А.В. Соломко, С.В. Шарин

ПОБУДОВА (C_0)-НАПІВГРУП ОПЕРАТОРІВ, ЩО ГЕНЕРУЮТЬСЯ КВАДРАТНИМИ МАТРИЦЯМИ

Розглядається один з методів побудови (C_o)-напівгруп операторів, які генеруються квадратними матрицями.

Нехай $\{T_t\}_{t\geq 0}$ позначає *(C_o)*-напівгрупу операторів, що діють в банаховому просторі X. З формальної точки зору побудова генератора сильно неперервної напівгрупи є нескладною операцією, оскільки відомо, що він може бути отриманий як похідна в точці нуль відображення $0 \leq t \to T_t x$ для кожного $x \in X$. Зовсім інша ситуація виникає при побудові напівгрупи за її генератором. Відомо, що розв'язком задачі Коші

$$\frac{dU}{dt} = AU(t) \ , \tag{1}$$

$$U(0) = x, \ \forall x \in X, \tag{2}$$

де $U(t)$ – невідома X-значна функція, є (C_o)-напівгрупа операторів з генератором A. Тобто теорія говорить тільки про існування напівгрупи, але не дає методу її знаходження для довільного абстрактного оператора A.

Ми зосередимось на побудові напівгруп операторів, які генеруються квадратними матрицями і діють в просторі R^n. Нехай всюди далі A позначає квадратну матрицю $n\times n$ із сталими коефіцієнтами. Тоді абстрактне рівняння $\frac{dU}{dt} = AU(t)$ набере вигляду системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, а задача Коші (1), (2) перепишеться у вигляді:

$$\begin{cases} U_1'(t) = a_{11}U_1(t) + a_{12}U_2(t) + \ldots + a_{1n}U_n(t), \\ \ldots \\ U_n'(t) = a_{n1}U_1(t) + a_{n2}U_2(t) + \ldots + a_{nn}U_n(t), \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{pmatrix} U_1(0) \\ U_2(0) \\ \ldots \\ U_n(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{4}$$

Лема 1. *Кожна матриця A із сталими коефіцієнтами є генератором (C_0)-напівгрупи операторів.*

Доведення. Достатньо показати виконання умов теореми Коші існування і єдиності розв'язку системи звичайних диференціальних рівнянь. Права частина кожного рівняння системи (3) є многочленом відносно змінних U_1, U_2, ..., U_n, а тому це неперервна і обмежена в замкнутій області функція. Частинні похідні по змінних U_1, U_2, ..., U_n є обмеженими і рівними відповідно a_{ij}. Звідси випливає виконання умови Ліпшиця. Отже, задача Коші (3), (4) має єдиний розв'язок, який, як відомо [1], є (C_0)-напівгрупою з генератором A. ■

1. Нехай всі власні значення λ_i матриці A є попарно різними. Матриця V, стовпці якої є власними векторами матриці A, є в цьому випадку невиродженою. Побудуємо діагональну матрицю $\Lambda(t)$, на головній діагоналі якої розміщені функції виду $e^{\lambda_i t}$, тобто

$$\Lambda(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

З теорії диференціальних рівнянь відомо [2], що загальний розв'язок системи може бути записаний у вигляді

$$U(t) = V\Lambda(t)C, \tag{5}$$

де C – вектор-стовпчик констант.

Лема 2. *Справедливою є наступна матрична рівність*

$$V\Lambda'(t) = AV\Lambda(t). \tag{6}$$

Доведення. Доведемо виконання рівності $\Lambda'(t) = V^{-1}AV\Lambda(t)$, яку отримали, домноживши (6) зліва на матрицю V^{-1}. Оскільки стовпці матриці V складаються із власних векторів матриці A, то добуток AV буде мати вигляд $AV = VK$, де

$$K = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Враховуючи це, матимемо $V^{-1}AV\Lambda(t)=V^{-1}VK\Lambda(t)=K\Lambda(t)$. Рівність $\Lambda'(t)=K\Lambda(t)$ є очевидною, тому лему доведено. ■

Теорема 1. *Квадратна матриця A із сталими коефіцієнтами, власні значення якої є попарно різними, є генератором (C_o)-напівгрупи операторів $\{T_t\}_{t\geq 0}$, яка для кожного $x\in R^n$ діє за правилом*

$$T_t x = V\Lambda(t)V^{-1}x. \tag{7}$$

Доведення. Спочатку доведемо, що формула (7) визначає (C_o)-напівгрупу. Дійсно, $T_o x = V\Lambda(0)V^{-1}x = VEV^{-1}x = x$, тобто T_o діє як одиничний оператор. Далі

$$T_t T_s x = V\Lambda(t)V^{-1}V\Lambda(s)V^{-1}x = V\Lambda(t)\Lambda(s)V^{-1}x.$$

А оскільки

$$\Lambda(t)\Lambda(s)=\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 s} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 s} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n s} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 (t+s)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 (t+s)} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n (t+s)} \end{pmatrix}=\Lambda(t+s),$$

то $T_t T_s x = V\Lambda(t+s)V^{-1}x = T_{t+s}x$, тобто напівгрупова властивість виконується.

Відображення $t\to V\Lambda(t)V^{-1}x$ для кожного $x\in R^n$ є неперервним, оскільки неперервними є функції, які входять в матрицю *Λ(t)*.

Отже, $\{T_t\}_{t\geq 0}=\{V\Lambda(t)V^{-1}\}_{t\geq 0}$ – (C_o)-напівгрупа операторів.

Тепер доведемо, що генератором цієї напівгрупи є матриця *A*. Використовуючи означення генератора, а також твердження леми 2, можемо записати

$$\frac{d}{dt}T_t x\Big|_{t=0} = V\Lambda'(t)V^{-1}x\Big|_{t=0} = AV\Lambda(t)V^{-1}x\Big|_{t=0} =$$

$$= AVEV^{-1}x = AVV^{-1}x = AEx = Ax.$$

Теорему доведено. ■

© Вісник Прикарпатського університету. Математика. Фізика. 2001. Випуск 2.

2. Розглянемо випадок, коли матриця A має одне власне значення кратності n. Побудуємо матрицю $\Lambda(t)$ наступним способом

$$\Lambda(t)=\begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{t^2}{2!}e^{\lambda t} & \dots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \dots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!}e^{\lambda t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{\lambda t} \end{pmatrix} \tag{8}$$

У цьому випадку існує один власний вектор $\bar{e}_1$. Побудуємо жорданований ланцюжок векторів за правилом

$$\begin{aligned} \bar{e}_1 &: \quad A\bar{e}_1=\lambda\bar{e}_1; \\ \bar{e}_2 &: \quad A\bar{e}_2=\lambda\bar{e}_2+\bar{e}_1; \\ &\dots \\ \bar{e}_n &: \quad A\bar{e}_n=\lambda\bar{e}_n+\bar{e}_{n-1}. \end{aligned}$$

Тоді матриця V матиме вигляд $V=(\bar{e}_1,\bar{e}_2,\dots,\bar{e}_n)$.

Лема 3. *Справедлива наступна матрична рівність*

$$V\Lambda'(t)=AV\Lambda(t). \tag{9}$$

Доведення. Візуально формули (6) і (9) однакові, однак слід зауважити, що матриці V і $\Lambda(t)$ у цих формулах різні. Знову замість цієї рівності запишемо $\Lambda'(t)=V^{-1}AV\Lambda(t)$ домноживши (9) на V^{-1}.

Матрицю $\Lambda(t)$ можна записати $\Lambda(t)=\begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{\lambda t} \\ e^{\lambda t} \\ e^{\lambda t} \\ \dots \\ e^{\lambda t} \end{pmatrix}$.

Нехай $H=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$, тоді

$$\Lambda'(t)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \frac{t^{n-3}}{(n-3)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{\lambda t} \\ e^{\lambda t} \\ e^{\lambda t} \\ \dots \\ e^{\lambda t} \end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{\lambda t} \\ e^{\lambda t} \\ e^{\lambda t} \\ \dots \\ e^{\lambda t} \end{pmatrix}=$$

$$= H\Lambda(t)+\lambda\Lambda(t).$$

З іншої сторони $V^{-1}AV\Lambda(t)=V^{-1}(\lambda\bar{e}_1,\lambda\bar{e}_2+\bar{e}_1,\dots,\lambda\bar{e}_n+\bar{e}_{n-1})\Lambda(t)=$
$=V^{-1}(\lambda\bar{e}_1,\lambda\bar{e}_2,\dots,\lambda\bar{e}_n)\Lambda(t)+V^{-1}(0,\bar{e}_1,\dots,\bar{e}_{n-1})\Lambda(t)=\lambda V^{-1}V\Lambda(t)+H\Lambda(t)=$
$=\lambda\Lambda(t)+H\Lambda(t)$.

Порівнюючи праві частини останніх двох рівностей отримаємо потрібне. ■

Теорема 2. *Квадратна матриця A із сталими коефіцієнтами розміру n×n, яка має одне власне значення кратності n, є генератором (C₀)-напівгрупи операторів, яка для кожного $x\in R^n$ діє за правилом*

$$T_t x = V\Lambda(t)V^{-1}x.$$

Доведення. Спочатку доведемо, що $\{V\Lambda(t)V^{-1}\}_{t\ge 0}$ визначає (C₀)-напівгрупу. Дійсно, $T_o x=V\Lambda(0)V^{-1}x=VEV^{-1}x=x$, тобто T_o діє як одиничний оператор. Далі $T_tT_sx=V\Lambda(t)V^{-1}V\Lambda(s)V^{-1}x=V\Lambda(t)\Lambda(s)V^{-1}x$, а оскільки

$$\Lambda(t)\Lambda(s)=\begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{t^2}{2!}e^{\lambda t} & \dots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \dots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!}e^{\lambda t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{\lambda t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{\lambda s} & se^{\lambda s} & \frac{s^2}{2!}e^{\lambda s} & \dots & \frac{s^{n-1}}{(n-1)!}e^{\lambda s} \\ 0 & e^{\lambda s} & se^{\lambda s} & \dots & \frac{s^{n-2}}{(n-2)!}e^{\lambda s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{\lambda s} \end{pmatrix}=$$

$$
=\begin{pmatrix}
e^{\lambda(t+s)} & (t+s)e^{\lambda(t+s)} & \frac{t^2}{2}e^{\lambda(t+s)}+tse^{\lambda(t+s)}+\frac{s^2}{2}e^{\lambda(t+s)} & \dots & \left(\frac{s^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{ts^{n-2}}{(n-2)!}+\dots+\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right)e^{\lambda(t+s)} \\
0 & e^{\lambda(t+s)} & (t+s)e^{\lambda(t+s)} & \dots & \left(\frac{s^{n-2}}{(n-2)!}+\frac{ts^{n-3}}{(n-3)!}+\dots+\frac{t^{n-2}}{(n-2)!}\right)e^{\lambda(t+s)} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & \dots & e^{\lambda(t+s)}
\end{pmatrix}=
$$

$$
=\begin{pmatrix}
e^{\lambda(t+s)} & (t+s)e^{\lambda(t+s)} & \frac{(t+s)^2}{2!}e^{\lambda(t+s)} & \dots & \frac{(t+s)^{n-1}}{(n-1)!}e^{\lambda(t+s)} \\
0 & e^{\lambda(t+s)} & (t+s)e^{\lambda(t+s)} & \dots & \frac{(t+s)^{n-2}}{(n-2)!}e^{\lambda(t+s)} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & \dots & e^{\lambda(t+s)}
\end{pmatrix}=\Lambda(t+s).
$$

Тоді $T_tT_sx=V\Lambda(t+s)V^{-1}x=T_{t+s}x$, тобто виконується напівгрупова властивість.

Відображення $t\to V\Lambda(t)V^{-1}x$ для кожного $x\in R^n$ є неперервним, оскільки неперервними є функції, які входять в матрицю $\Lambda(t)$. Отже, $\{T_t\}_{t\ge0}=\{V\Lambda(t)V^{-1}\}_{t\ge0}$ – (C_o)-напівгрупа операторів.

Тепер доведемо, що генератором цієї напівгрупи є матриця A. Використовуючи означення генератора, а також твердження леми 3, можемо записати

$$\frac{d}{dt}T_tx\Big|_{t=0}=V\Lambda'(t)V^{-1}x\Big|_{t=0}=AV\Lambda(t)V^{-1}x\Big|_{t=0}=AVEV^{-1}x=AVV^{-1}x=Ax.$$

Теорему доведено. ■

3. Розглянемо випадок, коли матриця A має $k<n$ різних власних значень. У цьому випадку матрицю $\Lambda(t)$ запишемо у вигляді

$$\Lambda(t)=\begin{pmatrix}
I_1(t) & 0 & \dots & 0 \\
0 & I_2(t) & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \dots & I_k(t)
\end{pmatrix},$$

де $I_j(t),\ j=1,\dots,k$ – жорданові клітки, кожна з яких має вигляд матриці (8). Нехай p_j позначає кратність власного значення λ_j.

Матрицю V побудуємо у вигляді $V = \left(\bar{e}_1, \bar{e}_{11}, \ldots, \overline{e_{1p_1-1}}, \ldots, \bar{e}_k, \bar{e}_{k1}, \ldots, \overline{e_{kp_k-1}}\right)$, де $e_j, j = 1,\ldots,k$ – власні вектори, а кожна з послідовностей $\bar{e}_j$, $\bar{e}_{j1}, \ldots, \overline{e_{jp_j-1}}$ утворює жордановий ланцюжок. Легко бачити, що

$$\Lambda(t)\Lambda(s) = \begin{pmatrix} I_1(t) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & I_2(t) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & I_k(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1(s) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & I_2(s) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & I_k(s) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} I_1(t)I_1(s) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & I_2(t)I_2(s) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & I_k(t)I_k(s) \end{pmatrix}.$$

Тобто множення матриць зводиться до множення жорданових блоків, кожен з яких відповідає одному власному значенню. Таким чином цей випадок зводиться до вище розглянутих. А саме, для нововведених матриць V і $\Lambda(t)$ справедливою є загальна

Теорема 3. *Квадратна матриця A із сталими коефіцієнтами розміру $n \times n$ є генератором (C_o)-напівгрупи операторів, яка для кожного $x \in R^n$ діє за правилом*

$$T_t x = V\Lambda(t)V^{-1}x.$$

One method of construction of the (C_o)-semigroups of operators, which are generating by square matrix, is considered in the article.

[1] Голдстейн Д.А. Полугруппы линейных операторов и их приложения. –К.: Выща школа, 1989. – 347с.

[2] Шкіль М.І., Сотніченко М.А. Звичайні диференціальні рівняння. Навчальний посібник. – К.:Вища школа, 1992. –303 с.