...нійний характер залежності малих параметрів $\varepsilon_2(\varepsilon_1)$, при яких виконуються характерні властивості в стійкому скінченно-різницевому наближеному розв'язку.

Convergence of quasilinear conservation law approximation of the even order have been proved.

1. Кружков С.Н. Квазилинейные уравнения первого порядка со многими независимыми переменными // Мат. сборник. – 1970. – Т.81. - №2 – С. 228–255.
2. Казмерчук А.И. О сходимости приближенных решений задачи Коши для квазилинейных уравнений первого порядка // Вестник МГУ. Сер. матем., механ. – 1989. – Вып. 4. - С. 68–70.

І.В. Федак

ЗАСТОСУВАННЯ РІЗНИЦЕВИХ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДО НАБЛИЖЕНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

Запропоновано новий метод числового розв'язування крайових задач для рівняння теплопровідності.

В області

$Q = \{(x,t) | 0 \le x \le 1, 0 \le t < +\infty$

розглянемо рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \qquad (1)$$

Початкову та крайові умови задамо рівностями

$$u(x,0) = f(x), \qquad (2)$$

$$\begin{cases} u(0,t) = \varphi(t), \\ u(1,t) = \psi(t), \end{cases} \qquad (3)$$

причому $f(0) = \varphi(0), f(1) = \psi(0)$.

Для наближеного розв'язування задачі (1)-(3) побудуємо прямокутну сітку

$$x_i = ih, \ i = 0,1,...,n,$$

$$t_j = jk, \ j = 0,1,2,...,$$

і наближено замінимо рівняння (1) наступним різницевим рівнянням

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = a^2 \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{h^2}, \qquad (4)$$

де $u_{i,j} = u(x_i, t_j)$ (див. [1]).

Позначимо $s = \dfrac{h^2}{ka^2} > 0$ і покладемо $k \in Z^p$ Тоді (4) запишеться у вигляді такої системи рівнянь

$$u_{i+1,j+1} - (2+s)u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1} = -su_{i-1,j}, \qquad (5)$$

де $A^{\beta}_{\delta}(\Omega^{p}_{2\pi})$, $\delta > 0, \beta > 0$,

Система (5) при кожному фіксованому j є лінійною алгебраїчною системою рівнянь із трьохдіагональною матрицею. Методика її розв'язування методом алгебраїчної прогонки розглядається в [1] та [2]. Зокрема, у [2] доводиться, що при $s > 0$ такого типу різницеві схеми мають єдиний розв'язок.

У даній роботі ми подивимося на систему (5) з точки зору різницевих функціональних рівнянь другого порядку, методика розв'язування яких описана в [3]. Цей підхід зручний ще й тим, що коефіцієнти рівнянь схеми (5) є сталими і не залежать від j.

Відповідне функціональне рівняння має вигляд

$$v(m+2) - (2+s)v(m+1) + v(m) = -sg(m). \qquad (6)$$

Складемо для нього характеристичне рівняння

$$\lambda^2 - (2+s)\lambda + 1 = 0. \qquad (7)$$

Оскільки $D = (2+s)^2 - 4 = s^2 + 4s > 0$, то рівняння (7) має два різні корені

$$\lambda_1 = \frac{2+s-\sqrt{D}}{2} < 1,\ \lambda_2 = \frac{2+s+\sqrt{D}}{2} > 1.$$

Таким чином (див. [3]), загальний розв'язок однорідного різницевого функціонального рівняння (6) буде

$$v_0(m) = c_1\lambda_1^m + c_2\lambda_2^m.$$

Вважаючи, що $u_{i\pm1,j+1} \approx u_{i,j+1}$, частковий розв'язок неоднорідного функціонального рівняння (6) можна наближено вважати рівним $g(m)$. Таким чином, ми одержали наближено загальний розв'язок рівняння (6) у вигляді

$$v(m) = c_1\lambda_1^m + c_2\lambda_2^m + g(m).$$

Звідси для розв'язку різницевої схеми (5) будемо мати таке представлення

$$u_{m,j+1} = c_{1,j}\lambda_1^m + c_{2,j}\lambda_2^m + u_{m,j}, \tag{8}$$

де $m = 0,1,\ldots,n;\ j = 0,1,2,\ldots$

Покладаючи m=0 та m=n, сталі $c_{1,j}$ та $c_{2,j}$ визначимо із системи рівнянь

$$\begin{cases} \varphi(t_{j+1}) = c_{1,j} + c_{2,j} + \varphi(t_j), \\ \psi(t_{j+1}) = c_{1,j}\lambda_1^n + c_{2,j}\lambda_2^n + \psi(t_j). \end{cases} \tag{9}$$

Із неї знаходимо

$$c_{1,j} = \frac{\lambda_2^n(\varphi(t_{j+1}) - \varphi(t_j)) + \psi(t_j) - \psi(t_{j+1})}{\lambda_2^n - \lambda_1^n},$$

$$c_{2,j} = \frac{\lambda_1^n(\varphi(t_{j+1}) - \varphi(t_j)) + \psi(t_j) - \psi(t_{j+1})}{\lambda_1^n - \lambda_2^n}.$$

Враховуючи, що $\lambda_1\lambda_2 = 1$, із (8) остаточно одержимо

$$u_{m,j+1} = \frac{\lambda_2^{2n-m} - \lambda_2^m}{\lambda_2^{2n} - 1}(\varphi(t_{j+1}) - \varphi(t_j)) + \frac{\lambda_2^{n+m} - \lambda_2^{n-m}}{\lambda_2^{2n} - 1}(\psi(t_{j+1}) - \psi(t_j)) + u_{m,j}, \tag{10}$$

де $m = 0,1,\ldots,n;\ j = 0,1,2,\ldots;\ u_{m,0} = f(x_m).$

Формули (10) дають змогу знайти значення наближеного розв'язку крайової задачі (1)-(3) у всіх внутрішніх вузлах побудованої нами сітки.

Звернемо увагу читачів на те, що для знаходження значення $u_{m,j+1}$ немає потреби шукати, як у методі алгебраїчної прогонки, значення $u_{i,j}$ для всіх $i = 0,1,\ldots,n$ при $p \le j$, а достатньо лише зафіксувати m і знайти $u_{m,p}$ при $p \le j$. Такий підхід суттєво зменшує кількість необхідних в даному випадку обчислень.

A new method of the numerical solving of the boundary value problems for the heat equation is proposed

1. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.Э. Численные методы анализа. – М.: Наука, 1967. – 368 с.
2. Тихонов А.Л., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1980. – 232 с.
3. Лихтарников Л.М. Элементарное введение в функциональные уравнения. – СПб.: Лань, 1997. – 160 с.