ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 19. Выпуск 2

УДК 511.176 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-2-56-66

О некоторых фибономиальных тождествах

Гой Тарас Петрович — доцент кафедры дифференциальных уравнений и прикладной математики, Прикарпатский национальный университет имени Василия Стефаныка (Украина).
e-mail: tarasgoy@yahoo.com

Аннотация

Фибиномиальное тождество — это тождество, сочетающее числа Фибоначчи с биномиальными или мультиномиальными коэффициентами. В этой статье для получение новых фибиномиальных тождеств мы используем семейства определителей и перманентов нижних матриц Хессенберга специального вида (так называемых матриц Теплица-Хессенберга, т.е. матриц порядка $n \times n$ вида $H_n = (h_{ij})$, где $h_{ij} = 0$ для всех $j > i+1$, $h_{ij} = a_{i-j+1}$ и $a_{i,i+1} = 2$), элементами которых являются числа Фибоначчи F_n с последовательными, четными и нечетными индексами.

Полученные формулы для детерминантов и перманентов могут быть записаны как тождества, включающие суммы произведений чисел Фибоначчи и мультиномиальные коэффициенты. Например, для всех $n \geq 1$ имеет место тождество

$$\sum_{s_1+2s_2+\cdots+ns_n=n} (-1)^{s_1+\cdots+s_n} \binom{s_1+\cdots+s_n}{s_1,\ldots,s_n} \left(\frac{F_2}{2}\right)^{s_1} \left(\frac{F_4}{2}\right)^{s_2} \cdots \left(\frac{F_{2n}}{2}\right)^{s_n} = \frac{1-4^n}{3\cdot 2^n},$$

где $\binom{s_1+\cdots+s_n}{s_1,\ldots,s_n} = \frac{(s_1+\cdots+s_n)!}{s_1!\cdots s_n!}$ – мультиномиальный коэффмцмент, а суммирование производится по всем целым $s_i \geq 0$, удовлетворяющих уравнению $s_1+2s_2+\cdots+ns_n = n$.

Использование определителей матриц Теплица-Гессенберга позволило нам, в частности, получить формулы, устанавливающие связь между числами Фибоначчи и числами Якобсталя, Пелля, Пелля-Люка.

Ключевые слова: последовательность Фибоначчи, фибиномиальное тождество, последовательность Якобсталя, последовательность Пелля, последовательность Пелля-Люка, матрица Хессенберга, матрица Теплица-Хессенберга, мультиномиальный коэффициент.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:
Т. П. Гой. О некоторых фибиномиальных тождествах // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 2, с. 56–66.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 19. No. 2

UDC 511.176 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-2-56-66

On some fibinomial identities

Goy Taras Petrovich — associate professor of differential equations and applied mathematics department, Vasyl Stefanyk Precarpathian National University (Ukraine).
e-mail: tarasgoy@yahoo.com

Abstract

Fibinomial identity is identity that combine Fibonacci numbers and binomial or multinomial coefficients. In this paper, for obtaining new fibinomial identities we consider determinants and permanents for some families of lower Toeplitz–Hessenberg matrices $H_n = (h_{ij})$, where $h_{ij} = 0$ for all $j > i+1$, $h_{ij} = a_{i-j+1}$, and $a_{i,i+1} = 2$, having various translates of the Fibonacci numbers F_n for the nonzero entries.

These determinant and permanent formulas may also be rewritten as identities involving sums of products of Fibonacci numbers and multinomial coefficients. For example, for $n \geq 1$, the following formula holds

$$\sum_{s_1+2s_2+\cdots+ns_n=n} (-1)^{s_1+\cdots+s_n} \binom{s_1+\cdots+s_n}{s_1,\ldots,s_n} \left(\frac{F_2}{2}\right)^{s_1} \left(\frac{F_4}{2}\right)^{s_2} \cdots \left(\frac{F_{2n}}{2}\right)^{s_n} = \frac{1-4^n}{3\cdot 2^n},$$

where $\binom{s_1+\cdots+s_n}{s_1,\ldots,s_n} = \frac{(s_1+\cdots+s_n)!}{s_1!\cdots s_n!}$ is multinomial coefficient, and the summation is over nonnegative integers s_j satisfying Diophantine equation $s_1 + 2s_2 + \cdots + ns_n = n$.

Also, we establish connection formulas between Jacobsthal, Pell, Pell-Lucas numbers and Fibonacci numbers using Toeplitz-Hessenberg determinants.

Keywords: Fibonacci sequence, Fibonacci numbers, fibinomial identity, Jacobsthal sequence, Pell sequence, Pell-Lucas sequence, Hessenberg matrix, Toeplitz-Hessenberg matrix, multinomial coefficient.

Bibliography: 15 titles.

For citation:
T. P. Goy, 2018, "On some fibinomial identities", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 2, pp. 56–66.

1. Введение

Фибиномиальное тождество — это тождество, сочетающее числа Фибоначчи с биномиальными (мультиномиальными) коэффициентами. Примеры таких тождеств можно найти, например, в [1, 2].

Для получения новых семейств фибиномиальных тождеств мы будем использовать детерминанты и перманенты нижней *матрицы Хессенберга*, т.е. квадратной матрицы n порядка $H_n = (h_{ij})$, у которой $h_{ij} = 0$ для всех $j > i + 1$, причем $h_{i,i+1} \neq 0$ хотя бы для одного $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Таким образом,

$$H_n = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & \cdots & 0 & 0 \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ h_{n-1,1} & h_{n-1,2} & h_{n-1,3} & \cdots & h_{n-1,n-1} & h_{n-1,n} \\ h_{n1} & h_{n2} & h_{n3} & \cdots & h_{n,n-1} & h_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Матрицы Хессенберга (и их частный случай – трёхдиагональные матрицы) являются исходными точками многих алгоритмов вычисления собственных значений. Эти матрицы используются, например, в методах подпространства Крылова в процессе построения ортогональных базисов, а также в задаче на нахождение собственных значений матрицы QR-методом [3].

Если в матрице (1) $h_{ij} = a_{i-j+1}$ для всех i, j, то имеем *матрицу Теплица–Хессенберга*

$$A_n \equiv A_n(a_0; a_1, \ldots, a_n) = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_1 & a_0 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

где $a_0 \neq 0$ и $a_j \neq 0$ хотя бы для одного $j > 0$.

Разлагая детерминант $\det A_n$ и перманент $perA_n$ (будем называть их определителем и перманентом Теплица-Хессенберга) по элементам последней строки, получаем формулы

$$\det A_n = \sum_{i=1}^{n} (-a_0)^{i-1} a_i \det A_{n-i}, \qquad (3)$$

$$perA_n = \sum_{i=1}^{n} a_0^{i-1} a_i perA_{n-i}, \qquad (4)$$

где, по определению, $\det A_0 = 1$ и $perA_0 = 1$.

Мы будем исследовать последовательности определителей и перманентов Теплица–Хессенберга $\{\det A_n\}_{n\geq 0}$ и $\{perA_n\}_{n\geq 0}$ специального вида (при $a_0 = 2$), элементами которых являются числа Фибоначчи F_n, определяемые рекуррентно:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \qquad n \geq 2,$$

где $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ (последовательность A000045 в Он-лайн энциклопедии целочисленных последовательностей [4]).

Для простоты обозначений будем писать $\det(a_1, \ldots, a_n)$ вместо $\det A_n(2; a_1, \ldots, a_n)$ и $per(a_1, \ldots, a_n)$ — вместо $perA_n(2; a_1, \ldots, a_n)$.

Использование определителей и перманентов для исследования чисел Фибоначчи и их обобщений имеет долгую историю (среди последних работ отметим [5, 6, 7, 8, 9, 10, 11]). В частности, в [12] и [13] нами анонсированы фибиномильные тождества, полученные с помощью определителей матрицы Теплица–Хессенберга вида (2) при $a_0 = 1$.

Некоторые результаты этой статьи были опубликованы без доказательств в [14].

2. Связь чисел Якобсталя, Пелля и Пелля–Люка с числами Фибоначчи с помощью определителей Теплица–Хессенберга

Напомним определение некоторых известных целочисленных последовательностей, используемых нами далее.

Последовательность Якобсталя $\{J_n\}_{n\geq 0}$ — это целочисленная последовательность, которая может быть задана рекуррентным соотношением

$$J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2}, \qquad n \geq 2,$$

где $J_0 = 0$, $J_1 = 1$, или с помощью формулы

$$J_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}, \qquad n \geq 0. \tag{5}$$

Последовательности Пелля $\{P_n\}_{n\geq 0}$ и *Пелля–Люка* $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$u_n = 2u_{n-1} + u_{n-2}, \qquad n \geq 2,$$

но с разными начальными условиями: $P_0 = 0$, $P_1 = 1$ и $Q_0 = 2$, $Q_1 = 2$, соответственно.

Приведем 14 первых членов последовательностей Фибоначчи, Якобсталя, Пелля и Пелля–Люка в виде таблицы:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233
J_n	0	1	1	3	5	11	21	43	85	171	341	683	1365	2731
P_n	0	1	2	5	12	29	70	169	408	985	2378	5741	13860	33461
Q_n	2	2	6	14	34	82	198	478	1154	2786	6726	16238	39202	94642

Последовательности Якобсталя, Пелля и Пелля-Люка имеют множество замечательных свойств, комбинаторных интерпретаций и приложений (см., например, страницы с последовательностями A001045, A000129 и A002203 в [4], соответственно).

С помощью детерминантов Теплица–Хессенберга в следующей теореме установлена связь между числами Якобсталя, Пелля и Пелля-Люка и числами Фибоначчи.

Теорема 1. *Для всех* $n \geq 1$

$$\det(F_2, \dots, F_{n+1}) = (-1)^n J_n, \tag{6}$$

$$\det(F_3, \dots, F_{2n+1}) = \begin{cases} -2^{\frac{n}{2}-1} Q_n, & \text{если } n \text{ четное;} \\ 2^{\frac{n+1}{2}} P_n, & \text{если } n \text{ нечетное.} \end{cases} \tag{7}$$

Доказательство. Докажем формулу (6) с помощью метода математической индукции. Доказательство формулы (7) производится аналогично. Пусть $D_n = \det(F_2, \dots, F_{n+1})$. Легко убедиться, что формула (6) выполняется при $n = 1$ и $n = 2$. Предположим ее выполнение для всех $k \le n-1$, где $n \ge 3$. Используя рекуррентное соотношения Якобсталя и (3), получаем:

$$
\begin{aligned}
D_n &= \sum_{i=1}^{n}(-2)^{i-1}F_{i+1}D_{n-i}\\
&= F_2D_{n-1} - 2F_3D_{n-2} + \sum_{i=2}^{n}(-2)^{i-1}\left(F_i + F_{i-1}\right)D_{n-i}\\
&= D_{n-1} - 4D_{n-2} + \sum_{i=3}^{n}(-2)^{i-1}F_iD_{n-i} + \sum_{i=3}^{n}(-2)^{i-1}F_{i-1}D_{n-i}\\
&= D_{n-1} - 4D_{n-2} + \sum_{i=2}^{n-1}(-2)^{i}F_{i+1}D_{n-i-1} + 4\sum_{i=1}^{n-2}(-2)^{i-1}F_{i+1}D_{n-i-2}\\
&= D_{n-1} - 4D_{n-2} + \left(-2\sum_{i=1}^{n-1}(-2)^{i-1}F_{i+1}D_{n-i-1} + 2F_2D_{n-2}\right) + 4D_{n-2}\\
&= D_{n-1} - 4D_{n-2} - 2D_{n-1} + 2D_{n-2} + 4D_{n-2}\\
&= -D_{n-1} + 2D_{n-2}.
\end{aligned}
$$

Из предположения индукции и формулы (5) следует, что

$$
\begin{aligned}
D_n &= -\frac{(-2)^n - 1}{3} + 2\frac{(-2)^{n-1} - 1}{3}\\
&= \frac{(-2)^{n+1} - 1}{3} = (-1)^n J_n.
\end{aligned}
$$

Таким образом, формула выполняется при n. Следовательно, по индукции, эта формула выполняется для любого натурального n. $\square$

3. Детерминанты Теплица-Хессенберга, элементами которых являются числа Фибоначчи

Следующая теорема дает значения детерминантов Теплица–Хессенберга, элементами которых являются числа Фибоначчи (последовательные, с четными и нечетными индексами).

Теорема 2. *Пусть $n \ge 1$, кроме указанных случаев. Тогда*

$$
\begin{aligned}
\det(F_0, \ldots, F_{n-1}) &= \frac{(-1-\sqrt{3})^{n-1} - (-1+\sqrt{3})^{n-1}}{\sqrt{3}},\\
\det(F_0, \ldots, F_{2n-2}) &= \frac{(-3-\sqrt{3})^{n-1} - (-3+\sqrt{3})^{n-1}}{\sqrt{3}},\\
\det(F_1, \ldots, F_n) &= \frac{1}{\sqrt{17}}\left(\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)^n - \left(\frac{-1-\sqrt{17}}{2}\right)^n\right),
\end{aligned} \tag{8}
$$

$$
\begin{aligned}
\det(F_1,\ldots,F_{2n-1}) &= \frac{1}{2\sqrt{17}}\left((\sqrt{17}-3)\left(\frac{-5-\sqrt{17}}{2}\right)^n + (\sqrt{17}+3)\left(\frac{-5+\sqrt{17}}{2}\right)^n\right),\\
\det(F_2,\ldots,F_{2n}) &= \frac{(-1)^n-(-4)^n}{3},\\
\det(F_3,\ldots,F_{n+2}) &= (-1)^{n-1}\cdot 2^{\frac{2n+1-(-1)^n}{4}},\\
\det(F_3,\ldots,F_{2n+1}) &= \frac{(-2-\sqrt{2})^n+(-2+\sqrt{2})^n}{-2},\\
\det(F_4,\ldots,F_{n+3}) &= -1, \qquad n\ge 2,\\
\det(F_4,\ldots,F_{2n+2}) &= (-1)^n(1-2^{n+1}),\\
\det(F_5,\ldots,F_{n+4}) &= 2^{n+1}+1,\\
\det(F_5,\ldots,F_{2n+3}) &= (-1)^{n-1}, \qquad n\ge 2,\\
\det(F_6,\ldots,F_{2n+4}) &= \frac{(1+\sqrt{3})^{n+3}-(1-\sqrt{3})^{n+3}}{4\sqrt{3}}.
\end{aligned}
$$

Доказательство. Мы докажем только формулу (8). Остальные формулы могут быть доказаны аналогично. Легко проверяется, что формула (8) имеет место при $n=1$ и $n=2$. Предположим ее выполнение для всех $k\le n-1$, где $n\ge 3$. Пусть $D_n=\det(F_1,\ldots,F_n)$. Используя рекуррентное соотношение (3), получаем

$$
\begin{aligned}
D_n &= \sum_{i=1}^{n}(-2)^{i-1}F_iD_{n-i}\\
&= F_1D_1+\sum_{i=2}^{n}(-2)^{i-1}F_{i-1}D_{i-1}+\sum_{i=2}^{n}(-2)^{i-1}F_{i-2}D_{i-1}\\
&= D_{n-1}-2\sum_{i=1}^{n}(-2)^{i-1}F_iD_{n-i-1}+(-2)^2\sum_{i=0}^{n-2}(-2)^{i-1}F_iD_{n-i-2}\\
&= D_{n-1}-2D_{n-1}+4D_{n-2}=-D_{n-1}+4D_{n-2}.
\end{aligned}
$$

Учитывая предположение индукции, имеем

$$
\begin{aligned}
D_n &= -\frac{1}{\sqrt{17}}\left(\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{-1-\sqrt{17}}{2}\right)^{n-1}\right)\\
&\quad+\frac{4}{\sqrt{17}}\left(\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)^{n-2}-\left(\frac{-1-\sqrt{17}}{2}\right)^{n-2}\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{17}}\left(\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)^{n}-\left(\frac{-1-\sqrt{17}}{2}\right)^{n}\right).
\end{aligned}
$$

Таким образом, формула (8) выполняется для всех натуральных n.
□

4. Перманенты Теплица-Хессенберга, элементами которых являются числа Фибоначчи

В этом разделе исследуем перманенты Теплица-Хессенберга, элементами которых являются числа Фибоначчи.

Теорема 3. *Пусть $n \geq 1$. Тогда*

$$\begin{aligned}
per(F_0,\dots,F_{n-1}) &= \frac{(1+\sqrt{7})^{n-1}-(1-\sqrt{7})^{n-1}}{\sqrt{7}},\\
per(F_0,\dots,F_{2n-2}) &= \frac{(3+\sqrt{7})^{n-1}-(3-\sqrt{7})^{n-1}}{\sqrt{7}},\\
per(F_1,\dots,F_n) &= \frac{4^n-(-1)^n}{5},\\
per(F_1,\dots,F_{2n-1}) &= \frac{2\cdot 6^n+3}{15}, \qquad (9)\\
per(F_2,\dots,F_{n+1}) &= \frac{1}{2\sqrt{33}}\left((\sqrt{33}-7)\left(\frac{3-\sqrt{33}}{2}\right)^{n-1}+(\sqrt{33}+7)\left(\frac{3+\sqrt{33}}{2}\right)^{n-1}\right),\\
per(F_2,\dots,F_{2n}) &= \frac{1}{\sqrt{33}}\left(\left(\frac{7+\sqrt{33}}{2}\right)^{n}-\left(\frac{7-\sqrt{33}}{2}\right)^{n}\right).
\end{aligned}$$

Доказательство. Мы докажем формулу (9) с помощью индукции по n, доказательства других формул производится аналогично. При $n=1$ и $n=2$ формула (9), как легко проверить, выполняется. Предположим, что эта формула имеет место для $n-1$, где $n \geq 3$. Пусть $P_n = per(F_1,\dots,F_{2n-1})$. Используя (3) и известную формулу $F_{2k}=\sum\limits_{s=1}^{k}F_{2s-1}$, получаем

$$\begin{aligned}
P_n &= \sum_{i=1}^{n} 2^{i-1}F_{2i-1}P_{n-i}\\
&= F_1P_{n-1}+\sum_{i=2}^{n}2^{i-1}\big(F_{2i-2}+F_{2i-3}\big)P_{n-i}\\
&= P_{n-1}+\sum_{i=2}^{n}2^{i-1}F_{2i-2}P_{n-i}+\sum_{i=2}^{n}2^{i-1}F_{2i-3}P_{n-i}\\
&= P_{n-1}+\sum_{i=1}^{n-1}2^{i}F_{2i}P_{n-i-1}+2\sum_{i=1}^{n-1}2^{i-1}F_{2i-1}P_{n-i-1}\\
&= P_{n-1}+\sum_{i=1}^{n-1}2^{i}F_{2i}P_{n-i-1}+2P_{n-1}\\
&= 3P_{n-1}+\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{i}2^{i}P_{n-i-1}F_{2k-1}\\
&= 3P_{n-1}+\sum_{i=1}^{n-1}2^{i}\sum_{k=1}^{n-i}2^{k-1}F_{2i-1}P_{n-i-k}\\
&= 3P_{n-1}+\sum_{i=1}^{n-1}2^{i}P_{n-i}.
\end{aligned}$$

Используя предположение индукции, имеем

$$P_n = 3\cdot\frac{2\cdot 6^{n-1}+3}{15}+\sum_{i=1}^{n-1}2^{i}\cdot\frac{2\cdot 6^{n-i-1}+3}{15}$$

$$= \frac{6^n}{15} + \frac{3}{5} + \frac{6^n}{45} \sum_{i=1}^{n-1} 3^{-i} + \frac{1}{5} \sum_{i=1}^{n-1} 2^i$$
$$= \frac{2 \cdot 6^n + 3}{15}.$$

Таким образом, формула (9) выполняется для всех натуральных n. $\square$

5. Фибиномиальные тождества с мультиномиальными коэффициентами

В этом разделе мы сосредоточимся на получении новых семейств фибиномиальных тождеств для произвольного n с мультиномиальными коэффициентами. Основным инструментом для этого будет следующая лемма [15].

ЛЕММА 4. *Пусть T_n — матрица Теплица–Хессенберга* (2) *и $n \geq 1$. Тогда*

$$\det(A_n) = (-a_0)^n \sum_{\sigma_n = n} (-1)^{|s|} p_n(s) \left(\frac{a_1}{a_0}\right)^{s_1} \left(\frac{a_2}{a_0}\right)^{s_2} \cdots \left(\frac{a_n}{a_0}\right)^{s_n}, \tag{10}$$

$$per(A_n) = a_0^n \sum_{\sigma_n = n} p_n(s) \left(\frac{a_1}{a_0}\right)^{s_1} \left(\frac{a_2}{a_0}\right)^{s_2} \cdots \left(\frac{a_n}{a_0}\right)^{s_n}, \tag{11}$$

где $p_n(s) = \frac{(s_1+\cdots+s_n)!}{s_1!\cdots s_n!}$ — мультиномиальный коэффициент, $\sigma_n = s_1 + 2s_2 + \cdots + ns_n$ и $|s| = s_1 + \cdots + s_n$, причем $s_i \geq 0$.

Используя теперь формулы (10) и (11) для тождеств из теорем 2, 3 после несложных преобразований, получаем следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 5. *Для $n \geq 1$ имеют место тождества*:

$$\sum_{\sigma_n=n} (-1)^{|s|} p_n(s) \left(\frac{F_0}{2}\right)^{s_1} \cdots \left(\frac{F_{n-1}}{2}\right)^{s_n} = \frac{\sqrt{3}}{6} \left(\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1} \right),$$

$$\sum_{\sigma_n=n} p_n(s) \left(\frac{F_0}{2}\right)^{s_1} \cdots \left(\frac{F_{n-1}}{2}\right)^{s_n} = \frac{1}{2\sqrt{7}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{7}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{7}}{2}\right)^{n-1} \right),$$

$$\sum_{\sigma_n=n} p_n(s) \left(\frac{F_0}{2}\right)^{s_1} \cdots \left(\frac{F_{2n-2}}{2}\right)^{s_n} = \frac{1}{2\sqrt{7}} \left(\left(\frac{3+\sqrt{7}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{3-\sqrt{7}}{2}\right)^{n-1} \right),$$

$$\sum_{\sigma_n=n} (-1)^{|s|} p_n(s) \left(\frac{F_0}{2}\right)^{s_1} \cdots \left(\frac{F_{2n-2}}{2}\right)^{s_n} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1} \right),$$

$$\sum_{\sigma_n=n} (-1)^{|s|} p_n(s) \left(\frac{F_1}{2}\right)^{s_1} \cdots \left(\frac{F_n}{2}\right)^{s_n} = \frac{1}{\sqrt{17}} \left(\left(\frac{1-\sqrt{17}}{4}\right)^{n} - \left(\frac{1+\sqrt{17}}{4}\right)^{n} \right),$$

$$\sum_{\sigma_n=n} p_n(s) \left(\frac{F_1}{2}\right)^{s_1} \cdots \left(\frac{F_n}{2}\right)^{s_n} = \frac{4^n - (-1)^n}{5 \cdot 2^n}, \tag{12}$$

$$\sum_{\sigma_n=n}(-1)^{|s|}p_n(s)\left(\frac{F_1}{2}\right)^{s_1}\cdots\left(\frac{F_{2n-1}}{2}\right)^{s_n}=\frac{\sqrt{17}}{34}\left(\alpha\left(\frac{5+\sqrt{17}}{4}\right)^n+\frac{8}{\alpha}\left(\frac{5-\sqrt{17}}{4}\right)^n\right),$$

$$\sum_{\sigma_n=n}p_n(s)\left(\frac{F_1}{2}\right)^{s_1}\cdots\left(\frac{F_{2n-1}}{2}\right)^{s_n}=\frac{2\cdot 6^n+3}{15\cdot 2^n},$$

$$\sum_{\sigma_n=n}(-1)^{|s|}p_n(s)\left(\frac{F_2}{2}\right)^{s_1}\cdots\left(\frac{F_{n+1}}{2}\right)^{s_n}=\frac{-2^{n+1}-(-1)^n}{3\cdot 2^n},$$

$$\sum_{\sigma_n=n}p_n(s)\left(\frac{F_2}{2}\right)^{s_1}\cdots\left(\frac{F_{n+2}}{2}\right)^{s_n}=\frac{\sqrt{33}}{132}\left(\beta\left(\frac{3-\sqrt{33}}{4}\right)^{n-1}-\frac{16}{\beta}\left(\frac{3+\sqrt{33}}{4}\right)^{n-1}\right),$$

$$\sum_{\sigma_n=n}(-1)^{|s|}p_n(s)\left(\frac{F_2}{2}\right)^{s_1}\cdots\left(\frac{F_{2n}}{2}\right)^{s_n}=\frac{1-4^n}{3\cdot 2^n},$$

$$\sum_{\sigma_n=n}p_n(s)\left(\frac{F_2}{2}\right)^{s_1}\cdots\left(\frac{F_{2n}}{2}\right)^{s_n}=\frac{1}{\sqrt{33}}\left(\left(\frac{7+\sqrt{33}}{4}\right)^n-\left(\frac{7-\sqrt{33}}{4}\right)^n\right),$$

$$\sum_{\sigma_n=n}(-1)^{|s|}p_n(s)\left(\frac{F_3}{2}\right)^{s_1}\cdots\left(\frac{F_{n+2}}{2}\right)^{s_n}=-2^{\frac{1-2n-(-1)^n}{4}},$$

$$\sum_{\sigma_n=n}(-1)^{|s|}p_n(s)\left(\frac{F_3}{2}\right)^{s_1}\cdots\left(\frac{F_{2n+1}}{2}\right)^{s_n}=-\frac{1}{2}\left(\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)^n+\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^n\right),$$

$$\sum_{\sigma_n=n}(-1)^{|s|}p_n(s)\left(\frac{F_4}{2}\right)^{s_1}\cdots\left(\frac{F_{n+3}}{2}\right)^{s_n}=\frac{4\delta_{n1}-1}{(-2)^n}, \tag{13}$$

$$\sum_{\sigma_n=n}(-1)^{|s|}p_n(s)\left(\frac{F_4}{2}\right)^{s_1}\cdots\left(\frac{F_{2n+2}}{2}\right)^{s_n}=2^{-n}-2,$$

$$\sum_{\sigma_n=n}(-1)^{|s|}p_n(s)\left(\frac{F_5}{2}\right)^{s_1}\cdots\left(\frac{F_{n+4}}{2}\right)^{s_n}=(-1)^n\cdot\left(2+2^{-n}\right),$$

$$\sum_{\sigma_n=n}(-1)^{|s|}p_n(s)\left(\frac{F_5}{2}\right)^{s_1}\cdots\left(\frac{F_{2n+3}}{2}\right)^{s_n}=\frac{(-1)^n4\delta_{n1}-1}{2^n}, \tag{14}$$

$$\sum_{\sigma_n=n}p_n(s)\left(\frac{F_6}{2}\right)^{s_1}\cdots\left(\frac{F_{2n+4}}{2}\right)^{s_n}=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)^{n+3}-\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)^{n+3}\right),$$

где $\alpha=-3+\sqrt{17}$, $\beta=-7+\sqrt{33}$ *и* δ_{n1} *– символ Кронекера.*

ПРИМЕР 6. Из (13), (14) и (12) соответственно при $n=3,4,5$ имеем

$$F_4^3-4F_4F_5+4F_6=-1;$$
$$F_5^4-6F_5^2F_7+8F_5F_9+4F_7^2-8F_{11}=-1;$$
$$F_1^5+8F_1^3F_2+12F_1^2F_3+12F_1F_2^2+16F_1F_4+16F_2F_3+16F_5=205.$$

6. Заключение

Целью этой статьи является установление новых тождеств для чисел Фибоначчи. Исследуя семейства детерминантов и перманентов Теплица–Хессенберга специального вида, элементам которых являются числа Фибоначчи, мы получили новые тождества с мультиномиальными коэффициентами для этих чисел (последовательных, а также с четными и нечетными индексами). Это, в частности, дало возможность получить формулы, устанавливающие связь чисел Фибоначчи с числами Пелля, Пелля–Люка и Якобсталя с помощью определителей Теплица–Хессенберга.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Benjamin A. T., Quinn J. J., Rouse J. A. Fibinomial identities // Applications of Fibonacci numbers. Vol. 9. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers. P. 19–24. doi: 10.1007/978-0-306-48517-6_3

2. Koshy T. Fibonacci and Lucas Numbers and Applications. New York, John Wiley & Sons, 2001.

3. Horn R. A., Johnson C. R. Matrix Analysis. New York, Cambridge University Press, 2012.

4. Sloane N. J. A., editor. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. Available at: https://ocis.org.

5. Civciv H. A note on the determinant of five-diagonal matrices with Fibonacci numbers // Int. J. Contemp. Math. Sci. 2008. Vol. 3, № 9. P. 419–424.

6. İpek A. On the determinants of pentadiagonal matrices with the classical Fibonacci, generalized Fibonacci and Lucas numbers // Eurasian Math. J. 2011. Vol. 2, № 2. P. 60–74.

7. İpek A., Arı K. On Hessenberg and pentadiagonal determinants related with Fibonacci and Fibonacci-like numbers // Appl. Math. Comput. 2014. Vol. 229. P. 433–439. doi: 10.1016/j.amc.2013.12.071

8. Janjić M. Hessenberg matrices and integer sequences // J. Integer Seq. 2010. Vol. 13. Article 10.7.8.

9. Kaygısız K., Şahin A. Determinant and permanent of Hessenberg matrix and Fibonacci type numbers // Gen. Math. Notes 2012. Vol. 9, № 2. P. 32–41.

10. Öcal A. A., Tuglu N., Altinişik E. On the representation of k-generalized Fibonacci and Lucas numbers // Appl. Math. Comput. 2005. Vol. 170, № 1. P. 584–596.

11. Tangboonduangjit A., Thanatipanonda T. Determinants containing powers of generalized Fibonacci numbers // J. Integer Seq. 2016. Vol. 19, Article 16.7.1.

12. Гой Т. П. Про нові формули для чисел Фібоначчі // Информатика и системные науки (ИСН-2017): Материалы VIII Всеукр. наук.-техн. конф., 16-18 марта 2017 г. – Полтава: ПУЭТ, 2017. – С. 51–54.

13. Goy T. Some combinatorial identities for two-periodic Fibonacci sequence // Фундаментальные и прикладные проблемы математики и информатики: Материалы XII Междунар. конф., 19-22 сент. 2017 г. – Махачкала: ДГУ, 2017. – С. 107–109.

14. Гой Т. П. О новых фибиномиальных тождествах // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения: Материалы XV Междунар. конф., посвящ. столетию со дня рожд. проф. Н. М. Коробова, 28-31 мая 2018 г. – Тула: ТГПУ им. Л. Н. Толстого, 2018. – С. 214–217.

15. Muir T. The Theory of Determinants in the Historical Order of Development. Vol. 3, New York, Dover Publications, 1960.

REFERENCES

1. Benjamin, A. T., Quinn, J. J. & Rouse J. A. 2004, “Fibinomial identities”, In: *Applications of Fibonacci numbers*, vol. 9, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pp. 19–24. doi: 10.1007/978-0-306-48517-6_3
2. Koshy, T. 2001, “Fibonacci and Lucas Numbers and Applications”. John Wiley & Sons, New York.
3. Horn, R. A. & Johnson, C. R. 2012, “Matrix Analysis”. Cambridge University Press, New York.
4. Sloane, N. J. A., editor. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. Available at https://ocis.org.
5. Civciv, H. 2008, “A note on the determinant of five-diagonal matrices with Fibonacci numbers”, *Int. J. Contemp. Math. Sci.*, vol. 3, no. 9, pp. 419–424.
6. İpek, A. 2011, “On the determinants of pentadiagonal matrices with the classical Fibonacci, generalized Fibonacci and Lucas numbers”, *Eurasian Math. J.*, vol. 2, no. 2, pp. 60–74.
7. İpek, A. & Arı, K. 2014, “On Hessenberg and pentadiagonal determinants related with Fibonacci and Fibonacci-like numbers”, *Appl. Math. Comput.*, vol. 229, pp. 433–439. doi: 10.1016/j.amc.2013.12.071
8. Janjić, M. 2010, “Hessenberg matrices and integer sequences”, *J. Integer Seq.*, vol. 13, Article 10.7.8.
9. Kaygısız, K. & Şahin, A. 2012, “Determinant and permanent of Hessenberg matrix and Fibonacci type numbers”, *Gen. Math. Notes*, vol. 9, no. 2, pp. 32–41.
10. Öcal, A. A., Tuglu, N. & Altinişik, E. 2005, “On the representation of k-generalized Fibonacci and Lucas numbers”, *Appl. Math. Comput.*, vol. 170, no. 1, pp. 584–596.
11. Tangboonduangjit, A. & Thanatipanonda, T. 2016, “Determinants containing powers of generalized Fibonacci numbers”, *J. Integer Seq.*, vol. 19, Article 16.7.1.
12. Goy, T. P. 2017, “Pro novi formuli dlya chisel Fibonachchi” [On new formulas for Fibonacci numbers], Materialyi VIII Vseukrainskoy nauchno-tehnicheskoy konferentsii “Informatika i sistemnyie nauki” (Proc. VIII Sci.-Tech. Conf. “Informatics and System Sciences”, Poltava, Ukraine, pp. 51–54. (in Ukrainian)
13. Goy, T. 2017, “Some combinatorial identities for two-periodic Fibonacci sequence”, Materialyi XII Mezhdunarodnoj konferencii “Fundamentalnyie i prikladnyie problemyi matematiki i informatiki” (Proc. XII Int. Conf. “Fundamental and Applied Problems of Mathematics and Informatics”), Makhachkala, Russia, pp. 107–109.
14. Goy, T. 2018, “O novyh fibinomial’nyh tozhdestvah” [On new fibinomial identities], Materialy XV Mezhdunarodnoj konferencii “Algebra, teorija chisel i diskretnaja geometrija: sovremennye problemy i prilozhenija”, posvjashhennoj stoletiju so dnja rozhdenija prof. N. M. Korobova (Proc. XV Int. Conf. “Algebra, Number Theory and Discrete Geometry: Modern Problems and Applications”), Tula, Russia, pp. 214–217. (in Russian)
15. Muir, T. 1960, “The Theory of Determinants in the Historical Order of Development”. Vol. 3, Dover Publications, New York.

Получено 03.05.2018
Принято в печать 17.08.2018