15. Икрамов Х.Д. Итерационные методы // Мат. энциклопедия. – М.: Сов. энциклопедия, 1979. – Т. 2. – Стб. 686-689.
16. Бендат Дж.С. Измерение и анализ случайных процессов / Дж.С. Бендат, А.Г. Пирсол; пер. с англ. Г.В.Матушевского, В.Е.Привальского; под ред. И.Н.Коваленко. – М.: Мир, 1971. – 408 с. – Перевод за изд.: Measurement and analysis of random data / Julius S. Bendat, Allan G. Piersol. – John Wiley and Sons, Inc. – New York-London-Sydney, 1967.: ил., табл. – Предмет. указатель: с. 403-408. – Библиогр.: с. 400-402 (59 наименов.).

Автори висловлюють щиру подяку к.х.н., доценту Мідак Л.Я. за цінні зауваження, консультації та допомогу при підготовці статті до друку.

Стаття поступила до редакції 22.04.2008 р.; прийнята до друку 12.05.2008 р.

Сіренко О.Г. – провідний інженер відділу природної флори;
Кузишин О.В. – асистент кафедри теоретичної і прикладної хімії, магістр.

Рецензент: кандидат хімічних наук Мідак Л.Я., доцент кафедри теоретичної і прикладної хімії Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника.

УДК 62.50; 57.087.1

МОДЕЛІ РОЗПОДІЛУ ОСОБИН НА ПРОБНИХ ПЛОЩАХ: 2. СТАТИСТИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ. ДИСПЕРСІЙНИЙ АНАЛІЗ (СТАТИСТИЧНА РІВНІСТЬ РЯДУ ГЕНЕРАЛЬНИХ ДИСПЕРСІЙ)

О.Г. Сіренко [1], О.В. Кузишин [2]

[1]Національний ботанічний сад ім. М.М. Гришка Національної Академії Наук України,
вул. Тімірязєвська, 1, Київ, 01014, Україна
[2]Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,
вул. Шевченка, 57, Івано-Франківськ, 76025, Україна

Приведені статистичні характеристики просторового розподілу кедра і ялини на пробних площах, закладених за двома схемами для чорнично-зеленомохової (асоціація I) та сфагнової (асоціація II) структур. Виявлені кореляційні зв'язки між параметрами просторового розподілу особин. Обґрунтовано надійність визначення закону просторового розподілу особин за показником ступеня просторової агрегації та інших показників. Показана можливість опису просторового розподілу особин за нормальним законом Ґаусса.

Ключові слова: *кедр, ялина, пробна площа, елементарна комірка, асоціація, особина, середнє арифметичне, дисперсія, середнє квадратичне відхилення, коефіцієнт варіації, ступінь просторової агрегації, начальний момент, центральний момент, показник асиметрії, показник ексцесу, вибіркова сукупність, генеральна сукупність, коефіцієнт кореляції, нормальний розподіл Ґаусса.*

Sirenko O.H., KuzyshynO.V. The models of species' distribution on the test area: statistic characterisctics, dispersive analysis. *Statistic characterisctics of steric distribution of cedar and spruce on the test areas are illustrated. The correlation relation of steric distribution of species has been found. The reliability of determining the low of steric distribution of species with the degree of steric aggregation has been proved. Possibility of description of steric distribution of species with normal Gauss low is shown.*

Key words: *cedar, spruce, test area, elementary unit, association, species, average, variance, root-mean-square deviation, variation coefficient, degree of steric aggregation, initial moment, central moment, asymmetry factor, excess factor, random set, correlation coefficient, normal Gauss distribution.*

Вступ

Відомо [1-5], що за показники ступеня просторового розподілу особин на пробних площах приймають:

- показники подібності популяцій [1];
- показники фенетичної подібності [1];
- показники радіальної функції [2], за допомогою яких визначають моделі випадкового, групового та рівномірного (регулярного) розподілів на коловій пробній площі;
- показник ступеня просторової агрегації особин на квадратній пробній площі як відношення дисперсії до середньої величини ξ, при цьому при дійсно випадковому просторовому розподілі цей розподіл визначається за законом Пуассона для дискретних випадкових величин, коли дисперсія чисельно дорівнює середньому, а показник ξ=1, відхилення ξ від 1 приводить

до моделі регулярного (рівномірного) (ξ<1), або групового (плямистого, агрегаційного, контагіозного) (ξ>1) розподілів [4,5].

Недоліки застосування показників радіальних функцій та ступеня просторової агрегації ξ особин на пробних площах для визначення моделей розподілу проаналізовані в попередній статті, принаймні правдивість показника ξ у визначені моделі просторового розподілу особин залежить від лінійності дисперсії від величини пробної площі.

Загальна мета роботи полягала в тому, щоби за результатами дисперсійного, кореляційного та регресійного аналізів виявити зв'язок між параметрами просторового розподілу особин на пробних площах, придатність показника ступеня просторової агрегації особин ξ для визначення моделі просторового розподілу та використання моделі нормального розподілу Ґаусса для опису цього розподілу.

Мета роботи цього розділу полягала в розробці процедури творення сукупних пробних площ, розрахунку статистичних характеристик розподілу особин кедра та ялини на цих площах, закладених для двох ценотичних умов – асоціації I (чорнично-зеленомохової структури) та асоціації II (сфагнової структури) та двох схем (1 і 2), дисперсійному аналізі статистичної рівності ряду генеральних дисперсій особин кедра та ялини, розподілених на цих площах.

Експериментальна частина

Об'єкт дослідження: сосна кедрова європейська (Pinus cembra L.) альпійсько-карпатського виду (далі кедр) та ялина звичайна (Picea abies) (далі ялина). Стадії розвитку кедра: j – ювенільна; im (im_1, im_2) – іматурна (іматурна 1, іматурна 2); v (v_1, v_2) – віргінільна (віргінільна 1, віргінільна 2); g (g_1, g_2, g_3) – генеративна (генеративна 1, генеративна 2, генеративна 3); S – сенільна; ks – квазісенільна.

Пробна площа. Досліджували кедровососново-ялиновий ліс. Сукупні пробні площі були закладені в однакових ценотичних умовах – чорнично-зеленомохової (асоціації I) та сфагнової (асоціації II), що часто зустрічається при аналізі результатів експериментів, за двома схемами (рис. 1; табл. 1-5):

- **схема 1**: коли площі об'єднують, а число елементарних комірок лишається сталим (N=4) при зростанні їх розмірів;
- **схема 2**: коли площі об'єднують так, що кількість елементарних комірок N зростає від 4 до 36 або від 4 до 12 (а при утворенні пробних площ за таблицею випадкових чисел від 4 до 256) при сталому розмірі елементарної комірки (12,5× 12,5 м).

Вихідна базова пробна площа F_1 = 25 м × 25 м = 625 м^2, яка мала 4 елементарні комірки розміром F_0 = 12,5 м × 12,5 м= 156,25 м^2, у які за результатами досліджень попадала (а за таблицею випадкових чисел [6-8] була розміщена) певна кількість особин (кедра, ялини) кожної з двох ценотичних структур:

- **асоціації I** (чорнично-зеленомохової структури), пробні площі: 10/2; 10/2+1/4; 10/2+1/4+1/3; 10/2+1/4+1/3+2/1; 10/2+1/4+1/3+2/1+2/2; 10/2+1/4+1/3+2/1+2/2+2/3; 10/2+1/4+1/3+2/1+2/2+2/3+2/4; 10/2+1/4+1/3+2/1+2/2+2/3+2/4+2/5; 10/2+1/4+1/3+2/1+2/2+2/3+2/4+2/5+7/1 (табл. 1-4);
- **асоціації II** (сфагнової структури), пробні площі: 1/1; 1/1+7/4; 1/1+7/4+6/1 (табл. 1-4).

Дані вихідні пробні площі та площі 7/2, 7/3, 10/1, 5/2, 3/1, 1/2, 4,1 також піддавались аналізу без об'єднання у сукупні.

Розміри сукупних пробних площ зростали: від F_1 = 625 м^2 до F_9 = 5625 м^2 (9 об'єднань) для асоціації I; від F_1 = 625 м^2 до F_3 = 1875 м^2 (3 об'єднання) для асоціації II (табл. 1-4), а при застосуванні таблиці випадкових чисел [6-8] – від F_1 = 625 м^2 (25 м×25 м) до F_{11} = 40000 м^2 (200 м×200 м) (11 об'єднань) (табл. 5, 6).

Із таблиці випадкових чисел [6-8] вибирали числа – кількість особин 1-21 (для кедра) та 0-22 (для ялини) – за строками або графами і поміщали в елементарні комірки за схемою 2 послідовно за строками або графами сукупної пробної площі або випадковим чином (теж вибираючи числа за строками або графами з таблиці випадкових чисел) при нумерації строк таблиці сукупної пробної поверхні, або за «лотерейною грою». У всіх випадках результати відрізнялися менше, ніж на 1,5%. У подальших дослідженнях із таблиці випадкових чисел [6-8] вибирали числа – кількість особин 1-21 (для кедра) та 0-22 (для ялини) – за строками, поміщаючи числа в елементарні комірки за схемою 2 послідовно за строками.

Статистичний аналіз. За кількістю особин (кедра або ялини) на пробній площі розраховували такі характеристики вибіркового розподілу [8-30]:

1. Вибіркові числові (точкові) характеристики:

- вибіркову середню арифметичну $\bar{x}$ [9]:

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \text{, [од.],} \tag{1}$$

де N – кількість елементарних комірок;

x_i – кількість особин в і-й комірці;

$\sum_{i=1}^{N} x_i$ - кількість особин в N- комірках;

- вибіркову дисперсію S^2 [9]:

$$S^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{N-1}\left[\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - N(\overline{x})^2\right], \text{[од.}^2\text{]}; \tag{2}$$

- вибіркове середнє квадратичне відхилення S [9]:

$$S = +\sqrt{S^2}\ \text{, [од.]}; \tag{3}$$

- вибірковий коефіцієнт варіації γ [9]:

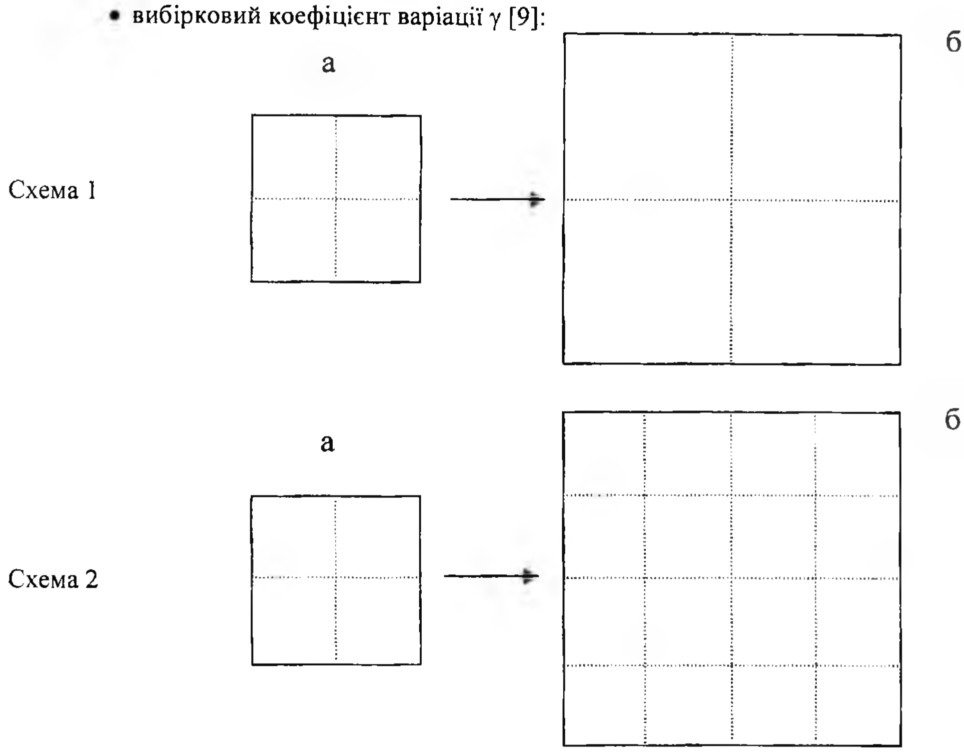

Рис. 1.Дві схеми об'єднання вихідних базових пробних площ:

а) вихідна базова поверхня; б)об'єднана поверхня.

$$\gamma = \frac{S}{\overline{x}}\ \text{[безрозм.]};\ \left(\frac{S}{\overline{x}}100, \%\right); \tag{4}$$

- квадрат вибіркового коефіцієнта варіації γ^2:

$$\gamma^2 = \left(\frac{S}{\overline{x}}\right)^2, \text{[безрозм.]}; \tag{5}$$

- вибірковий показник ступеня просторової агрегації ξ [1-5]:

$$\xi = \frac{S^2}{\overline{x}}, \text{[од.]}. \tag{6}$$

2. Узагальнені (степеневі) вибіркові характеристики:

- вибірковий начальний момент k-го порядку – узагальнена вибіркова середня h_k [9]:

$$h_k = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^k, \tag{7}$$

де k= 1, 2, 3, 4; h_1 [од.]; h_2 [од.^{2}]; h_3[од.^{3}]; h_4[од.^{4}] – вибіркові начальні моменти 1-го, 2-го, 3-го, 4-го порядку відповідно;

- вибірковий центральний момент k-го порядку – узагальнене вибіркове розсіяння m_k [8]:

$$m_k = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^k, \tag{8}$$

де k= 1, 2, 3, 4; m_1 [од.]; m_2 [од.^{2}]; m_3[од.^{3}]; m_4[од.^{4}] – вибіркові центральні моменти 1-го, 2-го, 3-го та 4-го порядку відповідно, а також за формулами [9]:

$$m_1=h_1-h_1; \tag{9}$$
$$m_2=h_2-h_1^2;$$
$$m_3=h_3-3h_2h_1+2h_1^3; \tag{10}$$
$$m_4=h_4-4h_3h_1+6h_2h_1^2-3h_1^4. \tag{11}$$

3. Вибірковий показник асиметрії розподілу as [9]:

$$as=\frac{m_3}{m_2^{3/2}},\ [\text{безрозм.}]; \tag{12}$$

його вибірковий нормований коефіцієнт розподілу β_1 [8]:

$$\beta_1=\frac{m_3^2}{m_2^3},\ [\text{безрозм.}], \tag{13}$$

та середнє квадратичне відхилення S_{as} [9]:

$$S_{as}=\left[\frac{6(N-1)}{(N+1)(N+3)}\right]^{1/2}. \tag{14}$$

4. Вибірковий показник ексцесу (стрімкості) розподілу ex [9]:

$$ex=\frac{m_4}{m_2^2}-3,\ [\text{безрозм.}]; \tag{15}$$

його вибірковий нормований коефіцієнт β_2 [8]:

$$\beta=\frac{m_4}{m_2^2},\ [\text{безрозм.}]; \tag{16}$$

та його середнє квадратичне відхилення S_{ex} [9]:

$$S_{ex}=\left[\frac{24(N-2)(N-3)N}{(N-1)^2(N+3)(N+5)}\right]^{1/2}. \tag{17}$$

5. Вибіркові характеристики вважали показними, ефективними, незміщеними та обґрунтованими (переконливими) оцінками генеральних характеристик [9, 10]:

- математичного сподівання μ (генеральної середньої) [9]:

$$\bar{x}\xrightarrow{\text{оцінка}}\mu=\int_{-\infty}^{\infty}x_i\varphi(x)dx, \tag{18}$$

де $\varphi(x)=\frac{dF(x)}{dx}$ – щільність ймовірності розподілу;

$F(x)=P(X<x_i)$ –функція розподілу – ймовірність появи значення x_i > X в і-й комірці;

X – випадкова величина – кількість особин на пробній площі;

далі стрілка → рівноцінна слову «оцінка»;

- генеральної дисперсії σ^2 [9]:

$$S^2\to\sigma^2=\int_{-\infty}^{\infty}(x_i-\mu)^2\varphi(x)dx; \tag{19}$$

- генерального середнього квадратичного відхилення σ [9]:

$$S\to\sigma=+\sqrt{\sigma^2}; \tag{20}$$

- генерального коефіцієнта варіації υ[9]:

$$\gamma\to\upsilon=\frac{\sigma}{\mu}; \tag{21}$$

- квадрата генерального коефіцієнта варіації υ^2:

$$\gamma^2=\left(\frac{S}{\bar{x}}\right)^2\to\left(\frac{\sigma}{\mu}\right)^2=\upsilon^2; \tag{22}$$

- генерального показника ступеня просторової агрегації E [1-5]:

$$\xi = \frac{S^2}{\bar{x}} \to E = \frac{\sigma^2}{\mu}; \tag{23}$$

- генерального начального моменту k-го порядку H_k [9]:

$$h_k \to H_k = \int_{-\infty}^{\infty} x_i^k \varphi(x) dx; \tag{24}$$

- генерального центрального моменту k-го порядку M_k [9]:

$$m_k \to M_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - \mu)^k \varphi(x) dx; \tag{25}$$

- генерального показника асиметрії розподілу As [9]:

$$as \to As = \frac{M_3}{M_2^{3/2}}; \tag{26}$$

його генерального нормованого коефіцієнта розподілу B_1 [8]:

$$\beta_1 \to B_1 = \frac{M_3^2}{M_2^3}; \tag{27}$$

та його генерального середнього квадратичного відхилення σ_{As} [9]:

$$S_{as} \to \sigma_{As} = \left[\frac{6(N^* - 1)}{(N^* + 1)(N^* + 3)}\right]^{1/2}, \tag{28}$$

де $N^* >> N$;

- генерального показника ексцесу розподілу Ex [9]:

$$ex \to Ex = \frac{M_4}{M_2^2} - 3; \tag{29}$$

його генерального нормованого коефіцієнта B_2 [8]:

$$\beta_2 \to B_2 = \frac{M_4}{M_2^2}; \tag{30}$$

та його генерального середнього квадратичного відхилення σ_{Ex}:

$$S_{ex} \to \sigma_{Ex} = \left[\frac{24(N^* - 2)(N^* - 3)N^*}{(N^* - 1)^2(N^* + 3)(N^* + 5)}\right]^{1/2}, \tag{31}$$

де $N^* >> N$.

6. Інтервальні оцінки генеральних характеристик за вибірковими характеристиками (довірча ймовірність і довірчий інтервал):

1) **математичного сподівання** [10]:

- **довірчий інтервал** [вираз у квадратних дужках], що характеризує точність результату [10]:

$$\left[\left(\bar{x} - \frac{S \cdot t_T\{f; \alpha/2\}}{\sqrt{N}}\right) \le \mu < \left(\bar{x} + \frac{S \cdot t_T\{f; \alpha/2\}}{\sqrt{N}}\right)\right], \tag{32}$$

де f = (N-1) – число ступенів вільностей;

$t_T\{f; \alpha/2\}$ – значення критерію Стьюдента, вибраного з таблиці розподілу Стьюдента [8, 10] для числа ступенів вільностей f = (N-1) та ймовірності $p = \alpha/2$;

- **довірча ймовірність**, що характеризує надійність результату [10]:

$$P\left[\left(\bar{x} - \frac{S \cdot t_T\{f; \alpha/2\}}{\sqrt{N}}\right) \le \mu < \left(\bar{x} + \frac{S \cdot t_T\{f; \alpha/2\}}{\sqrt{N}}\right)\right] = 1 - \alpha, \tag{33}$$

де α = (1 – P) – рівень значущості – максимальна ймовірність того, що ми ризикуємо побудувати неправдиві довірчі інтервали і зробити неправдиві висновки – найбільша ймовірність того, що результат не попаде в побудований довірчий інтервал (приймаємо $\alpha = 0{,}05$ та $\alpha = 0{,}01$);

$P = (1-\alpha)$ – найменша ймовірність того, що результат правдиво попадає в побудований довірчий інтервал, тобто генеральна числова характеристика з високим рівнем ймовірності зустрінеться в довірчому інтервалі (приймаємо $P = 0{,}95$ та $P = 0{,}99$);

2) **генеральної дисперсії** [10]:

- **довірча ймовірність**

$$P\left[\left(Z_1^2 S^2 \frac{f}{f+1}\right) \le \sigma^2 < \left(Z_2^2 S^2 \frac{f}{f+1}\right)\right] = 1-\alpha, \tag{34}$$

де Z_1, Z_2 $\{N, P\}$ вибирається з табл. П.7 [8] для N кількості елементарних комірок та довірчої ймовірності P [8];

$f = N - 1$;

у квадратних дужках – довірчий інтервал; або

- **довірча ймовірність**

$$P\left[\left(\frac{f \cdot S^2}{\chi_T^2\{f, \alpha/2\}}\right) \le \sigma^2 < \left(\frac{f \cdot S^2}{\chi_T^2\{f, (1-\alpha/2)\}}\right)\right] = 1-\alpha, \tag{35}$$

де χ_T^2 – значення критерію хі-квадрат (критерію Пірсона), вибраного з таблиці розподілу Пірсона [8, 10] для числа ступенів вільностей $f = (N-1)$ та ймовірностей $p = \alpha/2$ та $p = 1 - \alpha/2$;

у квадратних дужках – довірчий інтервал;

3) **генерального середнього квадратичного відхилення** [10]:

- **довірча ймовірність**

$$P\left[\left(Z_1 \cdot S\sqrt{\frac{f}{f+1}}\right) \le \sigma < \left(Z_2 \cdot S\sqrt{\frac{f}{f+1}}\right)\right] = 1-\alpha \text{ ; або} \tag{36}$$

$$P\left[\left(\frac{S\sqrt{f}}{\sqrt{\chi_T^2\{f, \alpha/2\}}}\right) \le \sigma < \left(\frac{S\sqrt{f}}{\sqrt{\chi_T^2\{f, (1-\alpha/2)\}}}\right)\right] = 1-\alpha. \tag{37}$$

де у квадратних дужках – довірчий інтервал;

4) **генерального коефіцієнта варіації**

- **довірча ймовірність**

$$P\left[\left(\frac{\gamma}{1 + t_T\{f, \alpha/2\}\sqrt{\frac{1+2\gamma^2}{2f}}}\right) \le \upsilon < \left(\frac{\gamma}{1 - t_T\{f, \alpha/2\}\sqrt{\frac{1+2\gamma^2}{2f}}}\right)\right] = 1-\alpha, \tag{38}$$

де у квадратних дужках – довірчий інтервал;

$t_T\{f, \alpha/2\}$ – значення критерію Стьюдента, вибраного з таблиці розподілу Стьюдента [8, 10] для числа ступенів вільностей $f = (N-1)$ та ймовірності $p = \alpha/2$.

II. Результати та обговорення

Результати розрахунків числових статистичних характеристик сукупних пробних площ ялини та кедра, закладених за схемами 1 і 2 для асоціацій І і ІІ, зведені в табл. 1-4. Результати розрахунків статистичних характеристик сукупних пробних площ для ялини та кеда, утворених за схемою 2 за таблицею випадкових чисел від 0 до 22 (для ялини) та 1-21 (для кедра) для моделі асоціації І, зведені в табл. 5 і 6.

1. Дисперсійний аналіз: статистична рівність ряду генеральних дисперсій.

1.1. Як видно з табл. 1, 3, вибіркова дисперсія особин S_i^2 змінюється: від 0,917 до 53,667 од.^{2} (для ялини) та від 3,667 до 102,67 од.^{2} (для кедра) для асоціації І в межах сукупних пробних площ 625-5625 м^2, закладених за схемою 1 (k=9) та від 4,667 до 6,0 од.^{2} (для ялини) і від 14,92 до 48,25 од.^{2} (для кедра) для асоціації ІІ в межах сукупних пробних площ 625-1875 м^2, закладених за схемою 1 (k=3).

Як видно з табл. 2, 4, вибіркова дисперсія особин S_i^2 змінюється: від 4,333 до 20,232 од.^{2} (для ялини) та від 8,917 до 31,289 од.^{2} (для кедра) для асоціації І в межах сукупних пробних площ 625-5625 м^2, закладених за схемою 2 (k=9) та від 5,071 до 6,083 од.^{2} (для ялини) і від 6,13 до 8,5 од.^{2} (для кедра) для асоціації II в межах сукупних пробних площ 625-1875 м^2, закладених за схемою 2 (k=3).

Як видно з табл. 5, 6, вибіркова дисперсія особин S_i^2 змінюється: від 39,829 до 56,696 од.^{2} (для ялини) та від 34,201 до 51,696 од.^{2} (для кедра) для математичної моделі асоціації I в межах сукупних пробних площ 625-40.000 м^2, утворених за схемою 2 (k=11) за таблицею випадкових чисел.

1.2. Статистична рівність ряду генеральних дисперсій. Перевірка нульової гіпотези H_o: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_i^2 = \ldots = \sigma_k^2$ про рівність ряду генеральних дисперсій особин ялини та кедра за оцінками вибіркових дисперсій $S_1^2, S_2^2, \ldots, S_i^2, \ldots, S_k^2$ відповідно дала такі результати:

1. **Ялина (схема 1, асоціація I) (табл. 1) k=9**:

- **За критерієм Фішера** [9]:

$$F_p = \frac{S^2_{i\,max}}{S^2_{i\,min}} = \frac{S_9^2}{S_5^2} = \frac{53,667}{0,917} = 58,525. \tag{39}$$

Табличне значення критерію Фішера [8, 10]:

для $\alpha = 0,01$ $F_{0,01} = F_T\{\alpha = 0,01;\ f_9 = 4-1 = 3;\ f_5 = 4-1 = 3\} = 29,46$;

для $\alpha = 0,05$ $F_{0,05} = F_T\{\alpha = 0,05;\ f_9 = 4-1 = 3;\ f_5 = 4-1 = 3\} = 9,28$.

Таким чином, маємо нерівності: $F_P > F_{0,01}$ та $F_P > F_{0,05}$, що дає підстави відкинути H_o з рівнем значущості $\alpha = 0,01$ та $\alpha = 0,05$ за критерієм Фішера, при цьому, ступінь нерівності ряду генеральних дисперсій особин ялини за схемою 1, асоціації I становить:

$$\dot{\xi}_\alpha = \frac{F_p}{F_\alpha} = \frac{F_p}{F_T}; \tag{40}$$

- для $\alpha = 0,01$ $\dot{\xi}_{0,01} = \frac{F_P}{F_{0,01}} = \frac{58,525}{29,46} = 1,987$; для $\alpha = 0,05$ $\dot{\xi}_{0,05} = \frac{F_P}{F_{0,05}} = \frac{58,525}{9,28} = 6,307$.

Але значна розкиданість вибіркових дисперсій (табл. 1) у ряду $S_1^2 \ldots S_9^2$ (0,9; 4,3; 12,3 … 15,3; 26,9…57,5) зменшує надійність висновків за співвідношенням $S^2_{i\,max}/S^2_{i\,min}$, тобто за критерієм Фішера. Тому перевірку H_o необхідно зробити також за критеріями Кохрана і Бартлета.

- **За критерієм Кохрана** [9, 11]:

$$G_p = \frac{S^2_{i\,max}}{\sum\limits_{i=1}^{k=9} S_i^2} = \frac{53,667}{228,337} = 0,2350. \tag{41}$$

Табличне значення критерію Кохрана $G_\alpha = G_T$ для числа дисперсій k=9, обсягу кожної виборки $N_i = 4$ та рівня значущості α дорівнює [8]:

- для $\alpha = 0,01$ $G_{0,01} = G_T\{\alpha = 0,01;\ k=9;\ N_i = 4\} = 0,4316$;
- для $\alpha = 0,05$ $G_{0,05} = G_T\{\alpha = 0,05;\ k=9;\ N_i = 4\} = 0,3643$.

Так як для ялини $G_p < G_{0,01}$ і $G_p < G_{0,05}$, то гіпотеза H_o про рівність ряду генеральних дисперсій (однорідність ряду вибіркових дисперсій) приймається з рівнями значущості $\alpha = 0,01$ ($p = 1 - \alpha = 0,99$) та $\alpha=0,05$ ($p = 0,95$) за критерієм Кохрана, при цьому, ступінь рівності ряду генеральних дисперсій особин для ялини за схемою 1, асоціації I становить:

$$\dot{\xi}_\alpha = \frac{G_T}{G_p} = \frac{G_\alpha}{G_p}; \tag{42}$$

- для $\alpha = 0,01$ $\dot{\xi}_{0,01} = \frac{G_{0,01}}{G_p} = \frac{0,4316}{0,2350} = 1,837$,

- для $\alpha = 0,05$ $\dot{\xi}_{0,05} = \frac{G_{0,05}}{G_p} = \frac{0,3643}{0,2350} = 1,550$.

- **За критерієм Бартлета** [9]:

Так як для схеми 2 обсяг виборок змінюється від $N_i = 4$ до 36 (для асоціації I) та від $N_i = 4$ до 12 (для асоціації II), то перевірку H_o рівності генеральних дисперсій σ_i^2 (однорідності вибіркових дисперсій S_i^2) для схеми 1 виконаємо також і за критерієм Бартлета (хі-квадрат) у формі [9]:

$$\chi^2_\alpha = \chi^2_p = \frac{1}{c}\left[f_2 \lg S^2 - \sum_{i=1}^{k}\left(f_i \lg S_i^2\right)\right], \tag{43}$$

Таблиця 1. Числові статистичні характеристики сукупних пробних площ ялини, закладених за схемою 1.

k	Сукупні пробні площі	N_i	F_i [м^2]	$\sum_{j=1}^{N_i} x_{ij}$	$\bar{x}_i$ [од.]	S_i^2 [од.^{2}]	S_i [од.]	$\gamma_i = \frac{S_i}{\bar{x}_i}$	$\left(\frac{S_i}{\bar{x}_i}\right)^2$	$\frac{S_i^2}{\bar{x}_i}$ [од.]
Асоціація I										
1	10/2	4	625	18	4,500	4,333	2,082	0,463	0,214	0,963
2	10/2+1/4	4	1250	40	10,000	35,333	5,944	0,594	0,353	3,533
3	10/2+1/4+1/3	4	1875	53	13,250	40,920	6,397	0,483	0,233	3,088
4	10/2+1/4+1/3+2/1	4	2500	73	18,250	26,917	5,188	0,284	0,081	1,475
5	10/2+1/4+1/3+2/1+ +2/2	4	3125	127	31,750	0,917	0,957	0,030	0,001	0,029
6	10/2+1/4+1/3+2/1+ +2/2+2/3	4	3750	160	40,000	15,333	3,916	0,098	0,010	0,383
7	10/2+1/4+1/3+2/1+ +2/2+2/3+2/4	4	4375	197	49,250	12,250	3,500	0,071	0,005	0,249
8	10/2+1/4+1/3+2/1+ +2/2+2/3+2/4+2/5	4	5000	216	54,000	38,667	6,218	0,115	0,013	0,716
9	10/2+1/4+1/3+2/1+ +2/2+2/3+2/4+2/5+7/1	4	5625	230	57,500	53,667	7,326	0,127	0,016	0,933
Асоціація II										
1	1/1	4	625	24	6,000	6,000	2,450	0,408	0,167	1,000
2	1/1+7/4	4	1250	52	13,000	4,667	2,160	0,166	0,028	0,359
3	1/1+7/4+6/1	4	1875	63	15,750	4,917	2,217	0,141	0,020	0,312

Таблиця 2. Числові статистичні характеристики сукупних пробних площ ялини, закладених за схемою 2.

k	Сукупні пробні площі	N_i	F_i [м^2]	$\sum_{j=1}^{N_i} x_{ij}$	$\bar{x}_i$ [од.]	S_i^2 [од.^{2}]	S_i [од.]	$\gamma_i = \frac{S_i}{\bar{x}_i}$	$\left(\frac{S_i}{\bar{x}_i}\right)^2$	$\frac{S_i^2}{\bar{x}_i}$ [од.]
Асоціація I										
1	10/2	4	625	18	4,500	4,333	2,082	0,463	0,214	0,963
2	10/2+1/4	8	1250	40	5,000	10,571	3,251	0,650	0,423	2,114
3	10/2+1/4+1/3	12	1875	53	4,417	8,629	2,938	0,665	0,442	1,954
4	10/2+1/4+1/3+2/1	16	2500	73	4,563	7,063	2,658	0,583	0,339	1,548
5	10/2+1/4+1/3+2/1+ +2/2	20	3125	127	6,350	22,029	4,694	0,739	0,546	3,469
6	10/2+1/4+1/3+2/1+ +2/2+2/3	24	3750	160	6,667	20,232	4,498	0,675	0,455	3,035
7	10/2+1/4+1/3+2/1+ +2/2+2/3+2/4	28	4375	197	7,036	19,517	4,418	0,628	0,394	2,774
8	10/2+1/4+1/3+2/1+ +2/2+2/3+2/4+2/5	32	5000	216	6,750	19,871	4,458	0,660	0,436	2,944
9	10/2+1/4+1/3+2/1+ +2/2+2/3+2/4+2/5+7/1	36	5625	230	6,389	18,816	4,338	0,679	0,461	2,945
Асоціація II										
1	1/1	4	625	24	6,000	6,000	2,450	0,408	0,167	1,000
2	1/1+7/4	8	1250	38	4,750	5,071	2,252	0,474	0,225	1,068
3	1/1+7/4+6/1	12	1875	49	4,083	6,083	2,466	0,604	0,365	1,490

де $c = \frac{1}{\ln 10}\left\{1 + \frac{1}{3f_1}\left[\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{1}{f_i}\right) - \frac{1}{f_2}\right]\right\};$ (44)

$$f_2 = \left(\sum_{i=1}^{k} N_i\right) - k; \tag{45}$$

$$S^2 = \sum_{i=1}^{k}(f_i \cdot S_i^2) \Big/ f_2 \quad ; \tag{46}$$

$f_i = (N_i - 1)$ – число ступенів вільностей i-ої сукупної пробної площі; (47)

$f_1 = (k - 1)$; (48)

k – число дисперсій (число сукупних пробних площ).

Розрахунки χ_p^2 за схемою 1 (табл. 1) для асоціації I для ялини привели до таких результатів: k=9; N_i = 4 = const; $f_1 = (k-1)$ =9 – 1 = 8; $f_2 = \left(\sum_{i=1}^{k} N_i\right) - k$ = 36 – 9 =27; $f_i = (N_i - 1)$ = 4 – 1 = 3 = const; c = 0,4879; S^2 = 25,3708 од.^{2}; χ_p^2 = 11,430.

Табличне значення критерію Пірсона $\chi_\alpha^2 = \chi_T^2$ для рівня значущості α і числа ступенів вільностей $f_1 = 8$ дорівнює [10]:

- для α = 0,01 $\chi_{0,01}^2 = \chi_T^2\ \{\alpha = 0,01;\ f_1 = 8\} = 20,09$;
- для α = 0,05 $\chi_{0,05}^2 = \chi_T^2\ \{\alpha = 0,05;\ f_1 = 8\} = 15,51$.

Так як для ялини $\chi_p^2 < \chi_{0,01}^2$ та $\chi_p^2 < \chi_{0,05}^2$, то гіпотеза H_o підтверджується з рівнями значущості α = 0,01 і α = 0,05 за критерієм Бартлета, як і при застосуванні критерію Кохрана, при цьому, ступінь рівності ряду генеральних дисперсій особин ялини за схемою 1 асоціації I становить:

$$\xi_\alpha = \frac{\chi_T^2}{\chi_p^2} = \frac{\chi_\alpha^2}{\chi_p^2}; \tag{49}$$

- для α = 0,01 $\xi_{0,01} = \dfrac{\chi_{0,01}^2}{\chi_p^2} = \dfrac{20,09}{11,43} = 1,758$,
- для α = 0,05 $\xi_{0,05} = \dfrac{\chi_{0,05}^2}{\chi_p^2} = \dfrac{15,51}{11,43} = 1,357$.

2. **Ялина (схема 1, асоціація II) (табл. 1) k=3**:

- **За критерієм Фішера** [9]:

$$F_P = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{6,0}{4,667} = 1,286. \tag{50}$$

Табличне значення критерію Фішера [8, 10]:

- для α = 0,01 $F_{0,01} = F_T\{\alpha = 0,01;\ f_1 = 4 - 1 = 3;\ f_2 = 4 - 1 = 3\} = 29,46$;
- для α = 0,05 $F_{0,05} = F_T\{\alpha = 0,05;\ f_1 = 3;\ f_2 = 3\} = 9,28$.

Таким чином, маємо нерівності: $F_P < F_{0,01}$ та $F_P < F_{0,05}$, що дає підстави прийняти H_o про рівність ряду генеральних дисперсій з α = 0,01 та α = 0,05 за критерієм Фішера, при цьому, ступінь рівності ряду генеральних дисперсій особин ялини за схемою 1, асоціації II:

- для α = 0,01 $\xi_{0,01} = \dfrac{F_{0,01}}{F_P} = \dfrac{29,46}{1,286} = 22,908$;
- для α = 0,05 $\xi_{0,05} = \dfrac{F_{0,05}}{F_P} = \dfrac{9,28}{1,286} = 7,216$.

- **За критерієм Кохрана** [9]:

Перевірка H_o про рівність ряду генеральних дисперсій за схемою 1 асоціації II (табл. 1) (k = 3) за критерієм Кохрана [9] дала такі результати:

$$G_p = \frac{S_{i\,max}^2}{\sum_{i=1}^{k=3} S_i^2} = \frac{6}{15,584} = 0,3850. \tag{51}$$

Таблиця 3. Числові статистичні характеристики сукупних пробних площ кедра, утворених за схемою 1.

k	Сукупні пробні площі	N_i	F_i [м^2]	$\sum_{j=1}^{N_i} x_{ij}$	$\bar{x}_i$ [од.]	S_i^2 [од.^{2}]	S_i [од.]	$\gamma_i = \frac{S_i}{\bar{x}_i}$	$\left(\frac{S_i}{\bar{x}_i}\right)^2$	$\frac{S_i^2}{\bar{x}_i}$ [од.]
				Асоціація I						
1	10/2	4	625	41	10,250	8,917	2,986	0,291	0,085	0,870
2	10/2+1/4	4	1250	62	15,500	3,667	1,915	0,124	0,015	0,237
3	10/2+1/4+1/3	4	1875	74	18,500	3,667	1,915	0,104	0,011	0,198
4	10/2+1/4+1/3+2/1	4	2500	102	25,500	3,667	1,915	0,075	0,006	0,144
5	10/2+1/4+1/3+2/1+ +2/2	4	3125	162	40,500	51,000	7,141	0,176	0,031	1,259
6	10/2+1/4+1/3+2/1+ +2/2+2/3	4	3750	208	52,000	102,670	10,133	0,195	0,038	1,974
7	10/2+1/4+1/3+2/1+ +2/2+2/3+2/4	4	4375	239	59,750	32,250	5,679	0,095	0,009	0,540
8	10/2+1/4+1/3+2/1+ +2/2+2/3+2/4+2/5	4	5000	273	68,250	56,250	7,500	0,110	0,012	0,824
9	10/2+1/4+1/3+2/1+ +2/2+2/3+2/4+2/5+7/1	4	5625	298	74,500	97,000	9,849	0,132	0,018	1,302
				Асоціація II						
1	1/1	4	625	34	8,500	19,000	4,359	0,513	0,263	2,235
2	1/1+7/4	4	1250	49	12,250	14,920	3,862	0,315	0,099	1,218
3	1/1+7/4+6/1	4	1875	67	16,750	48,250	6,946	0,415	0,172	2,881

Таблиця 4. Числові статистичні характеристики сукупних пробних площ кедра, закладених за схемою 2.

k	Сукупні пробні площі	N_i	F_i [м^2]	$\sum_{j=1}^{N_i} x_{ij}$	$\bar{x}_i$ [од.]	S_i^2 [од.^{2}]	S_i [од.]	$\gamma_i = \frac{S_i}{\bar{x}_i}$	$\left(\frac{S_i}{\bar{x}_i}\right)^2$	$\frac{S_i^2}{\bar{x}_i}$ [од.]
				Асоціація I						
1	10/2	4	625	41	10,250	8,917	2,986	0,291	0,085	0,870
2	10/2+1/4	8	1250	62	7,750	17,929	4,234	0,546	0,299	2,313
3	10/2+1/4+1/3	12	1875	74	6,167	17,606	4,196	0,680	0,463	2,855
4	10/2+1/4+1/3+2/1	16	2500	102	6,375	13,850	3,722	0,584	0,341	2,173
5	10/2+1/4+1/3+2/1+ +2/2	20	3125	162	8,100	29,884	5,467	0,675	0,456	3,689
6	10/2+1/4+1/3+2/1+ +2/2+2/3	24	3750	208	8,667	29,536	5,435	0,627	0,393	3,408
7	10/2+1/4+1/3+2/1+ +2/2+2/3+2/4	28	4375	239	8,536	28,036	5,295	0,620	0,385	3,285
8	10/2+1/4+1/3+2/1+ +2/2+2/3+2/4+2/5	32	5000	273	8,531	31,289	5,594	0,656	0,430	3,668
9	10/2+1/4+1/3+2/1+ +2/2+2/3+2/4+2/5+7/1	36	5625	298	8,278	28,949	5,380	0,650	0,423	3,497
				Асоціація II						
1	1/1	4	625	34	8,500	19,000	4,359	0,513	0,263	2,235
2	1/1+7/4	8	1250	49	6,125	14,982	3,871	0,631	0,399	2,444
3	1/1+7/4+6/1	12	1875	67	5,583	12,810	3,579	0,641	0,411	2,296

Табличне значення критерію Кохрана для числа дисперсій k=3, обсягу кожної виборки N_i = 4 та рівня значущості α відповідає [8]:

- для $\alpha = 0{,}01$ $\quad G_{0,01} = G_T\{\alpha = 0{,}01; k=3; N_i = 4\} = 0{,}8335$;
- для $\alpha = 0{,}05$ $\quad G_{0,05} = G_T\{\alpha = 0{,}05; k=3; N_i = 4\} = 0{,}7457$.

Так як для ялини $G_p < G_{0,01}$ і $G_p < G_{0,05}$, то H_o приймаємо про рівність ряду генеральних дисперсій з рівнями значущості $\alpha = 0{,}01$ і $\alpha = 0{,}05$ за критерієм Кохрана, при цьому ступінь рівності ряду генеральних дисперсій особин ялини за схемою 1 асоціації II становить:

- для $\alpha = 0,01$ $\dot{\xi}_{0,01} = \frac{G_{0,01}}{G_p} = \frac{0,8335}{0,3850} = 2,165$;
- для $\alpha = 0,05$ $\dot{\xi}_{0,05} = \frac{G_{0,05}}{G_p} = \frac{0,7457}{0,3850} = 1,937$.

- **За критерієм Бартлета** [9]. Розрахунки χ_p^2 за критерієм Бартлета для ялини за схемою 1, асоціація II привели до таких результатів:

k=3; N_i = const = 4; $f_i = (N_i - 1) = 4 - 1 = 3$; $f_1 = (k - 1) = 4 - 1 = 3$; $f_2 = \left(\sum_{i=1}^{k} N_i\right) - k = 12 - 3 = 9$; c = 0,4986; $S^2 = 5,1947$ од.^{2}; $\chi_p^2 = 0,047$.

Табличні значення критерію $\chi_т^2$ [10]:

- для $\alpha = 0,01$ $\chi_{0,01}^2 = \chi_т^2\ \{\alpha = 0,01;\ f_1 = 2\} = 9,21$;
- для $\alpha = 0,05$ $\chi_{0,05}^2 = \chi_т^2\ \{\alpha = 0,05;\ f_1 = 2\} = 5,99$.

Так як $\chi_p^2 < \chi_т^2$ для $\alpha = 0,01$ та $\alpha = 0,05$, то для ялини H_o приймається з рівнем значущості $\alpha = 0,01$ і $\alpha = 0,05$ за критерієм Бартлета, при цьому, ступінь рівності ряду генеральних дисперсій особин ялини за схемою 1, асоціації II становить:

- для $\alpha = 0,01$ $\dot{\xi}_{0,01} = \frac{\chi_{0,01}^2}{\chi_p^2} = \frac{9,21}{0,047} = 195,96$;
- для $\alpha = 0,05$ $\dot{\xi}_{0,05} = \frac{\chi_{0,05}^2}{\chi_p^2} = \frac{5,99}{0,047} = 127,45$.

3. **Ялина (схема 2, асоціація I) (табл. 2) k=9**:
   - **За критерієм Фішера** [9]:

$$F_P = \frac{S_5^2}{S_1^2} = \frac{22,029}{4,333} = 5,084.$$

Табличне значення критерію Фішера [8, 10]:

- для $\alpha = 0,01$ $F_{0,01} = F_T\ \{\alpha = 0,01;\ f_5 = 19;\ f_1 = 3\} = 26,75$;
- для $\alpha = 0,05$ $F_{0,05} = F_T\ \{\alpha = 0,05;\ f_5 = 19;\ f_1 = 3\} = 8,665$.

Таким чином, маємо нерівності: $F_P < F_{0,01}$ та $F_P < F_{0,05}$, що дає підстави прийняти H_o про рівність генеральних дисперсій з рівнем значущості $\alpha = 0,01$ та $\alpha = 0,05$ за критерієм Фішера, при цьому ступінь рівності генеральних дисперсій особин ялини за схемою 2, асоціації I становить:

- для $\alpha = 0,01$ $\dot{\xi}_{0,01} = \frac{F_{0,01}}{F_P} = \frac{26,756}{5,084} = 5,262$;
- для $\alpha = 0,05$ $\dot{\xi}_{0,05} = \frac{F_{0,05}}{F_P} = \frac{8,665}{5,084} = 1,704$.

- **За критерієм Бартлета [9]:**

Перевірка H_o про рівність ряду генеральних дисперсій за схемою 2 для асоціації I (табл. 2) привела до таких результатів:

k=9; N_i = var = 3; 7; 11; 15; 19; 23; 27; 31; 35; $f_1 = 8$; $f_2 = 171$; c = 0,4492; $S^2 = 17,388$ од.^{2}; $\chi_p^2 = 10,510$.

Табличне значення критерію Пірсона $\chi_\alpha^2 = \chi_т^2\ \{\alpha;\ f_1\}$ дорівнює [10]:

- для $\alpha = 0,01$ $\chi_{0,01}^2 = \chi_т^2\ \{\alpha = 0,01;\ f_1 = 8\} = 20,09$;
- для $\alpha = 0,05$ $\chi_{0,05}^2 = \chi_т^2\ \{\alpha = 0,05;\ f_1 = 8\} = 15,51$.

Так як для ялини $\chi_p^2 < \chi_{0,01}^2$ та $\chi_p^2 < \chi_{0,05}^2$, то гіпотеза H_o про рівність ряду генеральних дисперсій особин ялини приймається для схеми 2 асоціації I з рівнем значущості $\alpha = 0,01$ і $\alpha = 0,05$ за критерієм Бартлета, при цьому, ступінь рівності ряду генеральних дисперсій особин ялини за схемою 2, асоціації I становить:

- для $\alpha = 0,01$ $\dot{\xi}_{0,01} = \frac{\chi_{0,01}^2}{\chi_p^2} = \frac{20,09}{10,51} = 1,912$,
- для $\alpha = 0,05$ $\dot{\xi}_{0,05} = \frac{\chi_{0,05}^2}{\chi_p^2} = \frac{15,51}{10,51} = 1,476$.

4. **Ялина (схема 2, асоціація II) (табл. 2) k = 3**:
   - **За критерієм Фішера** [9]:

$$F_P = \frac{S_3^2}{S_2^2} = \frac{6{,}083}{5{,}071} = 1{,}20.$$

Табличне значення критерію Фішера [8, 10]:
- для $\alpha = 0{,}01$ $F_{0,01} = F_T\{\alpha = 0{,}01;\ f_3 = 11;\ f_2 = 7\} = 6{,}54$;
- для $\alpha = 0{,}05$ $F_{0,05} = F_T\{\alpha = 0{,}05;\ f_3 = 11;\ f_2 = 7\} = 3{,}60$.

Таким чином, маємо нерівності: $F_P < F_{0,01}$ та $F_P < F_{0,05}$, що дає підстави прийняти H_0 про рівність генеральних дисперсій з $\alpha = 0{,}01$ та $\alpha = 0{,}05$ за критерієм Фішера, при цьому, ступінь рівності ряду генеральних дисперсій особин ялини за схемою 2, асоціації II становить:

- для $\alpha = 0{,}01$ $\dot{\xi}_{0,01} = \frac{F_{0,01}}{F_P} = \frac{6{,}54}{1{,}20} = 5{,}45$;
- для $\alpha = 0{,}05$ $\dot{\xi}_{0,05} = \frac{F_{0,05}}{F_P} = \frac{3{,}60}{1{,}20} = 3{,}0$.

   - **За критерієм Бартлета** [9]:

Перевірка H_0 про рівність ряду генеральних дисперсій за схемою 2 асоціації II (табл. 2) за критерієм Бартлета привела до таких результатів:

$k=3$; $N_i = var$; $f_1 = 3 - 1 = 2$; $f_2 = 24 - 3 = 21$; $c = 0{,}4719$; $S^2 = 5{,}734$ од.^{2}; $\chi_p^2 = 0{,}067$.

Табличне значення критерію Пірсона $\chi_\alpha^2 = \chi_T^2\ \{\alpha;\ f_1\}$ дорівнює [10]:
- для $\alpha = 0{,}01$ $\chi_{0,01}^2 = \chi_T^2\ \{\alpha = 0{,}01;\ f_1 = 2\} = 9{,}21$;
- для $\alpha = 0{,}05$ $\chi_{0,05}^2 = \chi_T^2\ \{\alpha = 0{,}05;\ f_1 = 2\} = 5{,}99$.

Так як для ялини $\chi_p^2 < \chi_{0,01}^2$ та $\chi_p^2 < \chi_{0,05}^2$, то гіпотеза H_0 про рівність ряду генеральних дисперсій приймається для схеми 2 асоціації II з рівнем значущості $\alpha = 0{,}01$ і $\alpha = 0{,}05$ за критерієм Бартлета, при цьому, ступінь рівності ряду генеральних дисперсій особин ялини за схемою 2, асоціації II становить:

- для $\alpha = 0{,}01$ $\dot{\xi}_{0,01} = \frac{\chi_{0,01}^2}{\chi_p^2} = \frac{9{,}21}{0{,}067} = 137{,}46$,
- для $\alpha = 0{,}05$ $\dot{\xi}_{0,05} = \frac{\chi_{0,05}^2}{\chi_p^2} = \frac{5{,}99}{0{,}067} = 89{,}40$.

5. **Кедр (схема 1, асоціація I) (табл. 3) k = 9**:
   - **за критерієм Фішера** [9]:

$$F_P = \frac{S_6^2}{S_4^2} = \frac{102{,}67}{3{,}667} = 27{,}998. \qquad (52)$$

Табличне значення критерію Фішера [8, 10]:
- для $\alpha = 0{,}01$ $F_{0,01} = F_T\{\alpha = 0{,}01;\ f_6 = 4 - 1 = 3;\ f_4 = 4 - 1 = 3\} = 29{,}50$;
- для $\alpha = 0{,}05$ $F_{0,05} = F_T\{\alpha = 0{,}05;\ f_6 = 3;\ f_4 = 3\} = 9{,}28$.

Таким чином, маємо нерівності: $F_P < F_{0,01}$, то H_0 про рівність ряду генеральних дисперсій приймаємо з $\alpha = 0{,}01$, а так як $F_P > F_{0,05}$, то H_0 про рівність генеральних дисперсій відкидаємо з $\alpha = 0{,}05$ за критерієм Фішера, при цьому, ступінь рівності ряду генеральних дисперсій особин кедра за схемою 1, асоціації I становить:

- для $\alpha = 0{,}01$ $\dot{\xi}_{0,01} = \frac{F_{0,01}}{F_P} = \frac{29{,}50}{27{,}998} = 1{,}054$;

а ступінь нерівності цих дисперсій становить:

- для $\alpha = 0{,}05$ $\dot{\xi}_{0,05} = \frac{F_P}{F_{0,05}} = \frac{27{,}998}{9{,}28} = 3{,}017$,

що вимагає перевірки H_0 для $\alpha = 0{,}05$ за критерієм Кохрана і Бартлета.

   - **За критерієм Кохрана.** Перевірка нульової гіпотези H_0 про рівність ряду генеральних дисперсій за критерієм Кохрана [9] для схеми 1 асоціації I (k=9) дала такий результат:

$$G_p = \frac{S_{i\,max}^2}{\sum_{i=1}^{N} S_i^2} = \frac{102{,}67}{359{,}088} = 0{,}2859. \qquad (53)$$

Табличне значення критерію Кохрана $G_\alpha = G_T$ для числа дисперсій k=9, обсягу кожної виборки $N_i = 4$ та рівня значущості α дорівнює [10]:
- $\alpha = 0{,}01$ $G_{0,01} = G_T\ \{\alpha = 0{,}01;\ k=9;\ N_i = 4\} = 0{,}4316$;

- $\alpha = 0{,}05$ $G_{0,05} = G_T\ \{\alpha = 0{,}05;\ k=9;\ N_i = 4\} = 0{,}3643$.

Так як для кедра $G_p < G_{0,01}$ і $G_p<G_{0,05}$, то гіпотеза H_o про рівність ряду генеральних дисперсій (однорідність ряду вибіркових дисперсій) приймається з рівнями значущості $\alpha = 0{,}01$ ($p = 1 - \alpha = 0{,}99$) та $\alpha = 0{,}05$ ($p = 0{,}95$), при цьому, ступінь рівності ряду генеральних дисперсій особин кедра за схемою 1, асоціації І за критерієм Кохрана становить:

- для $\alpha = 0{,}01$ $\quad \dot{\xi}_{0,01} = \dfrac{G_{0,01}}{G_p} = \dfrac{0{,}4316}{0{,}2859} = 1{,}510;$
- для $\alpha = 0{,}05$ $\quad \dot{\xi}_{0,05} = \dfrac{G_{0,05}}{G_p} = \dfrac{0{,}3643}{0{,}2859} = 1{,}274.$

- **За критерієм Бартлета**:

Розрахунки χ^2_p за схемою 1 для асоціації І (табл. 3) привели до таких результатів:

$$k=9;\ N_i = 4 = \text{const};\ f_1 = (k-1) = 9 - 1 = 8;\ f_2 = \left(\sum_{i=1}^{k} N_i\right) - k = 36 - 9 = 27;\ f_i = (N_i - 1) = 4 - 1 = 3 = \text{const};$$

$c=0{,}4879$; $S^2 = 39{,}8987$ од.^{2}; $\chi^2_p = 17{,}223$.

Табличне значення критерію Пірсона $\chi^2_\alpha = \chi^2_т$ для рівня значущості α і числа ступенів вільностей $f_1 = 8$ дорівнює [10]:

- для $\alpha = 0{,}01$ $\chi^2_{0,01} = \chi^2_т\ \{\alpha = 0{,}01;\ f_1 = 8\} = 20{,}09;$
- для $\alpha = 0{,}05$ $\chi^2_{0,05} = \chi^2_т\ \{\alpha = 0{,}05;\ f_1 = 8\} = 15{,}51.$

Для кедра $\chi^2_p < \chi^2_{0,01}$, а $\chi^2_p > \chi^2_{0,05}$, то гіпотеза H_o підтверджується з $\alpha = 0{,}01$, що ставить під сумнів підтвердження H_o з $\alpha = 0{,}05$, прийнятої за критерієм Кохрана, при цьому, ступінь рівності ряду генеральних дисперсій особин кедра за схемою 1, асоціації І за критерієм Бартлета становить:

- для $\alpha = 0{,}01$ $\quad \dot{\xi}_{0,01} = \dfrac{\chi^2_{0,01}}{\chi^2_p} = \dfrac{20{,}09}{17{,}2233} = 1{,}166.$

Остаточне рішення при прийнятті або відкиданні H_o з $\alpha = 0{,}05$ базується на таких припущеннях: критерій Кохрана у більшій мірі відповідає процедурі аналізу ($N_i = 4 = \text{const}$ для всіх виборок), ніж критерій Бартлета; ступінь невідповідності при прийнятті рішення про відкидання H_o з $\alpha = 0{,}05$ (нерівності ряду цих же дисперсій) за χ^2_α становить:

- для $\alpha = 0{,}05$ $\quad \dot{\xi}_{0,05} = \dfrac{\chi^2_p}{\chi^2_{0,05}} = \dfrac{17{,}223}{15{,}51} = 1{,}11,$

що близько до 1. А ступінь відповідності (рівності ряду дисперсій) при прийнятті H_o при $\alpha = 0{,}05$ за критерієм Кохрана становить: $\dot{\xi}_{0,05} = 1{,}274$, що більше, ніж за критерієм Бартлета $\dot{\xi}_{0,05} = 1{,}11$.

Таким чином, гіпотезу H_o про рівність генеральних дисперсій для кедра приймаємо і з $\alpha = 0{,}05$.

6. **Кедр (схема 1, асоціація II) (табл. 3) k = 3**:
   - **За критерієм Фішера** [9]:

$$F_P = \frac{S_3^2}{S_2^2} = \frac{48{,}25}{14{,}92} = 3{,}234. \tag{54}$$

Табличне значення критерію Фішера [8, 10]:

- для $\alpha = 0{,}01$ $\quad F_{0,01} = F_T\ \{\alpha = 0{,}01;\ f_3 = 3;\ f_2 = 3\} = 29{,}50;$
- для $\alpha = 0{,}05$ $\quad F_{0,05} = F_T\ \{\alpha = 0{,}05;\ f_3 = 3;\ f_2 = 3\} = 9{,}28.$

Таким чином, маємо нерівності: $F_P < F_{0,01}$ та $F_P < F_{0,05}$, що дає підстави прийняти H_o про рівність генеральних дисперсій за критерієм Фішера, при цьому ступінь рівності ряду генеральних дисперсій особин кедра за схемою 1, асоціації II становить:

- для $\alpha = 0{,}01$ $\quad \dot{\xi}_{0,01} = \dfrac{F_{0,01}}{F_P} = \dfrac{29{,}50}{3{,}234} = 9{,}122;$
- для $\alpha = 0{,}05$ $\quad \dot{\xi}_{0,05} = \dfrac{F_{0,05}}{F_P} = \dfrac{9{,}28}{3{,}234} = 2{,}870.$

- **За критерієм Кохрана**. Перевірка H_o про рівність ряду генеральних дисперсій за схемою 1 асоціації II (табл. 3) (k = 3) за критерієм Кохрана [11] дала такі результати:

$$G_p = \frac{48{,}25}{82{,}17} = 0{,}5872. \tag{55}$$

Табличне значення критерію Кохрана для числа дисперсій k=3, обсягу кожної виборки N_i = 4 та рівня значущості α відповідає [8]:

- для α = 0,01 $G_{0,01} = G_T\{\alpha = 0,01; k=3; N_i = 4\} = 0,8335$;
- для α = 0,05 $G_{0,05} = G_T\{\alpha = 0,05; k=3; N_i = 4\} = 0,7457$.

Так як для кедра $G_P < G_{0,01}$ і $G_P < G_{0,05}$, то H_o приймаємо про рівність ряду генеральних дисперсій з рівнями значущості α = 0,01 і α = 0,05 за критерієм Кохрана, при цьому ступінь рівності ряду генеральних дисперсій особин кедра за схемою 1, асоціації II становить:

- для α = 0,01 $\dot{\xi}_{0,01} = \frac{G_{0,01}}{G_p} = \frac{0,8335}{0,5872} = 1,419$;
- для α = 0,05 $\dot{\xi}_{0,05} = \frac{G_{0,05}}{G_p} = \frac{0,7457}{0,5872} = 1,270$.

- **За критерієм Бартлета** [9]. Розрахунки χ^2_p за схемою 1 асоціація II (табл. 3) привели до таких результатів:

k=3; N_i = const = 4; $f_i = (N_i - 1) = 4 - 1 = 3$; $f_1 = (k-1) = 4 - 1 = 3$; $f_2 = \left(\sum_{i=1}^{k} N_i\right) - k = 12 - 3 = 9$; c = 0,4986;

$S^2 = 27,39$ од.^{2}; $\chi^2_p = 1,063$.

Табличні значення критерію $\chi^2_т$ [10]:

$\chi^2_{0,01} = \chi^2_т\ \{\alpha = 0,01;\ f_1 = 2\} = 9,21$;

$\chi^2_{0,05} = \chi^2_т\ \{\alpha = 0,05;\ f_1 = 2\} = 5,99$.

Так як для кедра $\chi^2_p < \chi^2_т$ для α = 0,01 та α = 0,05, то H_o приймається за критерієм Бартлета з рівнем значущості α = 0,01 і α = 0,05, при цьому, ступінь рівності ряду генеральних дисперсій особин кедра за схемою 1, асоціації II становить:

- для α = 0,01 $\dot{\xi}_{0,01} = \frac{\chi^2_{0,01}}{\chi^2_p} = \frac{9,21}{1,063} = 8,664$;
- для α = 0,05 $\dot{\xi}_{0,05} = \frac{\chi^2_{0,05}}{\chi^2_p} = \frac{5,99}{1,063} = 5,635$.

7. **Кедр (схема 2, асоціація I) (табл. 4) k = 9**:
   - **За критерієм Фішера** [9]:

$$F_P = \frac{S_8^2}{S_1^2} = \frac{31,289}{8,917} = 3,509. \qquad (56)$$

Табличне значення критерію Фішера [8, 10]:

- для α = 0,01 $F_{0,01} = F_T\{\alpha = 0,01; f_8 = 32 - 1 = 31; f_1 = 4 - 1 = 3\} = 29,50$;
- для α = 0,05 $F_{0,05} = F_T\{\alpha = 0,05; f_8 = 31; f_1 = 3\} = 14,10$.

Таким чином, маємо нерівності: $F_P < F_{0,01}$ та $F_P < F_{0,05}$, що дає підстави прийняти H_o про рівність генеральних дисперсій з α = 0,01 та α = 0,05 за критерієм Фішера, при цьому, ступінь рівності ряду генеральних дисперсій особин кедра за схемою 2, асоціації I становить:

- для α = 0,01 $\dot{\xi}_{0,01} = \frac{F_{0,01}}{F_P} = \frac{26,50}{3,509} = 7,552$;
- для α = 0,05 $\dot{\xi}_{0,05} = \frac{F_{0,05}}{F_P} = \frac{14,10}{3,509} = 4,018$.

- **За критерієм Бартлета**. Перевірка H_o про рівність ряду генеральних дисперсій для особин кедра за схемою 2 для асоціації I (табл. 4) привела до таких результатів:

k=9; N_i = = var = 3; 7; 11; 15; 19; 23; 27; 31; 35; $f_1 = 8$; $f_2 = 171$; c = 0,4492; $S^2 = 26,555$ од.^{2}; $\chi^2_p = 5,846$.

Табличне значення критерію Пірсона $\chi^2_\alpha = \chi^2_т\ \{\alpha;\ f_1\}$ дорівнює [ ]:

- для α = 0,01 $\chi^2_{0,01} = \chi^2_т\ \{\alpha = 0,01;\ f_1 = 8\} = 20,09$;
- для α = 0,05 $\chi^2_{0,05} = \chi^2_т\ \{\alpha = 0,05;\ f_1 = 8\} = 15,51$.

Так як кедра $\chi^2_p < \chi^2_{0,01}$ та $\chi^2_p < \chi^2_{0,05}$, то гіпотеза H_o про рівність ряду генеральних дисперсій приймається з рівнем значущості $\alpha = 0,01$ і $\alpha = 0,05$ за критерієм Бартлета, при цьому, ступінь рівності ряду генеральних дисперсій особин кедра за схемою 2, асоціації I становить:

- для $\alpha = 0,01$ $\quad \dot{\xi}_{0,01} = \frac{\chi^2_{0,01}}{\chi^2_p} = \frac{20,09}{5,846} = 3,437$;
- для $\alpha = 0,05$ $\quad \dot{\xi}_{0,05} = \frac{\chi^2_{0,05}}{\chi^2_p} = \frac{15,51}{5,846} = 2,653$.

8. **Кедр (схема 2, асоціація II) (табл. 4) k = 3:**
   - **За критерієм Фішера** [9]:

$$F_P = \frac{S_1^2}{S_3^2} = \frac{19,0}{12,81} = 1,483. \tag{57}$$

Табличне значення критерію Фішера [8, 10]:

- для $\alpha = 0,01$ $\quad F_{0,01} = F_T\{\alpha = 0,01;\ f_1 = 4 - 1 = 3;\ f_3 = 12 - 1 = 11;\} = 6,22$;
- для $\alpha = 0,05$ $\quad F_{0,05} = F_T\{\alpha = 0,05;\ f_1 = 3;\ f_3 = 11\} = 3,59$.

Таким чином, маємо нерівності: $F_P < F_{0,01}$ та $F_P < F_{0,05}$, що дає підстави прийняти H_o про рівність генеральних дисперсій з $\alpha = 0,01$ та $\alpha = 0,05$ за критерієм Фішера, при цьому, ступінь рівності ряду генеральних дисперсій особин кедра за схемою 2, асоціації II становить:

- для $\alpha = 0,01$ $\quad \dot{\xi}_{0,01} = \frac{F_{0,01}}{F_P} = \frac{6,22}{1,483} = 4,194$;
- для $\alpha = 0,05$ $\quad \dot{\xi}_{0,05} = \frac{F_{0,05}}{F_P} = \frac{3,59}{1,483} = 2,421$.

- **За критерієм Бартлета**. Перевірка H_o про рівність ряду генеральних дисперсій для кедра за схемою 2 для асоціації II (табл. 4) за критерієм Бартлета привела до таких результатів:

$k=3$; $N_i = var$; $f_i = 3;\ 8;\ 11$; $f_1 = 3 - 1 = 2$; $f_2 = 24 - 3 = 21$; $c = 0,4719$; $S^2 = 14,418$ од.^{2}; $\chi^2_p = 0,188$.

Табличне значення критерію Пірсона $\chi^2_\alpha = \chi^2_T\ \{\alpha;\ f_1\}$ дорівнює [10]:

- для $\alpha = 0,01$ $\quad \chi^2_{0,01} = \chi^2_T\ \{\alpha = 0,01;\ f_1 = 2\} = 9,21$;
- для $\alpha = 0,05$ $\quad \chi^2_{0,05} = \chi^2_T\ \{\alpha = 0,05;\ f_1 = 2\} = 5,99$.

Так як для кедра $\chi^2_p < \chi^2_{0,01}$ та $\chi^2_p < \chi^2_{0,05}$, то гіпотеза H_o про рівність ряду генеральних дисперсій приймається з рівнем значущості $\alpha = 0,01$ і $\alpha = 0,05$ за критерієм Бартлета, при цьому, ступінь рівності ряду генеральних дисперсій особин кедра за схемою 2, асоціації II становить:

- для $\alpha = 0,01$ $\quad \dot{\xi}_{0,01} = \frac{\chi^2_{0,01}}{\chi^2_p} = \frac{9,21}{0,188} = 48,99$;
- для $\alpha = 0,05$ $\quad \dot{\xi}_{0,05} = \frac{\chi^2_{0,05}}{\chi^2_p} = \frac{5,99}{0,188} = 31,86$.

У табл. 5,6 приведені результати розрахунків числових характеристик особин ялини (табл. 5) та кедра (табл. 6) сукупних пробних площ, утворених для моделі асоціації I за схемою 2 за таблицею випадкових чисел від 0 до 22 (для ялини) та від 1 до 21 (для кедра), взятих з різних ділянок таблиці за рядками та за графами.

Перевірка нульової гіпотези H_o: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_i^2 = \ldots = \sigma_k^2$ про статистичну рівність ряду генеральних дисперсій (однорідність ряду вибіркових дисперсій) за оцінками вибіркових дисперсій S_1^2, S_2^2, ... S_i^2,... S_k^2 відповідно дала такі результати:

9. **Ялина (схема 2, асоціація I) (табл. 5) k = 11:**
   - **За критерієм Фішера** [9]:

$$F_p = \frac{S^2_{i\,max}}{S^2_{i\,min}} = \frac{S_4^2}{S_{11}^2} = \frac{56,696}{39,829} = 1,423. \tag{58}$$

Табличні значення критерію Фішера за [8, 10]:

- для $\alpha = 0,01$ $\quad F_{0,01} = F_T\{\alpha = 0,01;\ f_{max} = f_4 = 16 - 1 = 15;\ f_{min} = f_{11} = 256 - 1 = 255\} = 2,121$;
- для $\alpha = 0,05$ $\quad F_{0,05} = F_T\{\alpha = 0,05;\ f_4 = 15;\ f_{11} = 255\} = 1,710$.

Таким чином, маємо нерівності: $F_P < F_{0,01}$ та $F_P < F_{0,05}$, що дозволяє прийняти H_o про рівність ряду генеральних дисперсій з рівнями значущості $\alpha = 0,01$ та $\alpha = 0,05$ за критерієм Фішера, при цьому, ступінь рівності ряду генеральних дисперсій особин ялини за схемою 2, асоціації I становить:

- для $\alpha = 0{,}01$ $\dot{\xi}_{0,01} = \frac{F_{0,01}}{F_P} = \frac{2{,}121}{1{,}423} = 1{,}491$;
- для $\alpha = 0{,}05$ $\dot{\xi}_{0,05} = \frac{F_{0,05}}{F_P} = \frac{1{,}710}{1{,}423} = 1{,}202$.

- **За критерієм Бартлета** [9]: тут за даними табл. 5,6 для ялини: $k = 11$; $N_i = var$ від 4 до 256; $f_1 = k - 1 = 11 - 1 = 10$; $f_2 = 500 - 11 = 489$; $f_i = (N_i - 1) = 3; 7; 11; 15; 19; 23; 27; 31; 35; 63; 255$; $C = 0{,}447$; $S^2 = 44{,}576$ од.^{2}; $\chi_p^2 = 3{,}554$.

Табличні значення χ_α^2 за [10]:

- для $\alpha = 0{,}01$ $\chi_{0,01}^2 = \chi_T^2\ \{\alpha = 0{,}01;\ f_1 = 10\} = 23{,}21$;
- для $\alpha = 0{,}05$ $\chi_{0,05}^2 = \chi_T^2\ \{\alpha = 0{,}05;\ f_1 = 10\} = 18{,}31$.

Таким чином, маємо нерівності $\chi_p^2 < \chi_{0,01}^2$ та $\chi_p^2 < \chi_{0,05}^2$, що дозволяє прийняти H_o про рівність генеральних дисперсій з рівнями значущості $\alpha = 0{,}01$ і $\alpha = 0{,}05$ за критерієм Бартлета, при цьому, ступінь рівності ряду генеральних дисперсій особин ялини за схемою 2, асоціації I становить:

- для $\alpha = 0{,}01$ $\dot{\xi}_{0,01} = \frac{\chi_{0,01}^2}{\chi_p^2} = \frac{23{,}21}{3{,}554} = 6{,}531$;
- для $\alpha = 0{,}05$ $\dot{\xi}_{0,05} = \frac{\chi_{0,05}^2}{\chi_p^2} = \frac{18{,}31}{3{,}554} = 5{,}152$.

10. Кедр (схема 2, асоціація I) (табл. 6) k = 11:

- **За критерієм Фішера** [9]:

$$F_p = \frac{S_{i\,max}^2}{S_{i\,min}^2} = \frac{S_2^2}{S_7^2} = \frac{51{,}696}{34{,}201} = 1{,}512. \qquad (59)$$

Табличні значення критерію Фішера за [8, 10]:

- для $\alpha = 0{,}01$ $F_{0,01} = F_T\{\alpha = 0{,}01; f_2 = 8 - 1 = 7; f_7 = 28 - 1 = 27\} = 3{,}390$;
- для $\alpha = 0{,}05$ $F_{0,05} = F_T\{\alpha = 0{,}05; f_2 = 7; f_7 = 27\} = 2{,}375$.

Таким чином, маємо нерівності: $F_P < F_{0,01}$ та $F_P < F_{0,05}$, що дозволяє прийняти H_o про рівність ряду генеральних дисперсій з рівнями значущості $\alpha = 0{,}01$ та $\alpha = 0{,}05$ за критерієм Фішера, при цьому, ступінь рівності ряду генеральних дисперсій особин кедра за схемою 2, асоціації I становить:

- для $\alpha = 0{,}01$ $\dot{\xi}_{0,01} = \frac{F_{0,01}}{F_P} = \frac{3{,}390}{1{,}512} = 2{,}242$;
- для $\alpha = 0{,}05$ $\dot{\xi}_{0,05} = \frac{F_{0,05}}{F_P} = \frac{2{,}375}{1{,}512} = 1{,}571$.

- **За критерієм Бартлета** [9]: тут за даними табл. 6 для кедра: $k = 11$; $N_i = var$ від 4 до 256; $f_1 = k - 1 = 11 - 1 = 10$; $f_2 = 500 - 11 = 489$; $f_i = (N_i - 1) = 3; 5; 11; 15; 19; 23; 27; 31; 35; 63; 255$; $C = 0{,}447$; $S^2 = 36{,}613$ од.^{2}; $\chi_p^2 = 2{,}257$.

Табличні значення χ_α^2 за [10]:

- для $\alpha = 0{,}01$ $\chi_{0,01}^2 = \chi_T^2\ \{\alpha = 0{,}01;\ f_1 = 10\} = 23{,}21$;
- для $\alpha = 0{,}05$ $\chi_{0,05}^2 = \chi_T^2\ \{\alpha = 0{,}05;\ f_1 = 10\} = 18{,}31$.

Таким чином, маємо нерівності $\chi_p^2 < \chi_{0,01}^2$ та $\chi_p^2 < \chi_{0,05}^2$, що дозволяє прийняти H_o про рівність ряду генеральних дисперсій з рівнями значущості $\alpha = 0{,}01$ та $\alpha = 0{,}05$ за критерієм Бартлета, при цьому, ступінь рівності ряду генеральних дисперсій особин кедра за схемою 2, асоціації I становить:

- для $\alpha = 0{,}01$ $\dot{\xi}_{0,01} = \frac{\chi_{0,01}^2}{\chi_p^2} = \frac{23{,}21}{2{,}257} = 10{,}284$;
- для $\alpha = 0{,}05$ $\dot{\xi}_{0,05} = \frac{\chi_{0,05}^2}{\chi_p^2} = \frac{18{,}31}{2{,}257} = 8{,}113$,

що стверджує більшу однорідність вибіркових дисперсій особин кедру, ніж ялини в моделі сукупних пробних площ, створених за таблицею випадкових чисел.

Таблиця 5. Числові статистичні характеристики розподілу умовних особин ялини сукупних пробних площ, утворених за схемою 2 за таблицею випадкових чисел від 0 до 22 (математична модель асоціації I).

k	F_i [м^2]	N_i	$\sum_{j=1}^{N_i} x_{ij}$	Ялина					
				$\bar{x}_i$ [од.]	S_i^2 [од.^{2}]	S_i [од.]	$\gamma_i = \frac{S_i}{\bar{x}_i}$	$\left(\frac{S_i}{\bar{x}_i}\right)^2$	$\frac{S_i^2}{\bar{x}_i}$ [од.]
1	625	4	34	8,500	43,667	6,608	0,777	0,604	5,137
2	1250	8	65	8,125	55,839	7,473	0,920	0,846	6,873
3	1875	12	109	9,083	56,265	7,501	0,826	0,682	6,194
4	2500	16	157	9,813	56,696	7,530	0,767	0,589	5,778
5	3125	20	1840	9,200	50,800	7,127	0,775	0,600	5,522
6	3750	24	227	9,458	52,172	7,223	0,764	0,583	5,516
7	4375	28	283	10,107	51,729	7,192	0,712	0,506	5,118
8	5000	32	317	9,906	48,733	6,981	0,705	0,497	4,919
9	5625	36	371	10,306	49,418	7,030	0,682	0,465	4,795
10	10.000	64	702	10,969	45,205	6,724	0,613	0,376	4,121
11	40.000	256	2974	11,617	39,829	6,311	0,543	0,295	3,429

Таблиця 6. Числові статистичні характеристики розподілу умовних особин кедра сукупних пробних площ, утворених за схемою 2 за таблицею випадкових чисел від 1 до 21 (математична модель асоціації I).

k	F_i [м^2]	N_i	$\sum_{j=1}^{N_i} x_{ij}$	Кедр					
				$\bar{x}_i$ [од.]	S_i^2 [од.^{2}]	S_i [од.]	$\gamma_i = \frac{S_i}{\bar{x}_i}$	$\left(\frac{S_i}{\bar{x}_i}\right)^2$	$\frac{S_i^2}{\bar{x}_i}$ [од.]
1	625	4	34	8,500	43,667	6,608	0,777	0,604	5,137
2	1250	8	67	8,375	51,696	7,190	0,859	0,737	6,173
3	1875	12	124	10,333	50,242	7,088	0,686	0,471	4,862
4	2500	16	157	9,813	41,096	6,411	0,653	0,427	4,188
5	3125	20	190	9,500	43,842	6,621	0,697	0,486	4,615
6	3750	24	239	9,958	39,520	6,287	0,631	0,399	3,969
7	4375	28	284	10,143	34,201	5,848	0,577	0,333	3,372
8	5000	32	332	10,375	37,597	6,132	0,591	0,349	3,624
9	5625	36	369	10,250	38,707	6,222	0,607	0,368	3,776
10	10.000	64	734	11,469	36,888	6,074	0,530	0,281	3,216
11	40.000	256	2983	11,652	34,243	5,852	0,502	0,252	2,939

Таким чином, рівність ряду генеральних дисперсій особин ялини і кедра з рівнями значущості $\alpha = 0{,}01$ та $\alpha = 0{,}05$, розподілених на пробних площах, закладених за схемами 1 і 2 об'єднань вихідних площ для асоціації I (чорнично-зеленомохової структури) та асоціації II (сфагнової структури) дозволяє обґрунтовано проводити подальший статистичний аналіз, що пов'язаний із статистичними процедурами та знаходженням характеристик розподілу особин кедра та ялини.

Висновки

1. Розроблений метод і процедури визначення характеру просторового розподілу особин кедра та ялини на пробних площах за схемою 1 (коли вихідні базові площі об'єднують, а число елементарних комірок лишається сталим при зростанні їх розмірів) та за схемою 2 (коли площі об'єднують так, що кількість елементарних комірок зростає при сталому розмірі елементарної комірки).
2. Метод і процедури полягають в тому, що розраховують вибіркові числові, групові та інтервальні характеристики, доводиться правдивість нульових гіпотез про рівність ряду генеральних дисперсій за оцінками вибіркових характеристик.
3. Для надійності висновків при прийнятті або відкиданні нульових гіпотез та побудови довірчих інтервалів для генеральних дисперсій і генеральних середніх та інших статистичних оцінок використали стандартні розподіли Фішера, Кохрана та Бартлета та два рівні значущості 1 і 5 %, а також при побудові довірчих інтервалів для генеральних дисперсій використали два табличних критерії Z_α та χ^2_α.
4. Для порівняння з еталонним розподілом проведений дисперсійний аналіз математичної моделі, виборка для якої створена за таблицею випадкових чисел.
5. Вперше в науковий обіг у математичні методи в біології введено поняття ступеня статистичної рівності (нерівності) двох або ряду генеральних дисперсій за критеріями Фішера, Кохрана, Бартлета і двох або

ряду математичних сподівань за критерієм Стьюдента та ступеня статистичної прийнятності або відкидання нульових гіпотез за критеріями Фішера, Стьюдента та Пірсона.

6. Виявлено, що генеральні дисперсії просторового розподілу особин кедра та ялини для двох схем, асоціацій та математичної моделі за випадковими числами є рівними в статистичному смислі.

Література

1. Жиляєв Г.Г. Структура популяцій рідкісних видів флори Карпат / Г.Г. Жиляєв, Ю.Й. Кобів, М.М. Мамчур. – К.: Наукова думка, 1998. – С.101-119: іл.
2. Анализ структуры древесных ценозов / А.И.Бузыкин, В.Л.Гавриков, О.П.Секретенко, Р.Г.Хлебопрос; под ред. Д.М.Киреева. – Новосибирск: Наука, 1985. – 95 с.: ил.
3. Злобин Ю.А. Принципы и методы изучения ценотических популяций растений / Ю.А. Злобин. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1989. – 148 с.: ил.
4. Дідух Я.П. Популяційна екологія / Я.П. Дідух. – К.: Фітосоціоцентр, 1998. – 192 с.: іл., табл.
5. Гиляров А.М. Популяционная экология / А.М. Гиляров. – М.: Изд-во Москов. ун-та, 1990. – 192 с.: ил., табл.
6. Спиридонов А.А. Планирование эксперимента: Учебное пособие / А.А. Спиридонов, Н.Г. Васильев. – Свердловск: Изд-во Урал. политехн. ин-та, 1975. – 150 с.: ил., табл. – Библиогр.: с. 147-148 (23 наименов.).
7. Венецкий И.Г. Теория вероятностей и математическая статистика / И.Г. Венецкий, Г.С. Кильдишев. – Изд. 3-е, перераб. и доп. – М.: Статистика, 1975. – 264 с.: ил., табл. – Приложения: с. 255-264 (9 табл.).
8. Зажигаев Л.С. Методы планирования и обработки результатов физического эксперимента / Л.С. Зажигаев, А.А. Кишьян, Ю.И. Романиков. – М.: Атомиздат, 1978. – 232 с.: ил., табл. – Приложение: с. 144-229 (16 табл.). – Библиогр.: с. 230-231.
9. Степнов М.Н. Статистическая обработка результатов механических испытаний / Михаил Никитович Степнов. – М.: Машиностроение, 1972. – 232 с.: ил., табл. – Библиогр.: с. 229-230 (36 наимен.).
10. Бендат Дж.С. Измерение и анализ случайных процессов / Дж.С. Бендат, А.Г. Пирсол; пер. с англ. Г.В.Матушевского, В.Е.Привальского; под ред. И.Н.Коваленко. – М.: Мир, 1971. – 408 с. – Перевод за изд.: Measurement and analysis of random data / Julius S. Bendat, Allan G. Piersol. – John Wiley and Sons, Inc. – New York-London-Sydney, 1967.: ил., табл. – Предмет. указатель: с. 403-408. – Библиогр.: с. 400-402 (59 наименов.).
11. Тихомиров В.Б. Планирование и анализ эксперимента / Владислав Борисович Тихомиров. – М.: Легкая индустрия, 1974. – 264 с.: ил., табл. – Приложение: с. 255-257 (4 табл.). – Библиогр.: с. 258-261 (99 наименов.).
12. Жлуктенко В.І. Теорія ймовірностей і математична статистика: навч.-метод. посібник [для студ. економ. вищ. навч. заклад.]: У 2-х ч. – Ч. ІІ. Математична статистика / В.І. Жлуктенко, С.І Наконечний, С.С. Савіна; [Мін-во освіти і науки України; гриф: лист № 14 / 18.2-183 від 27.02.2001 р.]. – К.: Київ. нац. економ. ун-т, 2001. – 336 с.: іл., табл. – Теор. запит. та завдання до теми в кінці теми. – Лаб. роб. після тем 14, 15. – Додатки: с. 242 – 246, 292 – 331. – Бібліогр.: с. 246 (4 назви).– ISBN 966–574–265 – 5.
13. Неділько С.А. Математичні методи в хімії: підручник [для студ. хім. спеціал. вищ. навч. закладів] / Сергій Неділько; [Мін-во освіти інауки України; гриф: лист № 1 / 11-1536 від 13.04.2004 р.]. – К.: Либідь, 2005. – 256 с.: іл. – Завдання для самостійн. роботи та бібліогр. в кінці розд. – ISBN 966 – 06 – 03843.
14. Іванюта І.Д. Елементи теорії ймовірностей та математичної статистики: навч. посібник [для студ. економ. спеціал. вищ. навч. заклад.] / І.Д. Іванюта, В.І. Рибалка, І.А. Рудоміно-Дусятська; [Мін-во освіти інауки України; гриф: лист № 14 / 18.2-271 від 11.02.2003 р.]. – К.: Слово, 2003. – 271 с:. іл., табл. – Завдання до самостійн. роботи: с. 235 – 261 (15 завд.). – Додатки: с. 262 – 267 (6 табл.). – Бібліогр.: с. 268 (6 назв). – ISBN 966 – 8407 – 01 – 6.
15. Волощенко А.Б. Теорія ймовірностей та математична статистика: навч.-метод. посібник для самост. вивчення дисц. [для студ. економ. спеціал. вищ. навч. заклад.] / А.Б. Волощенко, І.А. Джалладова; [Мін-во освіти інауки України; гриф: лист № 14 / 18.2-613 від 22.03.2002 р.]. – К.: Київ. Нац. економ. ун-т, 2003. – 256 с.: іл., табл. – Приклади розв. завдань і вправи для самост. розв'язання в кінці розд. – Блочно-модул. контроль: с. 183 – 203 (9 варіантів). – Відповіді: с. 204 – 216. - – Бібліогр.: с. 217 (18 назв). – Додатки: с. 218 – 254 (8 табл.). – ISBN 966 – 574 – 459– 3.
16. Адлер Ю.П. Планирование эксперимента при порске оптимальных условий / Ю.П. Адлер, Е.В. Маркова, Ю.В. Грановский. – 2-е изд., перераб. и допол. – М.: Наука, 1976. – 280 с.: ил., табл. – Библиогр. в конце гл.
17. Ахназарова С.Л. Оптимизация эксперимента в химии и химической технологи / С.Л. Ахназарова, В.В. Кафаров. – М.: Высш. шк., 1978. – 320 с.: ил., табл. – Библиогр.: с. 302 – 303 (53 наимен.). – Приложения: с. 304 – 317 (14 табл.).
18. Бейли Н. Статистические методы в биологии / Норман Бейли; пер. с англ. В.П. Смилги; под ред., предисловии В.В. Налимова. – М.: Мир, 1963. – 272 с. Перевод за изд.: Statistical Methods in Biology by Norman T. J. Bailey, M.A., D.S.C. Reader in Biometry, University of Oxford. – The English Universities Press

Ltd., 1959. – ил., табл. – Библиогр.: с. 7 (5 наим.), с. 222 (9 наим.). – Руковод. по применению статист. формул: с. 223 – 259. – Прилож.: с. 260 – 267 (5 табл.).
19. Сигорский В.П. Математический апарат инженера / Виталий Петрович Сигорский. – 2-е изд., стереотип. – К.: Техніка, 1977. – 768 с.: – ил., табл. – Библиогр. в конце гл. – Предмет. указ.: с. 752 – 764.
20. Федоров В.В. Теория оптимального эксперимента (планирование регрессионных экспериментов): монография / Валерий Вадимович Федоров. – М.: Наука, 1971. – 312 с.: ил., табл. – Библиогр.: с. 309 – 312 (79 наим.).
21. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – 4-е изд.; пер. с англ. И.Г. Арамановича, А.М. Березмана, И.А. Вайнштейна и др.; под общ. ред. И.Г. Арамановича. – М.: Наука, 1978. – 832 с. – Перевод за изд.: Mathematical Handbook for Scientists and Engineers Definitions, Theorems and Formulas for Reference and Review. – Second, Enlargend and Revised Edition / Granino A. Korn, Ph. D., Theresa M. Korn, M.S. – NcGraw-Hill Book Company: New York-San Francisco-Toronto-London-Sydney, 1968. – ил., табл. – Библиогр.: с. 796 – 800 (183 наим.). – Указ. важн. обозн.: с. 801 – 803. – Предмет. указ.: с. 804 – 831. – Перечень табл. по гл.: с. 20 – 22.
22. Налимов В.В. Статистические методы планирования экстремальных экспериментов / В.В. Налимов, Н.А. Чернова. – М.: Наука, 1965. – 340 с.: ил., табл. – Библиогр.: с. 328 – 338 (204 наим.). – Предмет. указ.: с. 339 – 340. – Приложения: с. 309 – 327 (I. Элементы матричной алгебры. Симплексы. II. Планы дробных реплик).
23. Лакин Г.Ф. Биометрия: Учеб. пособие [для биол. спец. вузов] / Георгий Филиппович Лакин. – 4-е изд., пераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1990. – 352 с.: ил., табл. – Прилож.: с. 319 – 345 (26 мат. табл.). - Библиогр.: с. 346 – 347 (58 наим.). – Предмет. указ.: с. 348 – 350.
24. Дэниел К. Применение статистики в промышленном эксперименте / Кутберт Дэниел; пер. с англ. под ред. Э.К. Лецкого. – М.: Мир, 1979. – 301 с. – Перевод за изд.: Applications of statistics to industrial experimentation / Cuthbert Daniel. – John Wiley and Sons. – New York-London-Sydney-Toronto, 1976.: ил., табл. – Библиогр.: с. 289 – 292 (92 наим.). – Предмет. указатель: с. 293 – 294. – Приложения в конце гл.
25. Планирование эксперимента в исследовании технологических процессов / [К. Хартман, Э. Лецкий, В. Шефер и др.]; пер. с нем. Г.А. Фоминой, Н.С. Лецкого; под ред. Э.К. Лецкого. – М.: Мир, 1977. – 552 с. Перевод за изд.: Statistische Versuchsplanung und–auswertung in der Stoffwirt–shaft / von einem Autorenkollektiv Herausgeber: Klaus Hartmann, Eduard Lezki, Wolgang Schäfer. – VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig, 1974.: ил., табл. – Библиогр. в конце гл. – Мат. приложения: с. 516 – 540. – Предмет. указатель: с. 541 – 547.
26. Уайлд Д. Дж. Методы поиска экстремума. Серия: Теоретические основы технической кибернетики / Дуглас Дж. Уайлд; пер. с англ. А.Н. Кабалевского, Е.П. Маслова, В.Д. Спиридонова; под ред. А.А. Фельдбаума. – М.: Наука, 1967. – 268 с. Перевод за изд.: Optimum seeking methods / Douglass J. Wilde. – Department of chemical Enginnering Stanford University. – Prentice-Hall, Inc. – Englewood Cliffs, N.J., 1964.: ил., табл. – Упражнения в конце гл. – Библиогр.: в подстроч. примеч. – Предмет. указатель: с. 265 – 267.
27. Биометрический анализ в биологии = Biometrical analysis in biology: [собрание науч. работ / отв. ред. Г.Н. Зайцев]. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1982. – 160 с.: ил., табл. – Библиогр. в конце ст.
28. Воробьев Ф.П. Математическое планирование эксперимента в биохими и медицине / Ф.П. Воробьев, Н.К. Голобородько, А.М. Мануйлова. – Харьков: Вища шк., 1977. – 144 с.: ил., табл. – Библиогр.: с. 139 – 142 (71 наим.). – Приложение: с. 136 – 138 (5 табл.).
29. Кассандрова О.Н. Обработка результатов наблюдений: Учеб. пособие [для студ. высш. учеб. завед.] / О.Н. Кассандрова, В.В. Лебедев. – М.: Наука, 1970. – 104 с.: ил., табл. – Библиогр.: с. 103 – 104 (28 наимен.). – Приложения: с. 91 – 102 (6 табл.).
30. Налимов В.В. Логические основания планирования эксперимента / В.В. Налимов, Т.И. Голикова. – М.: Металлургия, 1976. – 128 с.: ил., табл. – Библиогр.: с. 126 – 128 (81 наим.).
31. Большев Л.Н. Таблицы математической статистики / Л.Н. Большев, Н.В. Смирнов. – М.: Наука, 1965. – Табл. 4.5 а.
32. Смирнов Н.В. Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений / Н.В. Смирнов, И.В. Дунин-Барковский. – М.: Наука, 1965. – Табл. II.
33. Хикс Ч. Основные принципы планирования эксперимента / Пер. с англ. – М.: Мир, 1967. – 406 с.
34. Нелинейная корреляция и регрессия / С.Н. Воловельская, А.И. Жилин, С.А. Кулиш, В.Б. Сивый. – К.: Техніка, 1971. – 130 с.

Автори висловлюють щиру подяку к.х.н., доценту Мідак Л.Я. за цінні зауваження, консультації та допомогу при підготовці статті до друку.

Стаття поступила до редакції 6.05.2008 р.; прийнята до друку 12.05.2008 р.

Сіренко О.Г. – провідний інженер відділу природної флори;
Кузишин О.В. – асистент кафедри теоретичної і прикладної хімії, магістр.

Рецензент: кандидат хімічних наук Мідак Л.Я., доцент кафедри теоретичної і прикладної хімії Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника.