (4.112)$$

Для того, щоб знайти ціну облигації з виплатами (4.112), знайдемо власне значення (4.111) на відрізку  $I = (-\infty, \infty)$  з  $\langle \mathcal{Q}_2 \rangle$ ,

$$\psi_n = \mathcal{N}_n \exp\left(-A\xi - \frac{1}{2}A^2\right) H_n(\xi + A), \quad \mathcal{N}_n = \left(\sqrt{\frac{\kappa}{\pi}} \frac{\bar{\sigma}}{2^{n+1}n!}\right)^{1/2}$$

$$A = \frac{\bar{\sigma}}{\kappa^{3/2}}, \quad \xi = \frac{\sqrt{\kappa}}{\bar{\sigma}}(x - \bar{\theta}), \quad \lambda_n = \bar{\theta} - \frac{\bar{\sigma}^2}{2\kappa^2} + \kappa n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$\{H\}_n$  є Ермітовим поліномом [55]. запишемо вирази для операторів  $\mathcal{A}$  та  $\mathcal{B}$ :

$$\mathcal{A} = -\vartheta_3 \partial_{xxx}^3 - (\vartheta_2 + \mathfrak{U}_2) \partial_{xx}^2 - \mathfrak{U}_1 \partial_x, \quad \mathcal{B} = \vartheta_1 \partial_x - \vartheta_0,$$

знайдемо  $\mathcal{A}_{k,n}$ ,  $\mathcal{B}_{k,n}$ , і  $\tilde{\mathcal{B}}_{k,n}$ , на основі рекурентних співвідношень:

$$\partial_x H_n = 2n H_{n-1}, \quad 2x H_n = H_{n+1} + \partial_x H_n, \quad H_n = e^{x^2} \frac{d^n}{dx^{2n}} e^{-x^2},$$

отримаємо:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{k,n} &= -\vartheta_3 \left\{ \sum_{m=0}^{3\wedge n} \binom{3}{m} \left(\frac{-1}{\kappa}\right)^{3-m} \left(\frac{2\sqrt{\kappa}}{\bar{\sigma}}\right)^m \frac{n! \mathcal{N}_n}{(n-m)! \mathcal{N}_{n-m}} \delta_{k,n-m} \right\} \\
&\quad - (\vartheta_2 + \mathfrak{U}_2) \left\{ \sum_{m=0}^{3\wedge n} \binom{2}{m} \left(\frac{-1}{\kappa}\right)^{2-m} \left(\frac{2\sqrt{\kappa}}{\bar{\sigma}}\right)^m \frac{n! \mathcal{N}_n}{(n-m)! \mathcal{N}_{n-m}} \delta_{k,n-m} \right\} \\
&\quad - \mathfrak{U}_1 \left\{ \left(\frac{-1}{\kappa}\right) \delta_{k,n} + \left(\frac{2\sqrt{\kappa}}{\bar{\sigma}}\right) \frac{n! \mathcal{N}_n}{(n-1)! \mathcal{N}_{n-1}} \delta_{k,n-1} \right\}, \\
\mathcal{B}_{k,n} &= -\vartheta_1 \left\{ \left(\frac{-1}{\kappa}\right) \delta_{k,n} + \left(\frac{2\sqrt{\kappa}}{\bar{\sigma}}\right) \frac{n! \mathcal{N}_n}{(n-1)! \mathcal{N}_{n-1}} \delta_{k,n-1} \right\} - \vartheta_0 \delta_{k,n}, \\
\tilde{\mathcal{B}}_{k,n} &= -\vartheta_1 \bar{\sigma}' \left\{ \left[ \left(\frac{-1}{\kappa}\right) \left(\frac{1}{2\bar{\sigma}} - \frac{\bar{\sigma}}{\kappa^3} - \frac{n}{\bar{\sigma}}\right) \right] \delta_{k,n} \right. \\
&\quad + \left[ \left(\frac{-1}{\kappa}\right) \binom{4}{\kappa^{\frac{3}{2}}} + \left(\frac{2\sqrt{\kappa}}{\bar{\sigma}}\right) \left(\frac{1}{2\bar{\sigma}} - \frac{\bar{\sigma}}{\kappa^3} - \frac{n}{\bar{\sigma}}\right) \right] \frac{n! \mathcal{N}_n}{(n-1)! \mathcal{N}_{n-1}} \delta_{k,n-1} \\
&\quad + \left[ \left(\frac{-1}{\kappa}\right) \left(\frac{-2}{\bar{\sigma}}\right) + \left(\frac{2\sqrt{\kappa}}{\bar{\sigma}}\right) \binom{4}{\kappa^{\frac{3}{2}}} \right] \frac{n! \mathcal{N}_n}{(n-2)! \mathcal{N}_{n-2}} \delta_{k,n-2} \\
&\quad \left. + \left[ \left(\frac{2\sqrt{\kappa}}{\bar{\sigma}}\right) \left(\frac{-2}{\bar{\sigma}}\right) \right] \frac{n! \mathcal{N}_n}{(n-3)! \mathcal{N}_{n-3}} \delta_{k,n-3} \right\} \\
&\quad - \vartheta_0 \bar{\sigma}' \left\{ \left(\frac{1}{2\bar{\sigma}} - \frac{\bar{\sigma}}{\kappa^3} - \frac{n}{\bar{\sigma}}\right) \delta_{k,n} + \binom{4}{\kappa^{\frac{3}{2}}} \frac{n! \mathcal{N}_n}{(n-1)! \mathcal{N}_{n-1}} \delta_{k,n-1} \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{-2}{\bar{\sigma}}\right) \frac{n! \mathcal{N}_n}{(n-2)! \mathcal{N}_{n-2}} \delta_{k,n-2} \right\} \\
&\quad - \vartheta_1 \bar{f} \bar{\Omega}' \left\{ \left(\frac{1}{\kappa^3}\right) \delta_{k,n} + \left(\frac{-4}{\bar{\sigma} \kappa^{\frac{3}{2}}}\right) \frac{n! \mathcal{N}_n}{(n-1)! \mathcal{N}_{n-1}} \delta_{k,n-1} + \left(\frac{4}{\bar{\sigma}^2}\right) \frac{n! \mathcal{N}_n}{(n-2)! \mathcal{N}_{n-2}} \delta_{k,n-2} \right\}
\end{aligned}$$

$$-\vartheta_0 \overline{f\Omega}' \left\{ \left( \frac{-1}{\kappa^2} \right) \delta_{k,n} + \left( \frac{2}{\bar{\sigma}\sqrt{\kappa}} \right) \frac{n! \mathcal{N}_n}{(n-1)! \mathcal{N}_{n-1}} \delta_{k,n-1} \right\}.$$

$$c_n = (\psi_n, 1) = \frac{2}{\bar{\sigma}} \sqrt{\frac{\pi}{\kappa}} \mathcal{N}_n A^n e^{-A^2/4}.$$

Орієнтовна ціна облигації розраховується на основі теорем 4.4.–4.7.

Для облигації з нульовим купоном дохід  $R^{\epsilon, \delta}$  визначається з формули:

$$w^{\epsilon, \delta} = \exp(-R^{\epsilon, \delta} t).$$

Наступне наближення для облигації з нульовим купоном, отримаємо розкладаючи, як ціну облигації,  $w^{\epsilon, \delta}$  так і дохід  $R^{\epsilon, \delta}$  за степенями  $\sqrt{\epsilon}$  і  $\sqrt{\delta}$ :

$$\begin{aligned} w_{0,0} + \sqrt{\epsilon} w_{1,0} + \sqrt{\delta} w_{0,1} + \dots &= e^{-(R_{0,0} + \sqrt{\epsilon} R_{1,0} + \sqrt{\delta} R_{0,1})t} \\ &= e^{-R_{0,0}t} + \sqrt{\epsilon} (-R_{1,0}t) e^{-R_{0,0}t} + \sqrt{\delta} (-R_{0,1}t) e^{-R_{0,0}t} + \dots \end{aligned}$$

$$R^{\epsilon, \delta} \approx R_{0,0} + \sqrt{\epsilon} R_{1,0} + \sqrt{\delta} R_{0,1},$$

де

$$R_{0,0} = -\frac{1}{t} \ln(w_{0,0}), \quad R_{1,0} = \frac{-w_{1,0}}{t w_{0,0}}, \quad R_{0,1} = \frac{-w_{0,1}}{t w_{0,0}}.$$

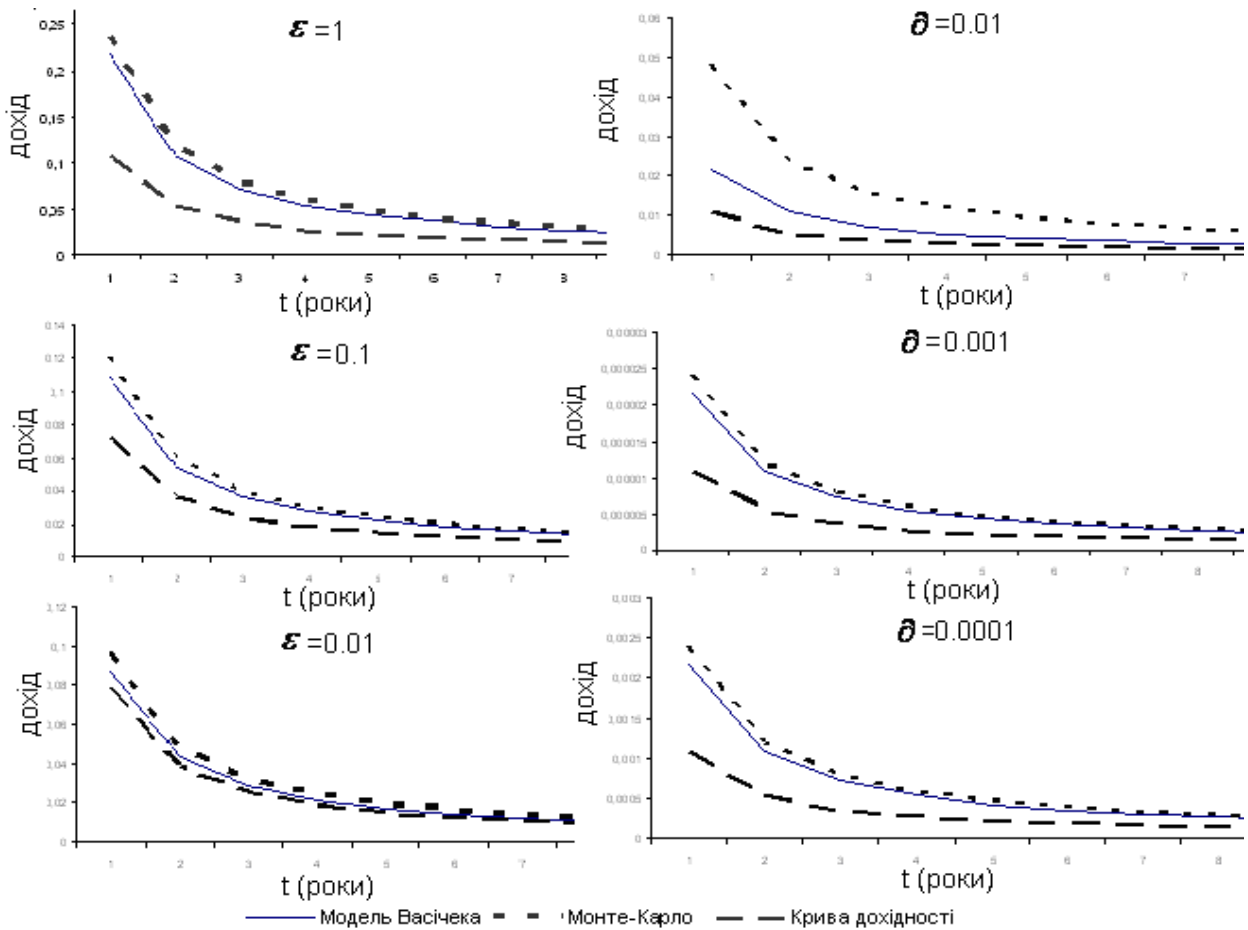


Рис.4.2. Дохід облігації з нульовим купоном  $k = 0.1$ ,

$$\theta = \Omega = 0.01, g = p = 1, \rho_{xy} = -0.65, \rho_{xz} = 0.47, \rho_{yz} = -0.47.$$

Дохід облігації з нульовим купоном, зображений, як функція від часу в залежності від терміну погашення  $t$ . Зліва на рисунку зображено модель Васічека з швидкозмінним чинником волатильності  $Y$  та побудовано наближений дохід  $R_{0,0} + \sqrt{\epsilon}R_{1,0}$  для цієї моделі, вона має тільки швидко змінні чинники волатильності, а динаміка  $Y$  і  $f$  та функція волатильності задаються:

$$f := \sigma^2 \exp\left(Y_t + \frac{\beta^2}{2} + Z_t - \frac{g^2}{2}\right), f(Y_t) = \frac{\sigma \exp(Y_t)}{\exp\left(-\frac{\beta^2}{2}\right)}, \text{erf}(y) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-t^2} dt.$$

$$dY_t = \left( -\frac{1}{\epsilon} Y_t - \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \frac{\beta}{\sqrt{\epsilon}} \operatorname{erf}(Y_t) \right) dt + \beta \sqrt{\epsilon} d\tilde{W}_t^y.$$

З правого боку рисунка 4.2 побудовано модель Васічека з повільно змінним чинником волатильності  $Z$ , та наближений дохід  $R_{0,0} + \sqrt{\delta} R_{0,1}$  облігації з нульовим купоном для цієї моделі, яка має тільки повільно мінливий чинник волатильності, динаміка  $Z$  і  $f$  задаються:

$$dZ_t = \left( -\delta Z_t - \sqrt{\delta} g \operatorname{erf}(Z_t) \right) dt + \sqrt{\delta} g d\tilde{W}_t^z, \quad f(Z_t) = \frac{\sigma \exp(Z_t)}{\exp\left(\frac{g^2}{2}\right)}.$$

Як і слід було очікувати, оскільки  $\epsilon$  і  $\delta$  прямують до нуля, наближення прямує до повної прибутковості.

Продовжуючи тематику робіт [54-56], поширюючи її на теорію моделі CEV [56], розглянемо приклад.

Нехай потрібно виплатити дивіденди по активу  $S_t = \mathbb{I}_{\{\tau > t\}} X_t$ ,  $S > 0$ . то простором станів  $X$  буде  $e_1, e_2 = (0, \infty)$ . Розглянемо багатовимірний дифузійний процес на кілінгу (скачку дефолту) сталої варіативної моделі. Зокрема,  $\tilde{\mathbb{P}}$  динаміка  $X$  дефолту задається як

$$dX_t = (\mu + cX_t^{2\eta})X_t dt + (f(Y_t, Z_t)X_t^\eta)X_t d\tilde{W}_t^x, \quad h(X_t) = \mu + cX_t^{2\eta}.$$

Для спрощення обчислень вважатимемо, що безризикова відсоткова ставка  $r = 0$ ,  $\mu > 0$ ,  $c > 0$ ,  $Y$  і  $Z$  є швидко і повільно змінні чинники волатильності, які визначаються системою стохастичних рівнянь [100]

Обчислимо наближену ціну європейського опціону для активу  $S$ . Ціну європейського опціону можна знайти за формулою (4.105).

$$\langle \mathfrak{L}_2 \rangle = \frac{1}{2} \bar{\sigma}^2 x^{2\eta+2} \partial_{xx}^2 + (\mu + cx^{2\eta})x \partial_x - (\mu + cx^{2\eta}), \quad (4.113)$$

$\mathfrak{L}_2$  – нескінченно малий генератор

Розв'язок (4.105) має вигляд [101]

$$\psi_n = A^{\frac{v}{2}} \sqrt{\frac{(n-1)! \mu}{\Gamma(v+n)}} x \exp(-Ax^{-2\eta}) L_{n-1}^{(v)}(Ax^{-2\eta}), \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

$$A = \frac{\mu}{\bar{\sigma}^2 |\eta|}, \quad \lambda_n = 2\mu |\eta| (n+v), \quad v = \frac{1 + 2(\frac{2}{\bar{\sigma}^2})}{2|\eta|},$$

де

$$L_n^{(v)} = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n+v}{n-i} \frac{x^i}{i!}$$

є узагальненими поліномами Лагерра.

При асимптотичному дослідженні розглядаємо задачі

$$\begin{aligned} (-\partial_t + \langle \mathcal{L}_2 \rangle) w_{0,0} &= 0, & w_{0,0}(0, x, z) &= H(x), \\ (-\partial_t + \langle \mathcal{L}_2 \rangle) w_{1,0} &= \mathcal{A} w_{0,0}, & w_{1,0}(0, x, z) &= 0, \\ (-\partial_t + \langle \mathcal{L}_2 \rangle) w_{0,1} &= \mathcal{B} \partial_z w_{0,0}, & w_{0,1}(0, x, z) &= 0. \end{aligned}$$

де  $\mathcal{A}$  і  $\mathcal{B}$  мають вигляд

$$\mathcal{A} = -v_3 x^{\eta+1} \partial_x x^{2\eta+2} \partial_{xx}^2 - v_2 x^{2\eta+2} \partial_{xx}^2, \quad \mathcal{B} = -v_1 x^{\eta+1} \partial_x - v_0.$$

$$\mathcal{A} w_{0,0} = \sum_n c_n (\mathcal{A} \psi_n) T_n = \sum_n \sum_k c_n \mathcal{A}_{k,n} \psi_k T_n$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B} \partial_z w_{0,0} &= \sum_n c_n (\mathcal{B} \partial_z \psi_n) T_n + \sum_n (\partial_z c_n) (\mathcal{B} \psi_n) T_n + \sum_n c_n (\mathcal{B} \psi_n) (\partial_z T_n) \\ &= \sum_n \sum_k c_n \tilde{\mathcal{B}}_{k,n} \psi_k T_n + \sum_n \sum_k (\partial_z c_n) \mathcal{B}_{k,n} \psi_k T_n - \\ &\quad \sum_n \sum_k c_n \mathcal{B}_{k,n} \psi_k (\partial_z \lambda_n) t T_n. \end{aligned}$$

Аналітичні вирази для  $\mathcal{A}_{k,n}$ ,  $\mathcal{B}_{k,n}$  і  $\tilde{\mathcal{B}}_{k,n}$  можна отримати, зробивши заміну змінних [102]  $Ax^{-2\eta} \rightarrow y$ , використовуючи

$$\partial_y L_n^v(y) = -L_{n-1}^{(v+1)}(y), \quad \int_0^\infty y^\alpha e^{-y} L_n^{(\alpha)}(y) L_m^{(\alpha)}(y) dy = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!} \delta_{nm},$$



де  $\delta_{nm}$  символ Кронекера. Формули для визначення  $\mathcal{A}_{k,n}, \mathcal{B}_{k,n}$  і  $\tilde{\mathcal{B}}_{k,n}$ , мають вигляд [56].

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{k,n} &= -\vartheta_3 \left\{ \sum_{m=0}^{3 \wedge n} \binom{3}{m} \left(\frac{-1}{\kappa}\right)^{3-m} \left(\frac{2\sqrt{\kappa}}{\bar{\sigma}}\right)^m \frac{n! \mathcal{N}_n}{(n-m)! \mathcal{N}_{n-m}} \delta_{k,n-m} \right\} \\
&\quad - (\vartheta_2 + \mathfrak{U}_2) \left\{ \sum_{m=0}^{3 \wedge n} \binom{2}{m} \left(\frac{-1}{\kappa}\right)^{2-m} \left(\frac{2\sqrt{\kappa}}{\bar{\sigma}}\right)^m \frac{n! \mathcal{N}_n}{(n-m)! \mathcal{N}_{n-m}} \delta_{k,n-m} \right\} \\
&\quad - \mathfrak{U}_1 \left\{ \left(\frac{-1}{\kappa}\right) \delta_{k,n} + \left(\frac{2\sqrt{\kappa}}{\bar{\sigma}}\right) \frac{n! \mathcal{N}_n}{(n-1)! \mathcal{N}_{n-1}} \delta_{k,n-1} \right\}, \\
\mathcal{B}_{k,n} &= -\vartheta_1 \left\{ \left(\frac{-1}{\kappa}\right) \delta_{k,n} + \left(\frac{2\sqrt{\kappa}}{\bar{\sigma}}\right) \frac{n! \mathcal{N}_n}{(n-1)! \mathcal{N}_{n-1}} \delta_{k,n-1} \right\} - \vartheta_0 \delta_{k,n}, \\
\tilde{\mathcal{B}}_{k,n} &= -\vartheta_1 \bar{\sigma}' \left\{ \left[ \left(\frac{-1}{\kappa}\right) \left(\frac{1}{2\bar{\sigma}} - \frac{\bar{\sigma}}{\kappa^3} - \frac{n}{\bar{\sigma}}\right) \right] \delta_{k,n} \right. \\
&\quad + \left[ \left(\frac{-1}{\kappa}\right) \left(\frac{4}{\kappa^{\frac{3}{2}}}\right) + \left(\frac{2\sqrt{\kappa}}{\bar{\sigma}}\right) \left(\frac{1}{2\bar{\sigma}} - \frac{\bar{\sigma}}{\kappa^3} - \frac{n}{\bar{\sigma}}\right) \right] \frac{n! \mathcal{N}_n}{(n-1)! \mathcal{N}_{n-1}} \delta_{k,n-1} \\
&\quad + \left[ \left(\frac{-1}{\kappa}\right) \left(\frac{-2}{\bar{\sigma}}\right) + \left(\frac{2\sqrt{\kappa}}{\bar{\sigma}}\right) \left(\frac{4}{\kappa^{\frac{3}{2}}}\right) \right] \frac{n! \mathcal{N}_n}{(n-2)! \mathcal{N}_{n-2}} \delta_{k,n-2} \\
&\quad \left. + \left[ \left(\frac{2\sqrt{\kappa}}{\bar{\sigma}}\right) \left(\frac{-2}{\bar{\sigma}}\right) \right] \frac{n! \mathcal{N}_n}{(n-3)! \mathcal{N}_{n-3}} \delta_{k,n-3} \right\} \\
&\quad - \vartheta_0 \bar{\sigma}' \left\{ \left(\frac{1}{2\bar{\sigma}} - \frac{\bar{\sigma}}{\kappa^3} - \frac{n}{\bar{\sigma}}\right) \delta_{k,n} + \left(\frac{4}{\kappa^{\frac{3}{2}}}\right) \frac{n! \mathcal{N}_n}{(n-1)! \mathcal{N}_{n-1}} \delta_{k,n-1} \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{-2}{\bar{\sigma}}\right) \frac{n! \mathcal{N}_n}{(n-2)! \mathcal{N}_{n-2}} \delta_{k,n-2} \right\} \\
&\quad - \vartheta_1 \bar{f} \bar{\Omega}' \left\{ \left(\frac{1}{\kappa^3}\right) \delta_{k,n} + \left(\frac{-4}{\bar{\sigma} \kappa^{\frac{3}{2}}}\right) \frac{n! \mathcal{N}_n}{(n-1)! \mathcal{N}_{n-1}} \delta_{k,n-1} + \left(\frac{4}{\bar{\sigma}^2}\right) \frac{n! \mathcal{N}_n}{(n-2)! \mathcal{N}_{n-2}} \delta_{k,n-2} \right\}
\end{aligned}$$

$$-\vartheta_0 \overline{f\Omega'} \left\{ \left( \frac{-1}{\kappa^2} \right) \delta_{k,n} + \left( \frac{2}{\bar{\sigma}\sqrt{\kappa}} \right) \frac{n! \mathcal{N}_n}{(n-1)! \mathcal{N}_{n-1}} \delta_{k,n-1} \right\}.$$

$$c_n = (\psi_n, 1) = \frac{2}{\bar{\sigma}} \sqrt{\frac{\pi}{\kappa}} \mathcal{N}_n A^n e^{-A^2/4}.$$

Знайдемо власні значення рівняння:

$$-\langle \mathcal{L}_2 \rangle \psi_n = \lambda_n \psi_n, \quad \psi_n \in \text{dom}(\langle \mathcal{L}_2 \rangle),$$

і припустимо, що  $H \in \mathcal{H}$ . Тоді розв'язок  $w_{0,0}$  дається у вигляді:

$$u_{0,0} = \sum_n c_n \psi_n T_n, \quad c_n = (\psi_n, H), \quad T_n = e^{-t\lambda_n}.$$

Визначимо

$$\mathcal{A}_{k,n} := (\psi_k, \mathcal{A}\psi_n), \quad U_{k,n} := \frac{T_k - T_n}{\lambda_k - \lambda_n}.$$

тоді можемо знайти  $w_{1,0}$ :

$$w_{1,0} = \sum_n \sum_{k \neq n} c_n \mathcal{A}_{k,n} \psi_k U_{k,n} - \sum_n c_n \mathcal{A}_{n,n} \psi_n t T_n.$$

ВІЗНАЧИМО

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{B}}_{k,n} &:= (\psi_k, \mathcal{B}\partial_Z \psi_n), & \mathcal{B}_{k,n} &:= (\psi_k, \mathcal{B}\psi_n), \\ V_{k,n} &:= \frac{T_k - T_n}{(\lambda_k - \lambda_n)^2} + \frac{t T_n}{\lambda_k - \lambda_n}, \end{aligned}$$

тепер  $w_{0,1}$  набуде вигляду:

$$\begin{aligned} w_{0,1} &= \sum_n \sum_{k \neq n} c_n \tilde{\mathcal{B}}_{k,n} \psi_k U_{k,n} - \sum_n c_n \tilde{\mathcal{B}}_{n,n} \psi_n t T_n + \\ &+ \sum_n \sum_{k \neq n} (\partial_Z c_n) \mathcal{B}_{k,n} \psi_k U_{k,n} - \sum_n (\partial_Z c_n) \mathcal{B}_{n,n} \psi_n t T_n \\ &+ \sum_n \sum_{k \neq n} c_n \mathcal{B}_{k,n} \psi_k (\partial_Z \lambda_n) V_{k,n} - \sum_n c_n \mathcal{B}_{n,n} \psi_n (\partial_Z \lambda_n) \frac{1}{2} t^2 T_n. \end{aligned}$$

Звернемо увагу на те, що  $w_{0,1}$  є лінійним в  $(\nu_1 \bar{\sigma}', \nu_1 \overline{f\Omega'}, \nu_0 \bar{\sigma}', \nu_0 \overline{f\Omega'})$ , а для фіксованих  $(t, x, y, z)$  існує стала  $C$  така, що для будь-якого  $\epsilon \leq 1, \delta \leq 1$  маємо:

$$|w^{\epsilon, \delta} - (w_{0,0} + \sqrt{\epsilon} w_{1,0} + \sqrt{\delta} w_{0,1})| \leq C(\epsilon + \delta).$$

Виграш європейського опціону з ціною виконання  $K > 0$  можна розкласти наступним чином [103]:

$$(K - S_t)^+ = (K - X_t)^+ \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} + K(1 - \mathbb{1}_{\{\tau > t\}}). \quad (4.114)$$

Перший доданок в правій частині (4.114) є прибуток опціону поданого до дефолту у момент часу  $t$ . Другий член це прибуток опціону після дефолту, який відбувається у момент часу  $t$ . Таким чином, вартість опціону з ціною виконання  $K$  – позначається як  $w^{\epsilon, \delta}(t, x; K)$  і може бути виражена у вигляді суми:

$$w^{\epsilon, \delta}(t, x; K) = w_o^{\epsilon, \delta}(t, x; K) + w_D^{\epsilon, \delta}(t, x; K),$$

де

$$w_o^{\epsilon, \delta}(t, x; K) = \tilde{\mathbb{E}}_{x,y,z}[(K - X_t)^+ \mathbb{1}_{\{\tau > t\}}],$$

$$w_D^{\epsilon, \delta}(t, x; K) = K - K \tilde{\mathbb{E}}_{x,y,z}[\mathbb{1}_{\{\tau > t\}}] =$$

$$K - K \int_0^\infty \tilde{\mathbb{E}}_{x,y,z}[\delta_{x'}(X_t) \mathbb{1}_{\{\tau > t\}}] dx'$$

$$= K - K \int_0^\infty u_1^{\epsilon, \delta}(t, x; x') dx',$$

$$w_1^{\epsilon, \delta}(t, x; x') = \tilde{\mathbb{E}}_{x,y,z}[\delta_{x'}(X_t) \mathbb{1}_{\{\tau > t\}}], \quad 1 \notin L^2(\mathbb{R}^+, \mathfrak{m})$$

використавши, що [61]  $1 = \int_0^\infty \delta_{x'}(X_t) dx'$ , на множині  $\{\tau > T\}$ .

Так, як функції виграшу  $H_0(x) = (K - x)^+$  і  $H_1(x) = \delta_{x'}(x)$  належать  $L^2(\mathbb{R}^+, \mathfrak{m})$ , можемо обчислити:

$$c_{0,n} = (\psi_n(\cdot), (k - \cdot)^+), \quad c_{1,n} = (\psi_n, \delta_{x'}).$$

Вирази для  $c_{0,n}$  та  $c_{1,n}$  можна знайти з [1].

$$c_{0,n} = \frac{A^{\frac{v}{2}+1} K^{\frac{2c}{\sigma^2}+1-2\eta} \sqrt{\Gamma(v+n)}}{\Gamma(v+n) \sqrt{\mu(n-1)!}} \times$$

$$\left[ \frac{|\eta|}{\frac{c}{\sigma^2} + |\eta|} {}_2F_2 \left( \begin{matrix} 1-n & \frac{\frac{c}{\sigma^2}}{|\eta|} + 1 \\ v+1 & \frac{c}{\sigma^2} + 2 \end{matrix} ; AK^{-2\eta} \right) - \frac{\Gamma(v+1)(n-1)!}{\Gamma(v+n+1)} L_{n-1}^{(v+1)}(AK^{-2\eta}) \right],$$

$$c_{1,n} = \psi_n(x') m(x').$$

де

$${}_2F_2(\alpha, \beta, \gamma, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n-1) \beta(\beta+1) \dots (\beta+n-1)}{n! \gamma(\gamma+1) \dots (\gamma+n-1)} x^n,$$

узагальнена гіпергеометрична функція, а

$$L_{n-1}^{(v+1)}(AK^{-2\eta}) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n+v}{n-i} \frac{(AK^{-2\eta})^i}{i!},$$

поліноми Лагерра.

Орієнтовну вартість європейського опціону тепер можна обчислити за допомогою теорем 4.5-4.7 [1].

Для європейського варіанту волатильність опціону  $I^{\epsilon, \delta}$  з ціною  $w^{\epsilon, \delta}(t, x; K)$  визначається з використанням [104]

$$w^{\epsilon, \delta}(t, x; K) = w^{BS}(t, x, I^{\epsilon, \delta}; K)$$

де  $w^{BS}(t, x, I^{\epsilon, \delta}; K)$  ціна Блека-Шоулза з волатильністю  $I^{\epsilon, \delta}$ .

Результати обчислень цін європейських опціонів наведено на рис. 4.3.

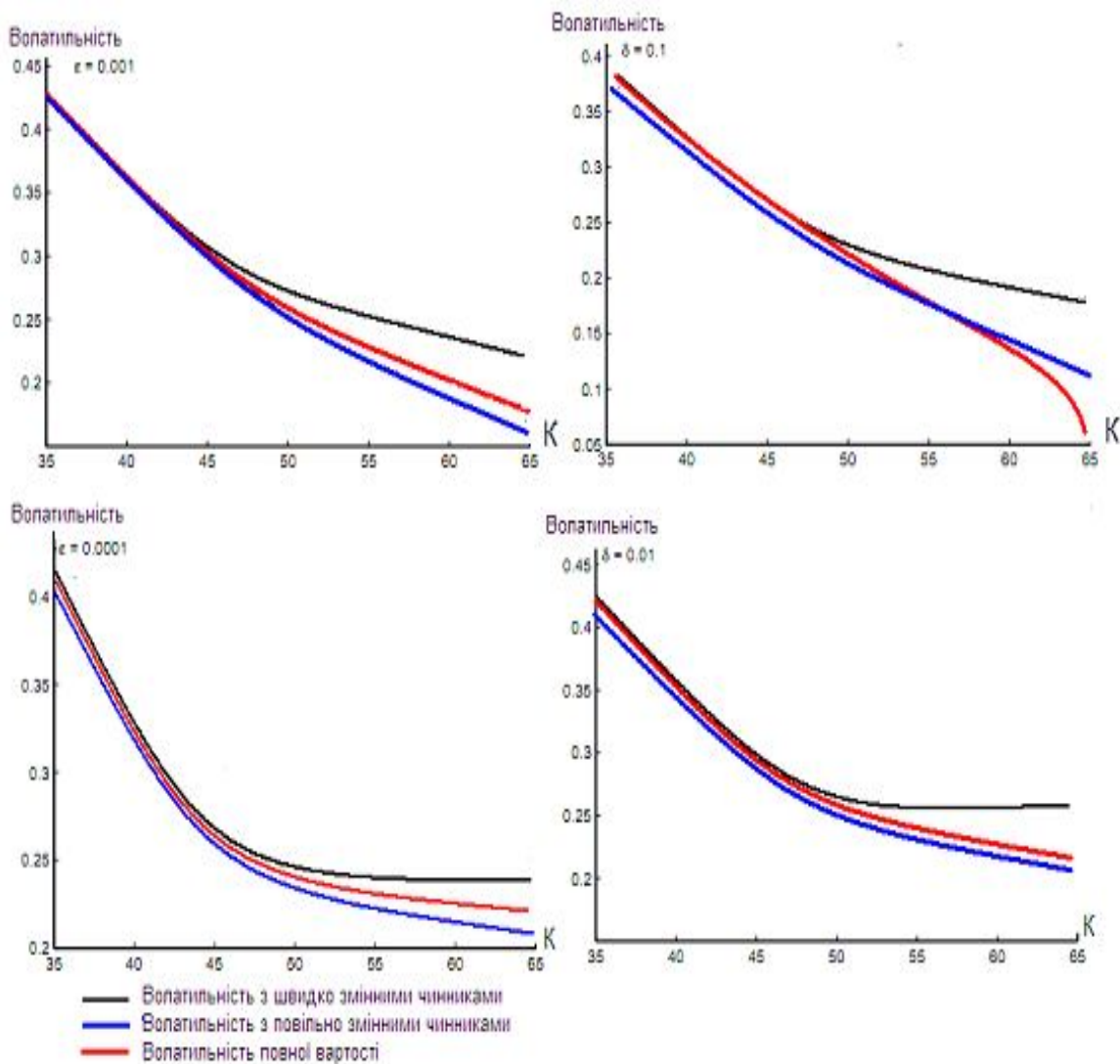


Рис.4.3. Динаміка волатильності цін європейських опціонів

На лівій стороні рисунка 4.3 побудовано волатильність яка залежить від ціни  $w_{0,0} + \sqrt{\epsilon}w_{1,0}$ , опціону для моделі, яка має тільки швидко змінні чинники волатильності. Динаміка  $Y$  і функція волатильності  $f$  задаються формулою [105].

$$dY_t = \left( -\frac{1}{\epsilon}Y_t - \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\beta \text{Erf}(Y_t) \right) dt + \beta d\tilde{W}_t^y, \quad f(Y_t) = \frac{\sigma \exp(Y_t)}{\exp\left(-\frac{\beta^2}{2}\right)},$$

$$\text{Erf}(y) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-t^2} dt.$$

Для порівняння, побудовано волатильність, повної вартості  $w^\epsilon$  і На правій стороні рисунка 4.3 наведено волатильність викликану наближеною ціною  $w_{0,0} + \sqrt{\delta}w_{1,0}$ , опціону для моделі, яка має тільки повільно мінливий чинник волатильності. Динаміка  $Z$  і функція волатильності  $f$  задаються

$$dZ_t = (-\delta Z_t - \sqrt{\delta}g\text{Erf}(Z_t))dt + gd\tilde{W}_t^Z, \quad f(Z_t) = \frac{\sigma \exp(Z_t)}{\exp(z)}.$$

Побудовано волатильність, повної вартості  $w^\delta$  і  $w_{0,0}$ . Як і слід було очікувати, при  $\epsilon$  і  $\delta$  які прямують до нуля волатильність прямує до ціни волатильності імплікованою повною ціною [106].

Однією з основних переваг розглянутої методології ціноутворення є те, що, комбінуючи методи з спектральної теорії сингулярних і регулярних збурень, обчислення ціни активу зводиться до розв'язання рівняння методом знаходження власних значень, власних функцій та розв'язання рівнянь Пуассона [107].

Застосовано методику знаходження ціни для похідних активів, які задовольняють модель CEV з волатильністю, що степеневно зростає по основній змінній процесу і залежить від повільно та швидко змінних чинників. Сильними сторонами даної методики ціноутворення є комбінування методів спектральної теорії сингулярних і регулярних збурень, за допомогою яких обчислюється ціна активу зведенням до розв'язання рівняння методом знаходження власних значень, власних функцій та розв'язання відповідного рівняння Пуассона, зокрема знаходження резольвенти у відповідному Гільбертовому просторі [108].

## Висновки до розділу 4

1. Розроблено алгоритм знаходження наближеної ціни двобар'єрних опціонів та знайдено явні формули для знаходження вартості деривативів на основі розкладу за власними функціями та власними значеннями самоспряжених операторів з використанням крайових задач для сингулярних і регулярних збурень. Встановлено теорему оцінки точності наближення цін деривативів, за шкалами систем повільно і швидко діючих чинників від яких залежить волатильність похідних фінансових інструментів.

2. Використовуючи спектральну теорію самоспряжених операторів у гільбертовому просторі та хвильову теорію сингулярних і регулярних збурень встановлено аналітичну формулу наближеної ціни деривативів з стохастичною волатильністю залежною від  $l$ -швидко змінних та  $n$ -повільно змінних чинників,  $l \geq 1, n \geq 1, l \in N, n \in N$  і локальної змінної.

3. Отримано загальний метод знаходження наближеної ціни для широкого класу похідних фінансових інструментів. Встановлено, що виплати за деривативами можуть бути шляхозалежними, а процес, що лежить в їх основі може проявляти стрибок, інтенсивність якого залежить від багатовимірної волатильності. Ціна опціонів залежить від стохастичної волатильності, яка описується шляхозалежним процесом. Знаходження ціни деривативів зводиться до розв'язання задачі знаходження власних значень і власних функцій конкретного рівняння, що відповідає даній моделі.

4. Встановлено орієнтовну ціну облігацій та їхню дохідність методами спектральної теорії та хвильової теорії збурень. Застосовано

спектральну теорію та теорію сингулярних і регулярних збурень до короткострокових відсоткових ставок, що описуються моделлю Васічека. Обчислено наближену ціну облігацій та їх дохідність.

5. Розширено методику знаходження наближеної ціни для широкого класу деривативів. Використовуючи спектральну теорію самоспряжених операторів у гільбертовому просторі та хвильову теорію сингулярних і регулярних збурень встановлено аналітичну формулу наближеної ціни активів, які описуються моделлю CEV з стохастичною волатильністю, яка залежить від швидко змінних та  $n$ -повільно змінних чинників.

6. Розроблено методи обчислення наближеної ціни опціонів за допомогою інструментів спектрального аналізу, сингулярної та регулярної хвильової теорії у випадку впливу швидко та повільно діючих чинників. Комбінуючи методи з спектральної теорії сингулярних і регулярних збурень, можна наближено обчислити ціну похідних фінансових інструментів, як розклад за власними функціями, працюючи з інфінітезимальними генераторами багатовимірної дифузії.



## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Burtnyak, I.V. & Malytska, A (2018). Spectral study of options based on CEV model with multidimensional volatility. *Investment Management and Financial Innovations*, 15(1), 18-24. doi:10.21511/imfi.15(1).2018.03.
2. Elliott, R. J., M. Jeanblanc, and M. Yor (2000). On models of default risk. *Mathematical Finance* 10(2), 179–194.
3. Carr, P. and V. Linetsky (2006). A jump to default extended cev model: An application of Bessel processes. *Finance and Stochastics* 10(3), 303–330.
4. Fouque, J.-P., G. Papanicolaou, R. Sircar, and K. Solna (2011). *Multiscale Stochastic Volatility for Equity, Interest-Rate and Credit Derivatives*. Cambridge University Press.
5. Оксендаль Б.. Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения. / Б. Оксендаль — М. : Мир, 2003. — 408 с.
6. Linetsky, V. (2007). Chapter 6 spectral methods in derivatives pricing. In J. R. Birge and V. Linetsky (Eds.), *Financial Engineering*, Volume 15 of *Handbooks in Operations Research and Management Science*, pp. 223–299. Elsevier.
7. Borodin, A. and P. Salminen (2002). *Handbook of Brownian motion: facts and formulae*. Birkhauser.
8. Буртняк І.В. Про стабілізацію інтеграла Пуассона ультрапараболічних рівнянь/ І.В. Буртняк, Г.П. Малицька //Карпатські математичні публікації. - 2013. - Т.5, №2. - С. 290–297.

9. Fouque, J.-P., G. Papanicolaou, R. Sircar, and K. Sølna (2003). Singular perturbations in option pricing. *SIAM J. Applied Mathematics* 63(5), 1648–1664.
10. McKean, Henry P., J. (1956). Elementary solutions for certain parabolic partial differential equations. *Transactions of the American Mathematical Society* 82(2), pp. 519–548.
11. Albanese, C., G. Campolieti, P. Carr, and A. Lipton (2001). Black-Scholes goes hypergeometric. *Risk* 14(12), 99–103.
12. Albanese, C. and A. Kuznetsov (2004). Unifying the three volatility models. *Risk Magazine* 17(3), 94–98.
13. Albanese, C. and S. Lawi (2005). Laplace transforms for integrals of markov processes. *Markov Processes Related Fields* (11), 677–724.
14. Choi, S.-Y., J.-P. Fouque, and J.-H. Kim (2010). Option pricing under hybrid stochastic and local volatility. Submitted.
15. Cotton, P., J.-P. Fouque, G. Papanicolaou, and R. Sircar (2004). Stochastic volatility corrections for interest rate derivatives. *Mathematical Finance* 14(2).
16. Davydov, D. and V. Linetsky (2001). Structuring, pricing and hedging double-barrier step options. *Journal of Computational Finance* 5, 55–88.
17. Davydov, D. and V. Linetsky (2003). Pricing options on scalar diffusions: An eigenfunction expansion approach. *Operations Research* 51(2), 185–209.
18. Fouque J., and K. Solna (2008). Bond markets with stochastic volatility. *Advances in Econometrics* 22, 215–242.
19. Feller, W. (1954). Diffusion processes in one dimension. *Transactions of the American Mathematical Society* 77(1), pp. 1–31.

20. Fouque, J., B. Wignall, and X. Zhou (2008). Modeling correlated defaults: First passage model under stochastic volatility. *Journal of Computational Finance* 11(3), 43.
21. Fouque, J.-P., J. Garnier, G. Papanicolaou, and K. Sølna (2007). *Wave propagation and time reversal in randomly layered media*. Springer Verlag. 34
22. Fouque, J.-P., S. Jaimungal, and M. Lorig (2011). Spectral decomposition of option prices in fast mean reverting stochastic volatility models. *SIAM Journal on Financial Mathematics*.
23. Fouque, J.-P., G. Papanicolaou, R. Sircar, and K. Sølna (2004). Multiscale stochastic volatility asymptotics. *Multiscale Modeling and Simulation* 2, 22–42.
24. Fouque, J.-P., R. Sircar, and K. Solna (2006). Stochastic volatility effects on defaultable bonds. *Applied Mathematical Finance* 13(3), 215–244.
25. Goldstein, R. S. and W. P. Keirstead (1997). On the term structure of interest rates in the presence of reflecting and absorbing boundaries. SSRN eLibrary.
26. Gorovoi, V. and V. Linetsky (2004). Black’s model of interest rates as options, eigenfunction expansions and japanese interest rates. *Mathematical finance* 14(1), 49–78.
27. Gorovoy, V. and V. Linetsky (2007). Intensityqbased valuation of residential mortgages: an analytically tractable model. *Mathematical Finance* 17(4), 541–573.
28. Haberman, R. (2004). *Applied Partial Differential Equations with Fourier Series and Boundary Value Problems* (4 ed.). Prentice Hall.
29. Hagan, P., D. Kumar, A. Lesniewski, and D. Woodward (2002). Managing smile risk. *Wilmott Magazine* 1000, 84–108.

30. Heston, S. (1993). A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *Rev. Financ. Stud.* 6(2), 327–343.
31. Hull, J. and A. White (1987). The pricing of options on assets with stochastic volatilities. *The Journal of Finance* 42(2), 281–300.
32. Lewis, A. (1998). Applications of eigenfunction expansions in continuous-time finance. *Mathematical Finance* 8(4), 349–383.
33. Linetsky, V. (2002). Exotic spectra. *Risk Magazine*, 85–89. 35
34. Linetsky, V. (2004). Lookback options and diffusion hitting times: A spectral expansion approach. *Finance and Stochastics* 8(3), 373–398.
35. Linetsky, V. (2004). The spectral decomposition of the option value. *International Journal of Theoretical and Applied Finance* 7(3), 337–384.
36. Linetsky, V. (2004). Spectral expansions for asian (average price) options. *Operations Research*, 856–867.
37. Linetsky, V. (2006). Pricing equity derivatives subject to bankruptcy. *Mathematical Finance* 16(2), 255–282.
38. Lipton, A. and W. McGhee (2002). Universal barriers. *Risk*, May, 81–84.
39. Mendoza-Arriaga, R., P. Carr, and V. Linetsky (2010). Time-changed markov processes in unified credit equity modeling. *Mathematical Finance* 20, 527–569.
40. Reed, M. and B. Simon (1980). *Methods of modern mathematical physics. Volume I: Functional Analysis.* Academic press.
41. Shawagfeh, N. (2011). A note on some integrals involving two associated laguerre polynomials. *Revista T´ecnica de la Facultad de Ingenier´ıa. Universidad del Zulia* 19(2).
42. Stein, E. and J. Stein (1991). Stock price distributions with stochastic volatility: an analytic approach. *Review of financial Studies* 4(4), 727.

43. Drimus, G. G. (2012). Options on realized variance by transform methods: a non-affine stochastic volatility model. *Quant. Finance* 12(11), 1679–1694.
44. Forde, M., A. Jacquier, and R. Lee (2012). The small-time smile and term structure of implied volatility under the Heston model. *SIAM Journal on Financial Mathematics* 3(1), 690–708.
45. Jeanblanc, M., M. Yor, and M. Chesney (2009). *Mathematical methods for financial markets*. Springer Verlag. Lorig, M. (2013). The exact smile of certain local volatility models. *Quantitative Finance* 13(6), 897–904..
46. Fouque J.-P., R. Sircar, K. Solna (2009). Multiname and Multiscale Default Modeling, *Multiscale Modeling and Simulation* 7(4), 1956-1978.
47. Albanese, C., G. Campolieti, P. Carr, and A. Lipton (2001). Black-scholes goes hypergeometric. *Risk* 14(12), 99–103.
48. Davis, M. H. A. (2004) Complete-market models of stochastic volatility. *Proc. R. Soc. Lond. A*460, 11–26.
49. Goldstein R S. and Keirstead W. P. (1997). On the term structure of interest rates in the presenceof reflecting and absorbing boundaries, *SSRN eLibrary*, pp. 381–394.
50. Pelsser A. (2000). Pricing double barrier options using laplace transforms, *Finance and Stochastics*, 4 pp. 95–104.
51. Davydov D. and Linetsky V. (2001). Structuring, pricing and hedging double-barrier step options, *Journal of Computational Finance*, 5, pp. 55–88.
52. Fouque J.-P., Papanicolaou G., and Sircar R. (2000). *Derivatives in Financial Markets with Stochastic Volatility*, Cambridge University Press.

53. Gatheral J. (2006). *The Volatility Surface: a Practitioner's Guide*, John Wiley and Sons, Inc.
54. Mendoza-Arriaga, R., Carr P., and Linetsky V. (2010). Time-changed markov processes in unified credit-equity modeling. *Mathematical Finance* 20, 527–569.
55. Fouque, J.-P., S. Jaimungal, and Lorig M. (2011). Spectral decomposition of option prices in fast mean-reverting stochastic volatility models. *SIAM Journal on Financial Mathematics*.
56. Lorig M. J. (2014) Pricing Derivatives on Multiscale Diffusions: an Eigenfunction Expansion Approach. *Mathematical Finance* 24:2, 331–363.
57. Carr, P. and V. Linetsky (2006). A jump to default extended cev model: An application of bessel processes. *Finance and Stochastics* 10(3), 303–330.
58. Буртняк І.В. Обчислення цін опціонів методами спектрального аналізу/ І.В. Буртняк, Г.П. Малицька // *Бизнес Інформ.* – 2013. – №4. – С. 152–158.
59. Буртняк І.В. Дослідження процесу Орнштейна–Уленбека методами спектрального аналізу / І.В. Буртняк, Г.П. Малицька // *Проблеми економіки.* – 2014. – №2. – С. 349–356.
60. Буртняк І.В. Обчислення цін опціонів за допомогою моделі CEV з багатовимірною стохастичною волатильністю / І. В. Буртняк, Г.П. Малицька// *Моделювання регіональної економіки: зб. наук. праць* – Івано-Франківськ : Плай, 2014. – №1. – С. 509–519.
61. Vasicek O., 1977. An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics* 5(2), 177 – 188.
62. Merton, R. C., 1973. Theory of Rational Option Pricing // *Bell Journal of Economics and Management Science.*— № 4. — P. 141— 183.

63. Cox, J and Ross, S. (1976). The Valuation of Options for Alternative Stochastic Process. *Journal of Financial Economics*.
64. Schroder, M. (March 1989) Computing the Constant Elasticity of Variance Option Pricing Formula. *The Journal of Finance*, 44, 211–219.
65. Emanuel, D. C. and MacBeth, J. D. (1982) Further Results on the Constant Elasticity of Variance Call Option Pricing Model. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 17, 533–554.
66. Fouque J.P., G. Papanicolaou and K.R Sircar, (2000) *Derivatives in Financial Markets with stochastic Volatility* Cambridge University Press.
67. Davydov, D. and Linetsky, V. (2003) Pricing Options on Scalar Diffusions: An Eigenfunction Expansion Approach. *Operations Research*, 51, 185–209.
68. Schroder M. (1989) “Computing the constant elasticity of variance option pricing formula,” *Journal of Finance*, vol. 44, pp. 211–219.
69. Black, F and Scholes, M. (1973). The Pricing of Options and Other Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*.
70. Hull J. and A. White (1989). The pricing of options on assets with stochastic volatilities, *Journal of Finance*, 42, 281 - 300.
71. Stein, E. and J. Stein (1991). Stock price distributions with stochastic volatility: an analytic approach. *Review of financial Studies* 4(4), 727.
72. Heston S. (1993). A Closed-Form solution for Options with stochastic volatility with applications to bond and currency options, *Review of Financial Studies*, 6 (2), 327 – 343
73. Aboulaich R., F. Baghery and A. Jrai (2013) Option pricing for a stochastic volatility jump-diffusion model, *International Journal of Mathematics and Statistics*, 13 (1), 1 - 19.
74. Andersen L., Piterbarg V. (2007), Moment exposures in stochastic volatility models, *Finance Stoch*, 11, 29 - 50.

75. Lindsay A.E., D.R. Brecher (2012), Simulation of the CEV process and the local martingale property, *Mathematics and Computers in Simulation*, 82, 868 - 878.
76. Буртняк І.В. Системний підхід до оцінювання опціонів на базі моделі CEV/ І.В. Буртняк, Г.П. Малицька // *Бизнес Інформ.* – 2016. – №10. – С. 152–158.
77. Shawagfeh, N. (2011). A note on some integrals involving two associated laguerre polynomials. *Revista Tecnica de la Facultad de Ingenier.ia. Universidad del Zulia* 19(2).
78. Dufresne, D. (2000). Laguerre series for Asian and other options. *Math. Finance* 10, 407-428.
79. Brennan, M.J., & Schwartz, E.S., 1979. A Continuous Time Approach to the Pricing of Bonds // *Journal of Banking and Finance.*— № 3. —P. 133-154.
80. Cox, J.C., Ingersoll, J.E., Ross, S.A., 1984. A theory of the term structure of interest rates // *Econometrica.*— Vol.53. — № 2. — P.385—408.
81. Gorovoi, V. & Linetsky, V., 2004. Black's model of interest rates as options, eigenfunction expansions and Japanese interest rates. *Mathematical finance* 14(1), 49–78.
82. Ho, T.S.Y., & Lee, S., 1986. Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims // *Journal of Finance.* — Vol. 41. — № 4. — P.1011—1029.
83. Hull, J. & White, A., 1987. The pricing of options on assets with stochastic volatilities. *The Journal of Finance* 42(2), 281–300.
84. Linetsky, V. (2004). The spectral decomposition of the option value. *International Journal of Theoretical and Applied Finance* 7(3), 337–384.



85. Merton, R. C. (1973). Theory of Rational Option Pricing // Bell Journal of Economics and Management Science.— № 4. — P. 141—183.
86. Vasicek, O., (1977). An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics* 5(2), 177 – 188.
87. .Fouque J.-P., R. Sircar, K. Solna (2009). Multiname and Multiscale Default Modeling, *Multiscale Modeling and Simulation* 7(4), 1956-1978.
88. Linetsky V. (2004). Lookback options and diffusion hitting times: A spectral expansion approach. *Finance and Stochastics* , 8(3):373–398.
89. Lewis A. Applications of eigenfunction expansions in continuous-time finance, *Mathematical Finance*, 8(1998), pp. 349–383.
90. Goldstein R. and Keirstead P. (1997) On the term structure of interest rates in the presence of reflecting and absorbing boundaries, SSRN eLibrary, pp. 381–394.
91. Gatheral J. *The Volatility Surface: a Practitioner’s Guide*, John Wiley and Sons, Inc., 2006.
92. Cox, J. "Notes on Option Pricing I: Constant Elasticity of Diffusions." Unpublished draft, Stanford University, 1974.
93. Davis, M. H. A. 2004 Complete-market models of stochastic volatility. *Proc. R. Soc. Lond. A*460, 11–26.
94. Forde, M., Jacquier, A. and R. Lee. (2012). The small-time smile and term structure of implied volatility under the Heston model. *SIAM J. Finan. Math.* 3, 690-708
95. Albanese, C., G. Campolieti, P. Carr, and A. Lipton (2001). Black-scholes goes hypergeometric. *Risk* 14(12),99–103.
96. Davis, M. H. A. 2004 Complete-market models of stochastic volatility. *Proc. R. Soc. Lond. A*460, 11–26.

97. Drimus, G. G. (2012). Options on realized variance by transform methods: a non-affine stochastic volatility model. *Quant. Finance* 12(11), 1679–1694.
98. Alos E. (2012). “A decomposition formula for option prices in the Heston model and applications to option pricing approximation,” *Finance and Stochastics*, vol. 16, no. 3, pp. 403–422.
99. Forde, M., A. Jacquier, and R. Lee (2012). The small-time smile and term structure of implied volatility under the Heston model. *SIAM Journal on Financial Mathematics* 3(1), 690–708.
100. Jeanblanc, M., M. Yor, and M. Chesney (2009). *Mathematical methods for financial markets*. Springer Verlag.
101. Lorig, M. (2013). The exact smile of certain local volatility models. *Quantitative Finance* 13(6), 897–904.
102. Pirjol, D. and L. Zhu (2016). Short maturity Asian options in local volatility models. *SIAM J. Fin. Math.* 7, 947-992.
103. Leung, T. and M. Ludkovski (2012). Accounting for risk aversion in derivatives purchase timing. *Mathematics and Financial Economics* 6(4), 363–386.
104. Kumar, R. (2015). Effect of volatility clustering on indifference pricing of options by convex risk measures. *Applied Mathematical Finance* 22(1), 63–82.
105. Буртняк І.В. Знаходження ціни опціону з мультиплікативною волатильністю за допомогою рівняння Колмогорова./ І.В. Буртняк, Г.П. Малицька // Матеріали ХХІІІ міжнародної науково-практичної конференція Транскордонне співробітництво: ключові ідеї та перспективи 20-22 травня 2016 Сучавський університет Штефан чел Маре– 2016. – С. 167-169
106. Буртняк І.В. Моделювання цін опціонів з багатофакторною

волатильністю/ І.В. Буртняк, Г.П. Малицька // Матеріали VII міжнар. Науково-методичної конференції “моделювання економіки: проблеми, тенденції, досвід” (Тернопіль, 20–21 жовтня 2016). – Тернопіль. – 2016. С. 69-71.

107. Буртняк І.В. Регуляція фінансових потоків за допомогою методів спектрального аналізу /І.В. Буртняк, Г.П. Малицька/ Матеріали Міжнародної наукової конференції «Трансформація фінансових ринків в умовах глобальної нестабільності: реалії сьогодення та погляд у майбутнє», 30 жовтня 2017 – Ірпінь, 2017. – С. 66-67.
108. Буртняк І.В. Застосування рядів Тейлора для ціноутворення похідних цінних паперів /І.В. Буртняк, Г.П. Малицька/ Матеріали Всеукраїнської науковопрактичної конференції “ Економічна кібернетика: перспективи розвитку інформаційної економіки ”, м. Дніпро, 1-2 березня 2018 р. – С. 15-19.

## ВИСНОВКИ

1. Визначено, що фондовий ринок є складовим елементом фінансового ринку країни поряд з грошовим ринком та ринком капіталів, при цьому ці сегменти є взаємодоповнюючими та такими, що перетинаються в частині використання окремих фінансових інструментів, зокрема деривативів, які використовуються для хеджування ризиків, що супроводжують базові фінансові інструменти, в першу чергу акції та облигації.

2. Розроблено комплекс моделей дослідження динаміки фондового ринку на основі визначення величини ринкового портфеля акцій, що забезпечують вимір внутрішньої волатильності на ринку в будь-який момент часу.

3. Встановлено, що використання спектральних методів для аналізу часових рядів, дає можливість розробити комплекс моделей прогнозування фондових індикаторів з метою оптимізації діяльності професійних учасників фондового ринку, визначати кількісні сторони закономірностей та відслідковувати динаміки процесів, що протікають на ньому.

4. На основі застосування модель Гобсона-Роджерса досліджено динаміку фондового індексу ПФТС та знайдено волатильність вартості. Застосовуючи швидку середню зміну волатильності, запропоновано ефективний метод для моделювання, аналізу і стійкої оцінки важливих параметрів фондового ринку.

5. Встановлено ціни опціонів за допомогою моделі Гобсона-Роджерса яка дозволяє обрати найкращий варіант стратегії для підвищення продуктивності хеджування. Використано гнучку схему зважування, що відповідає скінченному горизонту часу в минулому.

Запропонована модель має унікальну перевагу над іншими при встановленні цін на похідні активи.

6. Доведено, що шляхозалежна волатильність володіє минулою інформацією та дозволяє моделювати поведінку інвесторів в різних ринкових умовах, а також відображає позитивні або негативні тенденції фінансового інструменту. На відміну від стандартних локальних або стохастичних моделей волатильності, у випадку раптового падіння ринку, шляхозалежна модель волатильності може бути використана для автоматичного підвищення рівня волатильності з метою гармонізації динаміки фондового ринку.

7. Застосовано спектральну теорію для знаходження ціни похідних фінансових інструментів вважаючи що процеси, які описуються, є марківськими і такими, що їх можна розглядати в гільбертових просторах  $L^2$ , застосовуючи теорію ШтурмаЛіувілля. Всі припущення є природними, приводять до аналітичних формул, які узгоджені з емпіричними даними і при практичному застосуванні адекватно відображають проходження процесів на фондових ринках.

8. Розв'язано двопараметричну задачу оцінювання інтенсивності Беселівських дифузійних процесів методами спектральної теорії. Зокрема розглянуто бар'єри для ціни, в яких похідна фінансових потоків перетворюється в нуль. Функцію Гріна цієї задачі, яка репрезентує ймовірність поширення ціни опціону, представлено через ряди Фур'є Бесселя. Це дає можливість оцінити інтенсивність фінансових потоків фондових ринків.

9. Розроблено алгоритм знаходження наближеної ціни двобар'єрних опціонів та знайдено явні формули для знаходження вартості деривативів на основі розкладу за власними функціями та

власними значеннями самоспряжених операторів з використанням крайових задач для сингулярних і регулярних збурень.

10. Використано методи спектральної теорії та теорії сингулярних і регулярних збурень, знайдено наближену ціну двобарерних опціонів з багатofакторною волатильністю, як розклад за власними функціями використовуючи інфiнітезимальні генератори  $(1+n+1)^{-1}$  вимірної дифузії. Встановлено теорему оцінки точності наближення цін опціонів. Знайдено явні формули для знаходження вартості деривативів на основі розкладу за власними функціями та власними значеннями самоспряжених операторів з використанням крайових задач для сингулярних і регулярних збурень.

11. Застосовано спектральну теорію та теорію сингулярних і регулярних збурень до короткострокових відсоткових ставок, що описуються моделлю Васічека. Обчислено наближену ціну облігацій та їх дохідність. Застосувавши теорію Штурма-Ліувілля, альтернативи Фредгольма, а також аналіз сингулярних і регулярних збурень в різних часових шкалах, отримано явні формули для наближень цін облігацій та дохідності.

12. Розширено методикку знаходження орієнтовної ціни для широкого класу похідних фінансових інструментів. Використовуючи спектральну теорію самоспряжених операторів у гільбертовому просторі та хвильову теорію сингулярних і регулярних збурень встановлено аналітичну формулу наближеної ціни активів, які описуються моделями з стохастичною волатильністю залежною від  $l$ -швидко змінних та  $r$ -повільно змінних чинників,  $l \geq 1, r \geq 1, l \in N, r \in N$  і локальної змінної.

Наукове видання

Буртняк Іван Володимирович

**МОДЕЛІ ПОВЕДІНКИ ВОЛАТИЛЬНОСТІ ФІНАНСОВИХ  
ІНСТРУМЕНТІВ ФОНДОВИХ РИНКІВ**

*Видається у авторській редакції*

Головний редактор    Василь Головчак

Підписано до друку 28.03.2018.

Формат 60x84/16

Гарнітура “Times New Roman”

Друк арк. 16,86.

Наклад 300 пр. **Зам.** №

**ISBN 978-966-640-454-4**

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

76000, м. Івано-Франківськ, вул С. Бандери 1, тел. 71-56-22

*Свідоцтво об'єкта видавничої справи*

*ДК № 2718 від 12.12.2006*

**Виговлювач**