УДК 517.9

Г. П. Малицька (Прикарпат. ун-т, Івано-Франківськ)

ПРО ПРИНЦИП МАКСИМУМУ ДЛЯ УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ*

A maximum principle and its various modifications are proved for a certain class of degeneration of parabolic equations.

Доведено принцип максимуму і його різні варіації для одного класу виродження параболічних рівнянь.

1. Принцип максимуму в обмеженій області. Нехай D — обмежена область в дійсному $(r+1)$-вимірному просторі R_{r+1}, де $r = n + m + l$, $n, m, l \in N$, $n \geq m \geq l$, точка $(P, t) = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_m, t)$, $(P, t) \in D$, $0 \leq t \leq T$. Перетин $\overline{D}$ з $t = 0$ позначимо через D_0. Будемо вважати, що D_0 — непорожня множина, $\overline{S}$ — замикання множини межових точок D, для яких $t \neq 0$, $t \neq T$; точки множини $\overline{S}$, для яких $t \neq 0$, позначимо через S, $S \cup D_0 = \Gamma$.

В області D розглянемо рівняння

$$Lu = \sum_{ij=1}^{n}{}' a_{ij}(P,t)u''_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(P,t)u'_{x_i} + \sum_{i=1}^{m} x_i u'_{y_i} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{l} y_i u'_{z_i} + c(P,t)u - u'_t = f(P,t), \tag{1}$$

де $(P, t) \in D$ і для кожного $\xi \in R_n$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \neq 0$,

$$\mu|\xi|^2 < \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(P,t)\xi_i\xi_j, \quad \mu = \text{const} > 0, \tag{2}$$

$a_{ij}(P,t)$, $b_i(P,t)$, $c(P,t)$ — дійснозначні обмежені функції в D,

$$c(P,t) \leq 0, \quad (P,t) \in D. \tag{3}$$

Будемо вважати, що функції $u(P,t)$ в (1) мають в D неперервні похідні $u''_{x_i x_j}$, u'_{x_i}, u'_{y_i}, u'_{z_i}, u'_t, що входять в оператор L.

Лема 1. *Нехай $Lu > 0$ скрізь в D, або $Lu \geq 0$ і $c(P,t) < 0$ скрізь в D ($Lu < 0$ скрізь в D, або $Lu \leq 0$ і $c(P,t) < 0$ скрізь в D). Тоді u не може мати додатного максимуму (від'ємного мінімуму) в D.*

Доведення. Припустимо, що u має додатний максимум в D. Нехай (P^0, t^0) — точка, в якій u досягає максимуму. Покажемо, що

$$\sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(P^0,t^0)\, u''_{x_i x_j} \leq 0. \tag{4}$$

Справді, лінійне перетворення $\xi = Cx$ область D переводить в область D^*, а нерівність (4) — в нерівність

$$\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(\xi^0, y^0, z^0, t^0)\, v_{\xi_i\xi_j}(\xi^0, y^0, z^0, t^0) \leq 0, \tag{5}$$

* Виконана при фінансовій підтримці Фонду фундаментальних досліджень при Державному комітеті України з питань науки і технологій.

де $v(\xi, y, z, t) = u(P, t)$, $\xi^0 = Cx^0$, $(b_{ij}) = C(a_{ij})C^*$ (C^* — транспонована матриця з матрицею C).

Вибираючи C так, щоб матриця (b_{ij}) стала одиничною, що можливо внаслідок (2), і враховуючи, що $v(\xi^0, y^0, z^0, t^0)$ — додатний максимум $v(\xi, y, z, t)$ в D^*, тому $V_{\xi_i\xi_j}(\xi^0, y^0, z^0, t^0) \le 0$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, одержуємо (5), а отже, і (4). З необхідних умов існування екстремуму маємо, що u'_{x_i}, u'_{y_i}, u'_{z_i}, u'_t дорівнюють нулю в точці (P^0, t^0), тому $Lu(P^0, t^0) \le c(P^0, t^0)u(P^0, t^0)$. Оскільки $u(P^0, t^0) > 0$, то ми прийдемо до суперечності у кожному з випадків: $Lu > 0$ і $Lu \ge 0$, $c(P, t) < 0$. Лема 1 доведена.

Покажемо деякі властивості розв'язків $u(P, t)$ рівняння (1) в області D, що узагальнюють відомий принцип максимуму для рівнянь теплопровідності.

Зауважимо, що перетворення $u = ve^{\alpha t}$, $\alpha > 0$, приводить до рівняння для $v(P, t)$ (1) з коефіцієнтом при v, рівним $c(P, t) - \alpha$. Якщо $c(P, t) \le M$, де M — деяка стала, то при достатньо великих α коефіцієнт при $v(P, t)$ в (1) строго від'ємний.

Теорема 1. *Нехай функція $u(P, t)$ неперервна в $\overline{D}$, має неперервні похідні, що входять в* (1), *і задовольняє нерівність $Lu \le 0$ в $\overline{D} \setminus \Gamma$, $c(P, t) \le M$; $u(P, t) \ge 0$, $(u(P, t) \le 0)$, $(P, t) \in \Gamma$. Тоді $(P, t) \ge 0$ в $\overline{D}$ $(u(P, t) \le 0)$.*

Теорема 1 доводиться аналогічно лемі 1.

Теорема 2. *Нехай функція $u(P, t)$ неперервна в $\overline{D}$, задовольняє рівняння* (1) *в $\overline{D} \setminus \Gamma$; $c(P, t) \le 0$ в $\overline{D} \setminus \Gamma$, $|f(P, t)| \le N$, $|u(P, t)|\big|_\Gamma \le m$.*

Тоді скрізь в $\overline{D}$

$$|u(P, t)| \le m + Nt. \tag{6}$$

Доведення. Розглянемо в $\overline{D}$ функції

$$\omega_\pm(P, t) = m + Nt \pm u(P, t).$$

Функції $\omega_\pm \ge 0$ на Γ. В $\overline{D} \setminus \Gamma$ враховуючи, що $c \le 0$, одержуємо

$$L\omega_\pm = -N + Nct + cm \pm Lu \le -N + |f| \le 0.$$

За теоремою 1 функції $\omega_\pm$ невід'ємні скрізь в $\overline{D}$, тому справедлива оцінка (6).

Наслідок. *Нехай виконуються умови теореми* 2 *і $f(P, t) \equiv 0$. Тоді скрізь в $\overline{D}$ $|u(P, t)| \le \max_\Gamma |u(P, t)|$.*

Теорема 3. *Нехай функція $u(P, t)$ неперервна в $\overline{D}$, задовольняє в $\overline{D} \setminus \Gamma$ рівняння* (1), *$|f(P, t)| \le N$, $c(P, t) \le -c_0 < 0$, $|u(P, t)| \le m$ на Γ. Тоді скрізь в $\overline{D}$ $|u(P, t)| \le \max\{N / c_0, m\}$.*

Доведення. Позначимо $N_1 = \max\{N / c_0, m\}$ і розглянемо в D функції $\omega_\pm(P, t) = N_1 \pm u(P, t)$.

Функції $\omega_\pm(P, t) \ge 0$ при $(P, t) \in \Gamma$, а в $\overline{D} \setminus \Gamma$ маємо

$$L\omega_\pm = N_1 c \pm f(P, t) \le -N_1 c + N \le 0.$$

За теоремою 1 функції $\omega_\pm(P, t) \ge 0$, $(P, t) \in \overline{D}$, звідки випливає твердження теореми 3.

Теорема 4. *Нехай виконуються умови теореми* 2, *$f \equiv 0$, $c \equiv 0$. Тоді розв'язок $u(P, t)$ набуває найбільшого і найменшого значень на Γ, тобто скрізь в $\overline{D}$ справедлива нерівність*

$$m_1 = \min_\Gamma u(P,t) \le u(P,t) \le \max_\Gamma u(P,t) = m_2.$$

Доведення. Функції $u(P,t)-m_1$, $m_2-u(P,t)$ невід'ємні на Γ і кожна з них є розв'язком рівняння (1). За наслідком теореми 2 одержимо $u(P,t)-m_1 \le \le \max_\Gamma (u(P,t)-m_1) = m_2 - m_1$, $m_2-u(P,t) \ge \min_\Gamma (m_2-u(P,t)) = m_2-m_1$. Звідси $m_1 \le u(P,t) \le m_2$.

Теорема 5. *Нехай в теоремі 2 умова $c \le 0$ замінена умовою $c(P,t) \le M$, де $M>0$. Тоді скрізь в $\overline{D}$*

$$|u(P,t)| \le e^{Mt}(Nt+m). \tag{7}$$

Доведення. Зробимо заміну $u(P,t) = e^{Mt}v(P,t)$. Для функції $v(P,t)$ виконуються умови теореми 2, тому $|v(P,t)| \le Nt+m$ в $\overline{D}$, а отже, $|u(P,t)| \le e^{Mt}(Nt+m)$ в $\overline{D}$.

Зауваження. Теореми 1 – 5 справедливі для рівнянь вигляду

$$L_1 u = \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(P,t)u''_{x_i x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j(P,t)u'_{x_j} + \sum_{j=1}^{m} c_j(P,t)u'_{t_j} -$$

$$- u'_t + c(P,t)u = f(P,t), \quad P = (t_1, \dots, t_m, x_1, \dots, x_n); \tag{8}$$

$c_j(P,t)$ — такі, що рівняння

$$\sum_{j=1}^{m} c_j(P,t)u'_{t_j} - u'_t = 0$$

має характеристики для всіх $\bar{t} \in [0,T] \times R_m$, $\bar{t} = (t_1, \dots, t_m, t)$,

$$L_2 u = \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(P,t)u''_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{m} x_i u'_{y_i} + \sum_{i=1}^{l} y_i u'_{t_i} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} b_i(P,t)u'_{x_i} + \sum_{i=1}^{m_1} c_i(P,t)u'_{t_i} - u'_t + c(P,t)u = f(P,t),$$

$$P = (t_1, \dots, t_{m_1}, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_{m_1}, z_1, \dots, z_l),$$

$$n \ge m \ge l, \quad \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(P,t)\xi_i\xi_j \ge \mu|\xi|^2, \quad \mu > 0. \tag{9}$$

З доведення теорем 1 – 5 випливає, що принцип максимуму для рівнянь (1), (8), (9) аналогічний принципу максимуму для рівнянь параболічного типу [1 – 3], але для вироджених параболічних рівнянь множину, де розв'язок може досягати max або min, можна уточнити. Дійсно, розглянемо множину точок S_0 межі S, де внутрішня нормаль ν набуває значень $(0, \dots, 0, \nu_{n+1}, \dots, \nu_r, \nu_{r+1})$, $|\nu| \ne 0$.

Нехай S задається рівнянням $F(P,t)=0$, і $\operatorname{grad} F(P,t) \ne 0$, $F(P,t) > 0$ при $(P,t) \in D$. На S_0 визначена функція $\beta(P,t) = LF(P,t)$; множини точок, де $\beta = 0$, $\beta > 0$, $\beta < 0$, відповідно позначимо S_{00}, S_{01}, S_{02}; $G^* = S_{00} \cup S_{01}$.

Знак функції $\beta(P,t)$ не змінюється при невиродженій заміні незалежних змінних, що входять у рівняння (1) [4].

Перетин D з $t=T$ позначимо через D_T.

Справедлива **лема 2**: *якщо* $u(P,t)$ *— неперервна і обмежена функція в області* D; $Lu \le 0$, $c(P,t) < 0$ *в* $D \cup G^* \cup D_T$, *або* $Lu < 0$ *і* $c(P,t) \le 0$ *в* $D \cup G^* \cup D_T$, *то* $u(P,t)$ *може набувати найменшого від'ємного значення тільки в точках* $\Gamma \backslash G^*$.

Доведення. Будемо доводити від супротивного. Нехай $u(P,t)$ набуває найменшого від'ємного значення в $(P^0, t^0) \in D \cup G^* \cup D_T$. Якщо $(P^0, t^0) \in D \cup D_T$, то доведення аналогічне доведенню леми 1, якщо $(P^0, t^0) \in G^*$, то виконаємо невироджену заміну змінних, так щоб η_r співпала з нормаллю, а деякий окіл межі перейшов в $\eta_r = 0$. Тоді функція $\beta(\eta)$ співпадає з коефіцієнтом при похідній u'_{η_r}, всі коефіцієнти при старших похідних рівні 0, тому $Lu(\eta) > 0$, що суперечить умові леми.

Для рівнянь (8), (9) аналогічно знаходимо G^*.

2. Строгий принцип максимуму. Наведемо доведення деяких лем, які можуть бути самостійними теоремами.

Лема 3. *Нехай* 1) $Lu \ge 0$ *в* D; 2) u *має додатний максимум* M *в* D; 3) *в* D *міститься еліпсоїд* E:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(x_i - x_i^*\right)^2 + \sum_{i=1}^{m} M_i \left(y_i - y_i^*\right)^2 + \sum_{i=1}^{l} \nu_i \left(z_i - z_i^*\right)^2 + \lambda (t - t^*)^2 \le d^2,$$

$$(\lambda_i > 0,\ \mu_i > 0,\ \nu_i > 0,\ \lambda > 0,\ d > 0);$$

4) $u < M$ *у внутрішніх точках* E; 5) $u\left(\tilde{P}, \tilde{t}\right) = M$ *в деякій точці* $\left(\tilde{P}, \tilde{t}\right) \in \partial E$, ∂E *— межа еліпсоїда* E. *Тоді* $\tilde{x} = \left(x_1^*, \ldots, x_n^*\right)$.

Доведення. Можна вважати, що $\left(\tilde{P}, \tilde{t}\right)$ — єдина точка на ∂E, в якій $u = M$. Якщо це не так, то можна взяти менший замкнений еліпсоїд, який міститься в E і має одну спільну точку з E: $\left(\tilde{P}, \tilde{t}\right) \in \partial E$. Припустимо, що $x^* \ne \tilde{x}$ і нехай K — замкнена $(r+1)$-вимірна куля, яка міститься в D з центром в точці $\left(\tilde{P}, \tilde{t}\right)$ і радіусом, меншим, ніж відстань $|\tilde{x} - x^*|$. Тоді

$$|x - x^*| \ge \text{const}, \quad (P,t) \in K. \tag{10}$$

Межа кулі складається з двох частин: $\partial K_1 \subset E$ і $\partial K_2 \not\subset E$, $\partial K = \partial K_1 \cup \partial K_2$. Оскільки $u < M$ в E і точка максимуму u є центром K, то в силу неперервності u знайдеться $\varepsilon > 0$ таке, що

$$u(P,t) < M - \varepsilon, \quad (P,t) \in \partial K_1. \tag{11}$$

Розглянемо функцію

$$h(P,t) = \exp\left\{-\alpha\left[\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left(x_j - x_j^*\right)^2 + \sum_{j=1}^{m} \mu_j \left(y_j - y_j^*\right)^2 + \sum_{j=1}^{l} \nu_j \left(z_j - z_j^*\right)^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \lambda (t - t^*)^2 \right]\right\} - \exp\left\{-\alpha d^2\right\}, \quad \alpha > 0.$$

Функція $h > 0$ всередині E, $h > 0$ на ∂E і $h < 0$ зовні E. При цьому маємо

$$Lh(P,t) = \left\{ 4\alpha^2 \sum_{ij=1}^{n} a_{ij} \lambda_i \lambda_j \left(x_i - x_i^*\right)\left(x_j - x_j^*\right) - 2\alpha \left[\sum_{i=1}^{n} a_{ii} \lambda_i + \right.\right.$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} b_i \lambda_i (x_i - x_i^*) + \sum_{i=1}^{m} x_i \mu_i (y_i - y_i^*) + \sum_{i=1}^{l} y_i (z_i - z_i^*) \nu_i - \lambda (t - t^*) \Bigg] +$$

$$+ c \Bigg\} \exp \Bigg\{ -\alpha \Bigg[\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i - x_i^*)^2 + \sum_{i=1}^{m} \mu_i (y_i - y_i^*)^2 + \sum_{i=1}^{l} \nu_i (z_i - z_i^*)^2 +$$

$$+ \lambda (t - t^*)^2 \Bigg] \Bigg\} - c \exp \{ -\alpha d^2 \}. \tag{12}$$

Враховуючи (10), підберемо α досить великим, щоб вираз в перших квадратних дужках у (12) був додатний. Оскільки $c(P, t) \le 0$, то

$$Lh(P, t) > 0, \quad (P, t) \in K. \tag{13}$$

Розглянемо в K функцію $v(P, t) = u(P, t) + \varepsilon h(P, t)$ $(\varepsilon > 0)$. Якщо ε досить мале, то $v < M$ на ∂K_1 згідно з (11). На ∂K_2 функція $u \le M$ і $h < 0$, тому $v < M$, отже, $v < M$ на межі K і $v(P, t) = u(P, t) = M$, тобто v досягає додатного максимуму всередині K. Враховуючи (13), маємо суперечність з лемою 1, тому $\tilde{x} = x^*$. Лема 3 доведена.

Лема 4. *Якщо* $Lu \ge 0$ *в* D *і* $u(P, t)$ *має додатний максимум в* D *у точці* (P^0, t^0), *то* $u(P, t) = u(P^0, t^0)$ *для будь-яких* $(P, t) \in D$ *таких, що* $(x_1, \ldots, x_n, y_1^0, \ldots, y_m^0, z_1^0, \ldots, z_l^0, t^0) = (P, t)$.

Доведення. Для зручності позначимо множину точок $(x_1, \ldots, x_n, y_1^0, \ldots$ $\ldots, y_m^0, z_1^0, \ldots, z_l^0, t^0)$ через $S(P^0, t^0)$. Якщо б лема була несправедливою, то в $S(P^0, t^0)$ існувала б точка $(P', t^0) = (x_1', \ldots, x_n', y_1^0, \ldots, y_m^0, z_1^0, \ldots, z_l^0, t^0)$, в якій $u(P', t^0) < u(P^0, t^0)$. З'єднаємо (P', t^0) з (P^0, t^0) простою неперервною кривою γ, яка лежить в $S(P^0, t^0)$. На γ існує точка (P^*, t^0) така, що $u(\tilde{P}, t^0) < u(P^*, t^0)$ для всіх точок $(\tilde{P}, t^0)$, що лежать на γ між $(\tilde{P}, t^0)$ і (P^*, t^0). Візьмемо точку $(\tilde{P}, t^0)$ із γ між (P^*, t^0) і (P', t^0) так, щоб відстань від $(\tilde{P}, t^0)$ до межі D була вдвічі більшою, ніж відстань від $(\tilde{P}, t^0)$ до (P^*, t^0). Оскільки $u(\tilde{P}, t^0) < u(P^0, t^0)$, то існує досить малий окіл σ_0, який визначається співвідношенням

$$\tilde{x} = x, \quad \sum_{i=1}^{m} (y_i - y_i^0)^2 + \sum_{i=1}^{l} (z_i - z_i^0)^2 + (t - t^0)^2 \le \varepsilon^2,$$

для точок якого

$$u(P, t) < u(P^*, t^0). \tag{14}$$

Розглянемо сім'ю еліпсоїдів E:

$$|x - \tilde{x}|^2 + \lambda (|y - y^0|^2 + |z - z^0|^2 + |t - t^0|^2) \le d^2, \quad \lambda > 0.$$

Візьмемо $d^2 = \varepsilon^2 \lambda$, тоді межа σ_0 лежатиме на межі еліпсоїда E_λ. Якщо $\lambda \to$ $\to 0$, то $E_\lambda \to \sigma_0$. При зростанні λ перетин $E_\lambda \cap \{(y^0, z^0, t^0)\}$ необмежено зростає. Звідси і в силу (11) знайдеться таке $\lambda = \lambda_0$, що $u(P^*, t^0)$ всередині E_λ, $u(P^0, t^0) = u(P^*, t^0)$ в деякій точці $Q = (P, t^0)$, що лежить на межі E_{λ_0}. Із нерівності (14) випливає, що Q не може належати σ_0, тобто $x \ne \tilde{x}$, а це суперечить лемі 2. Лема 4 доведена.

Лема 5. *Нехай область D — циліндр: $t_1 \le t \le t_2$, $|P - P^0| < d$; $Lu(P, t) \ge \ge 0$, $c(P, t) \le 0$ в $\overline{D}$, в точці (P^0, t_2), що лежить на верхній основі циліндра, $u(P, t)$ досягає додатного максимуму, рівного M. Тоді $u(P^0, t) = M$ на осі циліндра.*

Доведення. Припустимо, що на осі циліндра є точка (P^0, t'), в якій $u(P^0, t') \le M - a$, $a > 0$. Візьмемо параболоїд K: $(t_2 - t) \ge \alpha |P - P^0|$, $t' \le t \le t_2$, $\alpha > 0$, $t_2 - t' \le \min\{1, d, \alpha\}$, який міститься в циліндрі. У замкненому параболоїді розглянемо допоміжну функцію

$$v(P, t) \le M - ae^{-\beta(t - t')}\left[(t_2 - t) - \alpha\left|P - P^0\right|^2\right].$$

Припустимо, що нам вдалося підібрати сталі α і β такими, що

$$Lv(P, t) \le 0. \tag{15}$$

Покажемо, що це приведе нас до суперечності. Дійсно, при $t = t'$ функція $v(P, t)$ не менша $M - a$, на боковій поверхні параболоїда рівна M. Отже, різниця $v - u$ на поверхні параболоїда і при $t = t'$ невід'ємна, тому вона невід'ємна у всьому параболоїді при $t' \le t \le t_2$. Маємо

$$M = u(P^0, t^0) \le v(P^0, t^0) = M - ae^{-\beta(t - t')}\left[(t_2 - t) - \alpha\left|P - P^0\right|^2\right] <$$
$$< M - a; \tag{16}$$

(16) — шукана суперечність

Тепер покажемо, що α, β можна підібрати так, щоб виконувалась нерівність (15):

$$Lv = Mc(P, t) - e^{-\beta(t - t')}a\left\{-2\alpha\left[\sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_i(P, t)\left(x_i - x_i^0\right) + \right.\right.$$
$$\left. + \sum_{i=1}^{m} x_i\left(y_i - y_i^0\right) + \sum_{i=1}^{l} y_i\left(z_i - z_i^0\right)\right] + c(P, t)\left[(t_2 - t) - \alpha\left|P - P^0\right|^2\right] +$$
$$\left. + \beta\left[(t_2 - t) - \alpha\left|P - P^0\right|^2\right] + 1\right\}.$$

Якщо $\left|t_2 - t - \alpha\left|P - P^0\right|^2\right| < \varepsilon$, підберемо α так, щоб

$$\left|-2\alpha\left[\sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_i(P, t)\left(x_i - x_i^0\right) + \sum_{i=1}^{m} x_i\left(y_i - y_i^0\right) + \sum_{i=1}^{l} y_i\left(z_i - z_i^0\right)\right] + \right.$$
$$\left. + c(P, t)\left[(t_2 - t) - \alpha\left|P - P^0\right|^2\right]\right| < 1;$$

якщо ж $\left|t_2 - t_n - \alpha\left|P - P^0\right|^2\right| \ge \varepsilon$, то підберемо β, щоб вираз у квадратних дужках був додатний.

Лема 6. *Нехай область D — похилий циліндр, що визначається нерівностями $t_1 \le t \le t_2$, $|P - P^0 - \beta(t - t_1)| < d$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_r)$, в цьому циліндрі $Lu \ge 0$, $c(P, t) < 0$ і в точці $(t_2, P^0 + \beta(t_2 - t_1))$ функція u досягає додатного максимуму M. Тоді $u \equiv M$ у всіх точках інтервалу $t_1 \le t \le t_2$, $P = P^0 + + \beta(t - t_1)$.*

Доведення. Зробимо заміну змінних в R_{r+1}

$$t' = t, \quad P' = P^0 - \beta(t - t_1).$$

При цьому оператор перейде в оператор

$$L' = -\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{ij=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} (b_i + \beta_i) \frac{\partial}{\partial x_i} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \left(x_i + \beta_i(t - t_1) + \beta_{n+i} \right) \frac{\partial}{\partial y_i} + \sum_{i=1}^{l} \left(y_i + \beta_{n+i}(t - t_1) + \beta_{m+n+i} \right) \frac{\partial}{\partial z_i} + c, \quad (17)$$

а похилий циліндр — в прямий циліндр

$$t_1 \le t \le t_2, \quad |P - P^0| \le d.$$

Для оператора (17) справедлива лема 4.

Доведення аналогічне випадку (1). Тому за лемою 5 $u \equiv M$ на осі циліндра, тобто $u \equiv M$ на інтервалі $P = P^0 - \beta(t - t_1)$, $t_1 \le t \le t_2$, що і потрібно було довести.

Теорема 6 (строгий принцип максимуму). *Нехай D — область в просторі R_{r+1} і $\gamma(D)$ — її верхня основа. Нехай в D визначений оператор* (1) *з $c(P, t) \le 0$ в $D \cup \gamma(D)$. Тоді якщо u досягає додатного максимуму (від'ємного мінімуму) в деякій точці $(P^0, t^0) \in D \cup \gamma(D)$, то $u(P, t) = \text{const}$ у підобласті $D' \subset D$, що підпорядкована точці (P^0, t^0).*

Доведення теореми 6 випливає з леми 6. Нехай u досягає максимуму, рівного $M > 0$, в точці $(P^0, t^0) \in D \cup \gamma(D)$. Нехай точку $(P', t') \in D \cup \gamma(D)$ можна з'єднати з точкою (P^0, t^0) ламаною, яка однозначно проектується на вісь t, верхнім кінцем якої є точка t_2. Для кожної ланки ламаної побудуємо циліндр (можливо і похилий) з основами, ортогональними до t, віссю якого є ланка ламаної, і такий, щоб належав $D \cup \gamma(D)$. Застосувавши до кожного циліндра лему 6, одержимо, що у всіх точках ламаної, а отже, і в (P', t'), функція $u(P, t) \equiv M$.

1. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. – М.: Мир, 1968. – 427 с.
2. *Ильин А. М., Калашников А. С., Олейник О. А.* Линейные уравнения второго порядка параболического типа // Успехи мат. наук. – 1962. – **17**, вып. 3. – С. 3–49.
3. *Ландис Е. М.* Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов. – М.: Наука, 1971. – 287 с.
4. *Олейник О. А., Радкевич Е. В.* Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой // Итоги науки и техники. Сер. Мат. анализ. / ВИНИТИ. – 1971. – 252 с.

Одержано 19.12.94