УДК 336.71

І.В. БУРТНЯК
ДВНЗ «Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника»

ОЦІНЮВАННЯ ДЕРИВАТИВІВ ДВОБАР'ЄРНИХ ОПЦІОНІВ БЕСЕЛІВСЬКИХ ПРОЦЕСІВ МЕТОДАМИ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛІЗУ

Запропоновано застосування спектральних методів для обчислення значення подвійного бар'єрного опціону породженого дифузійним процесом Бесселя. Використовуючи дану методику, можна обчислити ціну опціону у вигляді ряду Фур'є Бесселя з відповідними коефіцієнтами. Ми пропонуємо простий метод оцінювання опціонів використовуючи розклад функції Гріна для крайової задачі для сингулярного параболічного рівняння, точність оцінювання збігається з точністю збіжності рядів Фур'є Бесселя.

Ключові слова: Спектральна теорія, бар'єрний опціон, фінансові потоки, дифузійний процес Бесселя, функції Бесселя, функція Гріна, сингулярний параболічний оператор, інфінітіземальний оператор.

I.V. BURTNYAK
Vasyl Stefanyk Precarpathian National University

EVALUATION OF DERIVATIVES OF TWO-BASED OPTIONS OF BESSEL PROCESSES BY METHODS OF SPECTRAL ANALYSIS

The application of spectral methods for calculating the value of the double barrier option generated by the Bessel diffusion process is proposed. Using this technique, you can calculate the option price in the form of a Fourier series of Bessel with the corresponding coefficients. We propose a simple method for estimating options using the Green's function for a boundary-value problem for a singular parabolic equation, and the accuracy of the estimation coincides with the accuracy of the convergence of the Fourier-Bessel series.

Keywords: spectral theory, barrier option, financial flows, Bessel diffusion process, Bessel functions, Green's function, singular parabolic operator, infinitesimal operator.

Постановка проблеми. У загальній теорії розглядаються більш ширші припущення на стохастичні процеси, зокрема такі як мартингальні, але не завжди існує аналітична формула для зображення розв'язку тому ми припускаємо що процеси марківські.

Розглянемо одновимірну дифузію з процесом Бесселя з дрифтом, який рівний нулю (є ряд процесів цього типу де дрифт не рівний нулю, але їх дослідження можна звести до процесів з нульовим дрифтом). Такі процеси мають застосування при розв’язуванні економічних задач на знаходження короткострокових відсоткових ставок, кредитних спредів та стохастичної волатильності деривативів [1].

Спектральний метод застосовано до похідних фінансових інструментів, ціноутворення через представлення ціни похідного активу $u(t,x)$ нейтральною до ризику очікування деякої функції від майбутньої вартості основного процесу X, тобто як

$$u(t,x) \ = \ \tilde{E}_x \left[H(X_t)\right] \ = \int H(y)p(t,x,y)\,dy.$$

де $p(t,x,y)$ – щільність переходу X за ймовірністю P. Якщо інфінітезимальний генератор L базового процесу самоспряжений на гільбертовому просторі з приростом міри $m(x)dx$, і спектр L є дискретним, то щільність переходу X має розвинення за власними функціями [2]:

$$p(t,x,y) = m(y)\sum_n e^{-\lambda nt}\,\varphi_n(y)\,\varphi_n(x),$$

де $\{\lambda_n\}$ – власні значення L і $\{\varphi_n\}$ – власні функції: тобто $L\varphi_n = \lambda_n\varphi_n$.

Розглянемо процес для якого оператор L має вигляд

$$L = \partial_{xx}^2 + x^{-1}\partial_x - x^{-2}p^2 \qquad (1)$$

де p стала, яку називають індексом, $x > 0$.

Зауважимо, що L сингулярний параболічний оператор, інфінітіземальний, самоспряжений, до нього зводяться ряд операторів де $\sigma^2 = 2x^2$, L є оператором Бесселя.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Задачі оцінювання похідних активів аналітично розв’язуються за допомогою методів спектральної теорії [3]. Як спектральна теорія так і стохастичні моделі волатильності стали незамінним інструментом у фінансовій математиці, це пов'язано з тим, ціни двобар'єрного опціону підпорядковується броунівському руху і корелюють з волатильністю [4]. Дослідження стохастичної волатильності, зокрема волатильності активу, що лежить в основі похідної та контролюється нелокальною дифузією.

Дифузія з оператором Бесселя досліджувалася роботах [5-6] але при інших крайових умовах, та ортогональних системах функцій.

Постановка цілей. Для дослідження L на власні значення та власні функції, при певних крайових умовах, розглянемо рівняння Бесселя.

$$x^2v'' + xv' + (x^2 - p^2)v = 0 \qquad (2)$$

Розв’язок рівняння (2), за винятком частинних значень p, не виражається через елементарні функції (в скінченому вигляді), ці неелементарні функції називають Бесселевими, вони мають широке застосування в економіці, техніці та фізиці. Оскільки рівняння Ейлера-Бесселя є лінійним, то його загальний інтеграл можна записати у вигляді

$$v = C_1 v_1 + C_2 v_2$$

де $v_1,\ v_2$ два будь-які лінійно незалежні частинні розв'язки рівняння Ейлера-Бесселя, а $C_1,\ C_2$ довільні сталі.

У випадку $p \geq 0$ робимо підстановку $v = x^p w$ отримаємо для функції w рівняння

$$w'' + \frac{2p+1}{x} w' + w = 0.$$

Розв'язок отриманого рівняння є степеневим рядом, який є абсолютно збіжним для всіх $x \in (-\infty; \infty)$ і має вигляд

$$v = x^p w = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^p}{\Gamma(p+1)} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{p+2m}}{1\ 2 \dots m(p+1) \dots (p+m)\Gamma(p+1)}\ , \qquad (3)$$

де Г гамма функція. Перетворивши (3) на основі властивостей гамма функції, отримаємо Бесселеву функцію першого роду, порядку p.

$$J_p(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{p+2m}}{\Gamma(m+1)\Gamma(p+m+1)},$$

Зауваження. Оскільки в рівняння (2) входить p^2 то заміна p на p не впливає на розв'язок рівняння, тому для будь-якого p існує розв'язок.

Якщо p не є цілим то функції Бесселя не можуть бути лінійно залежними і загальний інтеграл рівняння (2) має вигляд [5]

$$J = C_1 J_p(x) + C_2 J_{-p}(x),$$

при цілому p знаходимо ще один частинний розв'язок

$$Y_p(x) = \frac{J_p(x)\cos p\pi + J_{-p}(x)}{\sin p\pi},$$

який є бесселевою функцією другого роду, яка є невизначеною при $x = 0$ користуючись правилом Лопіталя, знайдемо границю при $x \to 0$ і цим числом довизначимо функцію в нулі

$$Y_0 = \frac{2}{\pi} J_0(x) \left(\ln\frac{x}{2} + C\right) - \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{2m} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m}\right),$$

Для будь якого p мають місце формули

$$\frac{d}{dx}\left(x^p J_p(x)\right) = x^p J_{p-1}(x),$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^{-p}J_p(x)\right) = -x^{-p}J_{p+1}(x).$$

Виклад основного матеріалу. Функції Бесселя $J_p(\lambda x)$, $J_p(\mu x)$ де λ і μ корені рівняння $J_p(x) = 0$, є ортогональними на відрізку [0, 1] з вагою x тобто

$\int_0^1 xJ_p(\lambda x)\, J_p(\mu x)dx = 0,\ \ \lambda \neq \mu$, а при $\lambda = \mu$ можливі два випадки

$$\int_0^1 xJ_p^2(\lambda x)\, dx = \begin{cases} \frac{1}{2}J_p'^2(\lambda), & J_p\ (\lambda) = 0, \\ \frac{1}{2}\left(1 - \frac{p^2}{\lambda^2}\right)J_p^2(\lambda), & J_p'(\lambda) = 0. \end{cases}$$

Для всіх $\alpha, \beta \geq 0,\ \alpha + \beta > 0$ існує зліченна множина додатних коренів $\alpha v_k'(\mu) + \beta\mu v_k(\mu) = 0$, гранична точка яких знаходиться на нескінченості.

Нехай $v(x)$ розв'язок (2) то функція $v(\lambda x)$ теж буде розв'язком рівняння такого виду

$$x^2v'' + xv' + (\lambda^2x^2 - p^2)v = 0 \tag{4}$$

Рівняння (4) є рівнянням Бесселя з параметром λ.

Будь який розв'язок рівняння (2), який є функцією Бесселя, має нескінчену множину додатних коренів, які близькі до коренів функції $\sin(x + \omega)$, вигляду $k_n = n\pi - \omega,\ \omega = const,\ n -$ціле (аналогічно для від'ємних коренів, бо вони знаходяться симетрично відносно початку координат), якщо $k_n \neq 0$ то вони є прості корені і утворюють злічену множину.

Бесселеві функції це знакочергуючі ряди, тому обчислення значення можна здійснювати використовуючи лему Лейбніца, за якою можна визначити точність наближення.

Для знаходження власних функцій та власних значень розглянемо таку крайову задачу

$$x^2v_k'' + xv_k' + (\lambda_k^2x^2 - p^2)v_k = 0, \tag{5}$$

$$|v_k|_{x=0} < +\infty, \tag{6}$$

$$\alpha v_k'(x_0) + \beta v_k(x_0) = 0. \tag{7}$$

Тобто розглядаємо задачу Штурма-Ліувілля. Дана задача має єдиний розв'язок. Умову (6) накладемо тому, що $x = 0$ є особливою точкою рівняння (5) і оператора L. x_0 регулярна точка рівняння (5). Ті значення λ_k при яких крайова задача (5)-(7) має нетривіальний розв'язок v_k називаються власними значеннями, а v_k власними функціями задачі. Відомо, що при умовах (6) оператор L має злічену кількість власних значень, вони прості та невід'ємні [6].

Домноження L на x^2 не змінює ні власних значень, ні власних функцій, ні їхньої кількості.

Розглянемо таку задачу

$$\begin{cases} x^2 v_k'' + x v_k' + (\lambda_k^2 x^2 - p^2) v_k = 0, \\ |v_k|_{x=0} < +\infty, \\ v_k(x_0) = 0. \end{cases} \tag{8}$$

З (6) випливає, що $p \geq 0$, розглянемо випадок $p > 0$. Легко перевірити, що $\lambda = 0$ не є власним значенням задачі (8).

Оскільки (2) має своїм інтегралом $v = C_1 J_p(x) + C_2 Y_p(x)$ то виходячи із властивостей функції Бесселя задача (8) має розв'язок

$$v = C_1 J_p(\lambda x) + C_2 Y_p(\lambda x)$$

Врахувавши крайові умови матимемо $C_2 = 0$ і $C_1 J_p(\lambda_k x_0) = 0$ тобто $J_p(\lambda_k x_0) = 0$, отже $\lambda_k x_0 = \mu_k$, де $J_p(\mu_k) = 0$, $\lambda_k = \frac{\mu_k}{x_0}$, $0 < \mu_1 < \mu_2 < \ldots < \mu_k < \ldots$, тому $v_k(x) = J_p\left(\frac{\mu_k}{x_0} x\right)$, $k = 1,2, \ldots$

Знайдемо норму функції $v_k(x)$

$$\|v_k(x)\|^2 = \int_0^{x_0} x J_p\left(\frac{\mu_k}{x_0} x\right) dx = \frac{1}{2}\left[x^2 \left(J_p'\left(\frac{\mu_k}{x_0} x\right)\right)^2 + \left(x^2 - \frac{p^2}{\mu_k^2}\right)\left(J_p\left(\frac{\mu_k}{x_0} x\right)\right)^2\right] = \frac{x_0^2}{2}\left(J_p'(\mu_k)\right)^2.$$

Використовуючи властивості функцій Бесселя отримаємо

$$\|v_k(x)\|^2 = \frac{x_0^2}{2}\left(J_{p+1}(\mu_k)\right)^2, \qquad k = 1,2, \ldots$$

Розглянемо випадок $p = 0$ маємо таку задачу

$$\begin{cases} (x v')' + \lambda^2 x v = 0, \\ |v|_{x=0} < +\infty, \\ v(x_0) = 0. \end{cases} \tag{9}$$

При $\lambda = 0$ маємо $(x v')' = 0$ звідси випливає, що $x v' = C_1$ або $\frac{dv}{dx} = \frac{C_1}{x}$ тому загальний інтеграл має вигляд $v = C_1 \ln x + C_2$. З умови обмеженості маємо, що $v_0 = C_2$, з крайової умови робимо висновок про те що $v \equiv 0$, отже $\lambda = 0$ не є власним значенням.

Нехай $\lambda > 0$ то загальний розв'язок має вигляд

$$v = C_1 J_0(\lambda x) + C_2 Y_0(\lambda x)$$

Оскільки функція Бесселя другого роду $Y_0(\lambda x)$ необмежена в нулі то $C_2 = 0$, тому $v(x) = C_1 J_0(\lambda x)$, задовольняючи крайову умову одержимо $J_0(\lambda x_0) = 0$. Одержимо корені цього рівняння μ_k, $0 < \mu_1 < \mu_2 <\ldots< \mu_k <\ldots$ $\lambda_k = \frac{\mu_k}{x_0}$, $v_k(x) = J_0\left(\frac{\mu_k}{x_0} x\right), k = 1,2, \ldots$ при цьому норма $v_k(x)$ дорівнюватиме

$$\|v_k(x)\|^2 = \frac{x_0^2}{2}\left(J_1(\mu_k)\right)^2, \qquad k = 1,2, \ldots$$

Зауважимо, що функції 1, $J_p\left(\frac{\mu_k}{x_0} x\right)$, $k = 1,2, \ldots$ ортогональні між собою на $[0,\ x_0]$ з вагою x.

Розглянемо бесселівський процес, який описується

$$\frac{\partial v(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 v(t,x)}{\partial x^2} + x^{-1}\frac{\partial v(t,x)}{\partial x} - p^2 x^{-2} v(t,x), \quad 0 < x < x_0, \tag{10}$$

і крайовою умовою

$$v(0,x) = K(e^x - 1)^+, \quad v(t,x_0) = 0; \tag{11}$$

де K страйк. Процес є однорідним тому $v(t,x) = \varphi(t)v(x)$.

Із теорії Штурма-Ліувілля, маємо

$$v(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{n\,p}\, e^{-\frac{\mu_n^2}{x_0^2}t} J_p\left(\frac{\mu_n}{x_0} x\right), \ p \geq 0,$$

де μ_n додатні корені рівняння $J_p(\mu_n x_0) = 0$,

$$c_{n\,p} = \frac{K\int_0^{x_0} x(e^x - 1)\, J_p\left(\frac{\mu_n}{x_0} x\right) dx}{\int_0^{x_0} x J_p^2\left(\frac{\mu_n}{x_0} x\right) dx},$$

Фінансові потоки мають вигляд

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} K c_{n\,p} e^{-\left(\frac{\mu_n}{\ln K}\right)^2 (T-t)}\ J_p\left(\mu_n \ln\frac{x}{K}\right),$$

у випадку, якщо процес закінчується в момент часу T, коли $X_T = K$

$$u(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} K c_n e^{-\left(\frac{\mu_n}{\ln\frac{R}{L}}\right)^2 (T-t)}\ J_p\left(\frac{\mu_n(K - \ln\frac{x}{L})}{\ln\frac{R}{L}}\right),$$

де $L < x < R$, L, R −бар'єри, K −страйк, а $c_{n\,p}$ обчислюються наступним чином

$$c_{n\,p} = 2K\frac{\int_0^1 t(e^{Kt} - 1)\, J_p(\mu_n t) dt}{J_{p+1}^2(\mu_n)},$$

Ми обчислили розклад фінансового потоку по системі функцій Бесселя J_p першого роду, але розподіл потоків задається функцією Гріна відповідної задачі. Тому для обчислень зручно розкласти функцію Гріна по системі Бесселя. Процесу який ми розглядаємо відповідає неоднорідна крайова задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^{-1}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{p^2 u(t,x)}{x^2} + f(t,x), \;\; x > 0, \tag{12}$$

де $f(t,x)$ двічі неперервно диференційовна по x неперервно диференційовна по t, абсолютно інтегровна разом із похідними, $(t,x) \in [0,+\infty)$ і має представлення

$$f(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)\; J_p\left(\frac{\mu_n x}{x_0}\right), \;\; 0 < x < x_0 < +\infty, \qquad 0 < t < T,$$

μ_n корені рівняння $J_p(\mu_n) = 0$.

Розв'язок цієї задачі будемо шукати у вигляді

$$u(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)\; J_p\left(\frac{\mu_n x}{x_0}\right),$$

підставивши в (12) одержимо

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n'(t)\; J_p\left(\frac{\mu_n x}{x_0}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left[\left(J_p\left(\frac{\mu_n x}{x_0}\right)\right)''_{x^2} + \frac{\left(J_p\left(\frac{\mu_n x}{x_0}\right)\right)'_x}{x}\right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{p^2 J_p\left(\frac{\mu_n x}{x_0}\right)}{x^2} + \lambda_n^2 J_p\left(\frac{\mu_n x}{x_0}\right)\right] - \lambda_n^2 J_p\left(\frac{\mu_n x}{x_0}\right)\right\} T_n(t) + \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)\; J_p\left(\frac{\mu_n x}{x_0}\right),$$

тому

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[T_n'(t) + \lambda_n^2 T_n(t) - f_n(t)\right] J_p\left(\frac{\mu_n x}{x_0}\right) \equiv 0,$$

звідки $T_n'(t) + \lambda_n^2 T_n(t) - f_n(t) = 0, \;\; \lambda_n = \frac{\mu_n}{x_0}, \;\; n \in N$ з початковою умовою $T_n(0) = 0$.

Неоднорідне диференціальне рівняння першого порядку розв'яжемо методом варіації сталої. Оскільки $T_n'(t) + \lambda_n^2 T_n(t) = 0$ має перший інтеграл $T_n(t) = Ce^{-\lambda_n^2 t}$ (розв'язок однорідного рівняння) то $T_n(t) = C(t)e^{-\lambda_n^2 t}$ тому $C'^{(t)} = f_n(t)e^{\lambda_n^2 t}, \;\; C(t) = \int_0^t e^{\lambda_n^2 \beta} f_n(\beta)d\beta + C_1$.

$T_n(t) = \int_0^t e^{\lambda_n^2 \beta} f_n(\beta)d\beta e^{-\lambda_n^2 t} + C_1 e^{-\lambda_n^2 t}$ при $t = 0, \;\; C_1 = 0$

$T_n(t) = \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\beta)} f_n(\beta) d\beta$ тому

$$u(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\beta)} f_n(\beta) d\beta \ J_p\left(\frac{\mu_n x}{x_0}\right).$$

Враховуючи, що

$$f_n(t) = \int_0^{x_0} \xi f_n(\xi,t) J_p\left(\frac{\mu_n \xi}{x_0}\right) d\xi \left(\int_0^{x_0} x J_p^2\left(\frac{\mu_n x}{x_0}\right) dx\right)^{-1}$$

маємо

$$u(t,x)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\beta)} \int_0^{x_0} \xi f(\xi,t) J_p\left(\frac{\mu_n \xi}{x_0}\right) d\beta d\xi \, J_p\left(\frac{\mu_n x}{x_0}\right)\left(\int_0^{x_0} y J_p^2\left(\frac{\mu_n y}{x_0}\right) dy\right)^{-1}$$
$$= \int_0^{x_0} \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} \left(y J_p^2\left(\frac{\mu_n y}{x_0}\right) dy\right)^{-2} e^{-\lambda_n^2(t-\beta)} \xi \, J_p\left(\frac{\mu_n \xi}{x_0}\right) J_p\left(\frac{\mu_n x}{x_0}\right) f(\xi,t) d\xi d\beta,$$

тобто

$$G(t-\beta,x,\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \xi \, J_p\left(\frac{\mu_n \xi}{x_0}\right) J_p\left(\frac{\mu_n x}{x_0}\right) e^{-\frac{\mu_n^2}{x_0}(t-\beta)} \left(\frac{x_0^2}{2} J_{p+1}^2(\mu_n)\right)^{-1},$$

$$u(t,x) = \int_0^t G(t-\tau,x,\xi) f(\tau,\xi) d\xi.$$

Оскільки проблема оцінювання і дослідження двовимірних бар’єрних опціонів зводиться до дослідження і розв’язання крайової задачі [7-8]

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + x^{-1}\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} - \frac{p^2 u(t,x)}{x^2}, \ x \in [L,H], \ t \in [0,T],$$

$$u(t,L) = 0, \qquad u(t,H) = 0,$$

$$u(T,x) = \max(\pm(x(T)-K),0)\, \mathbb{I}_{(L<x(t)<H;\, t\in[0,T])}.$$

Ця задача зводиться до розв’язання такої крайової задачі для сингулярного параболічного рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + y^{-1}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{p^2 u(t,x)}{y^2},$$

$y = \ln x, \ y \in [A,B], t \in [0,T], \ A = \ln L, \ B = \ln H,$

$$u(t,A) = 0, \qquad u(t,B) = 0,$$

$u(0,y) = \psi\left(e^{y(T)}\right) = \max(\pm(x(T)-K),0)\, \mathbb{I}_{(L<x(t)<H;\, t\in[0,T])}.$

Враховуючи всі міркування щодо встановлення розв’язку класичних крайових задач для сингулярного параболічного оператора L, маємо що

$$u(T,x) = \int_0^{\ln\frac{H}{L}} \left(e^{\xi}L - K\right) \mathbb{I}_{(L<x(t)<H;t\in[0,T])} G(x,\xi) d\xi$$

$$= \int_0^{\ln\frac{H}{L}} \left(e^{\xi}L - K\right) \mathbb{I}_{(L<x(t)<H;t\in[0,T])}$$

$$2\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\left(\frac{\mu_n}{\ln\frac{H}{L}}\right)^2 t} J_p\left(\frac{\mu_n \xi}{\ln\frac{H}{L}}\right) J_p\left(\frac{\mu_n \ln\frac{x}{L}}{\ln\frac{H}{L}}\right)\left(\ln\frac{H}{L}\right)^{-2} \left(J_{p+1}^2(\mu_n)\right)^{-1},$$

де $\mathbb{I}_{(L<x(t)<H;t\in[0,T])}$ ступінчаста функція Хевісайда.

Зауваження. Оскільки корені Бесселивих функцій першого роду близькі до коренів функції $\sin(x+\omega)$, вигляду $k_n = n\pi - \omega$, $\omega = const$, n −ціле, то при великих n, μ_n^2 можна замінити через n^2, звідси випливає, що ряди для функції Гріна та її першої та другої похідної рівномірно збігаються та ведуть себе як

$$C\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\ln^{2n+1} x}{(2n+1)!} < +\infty, \qquad \forall x \in [L,+\infty], \qquad C > 0,$$

тому при наближених обчисленнях через швидку збіжність не потрібно великої кількості коефіцієнтів ряду.

Висновки. Одновимірна дифузія використовується для опису основної динаміки фондового ринку, а спектральний метод служить потужним інструментом для аналітичного ціноутворення.

В роботі побудовано функцію Гріна для дифузійного процесу Бесселя двобар'єрного опціону, яка розкладена по системі функцій Бесселя. Функція Гріна записана аналітично і її представлення зручне та не завдає труднощів при обчислені цін деривативів.

Перспективи подальших досліджень. Перспективами подальших досліджень у даному напрямі є вдосконалення спектральної теорії та поширення результатів статті на випадки, коли рівняння з якого знаходяться власні значення не має дискретного спектру.

Література

1. Göing-Jaeschke A. A survey and some generalizations of Bessel processes / A. Göing-Jaeschke, M. Yor. // Bernoulli. – 2003. – Volume 9, Number 2. – P. 313–349.

2. Буртняк І.В. Системний підхід до оцінювання опціонів на базі моделі CEV / І.В. Буртняк, Г.П. Малицька // Бізнес Інформ. – 2016. – №10. – С. 155–159.

3. Linetsky V. The spectral representation of Bessel processes with constant drift: applications in queueing and finance / Vadim Linetsky. // Journal of Applied Probability. – 2004. – Volume 41, Issue 2. – P. 327–344.

4. Linetsky V. Pricing options on scalar diffusions: An eigenfunction expansion approach / V. Linetsky, D. Davydov. // Operations Research. – 2003. – Volume 51 (2). – P. 185–209.

5. Lebedev N. N. Special Functions & Their Applications / N. N. Lebedev. – New York: Dover Publications, 1972. – 336 p. – (Dover Books on Mathematics).

6. Владимиров В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. – Москва: Наука, 1981. – 512 с.

7. Буртняк І.В. Обчислення цін опціонів методами спектрального аналізу/ / І.В. Буртняк, Г.П. Малицька // Бизнес Информ. – 2013. – №4. – С. 152–158.

8. Буртняк І.В. Дослідження процесу Орнштейна–Уленбека методами спектрального аналізу / І.В. Буртняк, Г.П. Малицька // Проблеми економіки. – 2014. – №2. – С. 349–356.

References

1. Göing-Jaeschke A. A survey and some generalizations of Bessel processes / A. Göing-Jaeschke, M. Yor. // Bernoulli. – 2003. – Volume 9, Number 2. – P. 313–349.

2. Burtniak I.V. Systemnyi pidkhid do otsiniuvannia optsioniv na bazi modeli CEV / I.V. Burtniak, H.P. Malytska // Biznes Inform. – 2016. – Vol. 10. – S. 155–159.

3. Linetsky V. The spectral representation of Bessel processes with constant drift: applications in queueing and finance / Vadim Linetsky. // Journal of Applied Probability. – 2004. – Volume 41, Issue 2. – P. 327–344.

4. Linetsky V. Pricing options on scalar diffusions: An eigenfunction expansion approach / V. Linetsky, D. Davydov. // Operations Research. – 2003. – Volume 51 (2). – P. 185–209.

5. Lebedev N. N. Special Functions & Their Applications / N. N. Lebedev. – New York: Dover Publications, 1972. – 336 p. – (Dover Books on Mathematics).

6. Vladimirov V. S. Uravneniya matematicheskoy fiziki / V. S. Vladimirov. – Moskva: Nauka, 1981. – 512 s.

7. Burtniak I.V. Obchyslennia tsin optsioniv metodamy spektralnoho analizu/ / I.V. Burtniak, H.P. Malytska // Biznes Inform. – 2013. – Vol. 4. – S. 152–158.

8. Burtniak I.V. Doslidzhennia protsesu Ornshteina–Ulenbeka metodamy spektralnoho analizu / I.V. Burtniak, H.P. Malytska // Problemy ekonomiky. – 2014. – Vol. 2. – S. 349–356.