Р.І. Собкович

ДВОСТОРОННІЙ МЕТОД У НЕЛІНІЙНИХ ДВОТОЧКОВИХ ЗАДАЧАХ

За допомогою двостороннього методу доведено теореми існування та єдиності для нелінійних двоточкових задач.

Розглядається задача відшукання розв'язків системи рівнянь

$$x' = f(t,x,x), \tag{1}$$

які задовольняють умову

$$u(x(t_1),x(t_2)) = 0. \tag{2}$$

Тут x, f, u - елементи евклідового простору E^m, напіввпорядкованого конусом векторів з невід'ємними координатами.

При дослідженні задачі (1), (2) застосовувались методи редукції до задачі Коші, лінеаризації і стрільби [1] – [3]. Чисельно-аналітичний метод дослідження двоточкових задач із лінійними крайовими умовами використаний в [4]. Двосторонній метод, коли умова (2) задана у виді $A_1x(t_1) + A_2x(t_2) + A_3 = 0$ (A_i – сталі матриці), розглянутий в [5].

В даній статті отримано нові умови існування розв'язку задачі (1), (2), які грунтуються на застосуванні деяких властивостей напіввпорядкованих просторів, викладених в роботі [6].

Нехай функція $f(t,y,z)$ визначена і неперевна в області $D_f = [t_1, t_2] \times I \times I, I = [a, b], a, b \in E^m$, ізотонна по y і антитонна по z, тобто при $t \in [t_1,t_2]$ і $\underline{y} \le \overline{y}$, $\underline{z} \le \overline{z}$ виконується нерівність $f(t, \underline{y}, \overline{z}) \le f(t, \overline{y}, \underline{z})$ (нерівність між векторами розуміємо покомпонентно), а також оператор $u(y,z)$ представлений у виді

$u(y,z) = F(y,y,z,z) - Ay$,

де $F(\underline{y}, \overline{y}, \underline{z}, \overline{z})$ неперервна за сукупністю аргументів в області $D_f = I \times I \times I \times I$, ізотонна по $\underline{y}, \underline{z}$ і антитонна по $\overline{y}, \overline{z}$, стала матриця A така, що $A^{-1} > \Theta$ (Θ - нульова матриця). Вважатимемо також, що для будь-яких $t \in [t_1,t_2]$ і $y_i, z_i \in I$ $(i = 1;2)$ виконуються нерівності

$\underline{M} \le f(t, y_1, z_1) \le \overline{M}$, $\underline{M}_0 \le F(t, y_1, y_2, z_1, z_2) \le \overline{M}_0$

Покладемо $x(t_1) = \lambda$, $x(t_2) = \mu$ і зробимо заміну $x(t) = z(t) + \frac{t - t_1}{h}\mu + \frac{t_2 - t}{h}\lambda$, $h = t_2 - t_1$. Тоді задача (1), (2) зведеться до виду

$$z' = f\left(t, z+\lambda+\frac{t-t_1}{h}(\mu-\lambda), z+\lambda+\frac{t-t_1}{h}(\mu-\lambda)\right)+\frac{1}{h}(\lambda-\mu), \tag{3}$$

$$z(t_1) = z(t_2) = 0, \tag{4}$$

$$\lambda = A^{-1}F(\lambda,\lambda,\mu,\mu). \tag{5}$$

Введемо в розгляд оператор L з допомогою рівності

$$L(g(t)) = \frac{t_2-t}{h}\int_{t_1}^{t} g(s)ds + \frac{t-t_1}{h}\int_{t_2}^{t} g(s)ds,\ g(t)\in C_{[t_1,t_2]},$$

та дослідимо існування розв'язків операторного рівняння

$$w = P(w,w), \tag{6}$$

де
$$w = \begin{pmatrix} z \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix}, \qquad P(w,w) = \begin{pmatrix} L(g(t,w,w)) \\ A^{-1}F(\lambda,\lambda,\mu,\mu) \\ \lambda + \int_{t_1}^{t_2} g(t,w,w)dt \end{pmatrix},$$

$$g(t,w,w) \equiv f\left(t, z+\lambda+\frac{t-t_1}{h}(\mu-\lambda), z+\lambda+\frac{t-t_1}{h}(\mu-\lambda)\right).$$

Позначимо через S множину вектор-функцій $W(t) = \begin{pmatrix} Z(t) \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$ для яких виконується умова

$$\begin{pmatrix} \frac{h}{4}(\underline{M}-\overline{M}) \\ A^{-1}\underline{M}_0 \\ A^{-1}\underline{M}_0 + h\underline{M} \end{pmatrix} \le w(t) \le \begin{pmatrix} \frac{h}{4}(\overline{M}-\underline{M}) \\ A^{-1}\overline{M_0} \\ A^{-1}\overline{M}_0 + h\overline{M} \end{pmatrix},\ t\in[t_1,t_2].$$

Нехай $w(t)\in S$. Тоді

$$P(w,w) \le \begin{pmatrix} \frac{t_2-t}{h}\int_{t}^{t}\overline{M}ds + \frac{t-t_1}{h}\int_{t}^{t_2}\underline{M}ds \\ A^{-1}\overline{M}_0 \\ A^{-1}\overline{M}_0 + \int_{t_1}^{t_2}\overline{M}ds \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} \frac{h}{4}(\overline{M}-\underline{M}) \\ A^{-1}\overline{M}_0 \\ A^{-1}\overline{M}_0 + h\overline{M} \end{pmatrix},$$

$$P(\underline{w},\overline{w}) \ge \begin{pmatrix} \frac{t_2-t}{h}\int_{t_1}^{t}\underline{M}ds + \frac{t-t_1}{h}\int_{t_2}^{t}\overline{M}ds \\ A^{-1}\underline{M}_0 \\ A^{-1}\underline{M}_0 + \int_{t_1}^{t_2}\underline{M}ds \end{pmatrix} \ge \begin{pmatrix} \frac{h}{4}(\underline{M}-\overline{M}) \\ A^{-1}\underline{M}_0 \\ A^{-1}\underline{M}_0 + h\underline{M} \end{pmatrix},$$

тобто $P(w,w) \in S$. Із зроблених вище припущень відносно неперервності функцій f і F випливають рівномірна обмеженість і одностайна неперервність множини $P(w,w)$. Тоді, в силу узагальненого принципу Шаудера для напіввпорядкованих просторів, рівняння (6) має хоча б один розв'язок в S. Якщо $w^*(t) = \begin{pmatrix} z^*(t) \\ \lambda^* \\ \mu^* \end{pmatrix}$ - розв'язок (6), то, очевидно, виконуються рівності

$$z^*(t_1) = z^*(t_2) = 0,$$

$$z'^*(t) = g(t,w^*,w^*) - \frac{1}{h}\int_{t_1}^{t_2} g(s,w^*(s),w^*(s))ds = g(t,w^*w^*) - \frac{1}{h}(\lambda^* - \mu^*),$$

$\lambda^* = A^{-1}F(\lambda^*,\lambda^*,\mu^*,\mu^*)$, тому $x^*(t) = z^*(t) + \frac{t-t_1}{h}\mu^* + \frac{t_2-t}{h}\lambda^*$ - розв'язок задачі (1), (2).

Зупинимось на питанні відшукання розв'язків задачі (1), (2). Насамперед відмітимо, що із властивостей монотонності операторів f і F випливають аналогічні властивості оператора P. Справді, нехай

$\underline{w} = \begin{pmatrix} \underline{z} \\ \underline{\lambda} \\ \underline{\mu} \end{pmatrix}$, $\overline{w} = \begin{pmatrix} \overline{z} \\ \overline{\lambda} \\ \overline{\mu} \end{pmatrix}$ і $\underline{z} \le \overline{z}, \underline{\lambda} \le \overline{\lambda}, \underline{\mu} \le \overline{\mu}$. Тоді $\underline{w} \le \overline{w}$ і

$$L(g(s,\underline{w},\overline{w})) = \frac{t_2-t}{h}\int_{t_1}^{t} g(s,\underline{w},\overline{w})ds + \frac{t-t_1}{h}\int_{t_2}^{t} g(s,\overline{w},\underline{w})ds \le$$

$$\le \frac{t_2-t}{h}\int_{t_1}^{t} g(s,\overline{w},\underline{w})ds + \frac{t-t_1}{h}\int_{t_2}^{t} g(s,\underline{w},\overline{w})ds = L(g(t,\overline{w},\underline{w})),$$

$$\underline{\lambda} = A^{-1}F(\underline{\lambda},\overline{\lambda},\underline{\mu},\overline{\mu}) \le A^{-1}F(\overline{\lambda},\underline{\lambda},\overline{\mu},\underline{\mu}) = \overline{\lambda}$$

$$\underline{\mu} = \underline{\lambda} + \int_{t_1}^{t_2} g(s,\underline{w},\overline{w})ds \le \overline{\lambda} + \int_{t_1}^{t_2} g(s,\overline{w},\underline{w})ds = \overline{\mu},$$

$$g(s,\underline{w},\overline{w}) = f(t,\underline{z} + \frac{t-t_1}{h}\underline{\mu} + \frac{t_2-t}{h}\underline{\lambda}, \overline{z} + \frac{t-t_1}{h}\overline{\mu} + \frac{t_2-t}{h}\overline{\lambda}).$$

Отже, $P(\underline{w},\overline{w}) \le P(\overline{w},\underline{w})$.

Нехай виконується умова

$$a \le \frac{h}{4}(\underline{M}-\overline{M}) + 2A^{-1}\underline{M}_0 + \underline{M}h;\quad b \ge \frac{h}{4}(\overline{M}-\underline{M}) + A^{-1}\overline{M}_0 + \overline{M}h \tag{7}$$

Побудуємо двосторонній ітераційний процес, поклавши

$$\underline{w}_0 = \begin{pmatrix} \underline{z}_0 \\ \underline{\lambda}_0 \\ \underline{\mu}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{h}{4}(\underline{M}-\overline{M}) \\ A^{-1}\underline{M}_0 \\ A^{-1}\underline{M}_0 + \underline{M}h \end{pmatrix},\quad \overline{w}^0 = \begin{pmatrix} \overline{z}_0 \\ \overline{\lambda}_0 \\ \overline{\mu}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{h}{4}(\overline{M}-\underline{M}) \\ A^{-1}\overline{M}_0 \\ A^{-1}\overline{M}_0 + \overline{M}h \end{pmatrix},$$

$$\underline{w}_{n+1} = P(\underline{w}_n,\overline{w}_n),\ \overline{w}_{n+1} = P(\overline{w}_n,\underline{w}_n), n = 0,1,\ldots . \tag{8}$$

Для визначених таким чином послідовностей виконуються наступні співвідношеня:

$$\underline{w}_0 \le \underline{w}_1 \le \ldots \le \underline{w}_n \le \ldots \le \overline{w}_n \le \ldots \le \overline{w}_1 \le \overline{w}_0 . \tag{9}$$

Справді,

$$\underline{w}_1 = \begin{pmatrix} L(g(t,\underline{w}_0,\overline{w}_0)) \\ A^{-1}F(\lambda_0,\underline{\mu}_0,\overline{\mu}_0) \\ \underline{\lambda}_0 + \int_{t_1}^{t_2} g(t,\underline{w}_0,\overline{w}_0)dt \end{pmatrix} \ge \begin{pmatrix} \frac{t_2-t}{h}\int_{t_1}^{t}\underline{M}ds + \frac{t-t_1}{h}\int_{t_2}^{t}\overline{M}ds \\ A^{-1}\underline{M}_0 \\ A^{-1}\underline{M}_0 + \int_{t_1}^{t_2}\underline{M}dt \end{pmatrix} \ge \begin{pmatrix} \frac{h}{4}(\underline{M}-\overline{M}) \\ A^{-1}\underline{M}_0 \\ A^{-1}\underline{M}_0 + \underline{M}h \end{pmatrix} = \underline{w}_0$$

$$\underline{w}_1 \le \begin{pmatrix} L(g(t,\overline{w}_0,\underline{w}_0)) \\ A^{-1}F(\overline{\lambda}_0,\underline{\lambda}_0,\overline{\mu}_0,\underline{\mu}_0) \\ \overline{\lambda}_0 + \int_{t_1}^{t_2} g(t,\overline{w}_0,\underline{w}_0)dt \end{pmatrix} = \overline{w}_1 \le \begin{pmatrix} \frac{(t_2-t)(t-t_1)}{h}(\overline{M}-\underline{M}) \\ A^{-1}\overline{M}_0 \\ A^{-1}\overline{M}_0 + \overline{M}h \end{pmatrix} \le \overline{w}_0,\quad t\in[t_1,t_2].$$

Припустивши, що $\underline{w}_{i-1} \le \underline{w}_i \le \overline{w}_i \le \overline{w}_{i-1}$, знаходимо

$$\underline{w}_i = P(\underline{w}_{i-1},\overline{w}_{i-1}) \le P(\underline{w}_i,\overline{w}_i) = \underline{w}_{i+1} \le P(\overline{w}_i,\underline{w}_i) = \overline{w}_{i+1} \le P(\overline{w}_{i-1},\underline{w}_{i-1}) = \overline{w}_i,$$

і в силу принципу математичної індукції дістаємо, що нерівність (9) виконується для всіх $n = 0,1,2,\ldots$. Підсумовує наведені вище міркування

Теорема 1. При зроблених вище допущеннях послідовні наближення $\underline{w}_n,\overline{w}_n$ належать множині S і виконуються співвідношення (9). Якщо при цьому $w^*(t)$ - розв'язок рівняння (6), який належить S, то

$$\underline{w}_n(t) \le w^*(t) \le \overline{w}_n(t), \quad t \in [t_1, t_2]. \tag{10}$$

Позначимо $\lim\limits_{n\to\infty} \underline{w}_n(t) = \underline{w}^*(t)$, $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{w}_n(t) = \overline{w}^*(t)$. Якщо виконується рівність $\underline{w}^*(t) = \overline{w}^*(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, то $w^*(t) = \underline{w}^*(t) = \overline{w}^*(t)$ і рівняння (6) має в S один і тільки один розв'язок $w^*(t)$. Дослідимо цей випадок. Будемо вважати, що при $\underline{x}, \overline{x}, \underline{y}, \overline{y} \in I$, $\underline{x} \le \overline{x}, \underline{y} \le \overline{y}$ виконуються нерівності

$$f(t, \overline{x}, \underline{x}) - f(t, \underline{x}, \overline{x}) \le K(\overline{x} - \underline{x}), \tag{11}$$

$$F(\overline{x}, \underline{x}, \overline{y}, \underline{y}) - F(\underline{x}, \overline{x}, \underline{y}, \overline{y}) \le N_1(\overline{x} - \underline{x}) + N_2(\overline{y} - \underline{y}). \tag{12}$$

де K, N_1, N_2 - сталі матриці. Має місце

Теорема 2. Нехай виконуються зроблені відносно f і F припущення, в областях визначеня f і F мають місце нерівності (7), (11), (12), а також всі власні значення матриці

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}hK & \frac{1}{3}hK & \frac{1}{3}hK \\ \Theta & A^{-1}N_1 & A^{-1}N_2 \\ hK & \frac{3}{2}hK & \frac{1}{2}hK \end{pmatrix}$$

лежать в одиничному крузі. Тоді рівняння (6) має єдиний розв'язок $w^*(t) \in S$, до якого рівномірно по $t \in [t_1, t_2]$ збігаються двосторонні послідовності наближення (8). Похибка при цьому характеризується нерівністю

$$\max_{t\in[t_1,t_2]} (\overline{w}_n(t) - \underline{w}_n(t)) \le QS_0, \; n = 0,1,..., \tag{13}$$

де $S_0 = \begin{pmatrix} \frac{h}{2}(\overline{M} - \underline{M}) \\ A^{-1}(\overline{M}_0 - \underline{M}_0) \\ A^{-1}(\overline{M}_0 - \underline{M}_0) + h(\overline{M} - \underline{M}) \end{pmatrix}$.

Доведення теореми випливає із рекурентного співвідношення

$$\overline{w}_{n+1}(t) - \underline{w}_{n+1}(t) \le Q(\overline{w}_n(t) - \underline{w}_n(t)), \; n = 0,1,2..., \qquad t \in [t_1, t_2]$$

та нерівності (10). Справді,

$$\overline{z}_{n+1}(t) - \underline{z}_{n+1}(t) = L(g(s, \overline{w}_n, \underline{w}_n) - g(s, \underline{w}_n, \overline{w}_n)) \le$$

$$\le K(\frac{t_2 - t}{h}\int_{t_1}^{t}(\overline{z}_n(s) - \underline{z}_n(s) + \frac{s - t_1}{h}(\overline{\mu}_n - \underline{\mu}_n) + \frac{t_2 - s}{h}(\overline{\lambda}_n - \underline{\lambda}_n))ds +$$

$$+\frac{t-t_1}{h}\int_{t_1}^{t_2}(\overline{z}_n(s)-\underline{z}_n(s)+\frac{s-t_1}{h}(\overline{\mu}_n-\underline{\mu}_n)+\frac{t_2-s}{h}(\overline{\lambda}_n-\underline{\lambda}_n))ds\le$$

$$\le\frac{2K(t_2-t)(t-t_1)}{h}\max_{t\in[t_1,t_2]}(\overline{z}_n(t)-\underline{z}_n(t))+\frac{K(t-t_1)(t_2-t)(h-2t_1+2t}{2h^2}(\overline{\mu}_n-\underline{\mu}_n)+$$

$$+\frac{K(t-t_1)(t_2-t)(h+2t_2-2t}{2h^2}(\overline{\lambda}_n-\underline{\lambda}_n)\le$$

$$\le Kh(\frac{1}{2}\max_{t\in[t_1,t_2]}(\overline{z}_n(t)-\underline{z}_n(t))+\frac{1}{3}(\overline{\mu}_n-\underline{\mu}_n)+\frac{1}{3}(\overline{\lambda}_n-\underline{\lambda}_n)),$$

$$\overline{\lambda}_{n+1}-\underline{\lambda}_{n+1}=A^{-1}(F(\overline{\lambda}_n,\underline{\lambda}_n,\overline{\mu}_n,\underline{\mu}_n)-F(\underline{\lambda}_n,\overline{\lambda}_n,\underline{\mu}_n,\overline{\mu}_n)\le$$

$$\le A^{-1}(N_1(\overline{\lambda}_n-\underline{\lambda}_n)+N_2(\overline{\mu}_n-\underline{\mu}_n)),$$

$$\overline{\mu}_{n+1}-\underline{\mu}_{n+1}=\overline{\lambda}_n+\int_{t_1}^{t_2}g(s,\overline{w}_n,\underline{w}_n)ds-\underline{\lambda}_n-\int_{t_1}^{t_2}g(s,\underline{w}_n,\overline{w}_n)ds\le$$

$$\le\overline{\lambda}_n-\underline{\lambda}_n+\int_{t_1}^{t_2}K(\overline{z}_n(s)-\underline{z}_n(s)+\frac{t_2-s}{h}(\overline{\lambda}_n-\underline{\lambda}_n)+\frac{s-t_1}{h}(\overline{\mu}_n-\underline{\mu}_n))ds\le$$

$$\le Kh(\max_{t\in[t_1,t_2]}(\overline{z}_n(t)-\underline{z}_n(t))+\frac{3}{2}(\overline{\lambda}_n-\underline{\lambda}_n)+\frac{1}{2}(\overline{\mu}_n-\underline{\mu}_n)).$$

Тоді

$$\begin{pmatrix}\overline{z}_{n+1}-\underline{z}_{n+1}\\ \overline{\lambda}_{n+1}-\underline{\lambda}_{n+1}\\ \overline{\mu}_{n+1}-\underline{\mu}_{n+1}\end{pmatrix}\le\begin{pmatrix}\frac{Kh}{2} & \frac{Kh}{3} & \frac{Kh}{3}\\ \Theta & A^{-1}N_1 & A^{-1}N_2\\ Kh & \frac{3}{2}Kh & \frac{1}{2}Kh\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\max_{t\in[t_1,t_2]}(\overline{z}_n(t)-\underline{z}_n(t))\\ \overline{\lambda}_n-\underline{\lambda}_n\\ \overline{\mu}_n-\underline{\mu}_n\end{pmatrix},$$

звідки випливає співвідношення (13). Припустивши існування в S двох розв'язків $\underline{w}^*(t), \overline{w}^*(t)$, дістаємо

$$\underline{w}_n(t)\le\underline{w}^*(t)\le\overline{w}_n(t),\quad \underline{w}_n(t)\le\overline{w}^*(t)\le\overline{w}_n(t),\quad n=0,1,2,...,$$

$$\left|\overline{w}^*(t)-\underline{w}^*(t)\right|\le\overline{w}_n(t)-\underline{w}_n(t)\le Q^{n-1}S_0,$$

Так як $\lim_{n\to\infty}Q^{n-1}=\Theta$, то розв'язки $\overline{w}^*(t)$, $\underline{w}^*(t)$ співпадають.

Зауваження. Застосовуючи наведені вище міркування можна доповнити і розвинути результати роботи [5]. Зокрема, можна відмовитись від суттєвих в [5] вимог існування оберненої до A_1+A_2 матриці та від вимоги $(A_1+A_2)^{-1}A_3\ge\Theta$.

The theorems of existence and unity of non-linear two-dotted problems are proved by double-sided method..

1. Бахвалов Н.С. Численные методы. – М.:Наука, 1975. – 613с.
2. Беллман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. – М.:Мир. 1968 – 183с.
3. Холл Дж., Уатт Дж. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Мир. 1979. – 312с.
4. Самойленко А.М., Ронто Н.И. Численно–аналитические методы исследования периодических решений. – К.: Вища школа, 1976. – 180с.
5. Нестеренко Л.І. Про один двобічний метод розв'язування двоточкової граничної задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь // Доп. АН УРСР. 1980. – №11. – С. 18–21.
6. Курпель Н.С., Шувар Б.А. Двусторонние операторные неравенства и их применения. – К.: Наукова думка, 1980. – 267с.

Т. П. Гой

ЗАДАЧА З НЕЛОКАЛЬНИМИ ДВОТОЧКОВИМИ УМОВАМИ ДЛЯ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ І ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Досліджено задачу з нелокальними двоточковими умовами для одного класу систем лінійних рівнянь з частинними похідними та змінними коефіцієнтами у циліндричній області. Для майже всіх (відносно міри Лебега) параметрів задачі встановлено умови існування єдиного класичного розв'язку..

1. Крайові задачі з нелокальними умовами для гіперболічних, параболічних та безтипних систем лінійних рівнянь із частинними похідними і змінними коефіцієнтами в різних аспектах вивчались багатьма авторами (див., наприклад, [1-6]), де, в основному, виділені регулярні випадки задач, що виключають появу малих знаменників, або аксіоматично накладаються умови їх відокремленості від нуля, що забезпечує розв'язність задачі.

У роботах [7-13] досліджувались нерегулярні випадки задач з нелокальними (інтегральними, двоточковими, *n*-точковими) умовами для лінійних гіперболічних, параболічних та безтипних диференціальних систем рівнянь довільного порядку зі сталими та змінними за t коефіцієнтами. На основі метричного підходу одержано умови коректної розв'язності розглядуваних задач.

У даній статті досліджується задача з нелокальними двоточковими умовами за виділеною змінною t та умовами типу умов Діріхле за координатами $x_1,\dots,x_p$ для одного класу систем рівнянь з частинними похідними зі змінними за $x_1,\dots,x_p$ коефіцієнтами у обмеженій циліндричній області з достатньо гладкою межею. Для подолання проблеми малих знаменників, що виникають при побудові розв`язку задачі, використано метричний підхід.