УДК 336.71

І.В. БУРТНЯК
ДВНЗ «Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника»

МОДЕЛЮВАННЯ ЦІНОУТВОРЕННЯ ДВОБАР'ЄРНИХ ОПЦІОНІВ З БАГАТОФАКТОРНОЮ ВОЛАТИЛЬНІСТЮ

В статті використано методи спектральної теорії та теорії сингулярних і регулярних збурень, знайдено наближену ціну двобар'єрних опціонів з багатофакторною волатильністю, як розклад за власними функціями. Встановлено теорему оцінки точності наближення цін опціонів. Знайдено явні формули для знаходження вартості деривативів на основі розвинення за власними функціями та власними значеннями самоспряжених операторів з використанням крайових задач для сингулярних і регулярних збурень

Ключові слова: Бар'єрний опціон, спектральна теорія, сингулярна хвильова теорія, регулярна хвильова теорія.

I.V. BURTNYAK
Vasyl Stefanyk Precarpathian National University

MODELING THE PRICING OF TWO-DIMENSIONAL OPTIONS WITH MANY FACTOR VOLATILITY

In the article methods of spectral theory and theory of singular and regular perturbations are used, the approximate price of two-binary options with multi-factor volatility, as a schedule according to its own functions, is found. The theorem for estimating the accuracy of approximation of option prices is established. Explicit formulas are found for finding the value of derivatives on the basis of the development of their own functions and the eigenvalues of self-directed operators using boundary value problems for singular and regular perturbations

Keywords: Barrier option, spectral theory, singular wave theory, regular wave theory.

Постановка проблеми. Спектральне подання для щільності загальної одновимірної дифузії було отримано в роботі Маккіна [1]. З того часу, спектральна теорія стала важливим інструментом для аналізу фінансових моделей дифузії, а саме в дослідженні розвинень по власних функціях лінійних операторів багато задач, пов'язаних з оцінкою деривативів розв'язуються за допомогою методів спектральної теорії, тому вона широко застосовується у фінансовій математиці. Спектральні методи, є потужним інструментом для аналітичного ціноутворення, пов'язаного з оцінкою цінних паперів.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Спектральну теорію використовували багато науковців, а саме для прогнозування цін опціонів [2], знаходження відсоткової ставки на цінні папери [3], моделювання волатильності фінансових активів [4]. Як спектральна теорія так і стохастичні моделі волатильності стали незамінним інструментом у фінансовій математиці, це пов'язано з тим, що ціни двобар'єрного опціону підпорядковуються броунівському руху і корелюють з волатильністю [5]. Дослідження стохастичної волатильності, зокрема волатильності активу, що лежить в основі похідної та контролюється нелокальною дифузією [6].

Використовуючи методи з спектральної теорії та теорії сингулярних і регулярних збурень , можна знайти наближену ціну двобарєрних опціонів ОрнштейнаУленбека з багатофакторною волатильністю, як розвинення за власними функціями використовуючи інфінітезимальні генератори (l+n+1) вимірної дифузії, $l \geq 1, m \geq 1, \quad l \in N, m \in N$ тобто дифузія залежить від однієї локальної змінної, l-вимірного швидкозмінного фактора і n-вимірного повільно змінного фактора. Дана робота є розширенням [7-9], в [9] l=1та n=1. В статті розроблено алгоритм знаходження наближеної ціни двобар'єрних опціонів та явні формули для знаходження вартості деривативів на основі розкладу за власними функціями та власними значеннями самоспряжених операторів з використанням крайових задач для сингулярних і регулярних збурень. Встановити теорему оцінки точності наближення цін опціонів.

Постановка цілей. Нехай (Q, F, P) є простором ймовірності, який підтримує корельований броунівський рух $(\mathrm{W}^{x}, \mathrm{W}^{y_1}, \ldots, \mathrm{W}^{y_l}, \mathrm{W}^{z_1}, \ldots, \mathrm{W}^{z_n})$ і експоненціальна випадкова змінна $\varepsilon \sim Exp(1)$, яка є незалежною від $(\mathrm{W}^{x}, \mathrm{W}^{y_1}, \ldots, \mathrm{W}^{y_l}, \mathrm{W}^{z_1}, \ldots, \mathrm{W}^{z_n})$. Ми будемо вважати, що економіка з (l+n+1) факторами, описана однорідним часом та неперервним Марківським процесом $\chi = (\mathrm{X}, \mathrm{Y}_1, \ldots, \mathrm{Y}_\mathrm{l}, \mathrm{Z}_1, \ldots, \mathrm{Z}_\mathrm{n})$, який визначений в деякому просторі станів $\mathrm{E} = I \times \mathrm{R}^{l} \times \mathrm{R}^{\mathrm{n}}$, де $(\mathrm{Y}_1, \ldots, \mathrm{Y}_\mathrm{l}) \in \mathrm{R}^{l}$, $(\mathrm{Z}_1, \ldots, \mathrm{Z}_\mathrm{n}) \in \mathrm{R}^{\mathrm{n}}$ I - інтервал в R з точками e_1 та e_2, такими, що $-\infty < e_1 < e_2 < \infty$. Ми припускаємо, що χ має початок в E і миттєво зникає як тільки X виходить за межі I. Зокрема, динаміка χ з фізичною мірою $\mathbb{P}$, є наступною:

$$\chi_t = \begin{cases} (X_t, \mathrm{Y}_{1t}, \ldots, \mathrm{Y}_{\mathrm{l}t}, \mathrm{Z}_{1\mathrm{t}}, \ldots, \mathrm{Z}_{\mathrm{nt}})), & \tau_I > t, \\ \Delta, & \tau_I \leq t, \end{cases} \quad \tau_I = \inf(t > 0: X_t \notin I),$$

де $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}_1, \ldots, \mathrm{Y}_\mathrm{l}, \mathrm{Z}_1, \ldots, \mathrm{Z}_\mathrm{n})$, задаються

$$
\begin{cases}
dX_t = v(X_t)dt + a(X_t)f(\mathrm{Y}_{1t}, \dots, \mathrm{Y}_{\mathrm{l}t}, \mathrm{Z}_{1t}, \dots, \mathrm{Z}_{\mathrm{n}t})dW_t^x, \\
dY_{jt} = \frac{1}{\epsilon_j}\alpha_j(Y_{jt})dt + \frac{1}{\sqrt{\epsilon_j}}\beta_j(Y_{jt})dW_t^{y_j}, \quad j = \overline{1,l}. \\
dZ_{it} = \delta_i c_i(Z_{it})dt + \sqrt{\delta_i} g_i(Z_{it})dW_t^{z_i}, \quad i = \overline{1,n}. \\
d(W^x, W^{y_j})_t = \rho_{xy_j}dt, \quad j = \overline{1,l}. \\
d(W^x, W^{z_i})_t = \rho_{xz_i}dt, \quad i = \overline{1,n}. \\
d(W^{y_j}, W^{z_i})_t = \rho_{y_j z_i}dt, \quad j = \overline{1,l}, \ i = \overline{1,n}. \\
d(W^{y_j}, W^{y_r})_t = \rho_{y_j y_r}dt, \quad j = \overline{1,l}, \ r = \overline{1,l}. \\
d(W^{z_i}, W^{z_k})_t = \rho_{z_i z_k}dt, \quad i = \overline{1,n}, \ k = \overline{1,n}. \\
(X, \mathrm{Y}_1, \dots, \mathrm{Y}_\mathrm{l}, \mathrm{Z}_1, \dots, \mathrm{Z}_\mathrm{n}) = (x, y_1, \dots y_l, z_1, \dots, z_n) \in E.
\end{cases}
$$

де $\rho_{y_j y_r} = 0, \ j \neq r, \ \rho_{z_i z_k} = 0, \ i \neq k \ \rho_{xy_j}, \rho_{xz_i}, \rho_{y_j z_i}$, задовольняють умову $\left|\rho_{xy_j}\right|, \left|\rho_{xz_i}\right|, \left|\rho_{y_j z_i}\right| \leq 1$, а кореляційні матриці виду:

$$
\begin{pmatrix}
1 & \rho_{xy_j} & \rho_{xz_i} \\
\rho_{y_j x} & 1 & \rho_{y_j z_i} \\
\rho_{z_i x} & \rho_{z_i y_j} & 1
\end{pmatrix}
$$

напівдодатно визначені, тобто

$$
1 + 2\rho_{xy_j}\rho_{xz_i}\rho_{y_j z_i} - \rho_{xy_j}{}^2 - \rho_{xz_i}{}^2 - \rho_{y_j z_i}{}^2 \geq 0, \ j = \overline{1,l}, \ \ i = \overline{1,n}.
$$

Процес X може репрезентувати багато економічних явищ, та процесів. Наприклад, величину запасів, ціну індексу, надійний короткий відсоток і т.д. Ще ширше, X це зовнішній фактор, який характеризує вартість будь-яких із згаданих вище процесів. Під фізичною мірою $\mathbb{P}$ процесу X, розуміють процес X, який має миттєвий дрейф $v(X_t)$ і стохастичну волатильність $a(X_t)f(\mathrm{Y}_{1t}, \dots, \mathrm{Y}_{\mathrm{l}t}, \mathrm{Z}_{1t}, \dots, \mathrm{Z}_{\mathrm{n}t}) > 0$, який містить обидві компоненти: локальну $a(X_t)$ і нелокальну $f(\mathrm{Y}_{1t}, \dots, \mathrm{Y}_{\mathrm{l}t}, \mathrm{Z}_{1t}, \dots, \mathrm{Z}_{\mathrm{n}t})$. Зауважимо, що нескінченно малі генератори (інфінітіземальні) для Y_j та Z_i мають вигляд $\forall\, i, j$

$$
\mathfrak{L}_{Y_j}^{\epsilon_j} = \frac{1}{\epsilon_j}\left(\frac{1}{2}\beta_j{}^2(y_j)\partial^2_{y_j y_j} + \alpha_j(y_j)\partial_{y_j}\right), \mathfrak{L}_{Z_i}^{\delta_i} = \delta_i\left(\frac{1}{2}g_i{}^2(z_i)\partial^2_{z_i z_i} + c_i(z_i)\partial_{z_i}\right),
$$

характеризуються величинами $\frac{1}{\epsilon_j}$ та δ_i відповідно. Таким чином, $\mathrm{Y}_1, \dots, \mathrm{Y}_\mathrm{l}$ та $\mathrm{Z}_1, \dots, \mathrm{Z}_\mathrm{n}$ мають внутрішню шкалу часу $\epsilon_j > 0$ і $\frac{1}{\delta_i} > 0$. Ми вважаємо $\epsilon_j << 1$ і $\delta_i << 1$, щоб внутрішня шкала часу Y_j була малою, а внутрішня шкала часу Z_i

великою. Отже, $Y_j, j = \overline{1, l}$, це швидко змінні фактори, а Z_i, $i = \overline{1, n}$ повільно змінні фактори. Зауважимо, що $\mathfrak{L}_{Y_j}^{\epsilon_j}$ та $\mathfrak{L}_{Z_i}^{\delta_i}$ мають форму виду

$$L = \frac{1}{2}a^2(x)\partial_{xx}^2 + b(x)\partial_x - k(x), \quad x \in (e_1, e_2), \text{ з } \; k(x) = 0$$

для всіх $x \in I$, є завжди самоспряженими в гільбертовому просторі $H = L^2(I, m)$, де $I \in R$ інтервал з кінцями e_1і e_2 та m– швидкість щільності дифузії. $\mathrm{Dom}(\mathfrak{L})\{f \in L^2(I, \mathfrak{m}): f, \partial_x f \in AC_{\mathrm{loc}}(I), \mathfrak{L}f L^2(I, \mathfrak{m}), BCs \textit{ на } e_1 \textit{ та } e_2\}$ де $AC_{\mathrm{loc}}(I)$ є простором функцій, абсолютно неперервних на кожному компактному підінтервалі I [10]. Крайові умови на e_1 та e_2 накладаються для вихідних, вхідних і регулярних меж.

Виклад основного матеріалу. Оцінимо похідний цінний папір, з виплатою в час $t > 0$, яка може залежати від траєкторії X. Зокрема, ми розглянемо форми виплати:

$$\text{Виплата} = H(X_t)\mathbb{I}_{(\tau > t)}.$$

де τ – випадковий момент часу, протягом якого є невиплата премії похідного активу. Оскільки нас цікавлять оцінки похідних ми повинні визначити динаміку $(X, \mathrm{Y}_1, \dots, \mathrm{Y}_l, \mathrm{Z}_1, \dots, \mathrm{Z}_n)$ під оцінкою міри при нейтральному ризику, який ми позначимо, як $\widetilde{\mathbb{P}}$. Маємо таку динаміку:

$$\begin{cases} dX_t = \big(b(X_t) - a(X_t)f(\mathrm{Y}_{1t}, \dots, \mathrm{Y}_{lt}, \mathrm{Z}_{1t}, \dots, \mathrm{Z}_{nt})\Omega(\mathrm{Y}_{1t}, \dots, \mathrm{Y}_{lt}, \mathrm{Z}_{1t}, \dots, \mathrm{Z}_{nt})\big)dt \\ \qquad + a(X_t)f(\mathrm{Y}_{1t}, \dots, \mathrm{Y}_{lt}, \mathrm{Z}_{1t}, \dots, \mathrm{Z}_{nt})d\widetilde{W}_t^x, \\ dY_{jt} = \left(\frac{1}{\epsilon_j}\alpha_j(Y_{jt}) - \frac{1}{\sqrt{\epsilon_j}}\beta_j(Y_{jt})\Lambda_j(\mathrm{Y}_{1t}, \dots, \mathrm{Y}_{lt}, \mathrm{Z}_{1t}, \dots, \mathrm{Z}_{nt})\right)dt + \frac{1}{\sqrt{\epsilon_j}}\beta_j(Y_{jt})d\widetilde{W}_t^{y_j}, \\ dZ_{it} = \left(\delta_i c_i(Z_{it}) - \sqrt{\delta_i}g_i(Z_{it})\Gamma_i(\mathrm{Y}_{1t}, \dots, \mathrm{Y}_{lt}, \mathrm{Z}_{1t}, \dots, \mathrm{Z}_{nt})\right)dt + \sqrt{\delta_i}g_i(Z_{it})d\widetilde{W}_t^{z_i}, \\ d\langle \widetilde{W}^x, \widetilde{W}^{y_j}\rangle_t = \rho_{xy_j}dt, \qquad j = \overline{1, l}. \\ d\langle \widetilde{W}^x, \widetilde{W}^{z_i}\rangle_t = \rho_{xz_i}dt, \qquad i = \overline{1, n}. \qquad (1) \\ d\langle \widetilde{W}^{y_j}, \widetilde{W}^{z_i}\rangle_t = \rho_{y_j z_i}dt, \quad j = \overline{1, l}, \;\; i = \overline{1, n}. \\ d\langle \widetilde{W}^{y_j}, \widetilde{W}^{y_r}\rangle_t = \rho_{y_j y_r}dt, \quad j = \overline{1, l}, \;\; r = \overline{1, l}. \\ d\langle \widetilde{W}^{z_i}, \widetilde{W}^{z_k}\rangle_t = \rho_{z_i z_k}dt, \quad i = \overline{1, n}, \;\; k = \overline{1, n}. \\ (X_0, \mathrm{Y}_{10}, \dots, \mathrm{Y}_{l0}, \mathrm{Z}_{10}, \dots, \mathrm{Z}_{n0}) = (x, y_{10}, \dots y_{l0}, z_{10}, \dots, z_{n0}) \in E, \end{cases}$$

де

$$d\widetilde{W}_t^x := dW_t^x + \left(\frac{v(X_t) - b(X_t)}{a(X_t)f(\mathrm{Y}_{1t}, \dots, \mathrm{Y}_{lt}, \mathrm{Z}_{1t}, \dots, \mathrm{Z}_{nt})} + \Omega(\mathrm{Y}_{1t}, \dots, \mathrm{Y}_{lt}, \mathrm{Z}_{1t}, \dots, \mathrm{Z}_{nt})\right)dt,$$

$$d\widetilde{W}_t^{y_j} := dW_t^{y_j} + \Lambda_j(\mathrm{Y}_{1t}, \dots, \mathrm{Y}_{\mathrm{lt}}, \mathrm{Z}_{1\mathrm{t}}, \dots, \mathrm{Z}_{\mathrm{nt}})dt,$$
$$d\widetilde{W}_t^{z_i} := dW_t^{z_i} + \Gamma_i(\mathrm{Y}_{1t}, \dots, \mathrm{Y}_{\mathrm{lt}}, \mathrm{Z}_{1\mathrm{t}}, \dots, \mathrm{Z}_{\mathrm{nt}})dt.$$

де $\rho_{y_j y_r} = 0,\ j \neq r,\ \rho_{z_i z_k} = 0,\ i \neq k.$

Накладаємо такі умови щоб система (1) мала єдиний сильний розв’язок.

Випадковий час τ є часом похідного активу. У нашому випадку, дефолт може відбутися одним із двох способів:

1) коли X виходить за інтервал I,

2) у випадковий час τ_h, яким керує рівень ризику $h(X_t) \geq 0$.

Це можна виразити наступним чином:

$$\begin{cases} \tau = \tau_I \wedge \tau_h, \\ \tau_I = inf\{t \geq 0 : X_t \notin I\}, \\ \tau_h = inf\left\{t \geq 0 : \int_0^t h(X_s)ds \geq \varepsilon(X, \mathrm{Y}_1, \dots, \mathrm{Y}_\mathrm{l}, \mathrm{Z}_1, \dots, \mathrm{Z}_\mathrm{n})\right\}, \\ \varepsilon \sim Exp(1) \perp\!\!\!\perp. \end{cases}$$

Зауважимо, що випадкова змінна ε незалежна від $(X, \mathrm{Y}_1, \dots, \mathrm{Y}_\mathrm{l}, \mathrm{Z}_1, \dots, \mathrm{Z}_\mathrm{n})$.

Щоб відстежувати τ_h, ми використаємо індикатор процесу: $D_t = \mathbb{I}_{\{t \geq \tau_h\}}$. де $\mathbb{D} = \{\mathfrak{D}_t, t \geq 0\}$, – фільтр породжений D та $\mathbb{F} = \{\mathfrak{F}_t, t \geq 0\}$ – фільтр генератора $(W^x, W^{y_1}, \dots W^{y_l}, W^{z_1}, \dots, W^{z_n})$. Використаємо фільтрацію $\mathbb{G} = \{\mathfrak{G}_t, t \geq 0\}$, де $\mathfrak{G}_t = \mathfrak{F}_t \vee \mathfrak{D}_t$. Зауважимо, що $(X, \mathrm{Y}_1, \dots, \mathrm{Y}_\mathrm{l}, \mathrm{Z}_1, \dots, \mathrm{Z}_\mathrm{n})$ пристосовані до $\mathbb{G}$ і τ – час зупинки $\left(\{\{\tau \leq t\}\} \in \mathfrak{G}_t \text{ для всіх } t \geq 0\right)$.

Вважатимемо, що наша економіка включає надійний актив, який росте миттєво на величину $r(X_t) \geq 0$. Тобто момент наприклад, "не платити дивіденди " чи продаж неплатіжного активу S, ціновий процес якого описується як $S_t = \mathbb{I}_{\{t \geq \tau_h\}} X_t$, де простір станів X, $I = (0, \infty)$, тоді ціна активу обчислюється за допомогою формули $\left\{e^{-\int_0^t r(X_s)ds} S_t, t \geq 0\right\}$, процес $(\widetilde{\mathbb{P}}, \mathbb{G})$ – є мартингальним. Величину мартингала знаходимо, підставляючи $b(X_t) = [r(X_t) + h(X_t)]X_t$ і $\Omega(\mathrm{Y}_1, \dots, \mathrm{Y}_\mathrm{l}, \mathrm{Z}_1, \dots, \mathrm{Z}_\mathrm{n}) = 0$ в (1). Рівень ризику $h(X_t)$ у відсотковій ставці $r(X_t)$ та в дрейфі X повинен дати компенсацію за можливість неплатежу [11]. З іншого боку, якщо X тільки описує надійний відсоток через $r(X_t)$, то при переході від фізичної міри $\mathbb{P}$ до оцінки вимірюють $\widetilde{\mathbb{P}}$, немає потреби змінювати дрейф від X до $v(X_t)$ або до $b(X_t)$. Однак, можна розглянути ефект включення ринкової ціни ризику. У цьому випадку можна підставити в (1) $b(X_t) = v(X_t)$, та $\Omega(\mathrm{Y}_1, \dots, \mathrm{Y}_\mathrm{l}, \mathrm{Z}_1, \dots, \mathrm{Z}_\mathrm{n}) \neq 0$.

Оцінимо похідний актив деякого виграшу (виплати), використовуючи нейтральний ризик ціноутворення і Марківський ланцюг X, ціна $u^{\overline{\epsilon},\overline{\delta'}}(t,x,y_1,\dots y_l,z_1,\dots,z_n)$ деяких похідних активів в початковий момент часу має вигляд:

$$u^{\overline{\epsilon},\overline{\delta'}}(t,x,y_1,\dots y_l,z_1,\dots,z_n) = \widetilde{\mathbb{E}}_{x,y_1,\dots y_l,z_1,\dots,z_n}\left[exp\left(-\int_0^t r(X_s)ds\right)H(X_t\mathbb{I}_{\{t>\tau\}})\right],$$

де $\overline{\epsilon}=(\epsilon_1,\dots,\epsilon_l)$, $\overline{\delta'}=(\delta_1,\dots,\delta_n)$, а $(x,y_1,\dots y_l,z_1,\dots,z_n)\in E$ є початкова точка процесу $(X,\mathrm{Y}_1,\dots,\mathrm{Y}_\mathrm{l},\mathrm{Z}_1,\dots,\mathrm{Z}_\mathrm{n})$. за допомогою формули Фейнмана-Каца, можна показати, що $u^{\overline{\epsilon},\overline{\delta'}}(t,x,y_1,\dots y_l,z_1,\dots,z_n)$ задовольняє наступній задачі Коші [10]:

$$\left(-\partial_t+\mathfrak{L}^{\overline{\epsilon},\overline{\delta'}}\right)u^{\overline{\epsilon},\overline{\delta'}}=0, \quad (y_1,\dots y_l,z_1,\dots,z_n)\in E, t\in\mathbb{R}^+, \tag{2}$$

$$u^{\overline{\epsilon},\overline{\delta'}}(0,x,y_1,\dots y_l,z_1,\dots,z_n) = H(x), \tag{3}$$

де оператор $\mathfrak{L}^{\overline{\epsilon},\overline{\delta'}}$ має вигляд:

$$\mathfrak{L}^{\overline{\epsilon},\overline{\delta'}}=\sum_{j=1}^{l}\frac{1}{\epsilon_j}\mathfrak{L}_{0j}+\sum_{j=1}^{l}\frac{1}{\sqrt{\epsilon_j}}\mathfrak{L}_{1j}+\mathfrak{L}_{2j}+\sum_{i,j}\sqrt{\frac{\delta_i}{\epsilon_j}}\mathfrak{M}_{3ij}+\sum_i\sqrt{\delta_i}\mathfrak{M}_{1i}+\sum_i\delta_i\mathfrak{M}_{2i}{}^{,}$$

$$\mathfrak{L}_{0j}=\frac{1}{2}\beta_j^2(y_j)\partial^2_{y_jy_j}+\alpha_j(y_j)\partial_{y_j}, \qquad j=\overline{1,l}.$$

$$\mathfrak{L}_{1j}=\beta_j(y_j)(\rho_{xy_j}a(x)f(y_1,\dots y_l,z_1,\dots,z_n)\partial_x-\Lambda_j(y_1,\dots y_l,z_1,\dots,z_n))\partial_{y_j},$$

$$\mathfrak{L}_{2j}=\frac{1}{2}a^2(x)f^2(y_1,\dots y_l,z_1,\dots,z_n)\partial^2_{xx}$$
$$+(b(x)-a(x)\Omega(y_1,\dots y_l,z_1,\dots,z_n)f(y_1,\dots y_l,z_1,\dots,z_n))\partial_x-k(x),$$

$$\mathfrak{M}_{3ij}=\rho_{xz_i}\beta_j(y_j)g_i(z_i)\partial^2_{y_jz_i},$$

$$\mathfrak{M}_{1i}=g_i(z_i)\left(\rho_{xz_i}a(x)f(y_1,\dots y_l,z_1,\dots,z_n)\partial_x-\Gamma_i(y_1,\dots y_l,z_1,\dots,z_n)\right)\partial_{z_i},$$

$$\mathfrak{M}_{2i}=\frac{1}{2}g_i^2(z_i)\partial^2_{z_iz_i}+c_i(z_i)\partial_{z_i}, \quad k(x)=r(x)+h(x), \quad \mathfrak{L}_{0j}=\mathfrak{L}^1_{Y_j}.$$

Ми припускаємо, що дифузія з інфінітіземальним генератором $\mathfrak{L}^1_{Y_j}$ має інваріантний розподіл П з щільністю $\pi_j(y_j)$.

$$\pi_j(y_j)=\frac{2}{\beta_j^2(y_j)}\exp\left\{\int_{y_{j0}}^{y_j}\frac{2\alpha_j(\theta)}{\beta_j^2(\theta)}d\theta\right\}, \quad \forall j=\overline{1,l}.$$

Крім початкової умови (3) функція $u^{\overline{\epsilon},\overline{\delta'}}(t,x,y_1,\dots y_l,z_1,\dots,z_n)$ повинна задовольняти на кінцях e_1 та e_2 інтервалу I крайові умови. Крайові умови в точках e_1 та e_2 належать області $\mathfrak{L}^{\overline{\epsilon},\overline{\delta'}}$ і будуть залежати від природи процесу X

на кінцях I та класифікуються як природні, вихідні, вхідні або регулярні [12]. Задача Коші (2)(3) для $(f, \alpha_1, \dots \alpha_l, \beta_1, \dots, \beta_n, \Lambda_1, \dots \Lambda_l, c_1, \dots, c_n, g_1, \dots g_n, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n)$ не має аналітичного розв'язку. Однак, для фіксованого $\overline{\delta'}$, умови, які містять $\overline{\epsilon}$ та відхиляються як завгодно мало в $\overline{\epsilon}$околі, що зумовлює сингулярні збурення. Для фіксованого ϵ_j умови, які містять δ_i є малими для деякого малого $\overline{\delta'}$ околу, що спричиняє регулярні збурення. Таким чином, $\overline{\epsilon}$-окіл та $\overline{\delta'}$-окіл дає початок об'єднаному сингулярно-регулярному збуренню $\mathcal{O}(1)$ оператора $\mathfrak{L}_2$. Для того щоб знайти асимптотичний розв'язок задачі Коші (2) (3) розвинемо $u^{\overline{\epsilon},\overline{\delta'}}$ за степенями $\sqrt{\epsilon_j}$ та $\sqrt{\delta_i}$ [13]:

$$u^{\overline{\epsilon},\overline{\delta'}} = \sum_{i_1 \geq 0} \dots \sum_{i_l \geq 0} \sum_{j_1 \geq 0} \dots \sum_{j_n \geq 0} \sqrt{\epsilon_1}^{j_1} \dots \sqrt{\epsilon_l}^{j_l} \sqrt{\delta_1}^{i_1} \dots \sqrt{\delta_n}^{i_n} u_{j_1,\dots,j_n,i_1,\dots i_l},$$

де

$$\sum_{i_1 \geq 0} \dots \sum_{i_l \geq 0} \sum_{j_1 \geq 0} \dots \sum_{j_n \geq 0} \sqrt{\epsilon_1}^{j_1} \dots \sqrt{\epsilon_l}^{j_l} \sqrt{\delta_1}^{i_1} \dots \sqrt{\delta_n}^{i_n} u_{j_1,\dots,j_n,i_1,\dots i_l} =$$

$$\lim \sum_{i_1 \geq 0}^{m_1} \dots \sum_{i_l \geq 0}^{m_l \geq 0} \sum_{j_1 \geq 0}^{m_{l+1} \geq 0} \dots \sum_{j_n \geq 0}^{m_{l+n}} \sqrt{\epsilon_1}^{j_1} \dots \sqrt{\epsilon_l}^{j_l} \sqrt{\delta_1}^{i_1} \dots \sqrt{\delta_n}^{i_n} u_{j_1,\dots,j_n,i_1,\dots i_l}, \quad m_1 \to \infty, \dots, m_{l+n} \to \infty.$$

Наближена ціна обчислюється

$$u^{\overline{\epsilon},\overline{\delta'}} \approx u_{\overline{0},\overline{0'}} + \sum_{j=1}^{l} \sqrt{\epsilon_j} u_{\overline{1_j},\overline{0'}} + \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\delta_i} u_{\overline{0},\overline{1'_i}}.$$

Вибір розвинення в напівцілих степенях ϵ_j та δ_i є природнім для $\mathfrak{L}^{\overline{\epsilon},\overline{\delta'}}$.

Проводячи аналіз сингулярних збурень на відповідних рівнях ми отримаємо, що $u_{\overline{0},\overline{0'}}$, $u_{\overline{1_j},\overline{0'}}$, $u_{\overline{0},\overline{1'_i}}$ не залежать від $y_1, \dots y_l$. Основні результати асимптотичного аналізу наведені за допомогою наступних формул

$$\mathcal{O}(1){:}\ \sum_{j=1} \mathfrak{L}_{0j} u_{\overline{2_j},\overline{0'}} + (-\partial_t + \langle \mathfrak{L}_2 \rangle) u_{\overline{0},\overline{0'}} = 0,\ u_{\overline{0},\overline{0'}}(0, x, z_1, \dots, z_n) = H(x), \quad (4)$$

$$\mathcal{O}\left(\sqrt{\epsilon_j}\right){:}\ \mathfrak{L}_{0j} u_{\overline{3_j},\overline{0'}} + \mathfrak{L}_{1j} u_{\overline{2_j},\overline{0'}} + (-\partial_t + \langle \mathfrak{L}_2 \rangle) u_{\overline{1_j},\overline{0'}} + \sum_{k \neq j} \mathfrak{L}_{1k} u_{\overline{1_{kj}},\overline{0'}} + \sum_{i \neq j} \mathfrak{L}_{1i} =$$

$$\mathcal{A}_j u_{\overline{0},\overline{0'}}, \quad u_{\overline{1_j},\overline{0'}}(0, x, z_1, \dots, z_n) = 0, \overline{1}_{kj} = \left(\underbrace{0, \dots 1}_{k}\ \underbrace{0,1,0, \dots .0}_{j} \right), \quad (5)$$

З аналізу регулярних збурень маємо

$$\mathcal{O}\left(\sqrt{\delta_i}\right){:}\ (-\partial_t + \langle \mathfrak{L}_2 \rangle) u_{\overline{0},\overline{1'_i}} = \mathcal{B}_i \partial_{z_i} u_{\overline{0},\overline{0'}}, \qquad u_{\overline{0},\overline{1'_i}}(0, x, z_1, \dots, z_n) = 0, i = \overline{1,n}. \quad (6)$$

Оператори $\langle \mathfrak{L}_2 \rangle$, $\mathcal{A}_j$, $\mathcal{B}_i$ та ∂_{z_i} визначені за формулами

$$\langle \mathfrak{L}_2\rangle = \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2 a^2(x)\partial^2_{xx} + \big(b(x) - \overline{f\Omega}a(x)\big)\partial_x - k(x), \quad x \in (e_1, e_2),$$

$\mathcal{A}_j = -\nu_{3j}a(x)\partial_x a^2(x)\partial^2_{xx} - \nu_{2j}a^2(x)\partial^2_{xx} - \mathcal{U}_{2j}a(x)\partial_x a(x)\partial_x - \mathcal{U}_{1j}a(x)\partial_x,$,

$\mathcal{B}_i = -\nu_{1i}a(x)\partial_x - \nu_{0i}$ та $\partial_{z_i} = \partial_{z_i}\bar{\sigma}\partial_{\bar{\sigma}} + \overline{f\Omega}'\partial_{\overline{f\Omega}}$, $\nu_{1i} := g_i\rho_{xz_i}\langle f\rangle$, $\nu_0 = g_i\langle\Gamma_i\rangle$, $\forall\, i = \overline{1,n}$ та нормою

$$\langle \mathcal{X}\rangle_j := \int \mathcal{X}(y_1, \dots y_l)\pi_j(y_j)dy_j, \quad \forall j = \overline{1,l},$$

$$\langle \mathcal{X}\rangle_{1,2} = \int_{R^2} \mathcal{X}(y_1, \dots y_l)\pi_1(y_1)\pi_2(y_2)dy_1dy_2, \cdots$$

$$\langle \mathcal{X}\rangle_{l-1,l} = \int_{R^l} \mathcal{X}(y_1, \dots y_l)\pi_1(y_1)\dots\pi_l(y_l)dy_1\dots dy_l,$$

$$\langle \mathcal{X}\rangle_{l-1,l} = \langle \mathcal{X}\rangle, \langle f\Omega\rangle := \overline{f\Omega}, \langle f^2\rangle = \bar{\sigma}^2.$$

Знайдемо розв’язки рівнянь (4)(6) на основі власних функцій, власних значень оператора $\langle \mathfrak{L}_2\rangle$, кожне з яких задовольняє відповідне рівняння Пуассона $\mathfrak{L}_{01}\varphi_1 = f^2 - \langle f^2\rangle_1$, $\mathfrak{L}_{02}\varphi_2 = \langle f^2\rangle_1 - \langle f^2\rangle_{1,2}, \dots, \mathfrak{L}_{0l}\varphi_l = \langle f^2\rangle_{l-2,l-1} - \langle f^2\rangle_{l-1,l}$.

$$\mathfrak{L}_{01}\eta_1 = f\Omega - \langle f\Omega\rangle_1, \dots, \mathfrak{L}_{0j}\eta_j = \langle f\Omega\rangle_{j-2,j-1} - \langle f\Omega\rangle_{j-1,j}, \dots, \mathfrak{L}_{0l}\eta_l = \langle f\Omega\rangle_{l-2,l-1} - \langle f\Omega\rangle_{l-1,l}$$

Теорема 1: Припустимо, що ми можемо розв’язати наступне рівняння для знаходження власного значення:

$$-\langle \mathfrak{L}_2\rangle\psi_n = \lambda_n\psi_n, \qquad \psi_n \in dom(\langle \mathfrak{L}_2\rangle),$$

а також що $H \in \mathcal{H}$. Тоді розв'язок $u_{\overline{0},\overline{0'}}$ має вигляд:

$$u_{\overline{0},\overline{0'}} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\psi_n T_n, \qquad c_n = (\psi_n, H), \qquad T_n = e^{-t\lambda_n}.$$

Теорема 2: Нехай c_n, ψ_n, T_n описуються за допомогою Теореми 1. визначимо

$$\mathcal{A}_{jk,n} := \big(\psi_k, \mathcal{A}_j\psi_n\big), \ U_{k,n} := \frac{T_k - T_n}{\lambda_k - \lambda_n}.$$

Тоді розв'язок $u_{\overline{1_j},\overline{0'}}$ рівняння (5) має вигляд:

$$u_{\overline{1_j},\overline{0'}} = \sum_n \sum_{k\neq n} c_n A_{jk,n}\,\psi_k U_{k,n} - \sum_n c_n \mathcal{A}_{jn,n}\psi_n t T_n.$$

Зауважимо, що $u_{\overline{1_j},\overline{0'}}$ є лінійним у групі параметрів $(\vartheta_{3j}, \vartheta_{2j}, \mathcal{u}_{2j}, \mathcal{u}_{1j})$.

Теорема 3: Нехай c_n, ψ_n і T_n визначені з теореми 1, а $U_{k,n}$ з теореми 2 то матимемо

$$\widetilde{\mathcal{B}}_{ik,n} := \big(\psi_k, \mathcal{B}_i\partial_{Z_i}\psi_n\big), \quad \mathcal{B}_{ik,n} := (\psi_k, \mathcal{B}_i\psi_n), \quad V_{ik,n} := \frac{T_k - T_n}{(\lambda_k - \lambda_n)^2} + \frac{tT_n}{\lambda_k - \lambda_n}.$$

Тоді розв'язок $u_{\overline{0},\overline{1'_i}}$ має вигляд:

$$u_{\overline{0},\overline{1'_i}} = \sum_n \sum_{k \neq n} c_n \widetilde{\mathcal{B}}_{ik,n} \psi_k U_{ik,n} - \sum_n c_n \widetilde{\mathcal{B}}_{in,n} \psi_n t T_n +$$
$$+ \sum_n \sum_{k \neq n} (\partial_{Z_i} c_n) \mathcal{B}_{ik,n} \psi_k U_{ik,n} - \sum_n (\partial_{Z_i} c_n) \mathcal{B}_{in,n} \psi_n t T_n$$
$$+ \sum_n \sum_{k \neq n} c_n \mathcal{B}_{ik,n} \psi_k (\partial_{Z_i} \lambda_n) V_{ik,n} - \sum_n c_n \mathcal{B}_{in,n} \psi_n (\partial_{Z_i} \lambda_n) \frac{1}{2} t^2 T_n.$$

Звернемо увагу на те, що $u_{\overline{0},\overline{1'_i}}$ є лінійним в $(\nu_{1i}\bar{\sigma}', \nu_{1i}\overline{f\Omega'}, \nu_{0i}\bar{\sigma}', \nu_{0i}\overline{f\Omega'})$.

Отримавши наближений розв'язок $u^{\bar{\epsilon},\bar{\delta'}} \approx u_{\overline{0},\overline{0'}} + \sum_{j=1}^{l} \sqrt{\epsilon_j} u_{\overline{1_j},\overline{0'}} + \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\delta_i} u_{\overline{0},\overline{1'_i}}$ для ціни похідного активу. Для більш точного результату припустимо, що Функція виплати $H(x)$ і всі її похідні є гладкими і обмеженими функціями, ясно що деякі види деривативів не підходять під таке припущення. Для доведення точності точність наближення цін на опціони [14]. Таким чином, ми обмежуємо наш аналіз деривативів гладкою і обмеженою виплатою, в цьому випадку точність оцінки ґрунтується на такій теоремі:

Теорема 4: Для фіксованих $(t, x, y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n)$ існує стала C така, що для будь-якого $\epsilon_j \leq 1$, $\delta_i \leq 1$ маємо:

$$\left| u^{\bar{\epsilon},\bar{\delta'}} - \left(u_{\overline{0},\overline{0'}} + \sum_{j=1}^{l} \sqrt{\epsilon_j} u_{\overline{1_j},\overline{0'}} + \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\delta_i} u_{\overline{0},\overline{1'_i}} \right) \right| \leq C\left(\sum_{j=1}^{l} \epsilon_j + \sum_{i=1}^{n} \delta_i\right).$$

Теорема 4 дає нам інформацію про те, як наближена ціна веде себе при $\epsilon_j \to 0$ і $\delta_i \to 0$.

Нехай X цінний папір без виплат дивідендів по активу (наприклад, акція, індекс тощо). Часто X моделюється як геометричний броунівський рух з сталою волатильністю (наприклад формула Блека-Шоулза). Розглянемо X – як модель геометричного броунівського руху з багатовимірною стохастичною волатильністю. Зокрема, $\widetilde{\mathbb{P}}$ динаміки в X задані:

$$dX_t = rX_t dt + f(\mathrm{Y}_1, \dots, \mathrm{Y}_l, \mathrm{Z}_1, \dots, \mathrm{Z}_n) X_t d\widetilde{W}_t^x, \; h(X_t) = 0,$$

Обчислимо наближену ціну подвійного бар'єрного опціону визначеного на X. Запишемо оператор $\langle \mathfrak{L}_2 \rangle$ і пов'язані з ним щільності зі швидкістю $m(x)$

$$\langle \mathfrak{L}_2 \rangle = \frac{1}{2} \bar{\sigma}^2 x^2 \partial_{xx}^2 + rx\partial_x - r, \; m(x) = \frac{2}{\bar{\sigma}^2 x^2} exp\left(\frac{2r}{\bar{\sigma}^2} \ln x\right). \qquad (7)$$

Для подвійного бар'єрного опціону з величиною бар'єрів L і R, виплата має вигляд:

$$H(X_t)\mathbb{I}_{\{\tau>t\}} = (X_t - K)^+\mathbb{I}_{\{\tau>t\}},\ I = (L,R),\ 0 < L < K < R,$$

Щоб обчислити значення цього параметра, ми повинні спочатку знайти власні значення оператора $\langle\mathfrak{L}_2\rangle$ подані в (7) з крайовими умовами

$$\lim_{x\to L}\psi_n(x) = 0,\ \lim_{x\to R}\psi_n(x) = 0.$$

Зауважимо, що ми ввели регулярний кілінг крайових умов на кінцях L і R. Рівняння $-\langle\mathfrak{L}_2\rangle\psi_n = \lambda_n\psi_n$, $\psi_n \in dom(\langle\mathfrak{L}_2\rangle)$ із зазначеним вище крайовими умовами можна знайти в (Лінецький (Linetsky (2007)) [10].

$$\psi_n(x) = \frac{\bar{\sigma}\sqrt{x}}{\sqrt{\ln\left(\frac{R}{L}\right)}}\exp\left(\frac{-r}{\bar{\sigma}^2}\ln x\right) sin\left(\frac{n\pi\ln\left(\frac{x}{L}\right)}{\ln\left(\frac{R}{L}\right)}\right),\qquad n = 1,2,3,\ldots,$$

$$\lambda_n = \frac{1}{2}\left(\frac{n\pi\bar{\sigma}}{\ln(\frac{R}{L})}\right)^2 + \left(\frac{\nu^2}{2} + r\right),\qquad \nu = \frac{r}{\bar{\sigma}} - \frac{\bar{\sigma}}{2}.$$

Запишемо вирази для операторів $\mathcal{A}_j$ та $\mathcal{B}_i$

$$\mathcal{A}_j = -\vartheta_{3j}x\partial_x x^2\partial^2_{xx} - \vartheta_{2j}x^2\partial^2_{xx},\ \mathcal{B}_i = -\vartheta_{1i}x\partial_x - \vartheta_{0i}. \qquad (8)$$

На основі (5) обчислимо $\mathcal{A}_{jk,n}$, $\mathcal{B}_{ik,n}$ і $\widetilde{\mathcal{B}}_{ik,n}$. Для $k \neq n$ ми знайдемо

$$\mathcal{A}j_{k,n} = -\vartheta_{3j}\left(\frac{(-1+(-1)^{k+n})kn(4n^2\pi^2\bar{\sigma}^4+(-12r^2+4r\bar{\sigma}^2+\bar{\sigma}^4)\ln^2(\frac{R}{L}))}{2(k^2-n^2)\bar{\sigma}^4\ln^3(\frac{R}{L})}\right) - \vartheta_{2j}\left(\frac{(-1+(-1)^{k+n})knr}{(k^2-n^2)\bar{\sigma}^2\ln\left(\frac{R}{L}\right)}\right),$$

$$\mathcal{B}_{ik,n} = \vartheta_{i1}\frac{2(-1+(-1)^{k+n})kn}{(k-n)(k+n)\ln\left(\frac{R}{L}\right)},$$

$$\widetilde{\mathcal{B}}_{ik,n} = -\vartheta_{1i}\bar{\sigma}'(\Upsilon_{k,n}) - \vartheta_{i0}\bar{\sigma}'\left(\frac{8(-1+(-1)^{k+n})knr\ln\left(\frac{R}{L}\right)}{(k^2-n^2)^2\pi^2\bar{\sigma}^3}\right),$$

$$v_{k,n} := \frac{4nkr(\ln(L)-(-1)^{k+n}\ln(R))}{(k^2-n^2)\bar{\sigma}^3\ln\left(\frac{R}{L}\right)} -$$

$$\frac{2(-1+(-1)^{k+n})kn\left((k-n)(k+n)\pi^2\bar{\sigma}^4-2r(-2r+\bar{\sigma}^2)\ln^2\left(\frac{R}{L}\right)\right)}{(k^2-n^2)^2\pi^2\bar{\sigma}^5\ln\left(\frac{R}{L}\right)}$$

і для $k = n$ ми знайдемо

$$\mathcal{A}_{jn,n} = -\vartheta_{3j}\left(\frac{1}{\bar{\sigma}^3}\left(\frac{3n^2\pi^2\nu}{\ln^2\left(\frac{R}{L}\right)} - \nu^3\right) - \frac{1}{\bar{\sigma}^2}\left(\nu^2 - \frac{n^2\pi^2}{\ln^2\left(\frac{R}{L}\right)}\right) - \vartheta_{j2}\left(\frac{1}{\bar{\sigma}^2}\left(\nu^2 - \frac{n^2\pi^2}{\ln^2\left(\frac{R}{L}\right)}\right) + \frac{\nu}{\bar{\sigma}}\right)\right),$$

$$\mathcal{B}_{in,n} = \vartheta_{i1}\left(\frac{2r - \bar{\sigma}^2}{2\bar{\sigma}^2}\right) - \vartheta_{i0},$$

$$\widetilde{\mathcal{B}}_{in,n} = -\vartheta_{i1}\bar{\sigma}'\left(\frac{1}{\bar{\sigma}} - \frac{r\nu\left(\ln^2(R) - \ln^2(L)\right)}{\bar{\sigma}^4 \ln\left(\frac{R}{L}\right)}\right) - \vartheta_{i0}\bar{\sigma}'\left(\frac{1}{\bar{\sigma}} - \frac{r\left(\ln^2(R) - \ln^2(L)\right)}{\bar{\sigma}^3 \ln\left(\frac{R}{L}\right)}\right).$$

Розрахунок c_n можна знайти в [10]

$$c_n = (\psi_{\text{т}}(\cdot), (\cdot - K)^+) = \frac{L^{\frac{\nu}{\bar{\sigma}}}}{\log\left(\frac{R}{L}\right)}\left(L\Phi_n(\nu + \bar{\sigma}) - K\Phi_n(\nu)\right),$$

$$\Phi_n(\gamma) \coloneqq \frac{2}{\omega_n^2 + z^2}(\exp(\mathfrak{K}\gamma)\,(\omega_n\cos(\omega_n\mathfrak{K}) - \gamma sin(\omega_n\mathfrak{K}) - \exp(\mathfrak{U}\gamma)\,(-1)^n\omega_n),$$

$$\omega_n \coloneqq \frac{n\pi}{\mathfrak{U}},\ \ \mathfrak{K}: = \frac{1}{\bar{\sigma}}\ln\left(\frac{K}{L}\right),\quad \mathfrak{U} \coloneqq \frac{1}{\bar{\sigma}}\ln\left(\frac{R}{L}\right).$$

Наближену ціну опціонів можна обчислити за допомогою теорем 1 3.

Зауважимо, що рисунки будуються покомпонентно в кожній відповідній часовій шкалі, аналогічно як для двох компонент як в роботах [9] та [13].

Висновки. Ця стаття розвиває загальний метод отримання орієнтовної ціни для широкого класу цінних паперів. Виплати за деривативами можуть бути шляхозалежними, а процес, що лежить їхній основі може проявляти стрибок. Інтенсивність стрибка залежить від багатовимірної волатильності. розроблено загальну теорію оцінювання деривативів, які породжуються дифузійними процесами, де дифузія залежить від двох груп змінних факторів. Наведено алгоритм обчислення наближеної ціни. Встановлено точність оцінок. Розроблену теорію застосовано до дифузійного оператора ОрнштейнаУленбека, який розкладено по власних функціях та власних значеннях.

Основною перевагою нашої методології ціноутворення є те, що, комбінуючи методи з спектральної теорії, регулярної теорії збурень і теорії сингулярних збурень зводимо все до розв’язання рівнянь на знаходження власних функцій та власних значень.

Перспективи подальших досліджень. Перспективами подальших досліджень у даному напрямі є вдосконалення спектральної теорії та поширення результатів статті на випадки оцінювання деривативів, які породжуються дифузійними процесами, де дифузія залежить від багатьох груп змінних факторів

Література

1. McKean, H. P (1956). Elementary solutions for certain parabolic partial differential equations. Transactions of the American Mathematical Society 82(2), pp. 519–548.

2. Goldstein R S. and Keirstead W. P. (1997). On the term structure of interest rates in the presenceof reflecting and absorbing boundaries, SSRN eLibrary, pp. 381–395.

3. Pelsser A. (2000). Pricing double barrier options using laplace transforms, Finance and Stochastics, 4 pp. 95–104.

4. Davydov D. and Linetsky V. (2001). Structuring, pricing and hedging double-barrier step options, Journal of Computational Finance, 5, pp. 55–88.

5. Fouque J.-P., Papanicolaou G., and Sircar R. (2000). Derivatives in Financial Markets with Stochastic Volatility, Cambridge University Press.

6. Gatheral J. (2006). The Volatility Surface: a Practitioner's Guide, John Wiley and Sons, Inc.

7. Mendoza-Arriaga, R., Carr P., and Linetsky V. (2010). Time-changed markov processes in unified credit-equity modeling. Mathematical Finance 20, 527–569.

8. Fouque, J.-P., S. Jaimungal, and Lorig M. (2011). Spectral decomposition of option prices in fast mean-reverting stochastic volatility models. SIAM Journal on Financial Mathematics.

9. Lorig M. J. (2014) Pricing Derivatives on Multiscale Diffusions: an Eigenfunction Expansion Approach. Mathematical Finance **24**:2, 331–363.

10. Linetsky, V. (2007). Chapter 6 spectral methods in derivatives pricing. In J. R. Birge and V. Linetsky (Eds.), Financial Engineering, Volume 15 of Handbooks in Operations Research and Management Science, pp. 223–299. Elsevier.

11. Carr, P. and V. Linetsky (2006). A jump to default extended cev model: An application of bessel processes. Finance and Stochastics 10(3), 303–330.

12. Borodin A. and P. Salminen (2002). Handbook of Brownian motion: facts and formulae. Birkhauser.

13. Burtnyak, I.V. & Malytska, A.P. (2014). Research of Ornstein-Uhlenbeck Process Using the Spectral Analysis Methods, Problems of Economics,. 2, 49–356.

14. Fouque, J.-P., G. Papanicolaou, R. Sircar, and K. Solna (2003). Singular perturbations in option pricing. SIAM J. Applied Mathematics 63(5), 1648–1665.

References

1. McKean, H. P (1956). Elementary solutions for certain parabolic partial differential equations. Transactions of the American Mathematical Society 82(2), pp. 519–548.

2. Goldstein R S. and Keirstead W. P. (1997). On the term structure of interest rates in the presenceof reflecting and absorbing boundaries, SSRN eLibrary, pp. 381–395.

3. Pelsser A. (2000). Pricing double barrier options using laplace transforms, Finance and Stochastics, 4 pp. 95–104.

4. Davydov D. and Linetsky V. (2001). Structuring, pricing and hedging double-barrier step options, Journal of Computational Finance, 5, pp. 55–88.

5. Fouque J.-P., Papanicolaou G., and Sircar R. (2000). Derivatives in Financial Markets with Stochastic Volatility, Cambridge University Press.

6. Gatheral J. (2006). The Volatility Surface: a Practitioner's Guide, John Wiley and Sons, Inc.

7. Mendoza-Arriaga, R., Carr P., and Linetsky V. (2010). Time-changed markov processes in unified credit-equity modeling. Mathematical Finance 20, 527–569.

8. Fouque, J.-P., S. Jaimungal, and Lorig M. (2011). Spectral decomposition of option prices in fast mean-reverting stochastic volatility models. SIAM Journal on Financial Mathematics.

9. Lorig M. J. (2014) Pricing Derivatives on Multiscale Diffusions: an Eigenfunction Expansion Approach. Mathematical Finance **24**:2, 331–363.

10. Linetsky, V. (2007). Chapter 6 spectral methods in derivatives pricing. In J. R. Birge and V. Linetsky (Eds.), Financial Engineering, Volume 15 of Handbooks in Operations Research and Management Science, pp. 223–299. Elsevier.

11. Carr, P. and V. Linetsky (2006). A jump to default extended cev model: An application of bessel processes. Finance and Stochastics 10(3), 303–330.

12. Borodin A. and P. Salminen (2002). Handbook of Brownian motion: facts and formulae. Birkhauser.

13. Burtnyak, I.V. & Malytska, A.P. (2014). Research of Ornstein-Uhlenbeck Process Using the Spectral Analysis Methods, Problems of Economics,. 2, 49–356.

14. Fouque, J.-P., G. Papanicolaou, R. Sircar, and K. Solna (2003). Singular perturbations in option pricing. SIAM J. Applied Mathematics 63(5), 1648–1665.