УДК 519.86

І.В. БУРТНЯК, Г. П. МАЛИЦЬКА
ДВНЗ «Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника»

МОДЕЛЮВАННЯ ВОЛАТИЛЬНОСТІ ДЛЯ ІНДЕКСУ ПФТС ЗА ДОПОМОГОЮ УЗАГАЛЬНЕНОЇ МОДЕЛІ ГОБСОНА-РОДЖЕРСА

Метою даної статті є використання моделі волатильності із залежністю від минулих цін на активи тобто запропоноване узагальнення моделі Гобсона-Роджерса. Моделі зі змінною волатильністю характеризуються з двох аспектів, а саме з одного боку, щоб отримати ціну звичайного опціону, яка узгоджена з розглянутими якостями змінної, а з іншого боку, щоб обрати правильний варіант стратегії для підвищення продуктивності хеджування. Розглянуто ідею гнучкої схеми зважування, що відповідає скінченому горизонту часу в минулому. Запропонована модель має унікальну перевагу над іншими при встановленні цін на похідні активи.

Ключові слова: модель Гобсона-Роджерса, броунівський рух, базовий актив, волатильність, процес Іто, стохастичне диференціальне рівняння, ПФТС індекс.

I.V. BURTNYAK, H.P. MALYTSKA
Vasyl Stefanyk Precarpathian National University

MODELING VOLATILITY FOR THE INDEX PFTS THROUGH GENERALIZED MODELS HOBSON-ROGERS

The purpose of this article is to use the volatility model with dependence from past asset prices that the proposed model generalization Hobson-Rogers. Models with variable volatility characterized by two aspects, namely, on the one hand to get the price of conventional option, which is consistent with the considered a variable, on the other hand, to select the correct strategies to improve performance hedging. Considered idea flexible circuit weighing corresponding finite the time horizon of the past. The proposed model has a unique advantage over others in determining the price of derivatives assets.

Keywords: model Hobson-Rogers, Brownian motion, underlying asset, volatility process Ito, stochastic differential equation, PFTS index.

Постановка проблеми. Формування цін на опціони за допомогою моделі Блека-Шоулза ґрунтується на тому, що базовий актив моделюється як геометричний броунівський рух, динаміка якого під нейтральною межею ризику задається як

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t. \qquad (1)$$

де r – локальна безризикова відсоткова ставка, яка трактувється як випадковий процес, а σ – волатильність тобто міра невизначеності щодо вартості майбутніх грошових потоків. Припустимо, що обидва параметри є константами, то модель (1) визначає формули для простих опціонів.

Модель Блека-Шоулза припускає, що ціни на акції підлягають випадковому блуканню. Це означає, що в короткостроковий період розподіл змін цін на акції має характер нормального розподілу. З цього випливає, що для будь-якої точки в майбутньому ціни на акції мають логарифмічно-нормальний розподіл, їх можна моделювати випадковим (стохастичним) процесом Іто.

У моделі місцевої змінної змінна є детермінованою функцією часу та поточної ціни базового активу. Основні переваги в тому, що ринок є повним і в принципі можливо точно визначити функцію змінної таким способом, щоб ціни опціонів узгоджувалися з ринковими цінами.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Перші результати в цьому напрямку були отримані Гобсоном і Роджерсом, які запропонували в 1998 році модель змінної визначити як різницю між поточною ціною і середнім зваженим показником минулих цін.

На практиці припускають, що ціни на купівлю та продаж опціонів задані в термінах так званої умовної змінної. Проте ціни, за якими продаються деривативи, неузгоджені з припущенням про сталу волатильність, сильні емпіричні докази стохастичного характеру волатильності стимулювали розвиток більш реалістичних моделей. Основна мета моделей зі змінною волатильністю складається з двох аспектів: з одного боку, щоб отримати ціну звичайного опціону, яка узгоджена з розглянутими якостями змінної, а з іншого боку, щоб обрати правильний варіант стратегії для підвищення продуктивності хеджування. З теоретичної точки зору, це не важко досягти, бо будь-яка модель, яка залежить від великої кількості параметрів може бути відкалібрована, щоб відповідати ринковим цінам. Слід підкреслити, що процедура калібрування залежить від кількості і якості наявних даних.

Постановка цілей. Для броунівського руху W позначимо через S_t біржову ціну, а через M_t і D_t відповідно тенденції і відхилення процесів, визначених як

$$M_t = \lambda e^{-\lambda t}\int_{-\infty}^{t} e^{\lambda s} Z_S ds, \quad \lambda > 0, \quad D_t = Z_t - M_t, \tag{2}$$

де $Z_t = \log\left(e^{-rt}S_t\right)$ є логарифмом дисконтної ціни процесу. Функції $e^{\lambda s}$ в (2) є ваги, а параметр λ описує ставку, за якою знижуються ціни.

Гобсон і Роджерс припускають, що S_t є процесом Іто, розв'язком стохастичного диференціального рівняння

$$dS_t = \mu\left(D_t\right)S_t dt + \sigma\left(D_t\right)S_t dW_t, \tag{3}$$

де μ і $\sigma > 0$ є обмеженими функціями, які задовольняють сформульовані гіпотези, з тим щоб гарантувати, що система (2)–(3) має розв'язок. Ключовою особливістю моделі є те, що процес $\left(S_t,\, D_t\right)$ марківський. Таким чином, ціна U опціону з терміном погашення T, має вигляд

$$U\left(S_t, t\right) = e^{-r(T-t)}Ku\left(r\left(T-t\right) + \log\left(S_t / K\right),\ M_t - \log K,\, T-t\right),$$

де K – початкова ціна опціону, $u = u\left(x, y, t\right)$ є розв'язком задачі Коші

$$\frac{\sigma^2\left(x-y\right)}{2}\left(\partial_{xx}u - \partial_x u\right) + \left(x-y\right)\lambda\partial_y u - \partial_t u, \quad \text{в } R^2 \times \left[0, T\right], \tag{4}$$

$$u\left(x, y, 0\right) = \left(e^x - 1\right)^+ \quad \text{при } \left(x, y\right) \in R^2. \tag{5}$$

Шляхозалежні моделі ґрунтуються на емпіричному доведенні про залежність змінності по відношенню до відхилення.

Виклад основного матеріалу. На рис. 1 наведено імпліковану змінність проти скоригованої логарифмічної грошової поверхні для опціонів значень індексу ПФТС протягом 2015 року. Зауважимо, що середня вага $\lambda e^{-\lambda t}$ в (2) не може бути достатньо гнучкою, щоб врахувати абсолютно всі особливості процесу, що можуть виникнути, наприклад через злиття акцій чи зміни капіталізації. Рис. 2 репрезентує еволюцію значень імплікованої змінності для індексу ПФТС. Досліджувані змінні згруповані по областях значень D_t, видно, що їхнє значення зростає при зменшенні D_t. Це добре висвітлює співвідношення між змінною та ринковими цінами.

Слабкою стороною моделі Гобсона-Роджерса є те, що багато проблем математичного і економічного характеру виникають з визначення відхилення процесу D_t, бо він включає в себе шлях базового активу за все минуле, тобто на проміжку $\left(-\infty,\, T\right]$. Вимога безмежного періоду часу в минулому, очевидно ставить практичні проблеми, оскільки тільки скінчені проміжки часу є наявними, тож відсутність даних в моделі неминуча. Щоб подолати цю проблему запропоновано узагальнення моделі Гобсона-Роджерса, тобто введена до розгляду нова модель для цін активів зі змінною залежною від минулого.

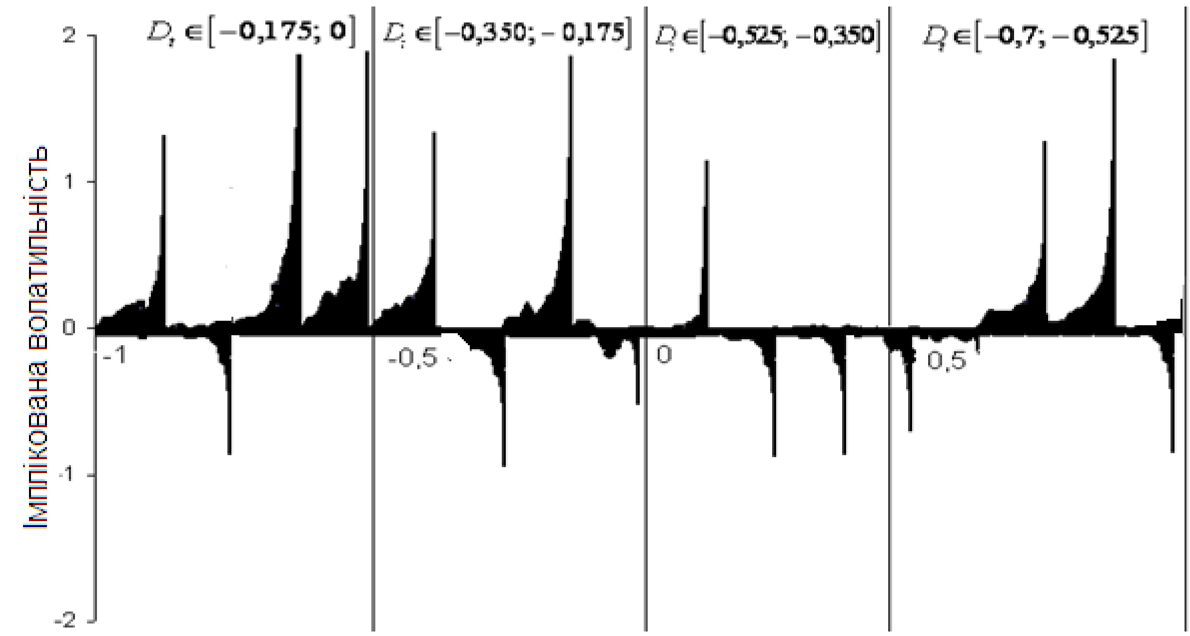

Рис. 1. Значення імплікованої волатильності для індексу ПФТС в 2015 році

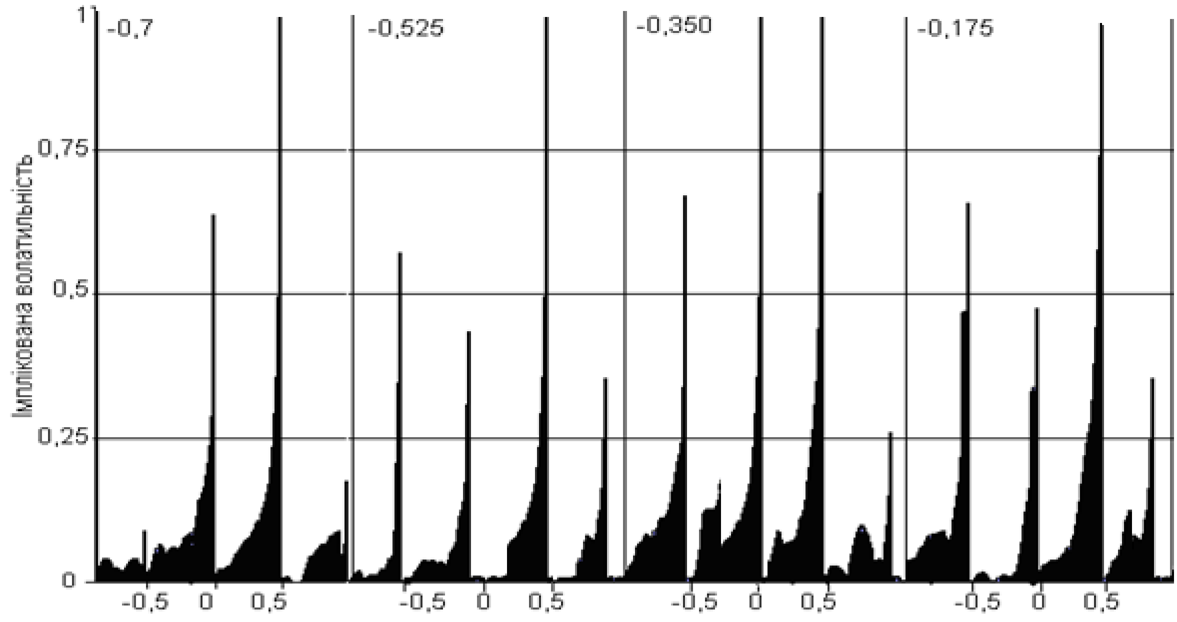

Рис. 2. Еволюція значень імплікованої волатильності для індексу ПФТС в 2015 році

Розглянемо середню вагу φ, яка є невід'ємною, кусково-неперервною і інтегровною функцією на $(-\infty, T]$ і строго додатною на $[0, T]$, отримаємо

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^{t} \varphi(s) ds. \qquad (6)$$

Відзначимо, що якщо φ має компактний носій, то в цьому випадку область інтегрування в (6) обмежена. Позначимо через r безризикову ставку і $B_t = e^{rt}$. Визначимо процес

$$M_t = \frac{1}{\Phi(t)} \int_{-\infty}^{t} \varphi(s) Z_s ds \text{, або еквівалентно } dM_t = \frac{\varphi(t)}{\Phi(t)} (Z_t - M_t) dt, \quad (7)$$

де Z_t є розв'язком диференціального рівняння

$$dZ_t = \mu(Z_t - M_t)dt + \sigma(Z_t - M_t)dW_t, \quad (8)$$

а μ і σ обмежені неперервні за Гельдером функції та σ є строго додатною функцією. Основна ідея полягає в розгляді більш гнучкого відхилення процесу визначеного в термінах загальної середньої ваги, що можливо співвідноситься з скінченим періодом часу. При цих припущеннях відомо, що диференціальне рівняння (8), з урахуванням (7), має єдиний слабкий розв'язок і при цьому $(Z, M), (Z, D)$ є процесами Маркова. Типові характеристики середньої ваги даються на таких прикладах:

1) $\varphi(t) = e^{P(t)} \max\{Q(t), 0\}$ де $P(t),\ Q(t)$ є поліноміальними функціями, зокрема $P(t) = \lambda t$ і $Q(t) = 1$;

2) $\varphi(t) = 1$ для $t \in [0, T]$ і $\varphi(t) = 0$ для $t \notin [0, T]$, це відповідає середньому геометричному азійського опціону;

3) $\varphi(t)$ – кусково-лінійна функція – найбільш загальний випадок.

Проаналізувавши рис. 2, можемо зробити висновок, що значення імплікованої волатильності зростає при зменшенні D_t. Це означає, що існує тісний взаємозв'язок між змінною та ринковими цінами.

Використовуючи модель шляхо-залежної волатильності побудовано тренд D_t і за його значеннями, знайдено волатильність індексу ПФТС, результати розрахунку наведено на рис. 3. Найкраще репрезентує даний процес квадратична модель $\sigma = a + bD_t + cD_t^2$ де $\lambda = 10$, $\tau = 0{,}5$, $N = 2000$, оцінки одержані з точністю до 0,95.

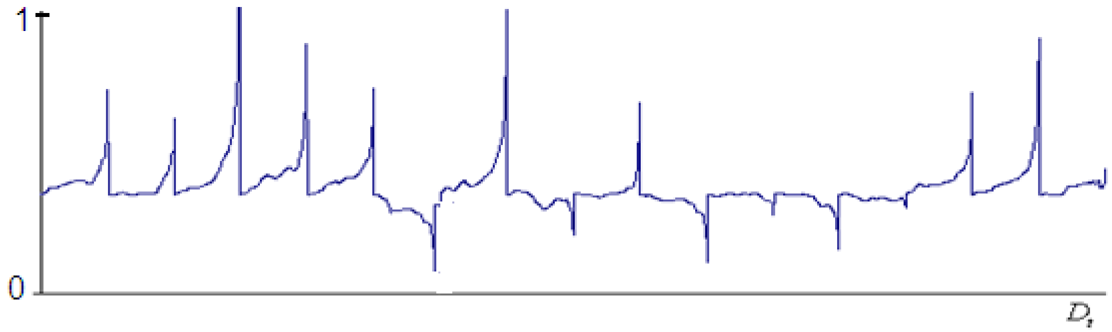

Рис. 3. Тренд волатильності індексу ПФТС в 2015 знайдений на основі квадратичної моделі

Висновки. Шляхозалежна волатильність володіє минулою інформацією та дозволяє моделювати поведінку інвесторів в різних ринкових умовах, а також відображає позитивні або негативні тенденції активу. На відміну від стандартних локальних або стохастичних моделей волатильності, у випадку раптового падіння ринку, шляхозалежна модель волатильності призначена для автоматичного підвищення рівня волатильності з метою дослідження динаміки ринку тобто не потрібно постійно калібрувати змінність. Модель має значне застосування і користується попитом серед учасників ринку.

Перспективи подальших досліджень. Перспективами подальших досліджень у даному напрямі є покращення моделей і методів поведінки інвесторів в різних ринкових умовах, а також мінімізувати відхилення процесу D_t.

Література

1. Black F , and M. Scholes, 1973, The pricing of options and corporate liabilities, *Journal of Political Economy* 81, 637-659.

2. Hobson D. G., L. C. G. Rogers, 1998, Complete models with stochastic volatility, *Mathematical Finance* 8, 27-48.

3. Tompkins R. G., 2001, Stock index futures markets: Stochastic volatility models and smiles, *Journal of Future Markets* 21, 43-78.

4. Буртняк І.В., Малицька Г.П. Дослідження волатильності за допомогою модифікації моделі Блека–Шоулза // Бизнес Информ. – 2011. – №(5)1. – С. 72–75.

5. Буртняк І.В., Малицька Г.П. Застосування моделі Гобсона-Роджерса для дослідження індексу ПФТС // Зб.наук.праць ,,Моделювання регіональної економіки”. – Івано-Франківськ : 2011. –№2(18). – С. 13–19.

6. Буртняк І.В., Малицька Г.П. Модель шляхозалежної волатильності для індексу ПФТС // Бизнес Информ. – 2012. – №3. – С. 48–50.

7. Буртняк І.В., Малицька Г.П. Обчислення цін опціонів методами спектрального аналізу // Бизнес Информ. – 2013. – №4. – С. 152–158.

8. Буртняк І.В., Малицька Г.П. Дослідження процесу Орнштейна–Уленбека методами спектрального аналізу // Проблеми економіки. – 2014. – №2. – С. 349–356.

References

1. Black F , and M. Scholes, 1973, The pricing of options and corporate liabilities, *Journal of Political Economy* 81, 637-659.

2. Hobson D. G., L. C. G. Rogers, 1998, Complete models with stochastic volatility, Mathematical Finance 8, 27-48.

3. Tompkins R. G., 2001, Stock index futures markets: Stochastic volatility models and smiles, Journal of Future Markets 21, 43-78.

4. Burtnyak I.V, Malytska G.P. Research volatility using modified Black-Scholes model // Business Inform. - 2011. - № (5) 1. - P. 72-75.

5. Burtnyak I.V, Malytska G.P. Application Hobson-Rogers model for the study of the PFTS index // Zb.nauk.prats ,, modeling the regional economy. " - Ivano-Frankivsk: 2011. -№2(18). - P. 13-19.

6. Burtnyak I.V, Malytska G.P. Model shlyahozalezhnoyi volatility for the index PFTS // Business Inform. - 2012. - №3. - P. 48-50.

7. Burtnyak I.V, Malytska G.P. The calculation of option prices spectral analysis methods // Business Inform. - 2013. - №4. - S. 152-158.

8. Burtnyak I.V, Malytska G.P. Investigation of Ornstein-Uhlenbeck methods of spectral analysis // Problems of Economics. - 2014. - №2. - S. 349-356.