Алгебра і геометрія

УДК 519.538

ПРО ОДИН КЛАС ВЗАЄМНО ОБЕРНЕНИХ МНОГОЧЛЕНІВ РОЗБИТТІВ

Т. П. Гой, Р. А. Заторський
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника;
76018, м. Івано-Франківськ, вул. Шевченка 57;
e-mail: tarasgoy@yahoo.com, romazatorsky@gmail.com

Вивчається клас взаємно обернених многочленів розбиттів, що зображуються у вигляді функцій деяких трикутних матриць.

Ключові слова: *трикутна матриця, парадетермінат, параперманент, многочлен розбиттів.*

Вступ

Взаємно обернені многочлени розбиттів з’являються у комбінаторному аналізі, теорії симетричних многочленів, теорії чисел [5, 6]. Першу пару взаємно обернених многочленів розбиттів встановив у 1779 р. англійський математик Едуард Варінг; вона пов’язала елементарні симетричні многочлени зі степеневими сумами (формула Варінга). Пізніше з’явилися пара многочленів розбиттів, що пов’язує суми дільників натурального числа із невпорядкованими розбиттями натурального числа на натуральні доданки, та деякі узагальнення цих результатів на випадок m-арних розбиттів [8].

У цій роботі вивчається клас взаємно обернених многочленів розбиттів, що зображуються парафункціями деяких трикутних матриць. Ця робота ідейно близька до [1-4, 9] і суттєво узагальнює результати, отримані у [7].

1. Попередні означення та твердження

Многочленами розбиттів називають многочлени вигляду [2]

$$\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} C(n,\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\, x_1^{\lambda_1}\cdots x_n^{\lambda_n},$$

де $C(n,\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ – деякий дробово-раціональний вираз, а підсумовування здійснюється за невпорядкованими розбиттями числа $n\in\mathbf{N}$.

Нехай задано деяку трикутну матрицю

$$A=\left(\tau_{sr}\frac{x_{s-r+1}}{x_{s-r}}\right)_{1\le r\le s\le n}=\begin{pmatrix} \tau_{11}x_1 & & & \\ \tau_{21}\dfrac{x_2}{x_1} & \tau_{22}x_1 & & \\ \vdots & \dots & \ddots & \\ \tau_{n1}\dfrac{x_n}{x_{n-1}} & \tau_{n2}\dfrac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \cdots & \tau_{nn}x_1 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

де $x_0=1$, $\tau_{sr}\in\mathbf{R}$, $1\le r\le s\le n$.

У [5] доведено, що парафункції (парадетермінант і параперманент) трикутних матриць вигляду (1) є матричними зображеннями деяких многочленів розбиттів.

Якщо у трикутній матриці (1) усі числа $\tau_{sr}=1$, то [2]

$$\operatorname{ddet}(A)=\sum_{\substack{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n\\ \lambda_1+\ldots+\lambda_n=k}}\frac{(-1)^{n-k}k!}{\lambda_1!\cdots\lambda_n!}x_1^{\lambda_1}\cdots x_n^{\lambda_n}, \quad (2)$$

$$\operatorname{pper}(A)=\sum_{\substack{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n\\ \lambda_1+\ldots+\lambda_n=k}}\frac{k!}{\lambda_1!\cdots\lambda_n!}x_1^{\lambda_1}\cdots x_n^{\lambda_n}, \quad (3)$$

де $\operatorname{ddet}(A)$ і $\operatorname{pper}(A)$ – парадетермінант і параперманент матриці A.

Теорема 1. [5] *Справджуються такі формули обернення многочленів розбиттів*:

$$y_i=\operatorname{ddet}\left(\tau_{sr}\frac{x_{s-r+1}}{x_{s-r}}\right)_{1\le r\le s\le i},\quad x_i=\operatorname{ddet}\left(\frac{1}{\tau_{s,s-r+1}}\frac{y_{s-r+1}}{y_{s-r}}\right)_{1\le r\le s\le i};$$

$$y_i=\operatorname{pper}\left(\tau_{sr}\frac{x_{s-r+1}}{x_{s-r}}\right)_{1\le r\le s\le i},\quad x_i=(-1)^{i-1}\operatorname{ddet}\left(\frac{1}{\tau_{s,s-r+1}}\frac{y_{s-r+1}}{y_{s-r}}\right)_{1\le r\le s\le i},$$

де $i=1,2,\ldots,$ $x_0=1,$ $y_0=1.$

2. Основні результати

У [3] досліджувався клас многочленів розбиттів, що зображується парафункціями трикутної матриці

$$F=\left(\frac{a+r(i-j)}{b+s(i-j)}\cdot\frac{x_{i-j+1}}{x_{i-j}}\right)_{1\le r\le s\le n}=$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{a}{b}x_1 & & & & \\ \frac{a+r}{b+s}\cdot\frac{x_2}{x_1} & \frac{a}{b}x_1 & & & \\ \vdots & \cdots & \ddots & & \\ \frac{a+(n-2)r}{b+(n-2)s}\cdot\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \frac{a+(n-3)r}{b+(n-3)s}\cdot\frac{x_{n-2}}{x_{n-3}} & \cdots & \frac{a}{b}x_1 & \\ \frac{a+(n-1)r}{b+(n-1)s}\cdot\frac{x_n}{x_{n-1}} & \frac{a+(n-2)r}{b+(n-2)s}\cdot\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \cdots & \frac{a+r}{b+s}\cdot\frac{x_2}{x_1} & \frac{a}{b}x_1 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

де a, b, r, s – деякі числа.

Позначимо через

$$c^{m\{r\}} = c(c+r)(c+2r)\cdots\big(c+(m-1)r\big)$$

узагальнений факторіальний степінь з кроком r [4].

Теорема 2. [3] *Для трикутної матриці (4) справджуються тотожності*

$$y_n = \mathrm{ddet}(F) = \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} \frac{(-1)^{n-k}k!}{\lambda_1!\cdots\lambda_n!}\left(\frac{a^{1\{r\}}}{b^{1\{s\}}}\right)^{\lambda_1}\cdots\left(\frac{a^{n\{r\}}}{b^{n\{s\}}}\right)^{\lambda_n} x_1^{\lambda_1}\cdots x_n^{\lambda_n}, \quad (5)$$

$$y_n = \mathrm{pper}(F) = \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} \frac{k!}{\lambda_1!\cdots\lambda_n!}\left(\frac{a^{1\{r\}}}{b^{1\{s\}}}\right)^{\lambda_1}\cdots\left(\frac{a^{n\{r\}}}{b^{n\{s\}}}\right)^{\lambda_n} x_1^{\lambda_1}\cdots x_n^{\lambda_n}, \quad (6)$$

де $k=\lambda_1+\cdots+\lambda_n$*, і, відповідно, рекурентні співвідношення*

$$y_n = \frac{a^{1\{r\}}}{b^{1\{s\}}}x_1y_{n-1} - \frac{a^{2\{r\}}}{b^{2\{s\}}}x_2y_{n-2} + \ldots - (-1)^n\frac{a^{n\{r\}}}{b^{n\{s\}}}x_ny_0,$$

$$y_n = \frac{a^{1\{r\}}}{b^{1\{s\}}}x_1y_{n-1} + \frac{a^{2\{r\}}}{b^{2\{s\}}}x_2y_{n-2} + \ldots + \frac{a^{n\{r\}}}{b^{n\{s\}}}x_ny_0.$$

Згідно з теоремою 1, матриця, яка є зображенням обернених многочленів до многочленів розбиттів з теореми 2, має вигляд

$$F' = \left(\frac{b+s(j-1)}{a+r(j-1)}\cdot\frac{y_{i-j+1}}{y_{i-j}}\right)_{1\le j\le i\le n} =$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{b}{a}y_1 & & & & \\ \frac{b}{a}\cdot\frac{y_2}{y_1} & \frac{b+s}{a+r}y_1 & & & \\ \vdots & \cdots & \ddots & & \\ \frac{b}{a}\cdot\frac{y_{n-1}}{y_{n-2}} & \frac{b+s}{a+r}\cdot\frac{y_{n-2}}{y_{n-3}} & \cdots & \frac{b+(n-2)s}{a+(n-2)r}y_1 & \\ \frac{b}{a}\cdot\frac{y_n}{y_{n-1}} & \frac{b+s}{a+r}\cdot\frac{y_{n-1}}{y_{n-2}} & \cdots & \frac{b+(n-2)s}{a+(n-2)r}\cdot\frac{y_2}{y_1} & \frac{b+(n-1)s}{a+(n-1)r}y_1 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Однак, якщо з кожного стовпця матриці (7) винести спільні множники за знак функцій $\mathrm{ddet}(F')$ і $\mathrm{pper}(F')$, то одержимо парафункції матриці

$$\left(\frac{x_{s-r+1}}{x_{s-r}}\right)_{1\le r\le s\le n},$$

тобто матриці (1), в якій усі числа $\tau_{rs}=1$. Тому ці парафункції можемо обчислити, використовуючи рівності (2), (3) відповідно.

Таким чином, справджується

Теорема 3. *Многочлени розбиттів*

$$x_n=\mathrm{ddet}(F')=\frac{b^{n\{s\}}}{a^{n\{r\}}}\cdot\mathrm{ddet}\left(\frac{y_{i-j+1}}{y_{i-j}}\right)_{1\le j\le i\le n}=$$

$$=\frac{b^{n\{s\}}}{a^{n\{r\}}}\cdot\sum_{\substack{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n\\ \lambda_1+\ldots+\lambda_n=k}}\frac{(-1)^{n-k}k!}{\lambda_1!\cdots\lambda_n!}y_1^{\lambda_1}\cdots y_n^{\lambda_n}$$

і

$$x_n=(-1)^{n-1}\mathrm{ddet}(F')=(-1)^{n-1}\frac{b^{n\{s\}}}{a^{n\{r\}}}\cdot\mathrm{ddet}\left(\frac{y_{i-j+1}}{y_{i-j}}\right)_{1\le j\le i\le n}=$$

$$=\frac{b^{n\{s\}}}{a^{n\{r\}}}\cdot\sum_{\substack{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n\\ \lambda_1+\ldots+\lambda_n=k}}\frac{(-1)^{k-1}k!}{\lambda_1!\cdots\lambda_n!}y_1^{\lambda_1}\cdots y_n^{\lambda_n}$$

є оберненими многочленами розбиттів до многочленів розбиттів (5) і (6) відповідно.

При цьому відповідно справджуються такі рекурентні співвідношення:

$$x_n=\frac{\left(b+(n-1)s\right)^{1\{s\}}}{\left(a+(n-1)r\right)^{1\{r\}}}y_1x_{n-1}-\frac{\left(b+(n-2)s\right)^{2\{s\}}}{\left(a+(n-2)r\right)^{2\{r\}}}y_2x_{n-2}+\ldots-(-1)^n\frac{b^{n\{s\}}}{a^{n\{r\}}}y_nx_0$$

і

$$x_n = -\frac{\left(b+(n-1)s\right)^{1\{s\}}}{\left(a+(n-1)r\right)^{1\{r\}}} x_{n-1} y_1 - \frac{\left(b+(n-2)s\right)^{2\{s\}}}{\left(a+(n-2)r\right)^{2\{r\}}} x_{n-2} y_2 - \ldots$$

$$\ldots - \frac{(b+s)^{(n-1)\{s\}}}{(a+r)^{(n-1)\{r\}}} x_1 y_{n-1} + \ldots + \frac{b^{n\{s\}}}{a^{n\{r\}}} x_0 y_n,$$

де $x_1 = \frac{b}{a} y_1$.

Зауваження. Якщо у теоремах 2, 3 підставити $a=1,\ r=1,\ b=1,\ s=0$ і $a=1,\ r=0,\ b=1,\ s=1$, то одержимо пари взаємно обернених многочленів з [7] (приклади 1 і 2 відповідно)

Література

1. Заторський Р.А. Многочлени розбиттів / Р.А.Заторський, В.М.Пилипів, С.Д.Стефлюк // Буковинський математичний журнал. – 2014. – Т. 2, № 1. – С. 43-47.
2. Заторський Р.А. Парадетермінанти і многочлени розбиттів / Р.А.Заторський // Укр. мат. журн. – 2008. – Т. 60, № 11. – С. 1457-1469.
3. Заторський Р.А. Парафункції матриць похилої структури і многочлени розбиттів / Р.А.Заторський // Наук. вісн. Чернівецького нац. ун-ту. Математика. – 2011. – Т. 1, № 4. – С. 59–66.
4. Заторський Р.А. Узагальнений факторіальний степінь та деякі його застосування / Р.А.Заторський, Т.П.Гой // Прикарпатський вісник НТШ. Серія «Число». – 2013. – № 1 (21). – С. 9-19.
5. Заторський Р.А. Числення трикутних матриць та його застосування / Р.А.Заторський. – Івано-Франківськ : Сімик, 2010. – 508 с.
6. Риордан Дж. Комбинаторные тождества / Дж. Риордан. – М.: Наука, 1982. – 256 с.
7. Стефлюк С.Д. Два класи взаємно обернених многочленів розбиттів / С.Д.Стефлюк // Карпатські математичні публікації. – 2012. – Т. 4, № 1. – С. 145-154.
8. Kachi Y. On the *m*-ary partition numbers / Yasuyuki Kachi, Pavlos Tzermias // Algebra and Discrete Mathematics. – 2015. – Vol. 19, № 1. – P. 67-76.
9. Zatorsky R. On one class of partition polynomials / R. Zatorsky, S. Stefluk // Algebra and Discrete Mathematics. – 2013. – V. 16, № 1. – P. 127-133.

Стаття поступила в редакційну колегію 4.01.2016 р.
Рекомендовано до друку д.ф.-м.н., професором ***Загороднюком А.В.***
д.ф.-м.н., професором ***Григорчуком Р.І.*** *(США)*

ON ONE CLASS OF MUTUALLY INVERSE PARTITION POLYNOMIALS

T. P. Goy, R. A. Zatorsky

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University;
76018, Ivano-Frankivsk, Shevchenko str., 57;
e-mail: tarasgoy@yahoo.com, romazatorsky@gmail.com

We study a class of mutually inverse partition polynomials, which are represented as a functions of some triangular matrices.

Key words: *triangular matrix, polynomial partitions, paradeterminat, parapermanent.*