2) наявності видів рослин на квітах яких відбувається живлення імаго *Trichius fasciatus* (L.). Тому для нормального існування цього виду і збереження стабільності популяцій і популяційних структур вкрай важливим є збереження (підтримання) флористичного різноманіття як лучних екосистем, так і збереження мертвої порохнявої деревини кормових порід личинок восковика перев'язаного.
3) У трофічній спеціалізації імаго *Trichius fasciatus* (L.) в умовах Українських Карпат чітко простежується висотний градієнт – зі збільшенням висоти над рівнем моря частота відвідань різних квіткових рослин змінюється.

Література

1. *Медведев С. И.* Фауна СССР (жесткокрылые). Пластинчастоусые подсемейств Euchirinae, Dynastinae, Glaphyrinae, Trichiinae. Т. 10, в. 4. / *Сергей Иванович Медведев*; [научное издание.]. – М.: Изд-тво АН СССР, 1960. – 398 с.
2. *Негробов В. В., Хмелев К. Ф.* Современные концепции консорциологии / *В.В. Негробов, К.Ф. Хмелев* // Вестник Воронежского государственного ун-та. Біологія. – 2000. – с.118-121.
3. *Решетило О.* Консортивна структура аконіту молдавського типового (Aconitum moldavicum Hacq. Ex. Reichenb. Subsp. Moldavicum) й аконіту Дегена типового (Aconitum degenii Gayer subsp. Degenii) масиву Чорногора (Українські Карпати) / *О. Решетило, Т. Микітчак, Й. Царик* // Вісник Львівського ун-ту. Серія біологічна. – 2009. – Вип.49. – с.83-90.
4. *Царик Й. В.* Консорція і збереження біологічного різноманіття / *Й.В. Царик* // Праці НТШ. – 2002.- Т.7.- с.13-18.
5. *Царик Й., Царик І.* Консорція як загальнобіотичне явище / *Й.Царик, І.Царик* // Вісн. Львів. уні-ту. Серія біологічна. – 2002. – Вип.28.- с.163-169.
6. *Царик Й. В., Царик І. Й.* Консорція як один із базових рівнів біологічного різноманіття / *Й. В. Царик, І.Й. Царик* // Карпатський регіон і проблеми сталого розвитку: Матеріали конф. - Рахів, 1998. – с.303-304.
7. *Hollowey G. J., Marriott C. G., Crocker H. J.* Phenotypic plasticity in hoverflies: the relationship between colour pattern and season in Episyrphus balteatus and other Syrphidae / *G. J.Hollowey, C. G. Marriott, H. J. Crocker* // Ecol. Entomol. – 1997. – N22. – P.425-432.
8. *Kimura M.* "Stepping stone" model of population / *M. Kimura* // Annu. Rep. Nat. Inst. Genet. Mishima. – 1953. – v.3. – P. 63 – 65.
9. *Pawlowski J.* Ekologia polska / *J. Pawlowski.* – Warszawa, 1961. – T. IX, N 21. – P. 356 – 368.

Стаття поступила до редакції 16.09.2009 р.;
Стаття прийнята до друку 30.10.2009 р.

Слободян О. М. - здобувач кафедри біології та екології Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника, науковий співробітник заповідника «Горгани».

Сіренко А. Г. – кандидат біологічних наук, доцент кафедри біології та екології Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника

Рецензент: кандидат біологічних наук, доцент кафедри біології та екології Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника Маховська Л. Й.

УДК 311.1 (0758)

ЗАСТОСУВАННЯ ЛІНІЙНОЇ МНОЖИННОЇ КОРЕЛЯЦІЇ ТА РЕҐРЕСІЇ В ЕКОЛОГІЇ

Г.О. Сіренко, Л.Я. Мідак, А.Г. Сіренко
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
e-mail: bratlibo@yahoo.co.uk

Розроблено методику застосування методів лінійної множинної кореляції та реґресії в екології. На числовому прикладі показано процедуру розрахунків коефіцієнтів лінійного рівняння множинної реґресії та його кореляції за кількістю параметрів математичної моделі та числа спостережень (числа експериментів).

Ключові слова: *коефіцієнт кореляції, множинна регресія, математична модель.*

Sirenko H.A., Midak L.Ya., Sirenko A.H. **The Application of linear multiple correlation and regression in ecology.** *The method of application of linear plural correlation and regression is developed in ecology. The procedure of calculations of coefficients of linear equalization of multiple regression and his correlation after the amount of parameters of mathematical model and number of supervisions (numbers of experiments) is rotined in a numerical example.*

Keywords: coefficient of correlation, regression, multiple regression, mathematical model.

Вступ

Проблема застосування математичного апарату в біології проблема давня і досі надзвичайно актуальна. По суті єдиною біологічною наукою в якій система математичного апарату розроблена з широким використанням моделювання є популяційна генетика. В інших біологічних науках математичний апарат використовується поверхово і з використанням переважно тих підходів і методів, що були розроблені більше століття тому. Робіт, присвячених розробкам математичного апарату в біології мало. Приємним винятком з цієї прикрої закономірності є робота Свіржева та Пасєкова [1], яка по суті закладає основи теоретичної біології, що неможлива без досконалих математичних методів та порцедур. Проблема в першу чергу стосується екології, де питання моделювання процесів у надорганізменних системах стоїть гостро.

Історично в біології склалися дві школи, два принципово різних підходи до математичного моделювання процесів – «детерміністичний» та «стохастичний».

Перший підхід – «детерміністичний» - був розроблений в роботах Дж. Холдена, Р. Фішера. При цьому підході біологічні системи, зокрема популяції, вважаються достатньо великими, флуктуаціями фазових змінних нехтують і весь процес мікроеволюції в популяціях описується зміною середніх величин цих змінних у часі. В якості фазових змінних використовуються концентрації або частоти як самих генів, так і деяких їх комбінацій в популяції. Моделі описують зміни цих концентрацій або частот під дією таких факторів, як добір, міграція, порушення панміксії та ін. Самі фактори задаються параметрами, що входять у праві частини диференційних рівнянь моделей. Наприклад, коефіцієнти добору є параметрами, що задають тиск добору на різні генотипи. По суті, детерміністичні моделі є динамічними моделями, де популяція представлена деякою динамічною системою, поведінка якої як під дією різних зовнішніх сил, так і при зміні внутрішніх закономірностей функціонування системи описується траєкторією в фазовому просторі частот – одиничним симплексом, що розташований в позитивній орнанті.

Другий підхід – «стохастичний» - бере свій початок з робіт С. Райта. При цьому підході зміна частот генів або їх комбінацій в популяції розглядаються як марковський процес. Тут вже не потрібно уявлень про достатньо велику популяцію і стохастичні моделі, а для аналізу генетичних процесів з успіхом застосовуються малі популяції (точніше популяції кінцевої чисельності), в яких флуктуації за рахунок випадкової вибірки (так звані «генетично-автоматичні процеси» і «генетичний дрейф») можуть бути значними.

Ці два підходи відрізняються один від одного як за структурою моделей, так і за використаним математичним апаратом. Якщо в детерміністичному підході застосовуються якісна теорія інтегральних диференційних рівнянь і теорія стійкості, то в стохастичному підході застосовуються методи теорії випадкових процесів – ланцюгів Маркова і дифузного наближення).

Проблема співвідношення детерміністичного і флуктуаційного в біології є однією з основних проблем еволюційної теорії чи теоретичної біології взагалі. Висловлюються найбільш крайні точки зору підкріплені доволі модерністськими роздумами. Сама ж проблема настільки ж давня як і історія людства. Фаталізм орієнтальних суспільств тут дискутує з детермінізмом елліністичної цивілізації.

Мета роботи полягала в розробці і вдосконаленні одного з методів та порцедур лінійної та множинної кореляції та регресії в екології.

І. Теоретична частина [2-16]

1. **У випадку k-змінних рівняння множинної регресії** у натуральній скалі має вигляд:

$$\bar{y}_1(2,3,...,i,...,k) = b_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + ... + b_ix_i + .. + b_kx_k \ , \tag{1}$$

де $\bar{y}_1(2,3,...,i,...,k)$ - умовне середнє значення залежної величини y_1, яке відповідає певним значенням незалежних величин $x_2, x_3,..., x_i,..., x_k$.

2. **Проведемо процедуру нормування**: перейдемо до нової випадкової нормальної змінної t_i:

$$t_i = \frac{y_j - \bar{y}_i}{S_{yi}}; \ t_j = \frac{x_j - \bar{x}_i}{S_{xi}} \ , \tag{2}$$

тоді, всі величини y_i та всі їх залежности знайдуть вираження у стандартній скалі.

3. **Таким чином, рівняння регресії** (1) в нормованому вигляді набуде форми:

$$\bar{t}_1(2,3,...,i,...,k) = \beta_2t_2 + \beta_3t_3 + ... + \beta_it_i + .. + \beta_kt_k \ , \tag{3}$$

де $\bar{t}_1(2,3,...,i,...,k)$ - умовне середнє значення нормованої (стандартної) залежної величини t_1, яке відповідає певним значенням нормованих незалежних величин $t_2, t_3,..., t_i,..., t_к$;
$t_2, t_3,..., t_i,..., t_к$ – значення нормованих (стандартних) незалежних величин $y_2, y_3,..., y_i,..., y_к$;
$\beta_2, \beta_3,..., \beta_i,..., \beta_к$ – нормовані (стандартні) коефіцієнти множинної регресії за рівнянням (3).

4. **Нормовані коефіцієнти множинної регресії** визначимо за системою лінійних рівнянь:

$$r_{1,2} = \beta_2r_{22} + \beta_3r_{32} + \beta_4r_{42} + ... + \beta_i r_{i2} + ... + \beta_kr_{k2}$$
$$r_{1,3} = \beta_2r_{23} + \beta_3r_{33} + \beta_4r_{43} + ... + \beta_i r_{i3} + ... + \beta_kr_{k3}$$

$$r_{1,4} = \beta_2 r_{24} + \beta_3 r_{34} + \beta_4 r_{44} + \ldots + \beta_i r_{i4} + \ldots + \beta_k r_{k4}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad , \qquad (4)$$

$$r_{1,i} = \beta_2 r_{2i} + \beta_3 r_{3i} + \beta_4 r_{4i} + \ldots + \beta_i r_{ii} + \ldots + \beta_k r_{ki}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$r_{1,k} = \beta_2 r_{2k} + \beta_3 r_{3k} + \beta_4 r_{4k} + \ldots + \beta_i r_{ik} + \ldots + \beta_k r_{kk},$$

де r_{12}, r_{13}, $r_{14}, \ldots$, $r_{1i}, \ldots$ $r_{1k}, \ldots$, r_{22}, r_{33}, r_{ii}, r_{32}, r_{42}, r_{23}, $r_{43}, \ldots$, $r_{ik}, \ldots$, r_{kk} – коефіцієнти парної лінійної кореляції між змінними $y_1 \sim x_2$; $y_1 \sim x_3$; $x_2 \sim x_3$; $x_2 \sim x_4; \ldots$; $x_i \sim x_i$; $x_i \sim x_к; \ldots$; $x_к \sim x_к$.

5. **Щільність зв'язку змінної** y_1 із сукупністю змінних x_2, $x_3, \ldots$, $x_i, \ldots$, $x_к$ у випадку лінійної множинної кореляції визначається **за коефіцієнтом множинної кореляції**:

$$r_1(2,3,\ldots,i,\ldots,k) = \sqrt{\beta_2 r_{12} + \beta_3 r_{13} + \ldots + \beta_i r_{1i} + \ldots + \beta_k r_{1k}} \qquad (5)$$

6. **Коефіцієнт множинної кореляції після корекції** (врахування числа коефіцієнтів рівняння (1) – числа параметрів рівняння реґресії в натуральній скалі дорівнює:

$$\bar{r}_1(2,3,\ldots,i,\ldots,k) = \sqrt{1 - \left[1 - r_1^2(2,3,\ldots,i,\ldots,k)\right] \cdot \left(\frac{N-1}{N-k}\right)}, \qquad (6)$$

де N – число спостережень;

k – число параметрів моделі (1).

7. **Розрахунок коефіцієнтів моделі** (1) в натуральній скалі:

$$b_i = \beta_i \frac{S_{y1}}{S_i}, \text{ де i= 2, 3,…, i,…, k} \qquad (7)$$

$$b_1 = \bar{y}_1 - \left[b_2 \bar{x}_2 + b_3 \bar{x}_3 + \ldots + b_i \bar{x}_i + \ldots + b_k \bar{x}_k\right], \qquad (8)$$

де $\bar{y}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \ldots \bar{x}_i, \ldots \bar{x}_k$ - середнє значення відповідних величин.

8. **Оцінка середньої квадратичної помилки** розрахунку величини $\bar{y}_{1(2,3,\ldots,i,\ldots,k)}$ в рівнянні моделі (1) дорівнює:

$$\delta_{\sigma b} = Sy_1 \sqrt{\left[1 - \bar{r}_1^2(2,3,\ldots,i,\ldots,k)\right] \cdot \left(\frac{N-1}{N-2}\right)} \qquad (9)$$

ІІ. Числовий приклад

Числовий приклад за [16] в екологічних термінах: середнє значення та середні квадратичні відхилення тривалості життя мишей після γ-опромінення у помірній дозі в умовах споживання ними корму, який містив модифіковані компоненти – мікропервні Mg, Fe, Si у певних концентраціях, приведені в табл. 1. Статистичний аналіз результатів табл. 1 виконано за [2-16].

Визначимо коефіцієнти моделі (1) в натуральній скалі (емпіричної реґресії) тривалості життя мишей $\sigma_в$ (y_1) як функції від концентрації модифікованих компонентів корму мишей – мікропервнів : Mg (x_2), Fe (x_3), Si (x_4) та коефіцієнт множинної кореляції $y_1 \sim f(x_2, x_3, x_4)$.

Таблиця 1. Статистичні характеристики тривалості життя мишей після γ-опромінення та концентрацій Mg, Fe, Si мікропервнів в їх кормі [16].

Випадкова величина	Натуральне позначення	Розмірність	Кодоване позначення	Середня	Середнє квадратичне відхилення
Тривалість життя мишей	$\sigma_в$	доба	y_1	359,7079	5,8860
Концентрація Mg	C (Mg)	мг/кг	x_2	6,34	0,1136
Концентрація Fe	C (Fe)	мг/кг	x_3	0,30	0,0200
Концентрація Si	C (Si)	мг/кг	x_4	0,22	0,0500

1. **Значення коефіцієнтів парних кореляцій** між тривалістю життя мишей та концентраціями мікропервнів Mg, Fe, Si приведені в табл. 2 і 3.

2. **За формулою (1) рівняння емпіричної реґресії** в натуральній скалі для даного прикладу має вигляд:

$$\bar{y}_1(2,3,4) = b_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4 \qquad (10)$$

3. **За формулою (3) у нормованій скалі** рівняння (10) набуває вигляду:

$$\bar{t}_1(2,3,4) = \beta_2 t_2 + \beta_3 t_3 + \beta_4 t_4 \qquad (11)$$

4. **Знайдемо коефіцієнти β_2, β_3, β_4**, вирішуючи систему лінійних рівнянь:

$$\left.\begin{aligned} r_{1,2} &= \beta_2 r_{22} + \beta_3 r_{32} + \beta_4 r_{42}; \\ r_{1,3} &= \beta_2 r_{23} + \beta_3 r_{33} + \beta_4 r_{43}; \\ r_{1,4} &= \beta_2 r_{24} + \beta_3 r_{34} + \beta_4 r_{44}. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Таблиця 2. Матриця вибіркових коефіцієнтів парних кореляцій r_{ij} [16]

Випадкова величина	Коефіцієнт парної кореляції			
	$y_1\,[\sigma_в]$	x_2 [C (Mg)]	x_3 [C (Fe)]	x_4 [C (Si)]
$y_1\,[\sigma_в]$	r_{11}	r_{12}	r_{13}	r_{14}
x_2 [C (Mg)]	r_{21}	r_{22}	r_{23}	r_{24}
x_3 [C (Fe)]	r_{31}	r_{32}	r_{33}	r_{34}
x_4 [C (Si)]	r_{41}	r_{42}	r_{43}	r_{44}

Таблиця 3. Значення вибіркових коефіцієнтів парних кореляцій r_{ij} між тривалістю життя мишей, підданих γ-опроміненню, та концентраціями мікропервнів Mg, Fe, Si [16]

Випадкова величина	Коефіцієнт парної кореляції			
	$y_1\,[\sigma_в]$	x_2 [C (Mg)]	x_3 [C (Fe)]	x_4 [C (Si)]
$y_1\,[\sigma_в]$	1	0,5352	–0,4273	–0,2659
x_2 [C (Mg)]	0,5352	1	–0,4286	–0,6458
x_3 [C (Fe)]	–0,4273	–0,4286	1	0,6154
x_4 [C (Si)]	–0,2659	–0,6458	0,6154	1

5. **Для системи лінійних рівнянь (12)** знайдемо визначники:

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} r_{22} & r_{32} & r_{42} \\ r_{23} & r_{33} & r_{43} \\ r_{24} & r_{34} & r_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -0{,}4286 & -0{,}6458 \\ -0{,}4286 & 1 & 0{,}6154 \\ -0{,}6458 & 0{,}6154 & 1 \end{vmatrix} = +0{,}3611; \tag{13}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} r_{12} & r_{32} & r_{42} \\ r_{13} & r_{33} & r_{43} \\ r_{14} & r_{34} & r_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0{,}5352 & -0{,}4286 & -0{,}6458 \\ -0{,}4273 & 1 & 0{,}6154 \\ -0{,}2659 & 0{,}6154 & 1 \end{vmatrix} = +0{,}2176; \tag{14}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} r_{22} & r_{12} & r_{42} \\ r_{23} & r_{13} & r_{43} \\ r_{24} & r_{14} & r_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0{,}5352 & -0{,}6458 \\ -0{,}4286 & -0{,}4273 & 0{,}6154 \\ -0{,}6458 & -0{,}2659 & 1 \end{vmatrix} = -0{,}1424; \tag{15}$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} r_{22} & r_{32} & r_{12} \\ r_{23} & r_{33} & r_{13} \\ r_{24} & r_{34} & r_{14} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -0{,}4286 & 0{,}5352 \\ -0{,}4286 & 1 & -0{,}4273 \\ -0{,}6458 & 0{,}6154 & -0{,}2659 \end{vmatrix} = +0{,}1320. \tag{16}$$

6. **Тоді коефіцієнти рівняння (12)** будуть дорівнювати:

$$\beta_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_0} = \frac{+0{,}2176}{+0{,}3611} = +0{,}6026; \tag{17}$$

$$\beta_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta_0} = \frac{-0{,}1424}{+0{,}3611} = -0{,}3944; \tag{18}$$

$$\beta_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta_0} = \frac{+0{,}1320}{+0{,}3611} = +0{,}3655. \tag{19}$$

7. **Рівняння (11) у нормованій скалі** набуває вигляду:

$$\bar{t}_1(2,3,4) = 0{,}6026t_2 - 0{,}3944t_3 + 0{,}3655t_4. \tag{20}$$

8. **Розрахунок коефіцієнтів моделі (10)** в натуральній скалі за формулами (7), (8) привело до таких результатів:

$$b_2 = \beta_2 \frac{S_{y1}}{S_2} = 0{,}6026 \frac{5{,}8860}{0{,}1136} = 31{,}2227; \tag{21}$$

$$b_3 = \beta_3 \frac{S_{y1}}{S_3} = (-0{,}3944) \frac{5{,}8860}{0{,}0200} = -116{,}0719; \tag{22}$$

$$b_4 = \beta_4 \frac{S_{y1}}{S_4} = 0,3655 \frac{5,8860}{0,0500} = 43,0267; \qquad (23)$$

$$b_1 = \bar{y}_1 - [b_2\bar{x}_2 + b_3\bar{x}_3 + b_4\bar{x}_4] = 359,7079 - [31,2227 \cdot 6,34 - 116,0719 \cdot 0,30 + 43,0267 \cdot 0,22] =$$
$$= 359,7079 - [197,9519 - 34,8216 + 9,4659] = 359,7079 - 172,5962 = 187,1117 \qquad (24)$$

9. **Рівняння залежности тривалости життя мишей,** підданих γ-опроміненню, від концентрації основних компонентів – мікропервнів їх корму – має вигляд у натуральній скалі:

$$\sigma_в = 187,1117 + 31,2227 \cdot C(Mg) - 116,0719 \cdot C(Fe) + 43,0267 \cdot C(Si) \qquad (25)$$

10. **За формулою (5) множинний коефіцієнт кореляції** дорівнює:

$$r_1(2,3,4) = \sqrt{\beta_2 r_{12} + \beta_3 r_{13} + \beta_4 r_{14}} = \sqrt{0,6026 \cdot 0,5352 + (-0,3944) \cdot (-0,4273) + 0,3655 \cdot (-0,2659)} =$$
$$= 0,62758 \qquad (26)$$

11. **Коефіцієнт множинної кореляції після корекції** – врахування числа параметрів рівняння (10) k=4; числа експериментів N=26 – за рівнянням (6):

$$\bar{r}_1(2,3,4) = \sqrt{1 - [1 - r^2_{1(2,3,4)}] \cdot \left(\frac{N-1}{N-k}\right)} = \sqrt{1 - [1 - 0,62758^2] \cdot \left(\frac{26-1}{26-4}\right)} = 0,55785 \qquad (27)$$

12. **Оцінка середньої квадратичної помилки** розрахунку тривалости життя мишей, підданих γ-опроміненню, та концентраціями за рівнянням моделі (1) в натуральній скалі становить за (9):

$$\delta_{\sigma в} = S_{y1} \sqrt{[1 - \bar{r}^2_{1(2,3,4)}] \cdot \left(\frac{N-1}{N-2}\right)} = 5,8860 \sqrt{[1 - 0,55785^2] \cdot \left(\frac{26-1}{26-2}\right)} = 4,9858 МПа \qquad (28)$$

13. **Висунемо нульову гіпотезу H_0** відносно генерального множинного коефіцієнта кореляції $\rho_1(2,3,4)$, оцінкою якого є вибірковий множинний коефіцієнт $r_1(2,3,4)$, , кореляції, розрахований за формулою (5):

$$\left.\begin{matrix} H_0\text{: } \rho_{1(2,3,4)} = 0 \\ \uparrow \\ r_{1(2,3,4)} \neq 0 \end{matrix}\right\} \qquad (29)$$

14. **Перевірка нульової гіпотези H_0 (29):**

1) **за критичним значенням коефіцієнта кореляції [10,12]:**

- для α=0,05 $|r_{1(2,3,4)}|$=0,62758>$r_{кр.}$ {q=1-0,05/2=0,975; f=N-2=24}=0,3882 [12]; (30)
- для α=0,01 $|r_{1(2,3,4)}|$=0,62758>$r_{кр.}$ {q=1-0,01/2=0,995; f=N-2=24}=0,4958 [12]. (31)

З ймовірностями р=0,95 та р=0,99 при рівнях значущости α=0,05 та α=0,01 нульова гіпотеза відкидається, тобто стверджуємо, що за $r_{кр.}$ між тривалістю життя мишей, підданих γ-опроміненню та концентраціями основних компонентів – мікропервнів C(Mg), C(Fe) та C(Si) їх корму, існує статистично щільний множинний лінійний зв'язок, при цьому **ступінь лінійности множинного зв'язку** дорівнює:

- для α=0,05 $\xi_1(r)_{0,05} = \frac{|r_{1(2,3,4)}|}{r_{кр}(\alpha = 0,05)} = \frac{0,62758}{0,3882} = 1,6166;$ (32)
- для α=0,01 $\xi_1(r)_{0,01} = \frac{|r_{1(2,3,4)}|}{r_{кр}(\alpha = 0,01)} = \frac{0,62758}{0,4958} = 1,2658;$ (33)

а **ступінь нелінійности множинного зв'язку** дорівнює:

- для α=0,05 $\xi_2(r)_{0,05} = \frac{r_{кр}(\alpha = 0,05)}{|r_{1(2,3,4)}|} = \frac{0,3882}{0,62758} = 0,6186;$ (34)
- для α=0,01 $\xi_2(r)_{0,01} = \frac{r_{кр}(\alpha = 0,01)}{|r_{1(2,3,4)}|} = \frac{0,4958}{0,62758} = 0,7900;$ (35)

2) **за критерієм Стьюдента [12,16]:**

- для α=0,05 $|t_p| = \frac{|r_{1(2,3,4)}|}{\sqrt{1 - r^2_{1(2,3,4)}}} \sqrt{N-2} = \frac{0,62758}{\sqrt{1 - 0,62758^2}} \sqrt{26-2} = 5,07224 >$
  $> t_т$ {q=1-0,05/2=0,975; f=N-2=26-2=24}=2,064 [12]; (36)
- для α=0,01 $|t_p| = 5,07224 > t_т$ {q=1-0,01/2=0,995; f=24}=2,797 [12]. (37)

З ймовірностями р=0,95 та р=0,99 при рівнях значущости α=0,05 та α=0,01 нульова гіпотеза відкидається, тобто стверджуємо, що за t-критерієм між тривалістю життя мишей, підданих γ-опроміненню та концентраціями основних компонентів – мікропервнів C(Mg), C(Fe) та C(Si) їх корму, існує статистично щільний множинний лінійний зв'язок, при цьому **ступінь лінійности множинного зв'язку** дорівнює:

- для α=0,05 $\xi_1(t)_{0,05} = \dfrac{|t_p|}{t_т(\alpha = 0{,}05)} = \dfrac{5{,}07224}{2{,}064} = 2{,}4575;$ (38)

- для α=0,01 $\xi_1(t)_{0,01} = \dfrac{|t_p|}{t_т(\alpha = 0{,}01)} = \dfrac{5{,}07224}{2{,}797} = 1{,}8135;$ (39)

а ступінь нелінійности множинного зв'язку дорівнює:

- для α=0,05 $\xi_2(t)_{0,05} = \dfrac{t_т(\alpha = 0{,}05)}{|t_p|} = \dfrac{2{,}064}{5{,}07224} = 0{,}4069;$ (40)

- для α=0,01 $\xi_2(t)_{0,01} = \dfrac{t_т(\alpha = 0{,}01)}{|t_p|} = 0{,}5514.$ (41)

3) За Z-перетворенням Фішера [12,16]:

- для α=0,05 $|z_p| = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+r_{1(2,3,4)}}{1-r_{1(2,3,4)}} = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+0{,}62758}{1-0{,}62758} = 0{,}73741>$

  $>[(z_т\ \{q=1-\alpha/2=1-0{,}05/2=0{,}975\}=1{,}96)\cdot(\sigma_z=\dfrac{1}{\sqrt{N-3}} = \dfrac{1}{\sqrt{26-3}} = 0{,}2085)=0{,}40866]$ [12]; (42)

- для α=0,01 $|z_p| = 0{,}73741>[(z_т\ \{q=0{,}995\}=2{,}58)\cdot(\sigma_z=0{,}2085)=0{,}53793]$ [12]. (43)

З ймовірностями p=0,95 та p=0,99 при рівнях значущости α=0,05 та α=0,01 нульова гіпотеза відкидається, тобто стверджуємо, що за Z-перетворенням Фішера між тривалістю життя мишей, підданих γ-опроміненню та концентраціями основних компонентів – мікропервнів C(Mg), C(Fe) та C(Si) в кормі, існує статистично щільний множинний лінійний зв'язок, при цьому **ступінь лінійности множинного зв'язку** дорівнює:

- для α=0,05 $\xi_1(z)_{0,05} = \dfrac{|z_p|}{[z_т(q=0{,}975)\cdot\sigma_z]} = \dfrac{0{,}73741}{0{,}40866} = 1{,}8045;$ (44)

- для α=0,01 $\xi_1(z)_{0,01} = \dfrac{|z_p|}{[z_т(q=0{,}995)\cdot\sigma_z]} = \dfrac{0{,}73741}{0{,}53793} = 1{,}3708;$ (45)

а ступінь нелінійности множинного зв'язку дорівнює:

- для α=0,05 $\xi_2(z)_{0,05} = \dfrac{[z_т(q=0{,}975)\cdot\sigma_z]}{|z_p|} = \dfrac{0{,}40866}{0{,}73741} = 0{,}5542;$ (46)

- для α=0,01 $\xi_2(z)_{0,01} = \dfrac{[z_т(q=0{,}995)\cdot\sigma_z]}{|z_p|} = \dfrac{0{,}53793}{0{,}73741} = 0{,}7295.$ (47)

15. **Висунемо нульову гіпотезу H_0 відносно ґенерального** множинного коефіцієнта кореляції $\overline{\rho}_{1(2,3,4)}$, оцінкою якого є вибірковий множинний коефіцієнт кореляції $r_1(2,3,4)$, підданий **корекції** – врахування числа параметрів рівняння (10): k=4; N=26 – за рівнянням (6):

$$\left.\begin{matrix} H_0': \overline{\rho}_{1(2,3,4)} = 0 \\ \uparrow \\ \overline{r}_{1(2,3,4)} \neq 0 \end{matrix}\right\} \quad (48)$$

16. **Перевірка нульової гіпотези H_0' (48) аналогічно (14):**

1) **за критичним значенням коефіцієнта кореляції [6, 10, 12]:**

- для α=0,05 $|\overline{r}_1(2,3,4)|=0{,}55785>r_{кр.}\ \{q=0{,}975;\ f=24\}=0{,}3882$ [3,6,10,12]; (49)

- для α=0,01 $|\overline{r}_1(2,3,4)|=0{,}55785>r_{кр.}\ \{q=0{,}995;\ f=24\}=0{,}4958$ [3,6,10,12]. (50)

З ймовірностями p=0,95 та p=0,99 H_0' відкидається, тобто стверджуємо, що за $r_{кр.}$ між тривалістю життя мишей, підданих γ-опроміненню та концентраціями основних компонентів – мікропервнів C(Mg), C(Fe) та C(Si) в їх кормі, існує щільний множинний лінійний зв'язок, при цьому **ступінь лінійности зв'язку** дорівнює:

- для α=0,05 $\xi_1(\overline{r})_{0,05} = \dfrac{|\overline{r}_1(2,3,4)|}{r_{кр}(\alpha=0{,}05)} = \dfrac{0{,}55785}{0{,}3882} = 1{,}4370;$ (51)

- для α=0,01 $\xi_1(\overline{r})_{0,01} = \dfrac{|\overline{r}_1(2,3,4)|}{r_{кр}(\alpha=0{,}01)} = \dfrac{0{,}55785}{0{,}4958} = 1{,}1252.$ (52)

а **ступінь нелінійности множинного зв'язку** дорівнює:

- для α=0,05 $\xi_2(\bar{r})_{0,05} = \frac{r_{кр}(\alpha = 0,05)}{|\bar{r}_1(2,3,4)|} = \frac{0,3882}{0,55785} = 0,6959;$ (53)
- для α=0,01 $\xi_2(\bar{r})_{0,01} = \frac{r_{кр}(\alpha = 0,01)}{|\bar{r}_1(2,3,4)|} = \frac{0,4958}{0,55785} = 0,8888;$ (54)

2) **за критерієм Стьюдента [12, 16]**:

- для α=0,05 $|t_p| = \frac{|\bar{r}_1(2,3,4)|}{\sqrt{1-\bar{r}_1^2(2,3,4)}}\sqrt{N-2} = \frac{0,55785}{\sqrt{1-0,55785^2}}\sqrt{26-2} = 3,29288 >$
  $> t_т$ {q=0,975; f=24}=2,064 [12]; (55)
- для α=0,01 $|t_p| = 3,29288 > t_т$ {q=0,995; f=24}=2,797 [12]. (56)

З ймовірностями p=0,95 та p=0,99 H_0' відкидається, тобто стверджуємо, що за t-критерієм між тривалістю життя мишей, підданих γ-опроміненню та концентраціями основних компонентів їжі – мікропервнів C(Mg), C(Fe) та C(Si) в їх кормі, існує щільний множинний лінійний зв'язок, при цьому **ступінь лінійности зв'язку**:

- для α=0,05 $\xi_1(t)_{0,05} = \frac{|t_p|}{t_т(\alpha = 0,05)} = \frac{3,29288}{2,064} = 1,5954;$ (57)
- для α=0,01 $\xi_1(t)_{0,01} = \frac{|t_p|}{t_т(\alpha = 0,01)} = \frac{3,29288}{2,797} = 1,1773;$ (58)

а **ступінь нелінійности множинного зв'язку** дорівнює:

- для α=0,05 $\xi_2(t)_{0,05} = \frac{t_т(\alpha = 0,05)}{|t_p|} = \frac{2,064}{3,29288} = 0,6268;$ (59)
- для α=0,01 $\xi_2(t)_{0,01} = \frac{t_т(\alpha = 0,01)}{|t_p|} = \frac{2,797}{3,29288} = 0,8494.$ (60)

3) **За Z-перетворенням Фішера [12, 16]:**

- для α=0,05 $|z_p| = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\bar{r}_{1(2,3,4)}}{1-\bar{r}_{1(2,3,4)}} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+0,55785}{1-0,55785} = 0,62971 >$
  $>[(z_т$ {q=0,975}=1,96)·(σ_z=0,2085)=0,40866] [12]; (61)
- для α=0,01 $|z_p| = 0,62971 > [(z_т$ {q=0,995}=2,58)·(σ_z=0,2085)=0,53793] [12]. (62)

З ймовірностями p=0,95 та p=0,99 H_0' відкидається, тобто стверджуємо, що за Z-перетворенням Фішера між тривалістю життя мишей, підданих γ-опроміненню та концентраціями основних компонентів – мікропервнів C(Mg), C(Fe) та C(Si) в їх кормі, існує щільний множинний лінійний зв'язок, при цьому **ступінь лінійности зв'язку** дорівнює:

- для α=0,05 $\xi_1(z)_{0,05} = \frac{|z_p|}{[z_т(q = 0,975)\cdot\sigma_z]} = \frac{0,62971}{0,40866} = 1,5409;$ (63)
- для α=0,01 $\xi_1(z)_{0,01} = \frac{|z_p|}{[z_т(q = 0,995)\cdot\sigma_z]} = \frac{0,62971}{0,53793} = 1,1706;$ (64)

а **ступінь нелінійности множинного зв'язку** дорівнює:

- для α=0,05 $\xi_2(z)_{0,05} = \frac{[z_т(q = 0,975)\cdot\sigma_z]}{|z_p|} = \frac{0,40866}{0,62971} = 0,6490;$ (65)
- для α=0,01 $\xi_2(z)_{0,01} = \frac{[z_т(q = 0,995)\cdot\sigma_z]}{|z_p|} = \frac{0,53793}{0,62971} = 0,8543.$ (66)

Результати розрахунків за (29) – (66) зведені в табл. 4.

Таблиця 4. Підсумкова матриця значень множинних коефіцієнтів кореляцій та перевірки їх значущості за критеріями $r_{кр}$, t-Стьюдента та F-перетворення Фішера

За критерієм	До корекції	Після корекції
	$r_1(2,3,4) = 0,62758$	$\bar{r}_1(2,3,4) = 0,55785$

$r_{кр}$	α=0,05	α=0,01	α=0,05	α=0,01
Ступінь лінійности	1,6166	1,2658	1,4370	1,1252
Ступінь нелінійности	0,6186	0,7900	0,6959	0,8888
t	α=0,05	α=0,01	α=0,05	α=0,01
Ступінь лінійности	2,4575	1,8135	1,5954	1,1773
Ступінь нелінійности	0,4069	0,5514	0,6268	0,8494
F-перетворенням	α=0,05	α=0,01	α=0,05	α=0,01
Ступінь лінійности	1,8045	1,3708	1,5409	1,1706
Ступінь нелінійности	0,5542	0,7295	0,6490	0,8543

Як видно з табл. 4 для множинних коефіцієнтів кореляції до і після кореляції спостерігається їх значущість за критичним коефіцієнтам кореляції , t-критерієм Стьюдента та F-перетворенням Фішера, при рівні значущості α=0,05 і α=0,01 при цьому **ступінь лінійности множинної реґресії $y_1 \sim x_2, x_3, x_4$** становить:

до корекції

ξ_1 = 1,617 – 2,458 (α=0,05);

ξ_1 = 1,266 – 1,814 (α=0,01);

після корекції

ξ_1 = 1,437 – 1,595 (α=0,05);

ξ_1 = 1,125 – 1,777 (α=0,01);

а **ступінь нелінійності зв'язку** становить:

до корекції

ξ_1 = 0,407 – 0,619 (α=0,05);

ξ_1 = 0,551 – 0,790 (α=0,01);

після корекції

ξ_1 = 0,627 – 0,696 (α=0,05);

ξ_1 = 0,849 – 0,889 (α=0,01).

Висновки

1. Розроблено методику застосування методів лінійної множинної кореляції та реґресії в екології.
2. На числовому прикладі показано процедуру розрахунків коефіцієнтів лінійного рівняння множинної реґресії та його кореляції за кількістю параметрів математичної моделі та числа спостережень (числа експериментів).
3. На числовому прикладі отримано: лінійне рівняння множинної реґресії залежности тривалости життя мишей, підданих γ-опроміненню, та концентраціями мікропервнів Mg, Fe та Si в кормі мишей; розрахований коефіцієнт множинної кореляції та доведена його значущість та ступенів лінійности та налінійности (для ступеня значущості 1 і 5 %) за критичним коефіцієнтом кореляції, критерієм Стьюдента та перетворенням Фішера.

Література

1. *Свирежев Ю., Пасеков В.* Основы математической генетики. - М.: Высшая школа, 1989. – 207 с.
2. *Ахназарова С.Л.* Оптимизация эксперимента в химии и химической технологи / С.Л. Ахназарова, В.В. Кафаров. – М.: Высш. шк., 1978. – 320 с.: ил., табл. – Библиогр.: с. 302 – 303 (53 наимен.). – Приложения: с. 304 – 317 (14 табл.).
3. *Бендат Дж.С.* Измерение и анализ случайных процессов / Дж.С. Бендат, А.Г. Пирсол; пер. с англ. Г.В.Матушевского, В.Е.Привальского; под ред. И.Н.Коваленко. – М.: Мир, 1971. – 408 с. – Перевод за изд.: Measurement and analysis of random data / Julius S. Bendat, Allan G. Piersol. – John Wiley and Sons, Inc. – New York-London-Sydney, 1967.: ил., табл. – Предмет. указатель: с. 403-408. – Библиогр.: с. 400-402 (59 наименов.).
4. *Волощенко А.Б.* Теорія ймовірностей та математична статистика: навч.-метод. посібник для самост. вивчення дисц. [для студ. економ. спеціал. вищ. навч. заклад.] / А.Б. Волощенко, І.А. Джалладова; [Мін-во освіти інауки України; гриф: лист № 14 / 18.2-613 від 22.03.2002 р.]. – К.: Київ. Нац. економ. ун-т, 2003. – 256 с.: іл., табл. – Приклади розв. завдань і вправи для самост. розв'язання в кінці розд. – Блочно-модул. контроль: с. 183 – 203 (9 варіантів). – Відповіді: с. 204 – 216. - – Бібліогр.: с. 217 (18 назв). – Додатки: с. 218 – 254 (8 табл.). – ISBN 966 – 574 – 459– 3.
5. *Жлуктенко В.І.* Теорія ймовірностей і математична статистика: навч.-метод. посібник [для студ. економ. вищ. навч. заклад.]: У 2-х ч. – Ч. ІІ. Математична статистика / В.І. Жлуктенко, С.І Наконечний, С.С. Савіна; [Мін-во освіти і науки України; гриф: лист № 14 / 18.2-183 від 27.02.2001 р.]. – К.: Київ. нац. економ. ун-т, 2001. – 336 с.: іл., табл. – Теор. запит. та завдання до теми в кінці теми. – Лаб. роб. після тем 14, 15. – Додатки: с. 242 – 246, 292 – 331. – Бібліогр.: с. 246 (4 назви).– ISBN 966–574–265 – 5.

6. *Зажигаев Л.С.* Методы планирования и обработки результатов физического эксперимента / Л.С. Зажигаев, А.А. Кишьян, Ю.И. Романиков. – М.: Атомиздат, 1978. – 232 с.: ил., табл. – Приложение: с. 144-229 (16 табл.). – Библиогр.: с. 230-231.
7. *Іванюта І.Д.* Елементи теорії ймовірностей та математичної статистики: навч. посібник [для студ. економ. спеціал. вищ. навч. заклад.] / І.Д. Іванюта, В.І. Рибалка, І.А. Рудоміно-Дусятська; [Мін-во освіти інауки України; гриф: лист № 14 / 18.2-271 від 11.02.2003 р.]. – К.: Слово, 2003. – 271 с:. іл., табл. – Завдання до самостійн. роботи: с. 235 – 261 (15 завд.). – Додатки: с. 262 – 267 (6 табл.). – Бібліогр.: с. 268 (6 назв). – ISBN 966 – 8407 – 01 – 6.
8. *Корн Г.* Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – 4-е изд.; пер. с англ. И.Г. Арамановича, А.М. Березмана, И.А. Вайнштейна и др.; под общ. ред. И.Г. Арамановича. – М.: Наука, 1978. – 832 с. – Перевод за изд.: Mathematical Handbook for Scientists and Engineers Definitions, Theorems and Formulas for Reference and Review. – Second, Enlargend and Revised Edition / Granino A. Korn, Ph. D., Theresa M. Korn, M.S. – NcGraw-Hill Book Company: New York-San Francisco-Toronto-London-Sydney, 1968. – ил., табл. – Библиогр.: с. 796 – 800 (183 наим.). – Указ. важн. обозн.: с. 801 – 803. – Предмет. указ.: с. 804 – 831. – Перечень табл. по гл.: с. 20 – 22.
9. *Неділько С.А.* Математичні методи в хімії: підручник [для студ. хім. спеціал. вищ. навч. закладів] / Сергій Неділько; [Мін-во освіти інауки України; гриф: лист № 1 / 11-1536 від 13.04.2004 р.]. – К.: Либідь, 2005. – 256 с.: іл. – Завдання для самостійн. роботи та бібліогр. в кінці розд. – ISBN 966 – 06 – 03843.
10. *Адлер Ю.П.* Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий / Ю.П. Адлер, Е.В. Маркова, Ю.В. Грановский. – 2-е изд., перераб. и допол. – М.: Наука, 1976. – 280 с.: ил., табл.– Библиогр. в конце гл.
11. *Венецкий И.Г.* Теория вероятностей и математическая статистика / И.Г. Венецкий, Г.С. Кильдишев. – Изд. 3-е, перераб. и доп. – М.: Статистика, 1975. – 264 с.: ил., табл. – Приложения: с. 255-264 (9 табл.).
12. *Мюллер П., Нойман П., Шторм Р.* Таблицы по математической статистике / Пер. с нем. и предисловие В.М. Ивановой.– М.: Финансы и статистика, 1982. – 272 с.: ил.
13. *Налимов В.В.* Логические основания планирования эксперимента / В.В. Налимов, Т.И. Голикова. – М.: Металлургия, 1976. – 128 с.: ил., табл. – Библиогр.: с. 126 – 128 (81 наим.).
14. *Планирование эксперимента* в исследовании технологических процессов / К. Хартман, Э. Лецкий, В. Шефер и др. / пер. с нем. Г.А. Фоминой, Н.С. Лецкого; под ред. Э.К. Лецкого. – М.: Мир, 1977. – 552 с. Перевод за изд.: Statistische Versuchsplanung und–auswertung in der Stoffwirt–shaft / von einem Autorenkollektiv Herausgeber: Klaus Hartmann, Eduard Lezki, Wolgang Schäfer. – VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig, 1974.: ил., табл. – Библиогр. в конце гл. – Мат. приложения: с. 516 – 540. – Предмет. указатель: с. 541 – 547.
15. *Сигорский В.П.* Математический аппарат инженера / Виталий Петрович Сигорский. – 2-е изд., стереотип. – К.: Техніка, 1977. – 768 с.: – ил., табл. – Библиогр. в конце гл. – Предмет. указ.: с. 752 – 764.
16. *Степнов М.Н.* Статистическая обработка результатов механических испытаний / Михаил Никитович Степнов. – М.: Машиностроение, 1972. – 232 с. : ил., табл. – Библиогр.: с. 229-230 (36 назв.).

Стаття поступила до редакції 10.12.2010 р.; Стаття прийнята до друку 29.12.2010 р.

Сіренко Г.О. – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри неорганічної і фізичної хімії.

Мідак Л.Я. – кандидат хімічних наук, доцент кафедри неорганічної і фізичної хімії.

Сіренко А. Г. – кандидат біологічних наук, доцент кафедри біології та екології.

Рецензент: Мазепа І. В. – доктор медичних наук, професор кафедри біохемії та біотехнології Прикарпатського університету імені Василя Стефаника.