14. Тацій Р.М., Кісілевич В.В., Стасюк М.Ф., Пахолок Б.Б. Про аналітичну залежність розв'язків лінійного диференціального рівняння з мірами від параметра // Волинський математичний вісник. – 1995. – Вип. 2. – С.165–167.
15. Вибрации в технике: Справочник в 6 т. / Под ред. В.В.Болотина. – М.: Машиностроение, 1978. – Т.1. – 352 с.

Structure of the spectrum of the boundary value problem for the system of differential equations with distributions as coefficients is researched. Formula in integral form with the aid of a structurally constructed the Green matrix for solutions is obtained. Its properties are studied.

***Key words:** quasidifferential equation, boundary value problem, Green matrix.*

УДК 517.982
ББК 22.162.2

А.В. Соломко, С.В. Шарин

ВЕКТОРНА ОПЕРАЦІЯ КРОС-КОРЕЛЯЦІЇ В ДОВІЛЬНОМУ КОНУСІ

Досліджуються деякі топологічні властивості локально опуклих просторів дуальної пари $\langle D'_\Gamma, D_\Gamma \rangle$. Визначається векторна операція крос-кореляції. Доводиться теорема, яка характеризує операцію крос-кореляції як лінійний неперервний оператор над простором векторнозначних основних функцій із носіями в конусі.

***Ключові слова:** локально опуклий простір, операція крос-кореляції, узагальнена функція, згортка, монтелевий простір.*

Уперше теорія узагальнених функцій була систематизована й математично обґрунтована на основі теорії локально опуклих топологічних просторів французьким математиком Л.Шварцом [1]. Пізніше теорію розподілів інтенсивно розробляли у своїх працях Я.Мікусінський і Р.Сікорський [2], І.М.Гельфанд і Г.Є.Шилов [3], Л.Хермандер [4] та багато інших математиків. Розвиток цієї теорії стимулювався потребами математичної теоретичної фізики та особливо квантової механіки. У свою чергу, теорія узагальнених функцій, яка базується на основних методах функціонального аналізу, дала поштовх для розвитку ряду важливих напрямків у математиці: теорії диференціальних рівнянь, операційного числення, теорії перетворення Фур'є тощо.

У цій статті, застосовуючи теорію двоїстості локально опуклих просторів, досліджуємо ряд топологічних властивостей просторів дуальної пари $\langle D'_\Gamma, D_\Gamma \rangle$. Зауважимо, що саме ці властивості забезпечують нам умови для побудови функціонального числення як для скалярного, так і для векторного випадку [5, 6], а також для доведення теорем про топологічні ізоморфізми просторів узагальнених функцій комутантам (C_o)-напівгруп операторів.

Описується також векторна операція крос-кореляції та доводиться теорема, яка визначає векторну операцію крос-кореляції як лінійний неперервний оператор, що діє над простором нескінченно диференційованих фінітних функцій з носіями в конусі й залишає простори інваріантними. Ця теорема є узагальненням теореми Шварца [7, гл.І, п.4.7] для векторної операції крос-кореляції на довільний конус.

Розглянемо в загальному випадку класичну двоїстість $\langle D'(\mathbb{R}^n), D(\mathbb{R}^n) \rangle$. Як звичайно, $D(\mathbb{R}^n)$ – простір нескінченно-диференційованих функцій з компактними носіями з топологією рівномірної збіжності на компактах разом з усіма похідними, $D'(\mathbb{R}^n)$ – спряжений до $D(\mathbb{R}^n)$ простір лінійних неперервних функціоналів, введений Л. Шварцом [1].

Позначимо через Γ – довільний замкнений опуклий гострий тілесний конус в $\mathbb{R}^n$. Нехай всюди далі D'_Γ – підпростір у $D'(\mathbb{R}^n)$ тих розподілів f, носії $\operatorname{supp} f$ яких містяться в Γ [7, гл.І, п.4.5].

Поляра підпростору D'_Γ відносно двоїстості $\langle D'(\mathbb{R}^n), D(\mathbb{R}^n) \rangle$ має вигляд

$$(D'_\Gamma)^o = \{\varphi \in D(\mathbb{R}^n):\ \operatorname{supp} \varphi \subset \mathbb{R}^n \setminus \Gamma\}. \tag{1}$$

Звуження білінійної форми, породженої двоїстістю $\langle D'(\mathbb{R}^n), D(\mathbb{R}^n)\rangle$, на прямий добуток $D'_\Gamma \times D(\mathbb{R}^n)$ є константа на довільній множині $\{(f_0, \varphi)\}$, де $f_0 \in D'_\Gamma$ – фіксований функціонал, а функція φ пробігає клас еквівалентності φ_Γ у фактор-просторі $D(\mathbb{R}^n)/(D'_\Gamma)^o$ з відповідною фактор-топологією. Отже, білінійна форма $D'_\Gamma \times D(\mathbb{R}^n)/(D'_\Gamma)^o \ni \langle f, \varphi_\Gamma\rangle \to \langle f, \varphi\rangle \in \mathbb{C}$, $\varphi \in \varphi_\Gamma$, індукована двоїстістю $\langle D'(\mathbb{R}^n), D(\mathbb{R}^n)\rangle$, ставить простори D'_Γ і $D(\mathbb{R}^n)/(D'_\Gamma)^o$ у двоїстість.

Визначимо відображення

$$\rho:\ \varphi \to \lambda_\Gamma \cdot \varphi, \tag{2}$$

де $\lambda_\Gamma(t) = \begin{cases} 1, & t \in \Gamma \\ 0, & t \notin \Gamma \end{cases}$ – характеристична функція конуса Γ, а ρ – оператор множення на характеристичну функцію.

Звідси одразу випливає, що ядро відображення (2) збігається з полярою простору D'_Γ, визначеною за формулою (1), бо $\forall \varphi \in (D'_\Gamma)^o$ маємо $\lambda_\Gamma \cdot \varphi = 0$, оскільки $\operatorname{supp} \varphi \cap \Gamma = \varnothing$. Тому фактор-відображення реалізується формулою

$$\rho:\ D(\mathbb{R}^n) \ni \varphi \to \varphi_\Gamma \in D_\Gamma,$$

де клас $\varphi_\Gamma = \varphi_\Gamma(t)$ залежить від змінної $t \in \Gamma$. Опишемо топологію фактор-простору D_Γ. Розглянемо довільний компакт $K \subset \Gamma$ та його відкритий ε-окіл $\Delta_{\varepsilon,K}$. Покладемо $D(\Delta_{\varepsilon,K}) = \lim\limits_{S_l \subset \Delta_{\varepsilon,K}} \operatorname{ind} D_{S_l}$, де $\{S_l\}$ – напрямлена за включенням послідовність компактів така, що $\bigcup\limits_l S_l = \Delta_{\varepsilon,K}$. При $S_l \subset S_{l+1}$ вкладення просторів Фреше $D_{S_l} \subset D_{S_{l+1}}$ – компактні [8, гл.II, п.6.3]. Якщо виконується нерівність $\varepsilon_{l+1} < \varepsilon_l$, то звуження $D(\Delta_{\varepsilon,K})|_{\Delta_{\varepsilon_{l+1},K}} \subset D(\Delta_{\varepsilon_{l+1},K})$ – неперервні, тому визначена проективна границя $D_K = \lim\limits_{\varepsilon_l \to 0} \operatorname{pr} D(\Delta_{\varepsilon_l,K})$ паростків C^∞-функцій на компакті K. Тоді

$$D_\Gamma = \bigcup_{K \subset \Gamma} D_K = \lim_{K \subset \Gamma} \operatorname{ind} D_K. \tag{3}$$

Топологія в D_Γ рівносильна секвенціальній збіжності $\{\varphi_m\}_\Gamma \to \varphi_\Gamma$, якщо для довільного компактна $K \subset \Gamma$ існують представники $\{\varphi_m \in (\varphi_m)_\Gamma : \operatorname{supp} \varphi_m \subset K\}$ та $\{\varphi \in \varphi_\Gamma : \operatorname{supp} \varphi \subset K\}$ такі, що

$$\lim_{m \to \infty} \sup_{t \in K} \left|\partial^k \varphi_m - \partial^k \varphi\right| = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}^n_+,$$

де

$$\partial^k = (-i)^{|k|} \partial_1^{k_1} \ldots \partial_n^{k_n}, \quad \partial_j^{k_j} = (-i)^{k_j} \frac{\partial^{k_j}}{\partial t_j^{k_j}}.$$

Справді, для довільної функції $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ виконується умова

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \rho_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n):\ \rho_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1, & t \in \Delta_{\varepsilon/2,K} \\ 0, & t \notin \Delta_{\varepsilon,K} \end{cases}, \ \operatorname{supp}(\rho_\varepsilon \cdot \varphi) \subset \Delta_{\varepsilon,K},$$

і відповідний клас еквівалентності $\varphi_\Gamma \in D_\Gamma$ можна ототожнити з паростком C^∞-функцій вигляду $\rho_\varepsilon \cdot \varphi$. З викладених вище міркувань безпосередньо випливає таке:

Твердження 1. *Простори D_Γ і $D(\mathbb{R}^n)/(D'_\Gamma)^o$ топологічно ізоморфні й канонічна білінійна форма з $\langle D'(\mathbb{R}^n), D(\mathbb{R}^n)\rangle$ індукує двоїстість $\langle D'_\Gamma, D_\Gamma\rangle$.*

Твердження 2. *Простір D_Γ є (LF)-простором, зокрема він – борнологічний.*

Доведення. Для кожного компакта $K \subset \Gamma$ простір D_K є замкненим підпростором простору C_K^∞ всіх нескінченно-гладких у K функцій φ з набором півнорм $\|\varphi\|_m = \sum_{|k|\le m} \frac{1}{k!}\sup_{t\in K} |\partial^k \varphi(t)|$, $m \in \mathbb{N}$. Останній, як відомо [9, гл.I, п.9], є простором Фреше, отже, D_K – простір Фреше. Те, що D_Γ є (LF)-простором, випливає з формули (3). Простори D_K як метризовні є борнологічні, а борнологічність індуктивної границі борнологічних просторів є відомим фактом [8, гл.II, п.8.2].

Твердження 3. *Простір D_Γ – монтелевий.*

Доведення. Монтелевість простору D_K виходить із монтелевості C_K^∞ і замкненості D_K в C_K^∞. Монтелевість індуктивної границі випливає з її регулярності.

Твердження 4. *Нехай для довільного компакту $K \subset \Gamma$ простір D'_K – спряжений до простору D_K із сильною топологією відносно відповідної дуальної пари $\langle D'_K, D_K \rangle$. Тоді простір D'_Γ у своїй сильній топології $\beta(D'_\Gamma, D_\Gamma)$ топологічно ізоморфний проективній границі*

$$D'_\Gamma = \lim_{K\subset\Gamma} \mathrm{pr}\, D'_K.$$

Доведення. У [10] подано співвідношення двоїстості для проективних та індуктивних границь локально опуклих просторів з їх сильними топологіями. Для розглядуваної дуальної пари ці співвідношення будуть мати вигляд

$$(D'_\Gamma, \beta(D'_\Gamma, D_\Gamma)) = \lim_{K\subset\Gamma} \mathrm{pr}(D'_K, \beta(D'_K, D_K)).$$

Твердження 5. *Простір D'_Γ – монтелевий.*

Доведення. Простір D'_Γ є монтелевим як сильно спряжений до простору D_Γ, який, згідно з попереднім твердженням, є монтелевим. Твердження доведено.

Простір D'_Γ є алгеброю з операцією згортки розподілів замість множення [7, гл.I, п.4.5]. Згортка

$$D'_\Gamma \times D'_\Gamma \ni (f,h) \to f * h \in D'_\Gamma$$

визначається формулою

$$\langle f * h, \varphi_\Gamma \rangle = \langle f(x), \xi(x) \langle h(y), \eta(y)\varphi_\Gamma(x+y) \rangle \rangle,$$

це $\varphi_\Gamma \in D_\Gamma$ та $\xi(x)$, $\eta(y)$ – довільні нескінченно диференційовані функції, рівні 1 в околі носіїв розподілів f та h відповідно і 0 поза межами цих околів.

Твердження 6. *Згортка в алгебрі D'_Γ неперервна в сильній топології $\beta(D'_\Gamma, D_\Gamma)$.*

Доведення. Оскільки множення рефлексивної локально опуклої алгебри неперервне [10], а з твердження 5 випливає, що згорткова алгебра D'_Γ є рефлексивною, то операція згортки в алгебрі D'_Γ із сильною топологією є неперервною.

Теорема 1. *Виконується щільне вкладення $D_\Gamma \subset D'_\Gamma$ у сильній топології простору D'_Γ.*

Доведення. Існування вкладення випливає з твердження 1.

Нехай $f \in D'_\Gamma$. Зафіксуємо довільне $\varepsilon \in \Gamma$. Визначимо розподіл $f_\varepsilon \in D'_\Gamma$ таким правилом:

$$\langle f_\varepsilon, \varphi_\Gamma \rangle = \langle f, \varphi_\Gamma(\cdot + \varepsilon) \rangle, \ \forall \varphi_\Gamma \in D_\Gamma.$$

Нехай $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$ – послідовність основних функцій з простору $D(\mathbb{R}^n)$, що наближають дельта-функцію (дельта-видна послідовність), зосереджену в точці ε. Результат згортки належить простору D_Γ і $\lim_{n\to\infty} f * \psi_n = f * \delta_\varepsilon = f_\varepsilon$ в сильній топології простору D'_Γ. Отже, D_Γ щільний в D'_Γ. Теорема доведена.

Зауважимо, що простір D'_Γ має ще одну важливу топологічну властивість, яка дозволяє в доведенні теорем про топологічні ізоморфізми застосовувати теорему про відкрите відображення [11] до D'_Γ та її гомоморфних образів.

(UF)-простором називається хаусдорфовий локально опуклий простір, який покривається зліченним числом своїх підпросторів Фреше, а (PUF)-простором називається замкнений підпростір добутку зліченного сімейства (UF)-просторів [12].

Теорема 2. *Згорткова алгебра* D'_Γ *є простором типу* (PUF).

Доведення. Позначимо через $D^m_{\Gamma_{\nu_k}}$ – простір усіх функцій на $\mathbb{R}^n$, що мають неперервну частинну похідну не вище порядку m і тотожно рівні нулю поза множиною Γ_{ν_k}, де Γ_{ν_k} – компакт, який утворюється при перетині конуса Γ із кулею радіуса ν_k, $\{\nu_k\}$, $k\in\mathbb{N}$, – послідовність чисел така, що $\forall k$ $\nu_k>0$, $\lim\limits_{k\to\infty}\nu_k=\infty$. Очевидно, що простір $D^m_{\Gamma_{\nu_k}}$ є банаховим із нормою

$$\|x\|_m=\sum_{|l|\le m}\frac{1}{l!}\sup_{t\in\mathbb{R}^n}\left|\partial^l x(t)\right|. \tag{4}$$

Тоді $D_{\Gamma_{\nu_k}}=\bigcap\limits_{m\in\mathbb{N}}D^m_{\Gamma_{\nu_k}}$ і топологія простору $D_{\Gamma_{\nu_k}}$ – найслабша, при якій всі тотожні вкладення $i_{km}: D_{\Gamma_{\nu_k}}\to D^m_{\Gamma_{\nu_k}}$ – неперервні. Відображення $i'_{km}:\ \left(D^m_{\Gamma_{\nu_k}}\right)'\to\left(D_{\Gamma_{\nu_k}}\right)'$, спряжене до i_{km}, ставить у відповідність кожній лінійній неперервній формі, заданій на $D^m_{\Gamma_{\nu_k}}$, її звуження на $D_{\Gamma_{\nu_k}}$. Тому довільний елемент $x'\in\mathcal{E}^m_{\Gamma_{\nu_k}}=i'_{km}\left[\left(D^m_{\Gamma_{\nu_k}}\right)'\right]$ обмежений за нормою (4). Навпаки, всяка лінійна форма на $D_{\Gamma_{\nu_k}}$, обмежена за нормою (4), за теоремою Гана-Банаха продовжується зі збереженням обмеженості на $D^m_{\Gamma_{\nu_k}}$ і, отже, належить $\mathcal{E}^m_{\Gamma_{\nu_k}}$. Таким чином, $\mathcal{E}^m_{\Gamma_{\nu_k}}$ є підпростором у $D'_{\Gamma_{\nu_k}}$, який складається з усіх лінійних форм на $D_{\Gamma_{\nu_k}}$, обмежених за нормою (4). Оскільки довільний елемент $x'\in D'_{\Gamma_{\nu_k}}$ – обмежений, то робимо висновок, що $D'_{\Gamma_{\nu_k}}=\bigcup\limits_{m\in\mathbb{N}}\mathcal{E}^m_{\Gamma_{\nu_k}}$, причому кожний $\mathcal{E}^m_{\Gamma_{\nu_k}}$ є підпростором Фреше в $D'_{\Gamma_{\nu_k}}$. Отже, $D'_{\Gamma_{\nu_k}}$ – простір класу (UF). Але D_Γ – строга індуктивна границя просторів $D_{\Gamma_{\nu_k}}$, і всяка обмежена підмножина простору D_Γ міститься і обмежена в деякому $D_{\Gamma_{\nu_k}}$. Звідси випливає, що D'_Γ є проективною границею просторів $D'_{\Gamma_{\nu_k}}$ і, отже, ізоморфний підпростору добутку $\prod\limits_{k\in\mathbb{N}}D'_{\Gamma_{\nu_k}}$. Тобто D'_Γ є (PUF)-простором. Теорема доведена.

Твердження 7. *Простір* D_Γ *та сильно спряжений до нього простір лінійних неперервних функціоналів* D'_Γ *є ядерними.*

Доведення. Простір D_Γ є індуктивною границею (3) просторів D_K, $K\subset\Gamma$. Визначимо множину $V_m=\left\{\varphi\in D_K:\|\varphi\|_m\le 1\right\}$. Тоді ядро функціоналу Мінковського p_{V_m} множини V_m

$$\operatorname{Ker}p_{V_m}(\varphi)=\left\{\varphi\in D_K:p_{V_m}(\varphi)=0\right\}=\left\{\varphi\in D_K:\lambda\varphi\in V_m\ \forall\lambda>0\right\}$$

є тривіальне, тобто $N_{V_m}=\operatorname{Ker}p_{V_m}(\varphi)=\{0\}$. Отже, $D_K/N_{V_m}=D_K$. Для довільних $m,l\in\mathbb{N}$ таких, що $m>l$, канонічне вкладення D_K/N_{V_m} в D_K/N_{V_l} здійснюється ядерним оператором [9, гл.X, ст.401]. Таким чином, D_K – ядерний, а отже, простір D_Γ як індуктивна границя ядерних просторів є ядерним.

Оскільки простір, сильно спряжений до індуктивної границі послідовності ядерних просторів, кожен з яких є простором Фреше, є ядерним [13], то звідси випливатиме, що D'_Γ – ядерний. Твердження доведено.

Розглянемо комплексний банаховий простір $\{Y,\|\cdot\|\}$ і простір $D(\mathbb{R}^n,Y)$ – фінітних нескінченно-гладких Y-значних функцій $x(t)$ на $\mathbb{R}^n$ з топологією, що визначається набором норм

$$\|x\|_m = \sum_{|k|\le m} \frac{1}{k!}\sup_{t\in\mathbb{R}^n}\left|\partial^k x(t)\right|.$$

Визначимо для довільного дійсного числа $\nu>0$ простір $D^\nu(\mathbb{R}^n)=\left\{\varphi\in D(\mathbb{R}^n):\operatorname{supp}\varphi\subset\underbrace{[-\nu,\nu]\times\cdots\times[-\nu,\nu]}_{n}\right\}$, який є підпростором Фреше в $D(\mathbb{R}^n)$ і $D_{\Gamma_\nu}=\rho\left(D^\nu(\mathbb{R}^n)\right)$.

Теорема 3. *Справедливі такі топологічні ізоморфізми:*

$$D(\mathbb{R}^n,Y)\simeq Y\bar{\otimes} D(\mathbb{R}^n)\simeq \liminf_{\nu\to\infty}\operatorname{ind} Y\bar{\otimes} D^\nu(\mathbb{R}^n),$$

$$D_\Gamma(Y)\simeq Y\bar{\otimes} D_\Gamma\simeq \lim_{\nu\to\infty}\operatorname{ind} Y\bar{\otimes} D_{\Gamma_\nu},$$

де операція "$\bar{\otimes}$" – поповнення тензорного добутку просторів у проективній топології.

Доведення. Топологічні ізоморфізми $D(\mathbb{R}^n,Y)\simeq Y\bar{\otimes} D(\mathbb{R}^n)$ і $D_\Gamma(Y)\simeq Y\bar{\otimes} D_\Gamma$ будуть справедливими внаслідок виконання твердження 7, ядерності простору $D(\mathbb{R}^n)$ та відомої теореми Гротендіка [13] про представлення тензорного добутку двох повних просторів, один з яких є ядерним.

Відомо [13], що поповнення проективного тензорного добутку просторів є "неперервне" відносно переходу до індуктивних границь у випадку, коли кожен з елементів системи є типу (DF), зокрема, сильно спряженим до деякого простору Фреше. Тому в цьому випадку маємо

$$\lim_{\nu\to\infty}\operatorname{ind} Y\bar{\otimes} D^\nu(\mathbb{R}^n)=Y\bar{\otimes}\lim_{\nu\to\infty}\operatorname{ind} D^\nu(\mathbb{R}^n),$$

$$\lim_{\nu\to\infty}\operatorname{ind} Y\bar{\otimes} D_{\Gamma_\nu}=Y\bar{\otimes}\lim_{\nu\to\infty}\operatorname{ind} D_{\Gamma_\nu}.$$

Звідси й буде випливати справедливість відповідних топологічних ізоморфізмів. Теорема доведена.

Твердження 8. *Для довільного елемента* $x=x(t)\in D_\Gamma(Y)$, *де* $t\in\Gamma$, *знайдеться число* $\nu>0$ *таке, що* $x(t)\in Y\bar{\otimes} D_{\Gamma_\nu}$ *і* $x(t)$ *можна подати у вигляді абсолютно збіжного ряду в просторі* $Y\bar{\otimes} D_{\Gamma_\nu}$ *вигляду*

$$x(t)=\sum_{m=1}^{\infty}\lambda_m x_m\otimes(\varphi_m)_\Gamma(t),$$

де $\sum_m|\lambda_m|<\infty$, *і послідовності* $\{(\varphi_m)_\Gamma\}$ *та* $\{x_m\}$ *прямують до нуля відповідно у просторах* D_{Γ_ν} *і* Y.

Доведення. З означення простору $D_\Gamma(Y)$ випливає, що для кожного $x\in D_\Gamma(Y)$ існує таке число $\nu>0$, що $x\in Y\bar{\otimes} D_{\Gamma_\nu}$. Очевидно, що простори Y і D_{Γ_ν} є метризовні. Тому для довільного елемента $x\in Y\bar{\otimes} D_{\Gamma_\nu}$ можна застосувати теорему [8, гл.III, п.6.4] про зображення елементів поповнення проективного тензорного добутку метризовних просторів, яка забезпечує нам розклад $x(t)$. Твердження доведено.

Операція крос-кореляції розподілу з основною функцією визначається рівностями:

$$M_f\varphi_\Gamma=\lambda_\Gamma\langle f(s),\tau_s\varphi\rangle=\langle f(s),T_s\varphi_\Gamma\rangle,\quad \varphi\in D(\mathbb{R}^n),\ f\in D'_\Gamma,$$

де $T_s = \rho \circ \tau_s \circ \rho^{-1}$, а $\tau_s : D(\mathbb{R}^n) \ni \varphi(t) \to \varphi(t+s) \in D(\mathbb{R}^n)$, $s \in \Gamma$, $t \in \mathbb{R}^n$ – n-параметрична напівгрупа зсувів уздовж конуса Г.

Нехай I_Y – одиничний оператор, що діє в банаховому просторі Y. Відомо [14], що $M_f \in L(D_\Gamma)$, де $L(D_\Gamma)$ – простір лінійних неперервних відображень із D_Γ в D_Γ з топологією рівномірної збіжності на компактах. Очевидно, що оператор $I_Y \otimes M_f$ належить простору $L(D_\Gamma)$ і діє за формулою

$$\left(I_Y \otimes M_f\right)x(t) = \begin{cases} \sum\limits_{m=1}^{\infty} \lambda_m x_m (M_f(\varphi_m)_\Gamma)(t), & t \in \Gamma, \\ 0, & t \notin \Gamma. \end{cases} \tag{5}$$

Зауважимо, що якщо функціонал $f \in D'_\Gamma$ – регулярний, то операцію крос-кореляції можемо записати таким чином:

$$\left(I_Y \otimes M_f\right)x(t) = \int\limits_\Gamma \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m x_m \left(M_f(\varphi_m)_\Gamma\right)(t)\,dt,$$

де інтеграл у формулі – це інтеграл Бохнера від векторно-значної функції.

Твердження 9. *Для довільних розподілів $f, g \in D'_\Gamma$ та функції $x(t) \in D_\Gamma(Y)$ маємо $\left(I_Y \otimes M_f\right) \in L(D_\Gamma(Y))$ й виконуються такі рівності:*

$$\left(I_Y \otimes M_{f*g}\right)x(t) = \left(I_Y \otimes M_f\right) \circ \left(I_Y \otimes M_g\right)x(t) = \left(I_Y \otimes M_f \circ M_g\right)x(t), \tag{6}$$

$$\partial^k \left(I_Y \otimes M_f\right)x(t) = \left(I_Y \otimes M_f\right)\partial^k x(t), \ \forall k \in \mathbb{Z}_+^n, \tag{7}$$

$$\left(I_Y \otimes M_f\right)(0) = \langle f, x \rangle. \tag{8}$$

Доведення. Запишемо

$$\left(I_Y \otimes M_{f*g}\right)x(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m x_m \left(M_{f*g}(\varphi_m)_\Gamma\right)(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m x_m \left(M_f \circ M_g\right)(\varphi_m)_\Gamma(t) =$$
$$= \left(I_Y \otimes M_f\right) \circ \left(I_Y \otimes M_g\right)x(t) = \left(I_Y \otimes M_f \circ M_g\right)x(t).$$

Отже, формулу (6) доведено. Ураховуючи неперервність операції M_f та абсолютну збіжність ряду (5), легко довести виконання рівності (7).

Дійсно,

$$\partial^k \left(I_Y \otimes M_f\right)x(t) = \partial^k \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m x_m M_f(\varphi_m)_\Gamma(t) =$$
$$= \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m \partial^k x_m M_f(\varphi_m)_\Gamma(t) = \left(I_Y \otimes M_f\right)\partial^k x(t), \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Властивість (8) випливає безпосередньо з означення векторної операції крос-кореляції. Твердження доведено.

Якщо T_s – оператор зсуву над D_Γ, визначений в [14], то можемо визначити, за аналогією до векторної операції крос-кореляції, векторний оператор зсуву за формулою

$$I_Y \otimes T_s : D_\Gamma(Y) \ni x(t) \to T_s x(t) \in D_\Gamma(Y).$$

Нехай K – лінійне неперервне перетворення простору D_Γ в D_Γ. Тоді $I_Y \otimes K$ інваріантне відносно векторного оператора зсуву, якщо виконується умова:

$$\left(I_Y \otimes K \circ T_s\right)x(t) = \left(I_Y \otimes T_s \circ K\right)x(t)$$

для довільної функції $x(t) \in D_\Gamma(Y)$.

Теорема 4. *Для кожного розподілу $f \in D'_\Gamma$ оператор $I_Y \otimes M_f$ – ядерний та інваріантний щодо векторного оператора зсуву.*

Навпаки, для довільного оператора $K \in L(D_\Gamma)$, який є інваріантним відносно векторного оператора зсуву, існує єдиний розподіл $f \in D'_\Gamma$ такий, що $K = M_f$ і $(I_Y \otimes K)x(t) = (I_Y \otimes M_f)x(t)$ для всіх $x(t) \in D_\Gamma(Y)$.

Доведення. Маємо, що $I_Y \otimes M_f$ є лінійним неперервним перетворенням простору $D_\Gamma(Y)$ в $D_\Gamma(Y)$ і

$$\left(I_Y \otimes M_f\right)x(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m x_m \left(M_f(\varphi_m)_\Gamma\right)(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m x_m \left\langle f, T_s(\varphi_m)_\Gamma \right\rangle,$$

де $\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ і $\{T_s(\varphi_m)_\Gamma\}_{m\in\mathbb{N}}$ прямують відповідно в Y і D_Γ до нуля. Тоді, в силу відомого критерію ядерності [9], одержуємо, що $\left(I_Y \otimes M_f\right)$ – ядерний оператор.

Залишилося перевірити умову інваріантності

$$\left(I_Y \otimes M_f \circ T_s\right)x(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m x_m \left(M_f \circ T_s(\varphi_m)_\Gamma\right)(t) =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m x_m \left(T_s \circ M_f(\varphi_m)_\Gamma\right)(t) = \left(I_Y \otimes T_s \circ M_f\right)x(t).$$

Отже, перша частина теореми доведена.

Навпаки, для довільної функції $\varphi_\Gamma \in D_\Gamma$ лінійний неперервний функціонал $f : \varphi \to (K\varphi_\Gamma)(0)$ визначає розподіл $f \in D'_\Gamma$, якщо доозначити f на всьому $\mathbb{R}^n$ як тотожньо нульовий функціонал. Тоді для довільної функції $x(t) \in D_\Gamma(Y)$ ми можемо записати згідно з властивістю (8), що $\langle f, x \rangle = (I_Y \otimes K)x(0)$. Якщо тепер в останню рівність замість $x(t)$ підставити функцію $(I_Y \otimes T_s)x(t)$ і скористатися інваріантністю оператора $I_Y \otimes K$, яка виконується за умовою теореми, то отримаємо потрібне співвідношення $(I_Y \otimes K)x(t) = \left(I_Y \otimes M_f\right)x(t)$. Теорема доведена.

1. Schwartz L. Theorie des distributions, 1–2. – Paris, 1950–1951.
2. Микусинский Я., Сикорский Р. Элементарная теория обобщенных функций. – Т.1. – М.: ИЛ, 1959. – Т.2. – 1963.
3. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними. – М.: Физматгиз, 1958. – 440 с.
4. Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. – М.: Мир, 1986. – Т.1. – 462 с.
5. Sharyn S.V., Lopushansky O.V. Operator calculus for convolution algebra of Schwartz distributions on semiaxis // Праці Львівського математичного товариства. Математичні студії. – 1997. – Т.7. – №1. – С.61–72.
6. Соломко А.В., Шарин С.В. Функціональне числення над банаховими просторами в конусі $\mathbb{R}^n_+$ // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – Т.47, №4. – С.51–56.
7. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. – М.: Наука, 1976. – 280 с.
8. Шефер Х. Топологические векторные пространства. – М.: Мир, 1971. – 360 с.
9. Иосида К. Функциональный анализ. – М.: Мир, 1967. – 624 с.
10. Лопушанський О.В. Локально опуклі алгебри І. Борнологічні властивості / Препринт 4-93. – Львів: ІППММ, 1993. – 55 с.
11. Райков Д.А. Двухсторонняя теорема о замкнутом графике для топологических линейных пространств // Сиб. мат. журн. – 1966. – Т.7, №2. – С.353–372.
12. Робертсон А., Робертсон В. Топологические векторные пространства. – М.: Мир, 1967. – 257 с.
13. Grothendieck A. Produits tensoriel topologiques et espaces nucléaire // Mem. Amer. Math. Soc. – 1965. – V.16, №2. – P.1–140.
14. Соломко А.В., Шарин С.В., Лопушанський О.В. Про топологічний ізоморфізм алгебри розподілів з носіями в конусі комутанту напівгрупи зсувів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – Т.47, №2. – С.95–99.

Some topological properties of locally convex spaces of the duality $\langle D'_\Gamma, D_\Gamma \rangle$ is investigated. The vector cross-correlation operation is defined. The theorem, which describes cross-correlation operation as a linear continuous operator on the space of vector valued test functions with supports on cone, is proved.

Key words: *locally convex space, cross-correlation operation, generalized function, Montel space, convolution operation.*