

Прикарпатський національний університет  
імені Василя Стефаника

# ТЕОРІЯ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

(ЛАБОРАТОРНИЙ ПРАКТИКУМ З НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ)

СПЕЦІАЛЬНОСТІ: 113 ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА,  
121 ІНЖЕНЕРІЯ ПРОГРАМНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ

ВИКЛАДАЧІ: МАЗУРЕНКО ВІКТОР ВОЛОДИМИРОВИЧ,  
МАХНЕЙ ОЛЕКСАНДР ВОЛОДИМИРОВИЧ

УДК 004.43:519.71

ББК 22.18

М13

*Рекомендовано Вченою радою факультету математики та інформатики Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника як навчальний посібник для студентів спеціальності «прикладна математика» (протокол № 4 від 2 травня 2023 р.).*

**Рецензенти:**

*Дмитришин М.І.*, доктор фізико-математичних наук, професор (Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника);

*Савка І.Я.*, кандидат фізико-математичних наук, старший викладач (Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника).

**М13 Мазуренко В.В., Махней О.В. Теорія автоматичного керування** : лабораторний практикум з навчальної дисципліни. Івано-Франківськ : Голіней, 2023. 32 с.

Наведено завдання і методичні рекомендації до виконання лабораторних робіт з теорії автоматичного керування в системі комп'ютерної математики.

Для студентів спеціальності «прикладна математика». Може бути корисним для студентів галузей знань «математика і статистика» та «інформаційні технології».

## ЗМІСТ

---

ПЕРЕДМОВА .....	4
Лабораторна робота 1. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ САК .....	5
Лабораторна робота 2. ПЕРЕТВОРЕННЯ СТРУКТУРНИХ СХЕМ САК .....	8
Лабораторна робота 3. АНАЛІЗ ТИПОВИХ ЛАНОК САК (I) .....	13
Лабораторна робота 4. АНАЛІЗ ТИПОВИХ ЛАНОК САК (II) .....	17
Лабораторна робота 5. ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ САК .....	21
Лабораторна робота 6. ДОСЛІДЖЕННЯ ЯКОСТІ САК .....	26
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ .....	31

## ПЕРЕДМОВА

---

Теорія автоматичного керування — це розділ технічної кібернетики, що вивчає закономірності керування різноманітними технічними пристроями, технологічними процесами, економічними виробництвами тощо, які називають системами автоматичного керування (САК).

Цей лабораторний практикум містить завдання і методичні рекомендації для виконання шести лабораторних робіт з теорії автоматичного керування засобами системи комп'ютерної математики MatLab (Matrix Laboratory). В разі використання trial-версії MatLab, навчальна дисципліна вивчається блоком впродовж півсеместру з подвоєним тижневим навантаженням. Ще однією альтернативою є використання вільно поширюваної системи комп'ютерної математики SciLab, яка надає схожу на MatLab мову написання сценаріїв і відповідний набір функцій для моделювання та імітації систем автоматичного керування, а також підтримує сценарії, написані для MatLab.

Лабораторні роботи охоплюють математичне моделювання систем автоматичного керування, перетворення їх структурних схем, аналіз типових (елементарних) динамічних ланок, дослідження стійкості та якості систем автоматичного керування, їх аналіз і синтез.

Лабораторний практикум написаний на основі узагальнення досвіду авторів викладання навчальної дисципліни «Теорія керування» і призначений для студентів спеціальності «прикладна математика». Може бути корисним для студентів галузей знань «математика і статистика» та «інформаційні технології».

### ЗАСОБИ МОДЕЛЮВАННЯ САК

У системі MatLab (Matrix Laboratory) є два основні засоби моделювання систем автоматичного керування (САК) — це використання комплекту інструментів Control System Toolbox (CST) та візуального середовища імітаційного моделювання Simulink.

CST пропонує відповідні інструменти для побудови, аналізу і синтезу лінійних стаціонарних САК — LTI-моделей (Linear Time Invariant Models), котрі можуть бути як одновимірними SISO-моделями (Single Input – Single Output), так і багатовимірними МІМО-моделями (Multiple Input – Multiple Output). Simulink дозволяє використовувати вже готові бібліотеки блоків для візуального моделювання САК і вирішувати весь спектр задач від розробки концепції моделі аж до її імітації.

LTI-моделі в CST можуть бути представлені у трьох основних формах:

- з допомогою передавальної функції (Transfer Function):  $tf(num, den)$ , де масиви  $num$  і  $den$  визначають коефіцієнти в чисельнику і знаменнику передавальної функції;
- з допомогою нулів, полюсів і коефіцієнта підсилення (Zero-Pole-Gain):  $zpk(z, p, k)$ , де масиви  $z$ ,  $p$  і  $k$  визначають нулі, полюси і коефіцієнт підсилення передавальної функції;
- у просторі станів (State Space):  $ss(A, B, C, D)$ , де  $A$ ,  $B$ ,  $C$  і  $D$  визначають відповідно матриці станів, керуючих впливів, спостережень і прямого зв'язку спостереження-керування.

Усі три форми LTI-моделей дозволяють маніпулювати з лінійними САК як цілим об'єктом, а не набором даних у вигляді векторів чи матриць. Для аналізу САК у CST можна використовувати такі функції: `tfddata`, `series`, `parallel`, `feedback`, `append`, `pole`, `zero`, `minreal`, `pzmap`, `roots`, `poly`, `conv`, `polyval`, `rlocus`, опис яких можна знайти в розділі Help (F1).

### ЗАВДАННЯ НА ЛАБОРАТОРНУ РОБОТУ

Динаміка САК описується звичайним диференціальним рівнянням першого порядку у стандартній формі

$$Ty'(t) + y(t) = ku(t), \quad y(0) = y_0, \quad (1)$$

де варіанти значень часового коефіцієнта  $T$ , коефіцієнта підсилення  $k$  та початкового значення  $y_0$  наведені в таблиці 1 нижче,  $y(t)$  та  $u(t)$  — вихідний і вхідний сигнали відповідно.

Виконати такі завдання:

1. Написати сценарій `rib_lab1_dm.m` (`rib` — ваші ініціали) аналізу диференціальної моделі САК в CST, виконавши наступні кроки:
  - (a) розв'язати диференціальну модель (`dsolve`) і знайти перехідну  $h(t)$  та імпульсну перехідну (вагову)  $w(t)$  функції  
(перехідну функцію для диференціального рівняння  $x'(t) + ax(t) = bu(t)$  можна

- шукати як розв'язок початкової задачі  $x'(t) + ax(t) = b$ ,  $x(0) = 0$ , а імпульсну перехідну функцію — як розв'язок задачі  $x'(t) + ax(t) = 0$ ,  $x(0) = b$ ;
- (b) побудувати відповідні часові характеристики;
  - (c) побудувати часові характеристики в одній системі координат;
  - (d) застосувати перетворення Лапласа до імпульсної перехідної функції  $w(t)$  (`laplace(w)`).
2. Побудувати візуальну модель `rib_lab1_dm.mdl` в Simulink:
- (a) для побудови моделі використати такі блоки з бібліотеки Simulink Library, як Sources (Step, Constant), MathOperations (Gain, Add), Continuous (Derivative, Integrator), Sinks (Scope); налаштувати параметри блоків;
  - (b) виконати імітацію моделі і отримати перехідну та імпульсну перехідну функції на осцилографі.
3. Написати сценарій `rib_lab1_tf.m` аналізу tf-моделі САК, виконавши наступні кроки:
- (a) побудувати tf-модель у вигляді передавальної функції в зображеннях Лапласа  $W(s)$ ;
  - (b) порівняти отриману модель з результатом виконання команди `laplace(w)` зі сценарію `rib_lab1_dm.m`;
  - (c) обчислити нулі і полюси функції  $W(s)$ ;
  - (d) побудувати часові характеристики (step, impulse) в одній системі координат;
  - (e) порівняти результат з п. 1c;
  - (f) перетворити tf-модель у zpk-модель (команда `zpk`).
4. Побудувати візуальну tf-модель `rib_lab1_tf.mdl` в Simulink, додатково використовуючи блок Continuous/TransferFcn і порівняти результати імітації моделі з п. 2.
5. Написати сценарій `rib_lab1_zpk.m` для аналізу zpk-моделі САК, виконавши наступні кроки:
- (a) побудувати zpk-модель, використавши інформацію з п. 3c про нулі і полюси передавальної функції в зображеннях Лапласа  $W(s)$ ;
  - (b) порівняти отриману модель з результатом виконання команди `zpk` зі сценарію `rib_lab1_tf.m`;
  - (c) побудувати часові характеристики в одній системі координат;
  - (d) порівняти результат з п. 1c;
  - (e) перетворити zpk-модель у ss-модель (команда `ss`).
6. Побудувати візуальну zpk-модель `rib_lab1_zpk.mdl` в Simulink, додатково використовуючи блок Continuous/Zero-Pole і порівняти результати імітації моделі з п. 2.
7. Написати сценарій `rib_lab1_ss.m` для аналізу ss-моделі САК, виконавши наступні кроки:
- (a) побудувати ss-модель;
  - (b) порівняти отриману модель з результатом виконання команди `ss` у сценарії `rib_lab1_zpk.m`;
  - (c) побудувати часові характеристики в одній системі координат.

8. Побудувати візуальну ss-модель `rib_lab1_ss.mdl` в Simulink, додатково використовуючи блок Continuous/State-Space з нульовою і ненульовою початковими умовами і порівняти результати імітації моделі з п. 2.

Таблиця 1 Варіанти завдань

Варіант	$T$	$k$	$y_0$	Варіант	$T$	$k$	$y_0$
1	0.1	6.6	3.0	16	1.1	6.6	1.0
2	0.2	6.2	2.5	17	1.2	6.2	1.5
3	0.3	5.8	2.0	18	1.3	5.8	2.0
4	0.4	5.4	1.5	19	1.4	5.4	2.5
5	0.5	5.0	1.0	20	1.5	5.0	3.0
6	0.6	4.6	3.0	21	0.1	4.6	1.0
7	0.7	4.2	2.5	22	0.2	4.2	1.5
8	0.8	3.8	2.0	23	0.3	3.8	2.0
9	0.9	3.4	1.5	24	0.4	3.4	2.5
10	1.0	3.0	1.0	25	0.5	3.0	3.0
11	1.1	2.6	3.0	26	0.6	2.6	1.0
12	1.2	2.2	2.5	27	0.7	2.2	1.5
13	1.3	1.8	2.0	28	0.8	1.8	2.0
14	1.4	1.4	1.5	29	0.9	1.4	2.5
15	1.5	1.0	1.0	30	1.0	1.0	3.0

## ЗВІТ ПО ЛАБОРАТОРНІЙ РОБОТІ

Зміст звіту:

1. Титульний аркуш зі стандартними атрибутами.
2. Сценарії аналізу моделей САК з часовими характеристиками.
3. Візуальні (імітаційні) моделі САК з часовими характеристиками.
4. Висновки.

## ЗАСОБИ ПЕРЕТВОРЕННЯ СТРУКТУРНИХ СХЕМ САК

У комплекті інструментів CST для перетворення структурних схем САК передбачені такі функції:

- $\text{series}(lti1, lti2)$  — послідовне з'єднання (множення) *двох* динамічних ланок  $lti1$  та  $lti2$  (у вигляді tf-, zpk-, ss-моделей); для з'єднання відразу  $N$  ланок використовують вкладені  $\text{series}$  або операцію множення  $lti1 * lti2 * \dots * ltiN$ ;
- $\text{parallel}(lti1, lti2)$  — паралельне з'єднання (додавання) *двох* динамічних ланок  $lti1$  та  $lti2$ ; для з'єднання відразу  $N$  ланок використовують вкладені  $\text{parallel}$  або операцію (алгебраїчного) додавання  $lti1 + lti2 + \dots + ltiN$ ;
- $\text{feedback}(lti1, lti2, sign)$  — контур *від'ємного* ( $sign = -1$ ) чи *додатного* ( $sign = +1$ ) зворотного зв'язку з прямою ланкою  $lti1$  і зворотною ланкою  $lti2$ ; коротка форма  $\text{feedback}(lti1, lti2)$  еквівалентна функції  $\text{feedback}(lti1, lti2, -1)$ ;
- $\text{minreal}(lti)$  — скорочення однакових полюсів і нулів передавальної функції ланки  $lti$ ;
- $\text{inv}(lti)$  — інверсія (обернення) вхідного і вихідного сигналів ланки  $lti$ , так що сигнал  $Y = W(s)X$  перетворюється у сигнал  $X = W^{-1}(s)Y$ ;
- $\text{mrdivide}(lti1, lti2) \equiv lti1 / lti2$  — ділення справа, що еквівалентне операції  $lti1 * \text{inv}(lti2)$ ;
- $\text{mldivide}(lti1, lti2) \equiv lti1 / lti2$  — ділення зліва, що еквівалентне операції  $\text{inv}(lti1) * lti2$ ;
- $[lti1, lti2, \dots, ltiN]$  — горизонтальна [,] конкатенація (склеювання) ланок  $lti1, lti2, \dots, ltiN$  з  $N$  різними входами і спільним виходом; окремим випадком є паралельне з'єднання, коли всі  $N$  входів однакові;
- $[lti1; lti2; \dots; ltiN]$  — вертикальна [;] конкатенація ланок  $lti1, lti2, \dots, ltiN$  зі спільним входом і  $N$  різними виходами; окремим випадком є паралельне з'єднання, коли всі  $N$  виходів однакові;
- $[lti1, lti2, \dots, ltiN]$  — діагональна (агрегативна) конкатенація ланок  $lti1, lti2, \dots, ltiN$  з  $N$  різними входами і виходами.

Для більш складних з'єднань динамічних ланок можна використовувати додаткові функції  $\text{connect}$  і  $\text{star}$ .

## ЗАВДАННЯ НА ЛАБОРАТОРНУ РОБОТУ

САК задана відповідною структурною схемою. Варіанти структурних схем і коефіцієнти передавальних функцій  $W_1(s) = \frac{k_1}{T_1 s + 1}$ ,  $W_2(s) = \frac{T_1 s - 1}{T_2 s + 1}$ ,  $W_3(s) = \frac{k_2}{T_1^2 s^2 + T_2 s + 1}$ ,  $W_4(s) = \frac{T_1 s + 1}{T_2^2 s^2 - 1}$  динамічних ланок наведені відповідно на рисунках 1–6 і в таблиці 1 нижче.

Виконати такі завдання:

1. Написати сценарій `rib_lab2.m` (`rib` — ваші ініціали), в якому на основі правил перетворення структурних схем потрібно:



- (a) обчислити передавальні функції в зображеннях Лапласа  $W_{YU}(s)$  за заданим впливом та  $W_{YF}(s)$  за збурюючим впливом;
  - (b) побудувати відповідні часові характеристики  $w_{yu}(t)$  і  $w_{yf}(t)$ .
2. Побудувати візуальну модель `rib_lab2.mdl` в Simulink:
- (a) для побудови моделі використати типові блоки з бібліотеки Simulink Library;
  - (b) виконати імітацію моделі і отримати часові характеристики на осцилографі;
  - (c) побудувати еквівалентну візуальну модель лише з двома ланками  $W_{YU}(s)$  і  $W_{YF}(s)$ ;
  - (d) виконати імітацію еквівалентної моделі і отримати часові характеристики на осцилографі.
3. Порівняти результати пп. 1b, 2b, 2d і зробити відповідні висновки.

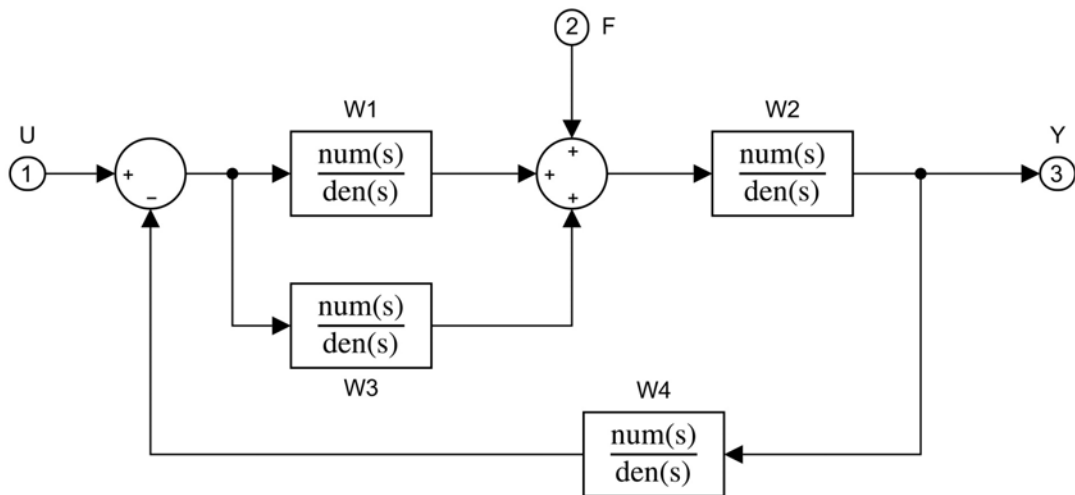


Рис. 1. Структурна схема (a)

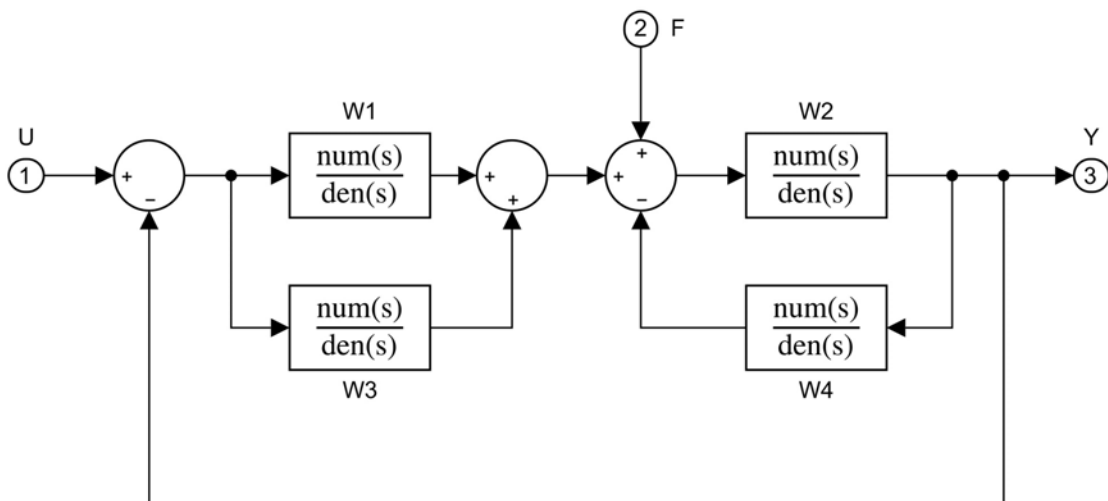


Рис. 2. Структурна схема (b)

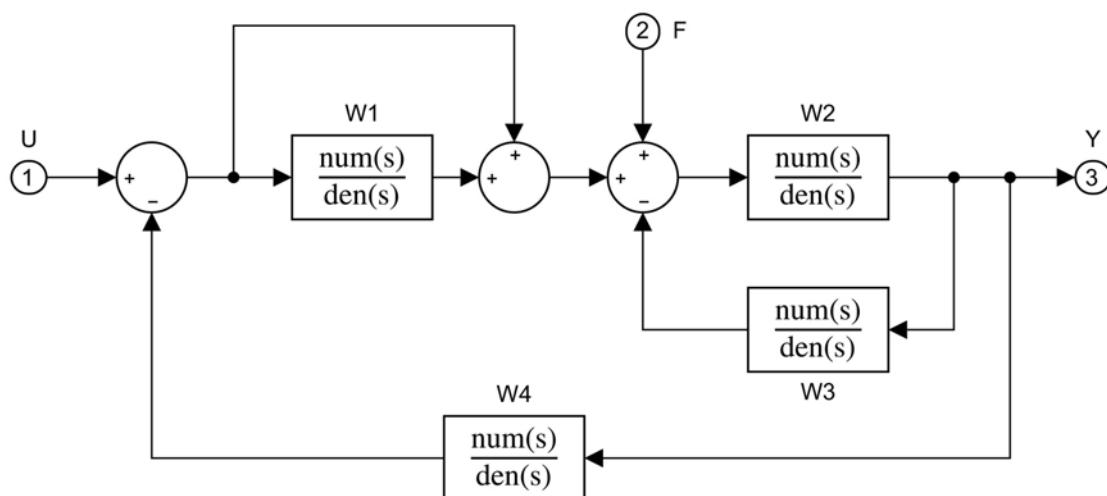


Рис. 3. Структурна схема (c)

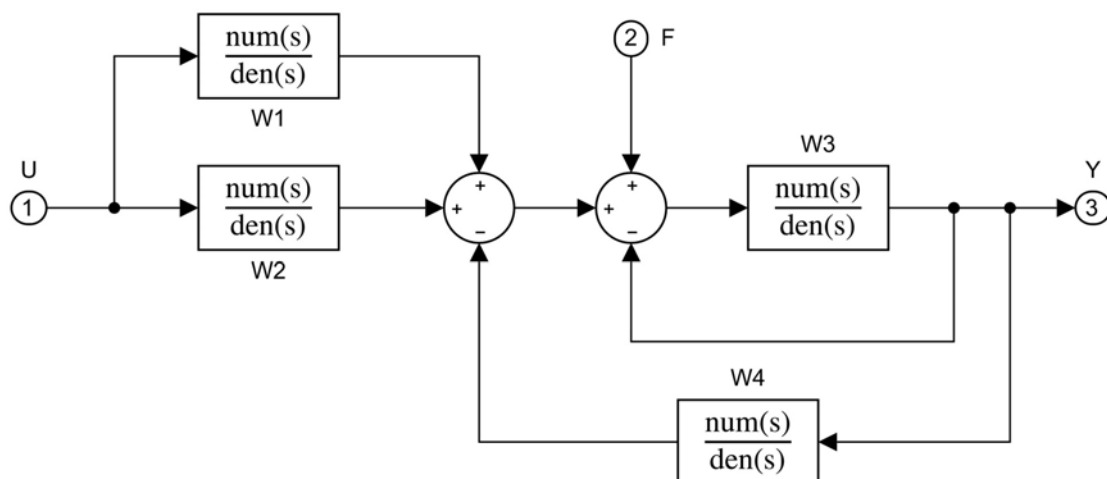


Рис. 4. Структурна схема (d)

### ЗВІТ ПО ЛАБОРАТОРНІЙ РОБОТІ

Зміст звіту:

1. Титульний аркуш зі стандартними атрибутами.
2. Сценарій побудови передавальних функцій (в зображеннях Лапласа) САК разом з їх часовими характеристиками.
3. Візуальна (імітаційні) моделі САК (початкової і еквівалентної) разом з їх часовими характеристиками.
4. Висновки.

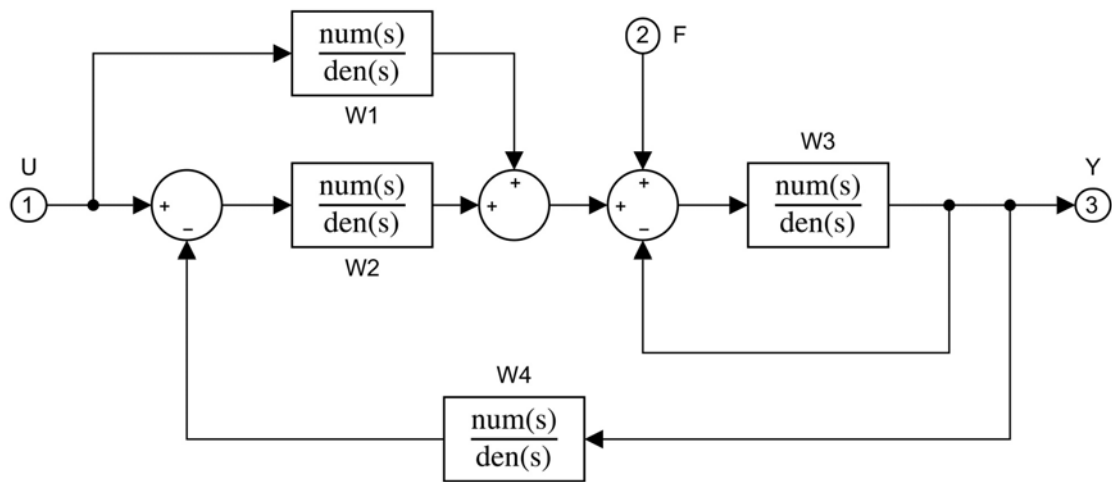


Рис. 5. Структурна схема (e)

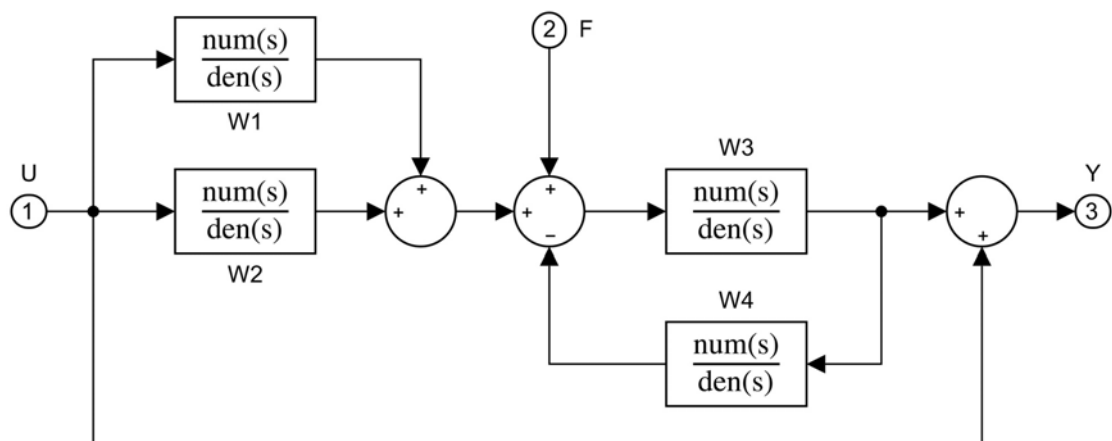


Рис. 6. Структурна схема (f)

Таблиця 1 Варіанти завдань

Варіант	Схема	$T_1$	$T_2$	$k_1$	$k_2$	Варіант	Схема	$T_1$	$T_2$	$k_1$	$k_2$
1	(c)	1.5	0.5	2.0	3.0	16	(f)	1.3	1.9	3.0	4.0
2	(d)	1.8	2.0	2.5	1.0	17	(a)	0.7	2.3	2.0	1.5
3	(e)	1.2	0.7	3.0	1.5	18	(b)	2.2	0.8	3.5	1.0
4	(f)	2.1	1.8	3.5	2.0	19	(c)	1.6	2.1	3.0	2.5
5	(a)	0.9	1.1	2.0	4.0	20	(d)	1.1	1.7	2.5	3.0
6	(b)	2.4	1.5	3.0	2.5	21	(e)	2.6	2.4	2.0	3.5
7	(c)	1.7	2.1	2.5	3.5	22	(f)	0.8	1.6	3.5	2.0
8	(d)	2.3	1.6	2.0	3.0	23	(a)	1.4	2.5	3.0	1.5
9	(e)	0.6	1.2	3.5	2.5	24	(b)	2.0	0.9	2.0	2.5
10	(f)	2.5	2.0	3.0	4.0	25	(c)	1.9	1.5	2.5	3.0
11	(a)	1.5	1.3	2.5	1.5	26	(d)	1.3	2.7	3.0	1.0
12	(b)	1.8	2.4	3.0	2.0	27	(e)	0.7	1.2	3.5	4.0
13	(c)	1.2	1.9	2.0	3.5	28	(f)	2.2	1.4	2.0	2.5
14	(d)	2.1	1.0	3.5	2.5	29	(a)	1.6	2.0	3.0	2.0
15	(e)	0.9	1.4	2.5	3.0	30	(b)	1.1	1.9	2.5	3.5

**КЛАСИФІКАЦІЯ ТИПОВИХ ЛАНОК САК**

Класифікацію типових (елементарних) динамічних ланок САК отримують на основі частинних форм диференціальної моделі другого порядку

$$a_0 y''(t) + a_1 y'(t) + a_2 y(t) = b_0 x'(t) + b_1 x(t), \quad (2)$$

записаної у стандартній формі

$$T_0^2 y''(t) + 2\xi T_0 y'(t) + y(t) = k[T_1 x'(t) + x(t)] \quad (3)$$

з часовими коефіцієнтами  $T_0^2, T_1$ , коефіцієнтом підсилення  $k$  і коефіцієнтом демпфування (пом'якшення)  $\xi$  ( $0 \leq \xi < 1$ ):

$$T_0^2 = \frac{a_0}{a_2} \geq 0, \quad \xi = \frac{a_1}{2a_2 T_0} = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0 a_2}}, \quad k = \frac{b_1}{a_2}, \quad T_1 = \frac{b_0}{k a_2} = \frac{b_0}{b_1},$$

або в операторній формі ( $p = \frac{d}{dt}, p^2 = \frac{d^2}{dt^2}$ )

$$y(t) = W(p)x(t), \quad W(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{b_0 p + b_1}{a_0 p^2 + a_1 p + a_2} = \frac{k(T_1 p + 1)}{T_0^2 p^2 + 2\xi T_0 p + 1}, \quad (4)$$

де  $W(p)$  — передавальна функція в операторній формі (ПдФ).

Таблиця 1 Класифікація типових (елементарних) ланок САК (I)

№ з/п	Назва типової ланки	Диференціальна модель у стандартній формі	ПдФ $W(p)$
1	Пропорційна (ідеальна підсилююча)	$y(t) = kx(t)$	$k$
2	Інтегруюча (астатична)	$y'(t) = kx(t) \Leftrightarrow$ $y(t) = y(0) + k \int_0^t x(\tau) d\tau$	$\frac{k}{p}$
3	Диференціююча	$y(t) = kx'(t)$	$kp$
4	Аперіодична 1-го порядку (інерційна)	$Ty'(t) + y(t) = kx(t)$	$\frac{k}{Tp + 1}$
5	Форсуюча 1-го порядку (пропорційно-диференціююча)	$y(t) = k[Tx'(t) + x(t)]$	$k(Tp + 1)$
6	Аперіодична 2-го порядку (коливальна)	$T^2 y''(t) + 2\xi T y'(t) + y(t) = kx(t)$ $0 \leq \xi < 1$	$\frac{k}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1}$
7	Форсуюча 2-го порядку (для САК 3-го порядку)	$y(t) = k[T^2 x''(t) + 2\xi T x'(t) + x(t)]$ $0 < \xi < 1$	$k(T^2 p^2 + 2\xi T p + 1)$

Неелементарні ланки САК можна отримати у формі послідовного з'єднання елементарних ланок. Наприклад, *реальну інтегруючу ланку* з передавальною функцією

$$W(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + T p} = \frac{k}{p} \cdot \frac{1/T}{(T p + 1)}$$

можна отримати як послідовне з'єднання ідеальної інтегруючої та інерційної ланок, *реальну диференціюючу ланку* з передавальною функцією

$$W(p) = \frac{k p}{T p + 1} = k p \cdot \frac{1}{(T p + 1)}$$

— як послідовне з'єднання ідеальної диференціюючої та інерційної ланок, а *інтегро-диференціюючу ланку* з передавальною функцією

$$W(p) = k \frac{T_1 p + 1}{T_2 p + 1} = k (T_1 p + 1) \cdot \frac{1}{(T_2 p + 1)}$$

— як послідовне з'єднання пропорційно-диференціюючої та інерційної ланок. За аналогією на основі типових ланок можна будувати динамічні ланки вище другого порядку (див. лабораторну роботу 4).

### ЗАСОБИ АНАЛІЗУ ТИПОВИХ ЛАНОК САК

У комплекті інструментів CST для дослідження та побудови часових і частотних характеристик ланок САК передбачені такі функції:

- $\text{step}(l_{t1}, l_{t2}, \dots, l_{tN})$  — будує на одному графіку перехідні характеристики N ланок;
- $\text{impulse}(l_{t1}, l_{t2}, \dots, l_{tN})$  — будує на одному графіку імпульсні перехідні характеристики N ланок;
- $\text{initial}(l_{t1}, l_{t2}, \dots, l_{tN}, x_0)$  — будує на одному графіку реакції N ss-ланок на ненульові початкові умови, що визначаються вектором  $x_0$ ;
- $\text{lsim}(l_{t1}, l_{t2}, \dots, l_{tN}, u)$  — будує на одному графіку реакції N ланок на довільні вхідні послідовності  $u$ ;
- $\text{evalfr}(l_{ti}, \omega)$  — обчислює амплітудно-фазову частотну характеристику на частоті  $\omega$ ;
- $\text{freqresp}(l_{ti}, \omega)$  — обчислює амплітудно-фазову частотну характеристику в заданому вектором  $\omega$  діапазоні частот;
- $\text{bode}(l_{t1}, l_{t2}, \dots, l_{tN})$  — будує на одному графіку логарифмічні амплітудні і фазові частотні характеристики (діаграми Боде) N ланок;
- $\text{nyquist}(l_{t1}, l_{t2}, \dots, l_{tN})$  — будує на одному графіку частотний годограф (діаграму) Найквіста N ланок;
- $\text{nyquist}(l_{t1}, l_{t2}, \dots, l_{tN}, \{\omega_{min}, \omega_{max}\})$  — будує на одному графіку частотний годограф (діаграму) Найквіста N ланок в межах від  $\omega_{min}$  до  $\omega_{max}$ ;
- $\text{ltiview}(l_{t1}, l_{t2}, \dots, l_{tN})$  — графічний інтерфейс для дослідження динамічних характеристик ЛТІ-моделей;
- $\text{minreal}(l_{ti})$  — скорочення однакових полюсів і нулів передавальної функції ланки  $l_{ti}$ ;
- $\text{pzmap}(l_{t1}, l_{t2}, \dots, l_{tN})$  — відображає нулі  $\odot$  і полюси  $\times$  N ланок в одній комплексній площині;
- $\text{grid on}$  — відображення додаткової сітки.

Таблиця 2 Варіанти завдань (ПдФ та їх коефіцієнти)

$$W_1(p) = k_1, \quad W_2(p) = \frac{k_1}{p}, \quad W_3(p) = k_1 p,$$

$$W_4(p) = \frac{k_2}{T_1 p + 1}, \quad W_5(p) = k_2 (T_1 p + 1),$$

$$W_6(p) = \frac{k_3}{T_2^2 p^2 + 2\xi T_2 p + 1}, \quad W_7(p) = k_3 (T_2^2 p^2 + 2\xi T_2 p + 1)$$

Варіант	$k_1$	$k_2$	$k_3$	$T_1$	$T_2$	$\xi$	Варіант	$k_1$	$k_2$	$k_3$	$T_1$	$T_2$	$\xi$
1	0.2	2.1	4.8	0.1	1.0	0.15	16	3.1	5.0	1.7	1.5	0.1	0.15
2	0.4	2.3	5.0	0.2	1.1	0.20	17	3.3	5.2	1.9	1.4	0.2	0.20
3	0.6	2.5	5.2	0.3	1.2	0.25	18	3.5	5.4	2.1	1.3	0.3	0.25
4	0.8	2.7	5.4	0.4	1.3	0.30	19	3.7	5.6	2.3	1.2	0.4	0.30
5	1.0	2.9	5.6	0.5	1.4	0.35	20	3.9	5.8	2.5	1.1	0.5	0.35
6	1.2	3.1	5.8	0.6	1.5	0.40	21	4.1	6.0	2.7	1.0	0.6	0.40
7	1.4	3.3	6.0	0.7	0.1	0.45	22	4.3	0.2	2.9	0.9	0.7	0.45
8	1.6	3.5	0.2	0.8	0.2	0.50	23	4.5	0.4	3.1	0.8	0.8	0.50
9	1.8	3.7	0.4	0.9	0.3	0.55	24	4.7	0.4	3.3	0.7	0.9	0.55
10	2.0	3.9	0.6	1.0	0.4	0.60	25	4.9	0.6	3.5	0.6	1.0	0.60
11	2.2	4.1	0.8	1.1	0.5	0.65	26	5.1	0.8	3.7	0.5	1.1	0.65
12	2.4	4.3	1.0	1.2	0.6	0.70	27	5.3	1.2	3.9	0.4	1.2	0.70
13	2.6	4.5	1.2	1.3	0.7	0.75	28	5.5	1.4	4.1	0.3	1.3	0.75
14	2.8	4.7	1.4	1.4	0.8	0.80	29	5.7	1.6	4.3	0.2	1.4	0.80
15	3.0	4.9	1.6	1.5	0.9	0.85	30	5.9	1.8	4.5	0.1	1.5	0.85

## ЗАВДАННЯ НА ЛАБОРАТОРНУ РОБОТУ

Типові ланки САК задані відповідними передавальними функціями в операторній формі  $W_i(p)$ ,  $i = \overline{1, 7}$  (варіанти ПдФ наведені в таблиці 2 нижче).

Виконати такі завдання:

1. Написати сценарій `rib_lab31.m` (`rib` — ваші ініціали), в якому потрібно:
  - (a) створити передавальні функції у зображеннях Лапласа  $W_i(s)$  ( $i = \overline{1, 7}$ ) типових ланок;
  - (b) побудувати (step) перехідні характеристики  $h_i(t)$  (кожну окремо і всі разом на одному графіку);
  - (c) побудувати (impulse) імпульсні перехідні характеристики  $w_i(t)$  (кожну окремо і всі разом на одному графіку);
  - (d) побудувати (nyquist) амплітудно-фазові частотні характеристики (годографи)  $W_i(j\omega)$  (кожну окремо і всі разом на одному графіку);

- (e) побудувати (nyquist) амплітудно-фазові частотні характеристики (годографи)  $W_i(j\omega)$  у частотному діапазоні від 0.1 до 10 рад/с (кожну окремо і всі разом на одному графіку);
  - (f) обчислити (evalfr) амплітудно-фазові частотні характеристики на частотах  $\pm 1$  рад/с для кожної ланки;
  - (g) побудувати (bode) логарифмічні амплітудні  $L_i(\omega)$  і фазові  $\varphi_i(\omega)$  частотні характеристики (діаграми Боде) кожну окремо і всі разом на одному графіку;
  - (h) побудувати (pzmap) карти нулів і полюсів елементарних ланок і з'ясувати, до якого типу вони належать (мінімально-фазові, немінімально-фазові, маргінальні);
  - (i) побудувати (ltiview) часові і частотні характеристики типових ланок з допомогою графічного інтерфейсу LTI-viewer і порівняти з результатами попередніх пунктів;
  - (j) створити передавальні функції в зображеннях Лапласа  $W_8(s)$ ,  $W_9(s)$  і  $W_{10}(s)$  заміною коефіцієнта демпфування  $\xi$  коливальної ланки  $W_6(s)$  на  $|0.33 - \xi|$ ,  $|0.66 - \xi|$  і  $1 - \xi$  відповідно;
  - (k) для коливальних ланок з різними значеннями коефіцієнта демпфування  $W_6(s)$ ,  $W_8(s)$ ,  $W_9(s)$  і  $W_{10}(s)$  виконати пункти, подібні до (b)–(e), (g), (i) вище;
  - (l) порівняти результати і зробити відповідні висновки.
2. Побудувати візуальну модель `rib_lab3.mdl` в Simulink:
- (a) для побудови моделі використати типові блоки з бібліотеки Simulink Library (зокрема блоки MathOperations/Complex to Magnitude-Angle та MathOperations/Complex to Real-Imag для дослідження частотних характеристик);
  - (b) для перегляду кількох характеристик в одному осцилографі слід задати відповідну кількість вхідних сигналів для нього;
  - (c) виконати імітацію моделі і отримати часові і частотні характеристики типових ланок на відповідних осцилографах.
3. Порівняти результати пп. 1 і 2 та зробити відповідні висновки.

*Важливо!* Окремі характеристики деяких типових ланок побудувати неможливо. В такому разі замість графіка буде виводитись повідомлення про помилку.

### ЗВІТ ПО ЛАБОРАТОРНІЙ РОБОТІ

Зміст звіту:

1. Титульний аркуш зі стандартними атрибутами.
2. Сценарій побудови часових і частотних характеристик типових ланок САК разом із самими характеристиками.
3. Візуальна (імітаційна) модель типових ланок САК разом з їх часовими і частотними характеристиками.
4. Висновки.



**КЛАСИФІКАЦІЯ ТИПОВИХ ЛАНОК САК**

Класифікацію типових (елементарних) динамічних ланок САК отримують на основі частинних форм диференціальної моделі другого порядку

$$a_0 y''(t) + a_1 y'(t) + a_2 y(t) = b_0 x'(t) + b_1 x(t), \quad (5)$$

записаної у стандартній формі

$$T_0^2 y''(t) + 2\xi T_0 y'(t) + y(t) = k[T_1 x'(t) + x(t)] \quad (6)$$

з часовими коефіцієнтами  $T_0^2, T_1$ , коефіцієнтом підсилення  $k$  і коефіцієнтом демпфування (пом'якшення)  $\xi$  ( $0 \leq \xi < 1$ ):

$$T_0^2 = \frac{a_0}{a_2} \geq 0, \quad \xi = \frac{a_1}{2a_2 T_0} = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0 a_2}}, \quad k = \frac{b_1}{a_2}, \quad T_1 = \frac{b_0}{k a_2} = \frac{b_0}{b_1},$$

або в операторній формі ( $p = \frac{d}{dt}, p^2 = \frac{d^2}{dt^2}$ )

$$y(t) = W(p)x(t), \quad W(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{b_0 p + b_1}{a_0 p^2 + a_1 p + a_2} = \frac{k(T_1 p + 1)}{T_0^2 p^2 + 2\xi T_0 p + 1}, \quad (7)$$

де  $W(p)$  — передавальна функція в операторній формі (ПдФ).

Таблиця 1 Класифікація типових (елементарних) ланок САК (II)

№ з/п	Назва типової ланки	Диференціальна модель у стандартній формі	ПдФ $W(p)$
1	Нестійка аперіодична	$Ty'(t) - y(t) = kx(t)$	$\frac{k}{Tp - 1}$
2	Нестійка форсуюча	$y(t) = k[Tx'(t) - x(t)]$	$k(Tp - 1)$
3	Нестійка коливальна	$T^2 y''(t) - 2\xi T y'(t) + y(t) = kx(t)$ $0 < \xi < 1$ (коеф. демпфування)	$\frac{k}{T^2 p^2 - 2\xi T p + 1}$
4	Нестійка форсуюча 2-го порядку (для САК 3-го порядку)	$y(t) = k[T^2 x''(t) - 2\xi T x'(t) + x(t)]$ $0 < \xi < 1$	$k(T^2 p^2 - 2\xi T p + 1)$
5	Чистого запізнення (для САК із запізненням)	$y(t) = kx(t - \tau), \quad 0 < \tau < t$	$ke^{-\tau p}$

Динамічну ланку з довільною дробово-раціональною ПдФ  $W(p)$  можна зобразити у вигляді послідовного з'єднання типових ланок з ПдФ  $W_i(p)$ , якщо її чисельник і знаменник розкласти на елементарні множники (не вище другого порядку):

$$W(p) = \prod_i W_i(p).$$

### ЗАСОБИ АНАЛІЗУ ТИПОВИХ ЛАНОК САК

У комплекті інструментів CST для дослідження та побудови часових і частотних характеристик ланок САК передбачені такі функції:

- $\text{step}(lti1, lti2, \dots, ltiN)$  — будує на одному графіку перехідні характеристики  $N$  ланок;
- $\text{impulse}(lti1, lti2, \dots, ltiN)$  — будує на одному графіку імпульсні перехідні характеристики  $N$  ланок;
- $\text{initial}(lti1, lti2, \dots, ltiN, x0)$  — будує на одному графіку реакції  $N$  ss-ланок на ненульові початкові умови, що визначаються вектором  $x0$ ;
- $\text{lsim}(lti1, lti2, \dots, ltiN, u)$  — будує на одному графіку реакції  $N$  ланок на довільні вхідні послідовності  $u$ ;
- $\text{evalfr}(lti, \omega)$  — обчислює амплітудно-фазову частотну характеристику на заданій частоті  $\omega$ ;
- $\text{freqresp}(lti, \omega)$  — обчислює амплітудно-фазову частотну характеристику в заданому вектором  $\omega$  діапазоні частот;
- $\text{bode}(lti1, lti2, \dots, ltiN)$  — будує на одному графіку логарифмічні амплітудні і фазові частотні характеристики (діаграми Боде)  $N$  ланок;
- $\text{nyquist}(lti1, lti2, \dots, ltiN)$  — будує на одному графіку частотний годограф (діаграму) Найквіста  $N$  ланок;
- $\text{nyquist}(lti1, lti2, \dots, ltiN, \{\omega_{min}, \omega_{max}\})$  — будує на одному графіку частотний годограф (діаграму) Найквіста  $N$  ланок в межах від  $\omega_{min}$  до  $\omega_{max}$ ;
- $\text{ltiview}(lti1, lti2, \dots, ltiN)$  — графічний інтерфейс для дослідження динамічних характеристик ЛТІ-моделей;
- $\text{minreal}(lti)$  — скорочення однакових полюсів і нулів передавальної функції ланки  $lti$ ;
- $\text{pzmap}(lti1, lti2, \dots, ltiN)$  — відображає нулі  $\odot$  і полюси  $\times$   $N$  ланок в одній комплексній площині;
- $\text{grid on}$  — відображення додаткової сітки.

### ЗАВДАННЯ НА ЛАБОРАТОРНУ РОБОТУ

Типові ланки САК і ланка третього порядку задані відповідними передавальними функціями в операторній формі  $W_i(p)$ ,  $i = \overline{1, 5}$ , та  $W(p)$  відповідно (варіанти ПдФ наведені в таблиці 2 нижче).

Виконати такі завдання:

1. Написати сценарій `rib_lab41.m` (`rib` — ваші ініціали), в якому потрібно:
  - (a) побудувати передавальні функції у зображеннях Лапласа  $W_i(s)$  ( $i = \overline{1, 5}$ ) заданих типових ланок;
  - (b) побудувати (`step`) перехідні характеристики  $h_i(t)$  (кожну окремо і всі разом на одному графіку);
  - (c) побудувати (`impulse`) імпульсні перехідні характеристики  $w_i(t)$  (кожну окремо і всі разом на одному графіку);
  - (d) побудувати (`nyquist`) амплітудно-фазові частотні характеристики (годографи)  $W_i(j\omega)$  (кожну окремо і всі разом на одному графіку);

- (e) побудувати (nyquist) амплітудно-фазові частотні характеристики (годографи)  $W_i(j\omega)$  у частотному діапазоні від 0.1 до 10 рад/с (кожну окремо і всі разом на одному графіку);
  - (f) обчислити (evalfr) амплітудно-фазові частотні характеристики на частотах  $\pm 1$  рад/с для кожної ланки;
  - (g) побудувати (bode) логарифмічні амплітудні  $L_i(\omega)$  і фазові  $\varphi_i(\omega)$  частотні характеристики (діаграми Боде) кожну окремо і всі разом на одному графіку;
  - (h) побудувати (pzmap) карти нулів і полюсів елементарних ланок і з'ясувати, до якого типу вони належать (мінімально-фазові, немінімально-фазові, маргінальні);
  - (i) побудувати (ltiview) часові і частотні характеристики типових ланок з допомогою графічного інтерфейсу LTI-viewer і порівняти з результатами попередніх пунктів.
2. Написати сценарій `rib_lab42.m`, в якому потрібно:
- (a) побудувати ПдФ в зображеннях Лапласа  $W(s)$  ланки третього порядку;
  - (b) обчислити її нулі (zero) і полюси (pole) та визначити тип ланки (мінімально-фазова, немінімально-фазова, маргінальна);
  - (c) представити ланку у вигляді послідовного з'єднання типових ланок, тобто побудувати  $W_k(s)$ , такі що  $W(s) = \prod_k W_k(s)$ ;
  - (d) побудувати (bode) на одному графіку логарифмічні амплітудні і фазові частотні характеристики (діаграми Боде) типових ланок  $W_k(s)$  і ланки третього порядку  $W(s)$ ;
  - (e) з'ясувати зв'язок між ними і зробити відповідні висновки.
3. Побудувати візуальні моделі `rib_lab41.mdl` і `rib_lab42.mdl` в Simulink для кожного з двох попередніх сценаріїв:
- (a) для побудови моделей використати типові блоки з бібліотеки Simulink Library (зокрема, блок TransportDelay для визначення запізнення у ПдФ відповідної ланки, блоки MathOperations/Complex to Magnitude-Angle та MathOperations/Complex to Real-Imag для дослідження частотних характеристик);
  - (b) для перегляду кількох характеристик в одному осцилографі слід задати відповідну кількість вхідних сигналів для нього;
  - (c) виконати імітацію моделей та отримати часові і частотні характеристики типових ланок і ланки третього порядку на відповідних осцилографах.
4. Порівняти результати пп. 1 і 2 з п. 3 та зробити відповідні висновки.

### ЗВІТ ПО ЛАБОРАТОРНІЙ РОБОТІ

Зміст звіту:

1. Титульний аркуш зі стандартними атрибутами.
2. Сценарії побудови часових і частотних характеристик ланок САК разом із самими характеристиками.
3. Візуальні (імітаційні) моделі ланок САК разом з їх часовими і частотними характеристиками.
4. Висновки.

Таблиця 2 Варіанти завдань (ПдФ та їх коефіцієнти)

$$W_1(p) = \frac{k_2}{T_1 p - 1}, \quad W_2(p) = k_2(T_1 p - 1), \quad W_3(p) = \frac{k_3}{T_2^2 p^2 - 2\xi T_2 p + 1}$$

$$W_4(p) = k_3(T_2^2 p^2 - 2\xi T_2 p + 1), \quad W_5(p) = k_1 e^{-\tau p}, \quad W(p) = \frac{b_0 p^2 + b_1 p + b_2}{a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p}$$

Варіант	$k_1$	$k_2$	$k_3$	$T_1$	$T_2$	$\xi$	$\tau$	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$b_0$	$b_1$	$b_2$
1	0.2	2.1	4.8	0.1	1.0	0.15	1.0	1.21	0.33	1	0.020	0.180	-0.2
2	0.4	2.3	5.0	0.2	1.1	0.20	1.1	0.22	0.90	-1	0.676	0.208	0.4
3	0.6	2.5	5.2	0.3	1.2	0.25	1.2	2.25	-0.75	1	0.216	0.540	-0.6
4	0.8	2.7	5.4	0.4	1.3	0.30	1.3	0.52	0.90	-1	2.312	-0.816	0.8
5	1.0	2.9	5.6	0.5	1.4	0.35	1.4	3.61	1.33	1	0.700	0.900	-1.0
6	1.2	3.1	5.8	0.6	1.5	0.40	1.5	0.90	0.90	-1	5.292	2.016	1.2
7	1.4	3.3	6.0	0.7	0.1	0.45	0.5	0.64	-0.72	1	0.098	-0.840	-1.4
8	1.6	3.5	0.2	0.8	0.2	0.50	0.6	0.16	-0.60	-1	1.600	-1.600	1.6
9	1.8	3.7	0.4	0.9	0.3	0.55	0.7	1.44	1.32	1	0.486	-1.080	-1.8
10	2.0	3.9	0.6	1.0	0.4	0.60	0.8	0.40	-0.60	-1	3.920	3.360	2.0
11	2.2	4.1	0.8	1.1	0.5	0.65	0.9	2.56	-2.08	1	1.210	-1.320	-2.2
12	2.4	4.3	1.0	1.2	0.6	0.70	1.0	0.72	-0.60	-1	7.776	-6.048	2.4
13	2.6	4.5	1.2	1.3	0.7	0.75	1.1	4.00	3.00	1	2.366	-1.560	-2.6
14	2.8	4.7	1.4	1.4	0.8	0.80	1.2	1.12	-0.60	-1	13.552	9.856	2.8
15	3.0	4.9	1.6	1.5	0.9	0.85	1.3	5.76	-4.08	1	4.050	-1.800	-3.0
16	3.1	5.0	1.7	1.5	0.1	0.15	1.4	0.15	-1.40	-1	7.936	-1.488	3.1
17	3.3	5.2	1.9	1.4	0.2	0.20	1.5	2.56	0.64	1	0.924	-3.960	-3.3
18	3.5	5.4	2.1	1.3	0.3	0.25	0.5	0.39	-1.00	-1	8.960	2.800	3.5
19	3.7	5.6	2.3	1.2	0.4	0.30	0.6	2.56	-0.96	1	1.776	-2.960	-3.7
20	3.9	5.8	2.5	1.1	0.5	0.35	0.7	0.55	-0.60	-1	9.984	-4.368	3.9
21	4.1	6.0	2.7	1.0	0.6	0.40	0.8	2.56	1.28	1	2.460	-1.640	-4.1
22	4.3	0.2	2.9	0.9	0.7	0.45	0.9	0.63	-0.20	-1	11.008	6.192	4.3
23	4.5	0.4	3.1	0.8	0.8	0.50	1.0	2.56	-1.60	1	2.880	0	-4.5
24	4.7	0.4	3.3	0.7	0.9	0.55	1.1	0.63	0.20	-1	12.032	-8.272	4.7
25	4.9	0.6	3.5	0.6	1.0	0.60	1.2	2.56	1.92	1	2.940	1.960	-4.9
26	5.1	0.8	3.7	0.5	1.1	0.65	1.3	0.55	0.60	-1	13.056	10.608	5.1
27	5.3	1.2	3.9	0.4	1.2	0.70	1.4	2.56	-2.24	1	2.544	4.240	-5.3
28	5.5	1.4	4.1	0.3	1.3	0.75	1.5	0.39	1.00	-1	14.080	-13.20	5.5
29	5.7	1.6	4.3	0.2	1.4	0.80	0.5	2.56	2.56	1	1.596	6.840	-5.7
30	5.9	1.8	4.5	0.1	1.5	0.85	0.6	0.15	1.40	-1	15.104	16.048	5.9

## АЛГЕБРАЇЧНІ КРИТЕРІЇ СТІЙКОСТІ САК

Стійкість є однією з основних вимог до САК. Це поняття характеризує працездатність системи. Система, що не володіє стійкістю, не здатна виконувати функції керування, має, фактично, нульову ефективність і може призводити до аварійних станів.

Нехай динамічна поведінка САК описується диференціальним рівнянням  $n$ -го порядку в операторній формі

$$A(p)y(t) = B(p)u(t) + C(p)f(t), \quad p = \frac{d}{dt}, \quad (8)$$

де  $y(t)$  — керована величина (вихідний сигнал),  $u(t)$  і  $f(t)$  — задаючий і збурюючий впливи (вхідні сигнали),  $A(p) = a_0p^n + a_1p^{n-1} + \dots + a_n$  — власний оператор,  $B(p)$  і  $C(p)$  — оператори впливу.

*Основна умова стійкості:* для того, щоб САК була (асимптотично) стійка, *необхідно і достатньо*, щоб усі корені її характеристичного рівняння

$$A(\lambda) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad (9)$$

мали від'ємну дійсну частину  $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ ,  $i = \overline{1, n}$ , тобто були *лівими*.

*Необхідна умова стійкості САК:* для того, щоб САК була (асимптотично) стійка, *необхідно*, щоб усі коефіцієнти її характеристичного рівняння були додатними:  $a_i > 0$ ,  $i = \overline{0, n}$  (за потреби домножуванням на  $-1$  завжди можна гарантувати виконання умови  $a_0 > 0$ ).

Якщо відшукати корені характеристичного рівняння складно, то для дослідження на стійкість можна скористатися критеріями стійкості, які дозволяють з'ясувати, чи корені є лівими, *без явного їх відшукування*. Критерії стійкості діляться на алгебраїчні (критерії Гурвіца, Л'єнара–Шипара, Рауса) і частотні (критерії Михайлова і Найквіста).

*Критерій Гурвіца* (Hurwitz, 1895): для того, щоб САК була стійкою, *необхідно і достатньо*, щоб визначники Гурвіца

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix},$$

складені з коефіцієнтів її характеристичного рівняння, при  $a_0 > 0$  були додатними

$$\Delta_k > 0, \quad k = \overline{1, n}.$$

**Критерій Л'єнара–Шипара** (Lienard, Chipard, 1914): при виконанні необхідної умови стійкості ( $a_i > 0, i = \overline{0, n}$ ) для стійкості САК *необхідно і достатньо*, щоб усі її визначники Гурвіца з парними індексами (або всі визначники Гурвіца з непарними індексами) були додатними  $\Delta_2 > 0, \Delta_4 > 0, \Delta_6 > 0, \dots$  або  $\Delta_1 > 0, \Delta_3 > 0, \Delta_5 > 0, \dots$

**Критерій Рауса** (Routh, 1877): для того, щоб САК була стійкою, *необхідно і достатньо*, щоб усі елементи першого стовпця таблиці Рауса при  $a_0 > 0$  були додатними

$$r_{i1} > 0, i = \overline{1, n+1}.$$

Таблиця Рауса містить  $n+1$  рядок і будується за таким *алгоритмом*: у першому рядку таблиці записуються коефіцієнти характеристичного рівняння з парними індексами, а в другому — з непарними індексами, в порядку зростання індексів (при потребі решта клітин цих рядків заповнюються нульовими елементами). Елементи наступних рядків обчислюються за формулою

$$r_{ij} = \begin{vmatrix} r_{i-2,j+1} & r_{i-2,1} \\ r_{i-1,j+1} & 1 \end{vmatrix} = r_{i-2,j+1} - \frac{r_{i-2,1}}{r_{i-1,1}} \cdot r_{i-1,j+1}, i = 3, 4, \dots, j = 1, 2, \dots$$

Кількість стовпців в міру зростання номера рядка спадає. Елементи другого і наступних стовпців слід обчислювати по мірі потреби обчислення елементів першого стовпця. При цьому обчислення можна зупинити, як тільки деякий елемент першого стовпця стає нульовим або від'ємним.

### ЧАСТОТНІ КРИТЕРІЇ СТІЙКОСТІ САК

Годограф характеристичного вектора  $A(j\omega)$ , тобто криву, яку описує кінець цього вектора при зміні частоти від 0 до  $\infty$ , називають *кривою Михайлова*. При  $a_n > 0$  крива Михайлова починається на додатній дійсній півосі, бо  $A(j \cdot 0) = A(0) = a_n > 0$ .

**Критерій Михайлова** (1938): Для стійкості САК *необхідно і достатньо*, щоб при  $a_0 > 0$  її крива Михайлова, починаючись на додатній дійсній півосі, послідовно обходила  $n$  квадрантів у додатному (проти годинникової стрілки) напрямку. Криві Михайлова стійких

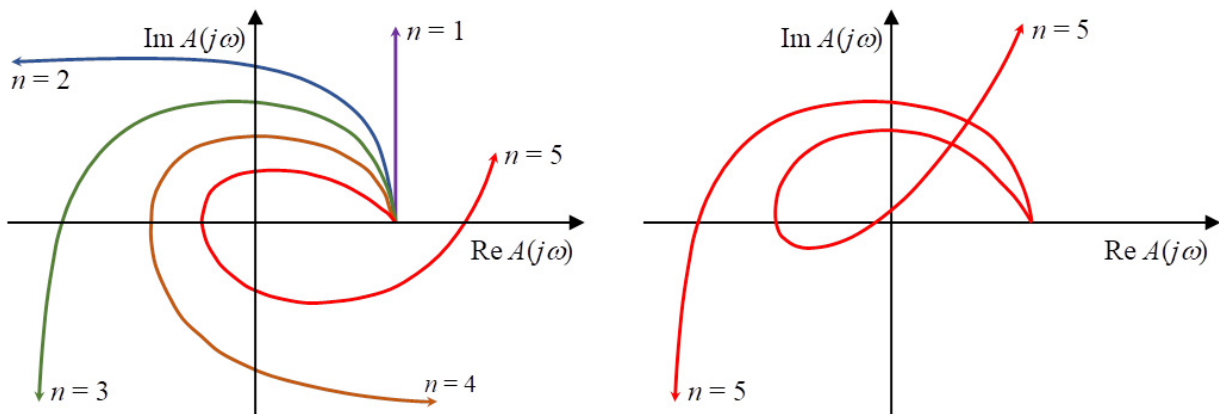


Рис. 1. Криві Михайлова стійких (ліворуч) і нестійких (праворуч) САК різного порядку

САК не перетинають початку координат і виходять на безмежність в  $n$ -му квадранті.

Якщо кількість квадрантів, які проходить крива Михайлова, не дорівнює  $n$  або порушується послідовність їх проходження, то така САК нестійка. Якщо крива Михайлова проходить через початок координат, то САК знаходиться на межі стійкості.

При використанні алгебраїчних критеріїв і критерію Михайлова неважливо, стійкість яких САК — розімкнених чи замкнених — досліджується. Ще один частотний критерій — критерій Найквіста — за амплітудно-фазовою частотною характеристикою  $W_p(j\omega)$  розімкненої системи дозволяє зробити висновок про стійкість відповідної замкненої системи.

*Критерій Найквіста (Nyquist, 1932):* для того, щоб замкнена САК з від'ємним зворотним зв'язком була стійкою, необхідно і достатньо, щоб амплітудно-фазова частотна характеристика  $W_p(j\omega)$  розімкненої системи охоплювала точку  $(-1, j \cdot 0) = (-1, 0)$  у додатному напрямку  $l/2$  разів, де  $l$  — кількість правих нулів характеристичного полінома розімкненої системи (вважається, що решта  $n - l$  нулів є лівими; випадок наявності нейтральних нулів розглядається окремо).

*Критерій Найквіста (випадок стійкої розімкненої САК).*

В разі, якщо розімкнена САК є стійкою, тобто всі нулі її характеристичного полінома є лівими, то число  $l = 0$  і тому критерій Найквіста можна сформулювати так: якщо розімкнена САК стійка, то для стійкості замкненої системи з від'ємним зворотнім зв'язком необхідно і достатньо, щоб амплітудно-фазова частотна характеристика  $W_p(j\omega)$  розімкненої системи не охоплювала точку  $(-1, 0)$ .

*Критерій Найквіста (випадок наявності нейтральних нулів).*

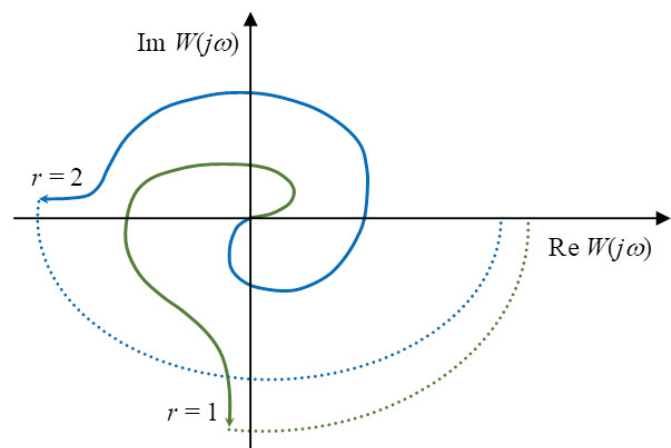
Якщо характеристичний поліном розімкненої САК має нейтральні нулі, то її передавальна функція може бути представлена у вигляді

$$W(p) = \frac{k}{p^r} W_0(p), \quad W_0(0) = 1, \quad r \geq 1,$$

тому амплітудно-фазова частотна характеристика при  $\omega \rightarrow 0$  виходить на безмежність (див. рис). У цьому випадку амплітудно-фазова частотна характеристика доповнюється дугою  $-r(\pi/2)$  кола як завгодно великого

радіуса (пунктирні лінії на рис.) і для стійкості замкненої системи доповнена таким чином амплітудно-фазова частотна характеристика повинна  $l/2$  разів охоплювати (зокрема, при  $l = 0$  не охоплювати) точку  $(-1, 0)$ .

*Критерій Найквіста (випадок САК з чистим запізненням):* для того, щоб замкнена САК, передавальна функція якої в розімкненому стані має вигляд  $W_\tau(p) = \frac{N(p)}{D(p)} e^{-\tau}$ , де  $N(p), D(p)$  — многочлени степенів  $m$  і  $n$  ( $m \leq n$ ) відповідно, була стійкою, необхідно і достатньо, щоб амплітудно-фазова частотна характеристика  $W_\tau(j\omega)$  розімкненої системи охоплювала точку  $(-1, j \cdot 0) = (-1, 0)$  у додатному напрямку  $l/2$  разів, де  $l$  — кількість правих нулів характеристичного полінома  $D(\lambda)$  розімкненої системи.





### ЗАВДАННЯ НА ЛАБОРАТОРНУ РОБОТУ

Розімкнена САК задана передавальною функцією в операторній формі  $W(p)$  (варіанти ПдФ наведені в таблиці 1 нижче). Дослідити на стійкість розімкнену і відповідну замкнену (з від'ємним зворотним зв'язком) САК, виконавши такі завдання:

1. Чи справджується для розімкненої САК необхідна умова стійкості? Чи означає це, що розімкнена САК є стійкою/нестійкою?
2. Побудувати передавальну функцію в зображеннях Лапласа  $W(s)$  розімкненої САК.
3. Обчислити визначники Гурвіца  $\Delta_k$ .
4. На основі критерію Гурвіца зробити висновок про стійкість розімкненої САК.
5. На основі критерію Л'єнара–Шипара зробити висновок про стійкість розімкненої САК. Чи узгоджується він із критерієм Гурвіца?
6. Побудувати таблицю Рауса.
7. На основі критерію Рауса зробити висновок про стійкість розімкненої САК. Чи узгоджується він із критерієм Л'єнара–Шипара?
8. Побудувати годограф (криву) Михайлова.
9. На основі критерію Михайлова зробити висновок про стійкість розімкненої САК. Чи узгоджується він із критерієм Рауса?
10. Знайти (roots, rзмар, dаmp) корені характеристичного рівняння  $A(\lambda) = 0$ .
11. Чи справджується основна властивість стійкості? Як це узгоджується з попередніми висновками?
12. Побудувати амплітудно-фазову частотну характеристику розімкненої САК.
13. На основі критерію Найквіста зробити висновок про стійкість замкненої (з від'ємним зворотним зв'язком) САК.
14. Знайти корені характеристичного рівняння замкненої САК.
15. Чи справджується основна властивість стійкості? Як це узгоджується з критерієм Найквіста?
16. Чи справджується для замкненої САК необхідна умова стійкості? Чи означає це, що замкнена САК є стійкою/нестійкою?
17. Побудувати імпульсну перехідну функцію розімкненої і замкненої САК і порівняти їх поведінку.

### ЗВІТ ПО ЛАБОРАТОРНІЙ РОБОТІ

Зміст звіту:

1. Титульний аркуш зі стандартними атрибутами.
2. Аргументовані відповіді на питання.
3. Сценарії дослідження САК на стійкість.
4. Висновки.



Таблиця 1 Варіанти завдань (ПдФ та їх коефіцієнти)

$$W(p) = \frac{k}{p^4 + a_1p^3 + a_2p^2 + a_3p + a_4}$$

Варіант	$k$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	Варіант	$k$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$
1	-50	4.93	33.72	79.90	48.36	16	-20	8.68	28.56	41.85	14.41
2	-53	5.70	34.08	84.39	51.85	17	-19	8.15	26.58	39.83	13.25
3	-57	6.47	34.92	88.33	54.10	18	-17	7.62	24.89	38.18	12.18
4	-58	7.24	36.24	91.92	55.43	19	-14	7.09	23.49	36.74	11.15
5	-60	8.01	38.03	95.35	56.10	20	-15	6.56	22.39	35.35	10.11
6	-62	8.78	40.30	98.82	56.36	21	-20	6.93	25.43	42.98	11.65
7	-59	9.55	43.05	02.53	56.40	22	-18	7.30	28.66	51.66	13.11
8	-61	0.32	46.27	06.69	56.41	23	-16	7.67	32.10	61.44	14.39
9	-64	1.09	49.98	11.48	56.55	24	-23	8.04	35.73	72.40	15.42
10	-58	1.86	54.15	17.12	56.93	25	-19	8.41	39.57	84.59	16.10
11	-49	1.33	48.90	98.32	45.21	26	-21	8.78	43.61	98.10	16.29
12	-43	0.80	43.94	81.81	35.47	27	-18	9.15	47.85	112.98	15.90
13	-35	0.27	39.28	67.41	27.46	28	-17	9.52	52.29	129.29	14.78
14	-28	9.74	34.91	54.99	20.96	29	-15	9.89	56.93	147.12	12.79
15	-23	9.21	30.84	44.38	15.77	30	-14	10.26	61.77	166.52	9.77

## Показники якості САК і алгоритм керування

Стійкість (працездатність) САК є головною, але не єдиною її характеристикою. Ще однією важливою характеристикою є якість (точність) роботи САК. Найбільш повною характеристикою якості САК є відхилення вихідного (керованого) сигналу  $y(t)$  від вхідного (керуючого) сигналу  $g(t)$  (помилка, похибка, неузгодженість)  $e(t) = g(t) - y(t)$ , котру можна подати у вигляді суми  $e(t) = e_g(t) + e_f(t)$  помилки за задаючим впливом  $e_g(t) = W_{eg}(p)g(t) = (1 - W_{yg}(p))g(t)$  і помилки за збурюючим впливом

$$e_f(t) = W_{ef}(p)f(t) = \begin{cases} -W_{yf}(p)f(t), & \text{якщо } f \text{ на вході у суматор,} \\ W_{ef}(p)f(t), & \text{якщо } f \text{ не на вході у суматор.} \end{cases}$$

Однак на практиці частіше використовують числові показники, котрі є зручнішими для оцінки якості САК. Розрізняють числові показники якості у *перехідному* і в *усталеному* режимах.

Числові показники якості у перехідному режимі діляться на *прямі* і *непрямі* (кореневі, частотні, інтегральні). Основними прямими показниками якості є *час регулювання*  $t_p$ , *перерегулювання*  $\sigma$ , *час наростання*  $t_n$ , *час досягання*  $t_{\max}$  *першого максимуму*  $h_{\max}$ .

Основними кореневими показниками якості є *ступінь стійкості*  $\eta = \min_k |\operatorname{Re} \lambda_k|$  і *ступінь коливальності*  $\mu = \max_k \left| \frac{\operatorname{Im} \lambda_k}{\operatorname{Re} \lambda_k} \right|$ .

Основними частотними показниками якості є *резонансний пік*  $M = A_{\max}/A(0)$  і *резонансна частота*  $\omega_p$  ( $A_{\max} = A(\omega_p)$ ), *смуга пропускання*  $(0, \omega_n)$  ( $A(\omega_n) = 0.707A(0)$ ), *запаси стійкості по амплітуді*  $L_c$  і *по фазі*  $\varphi_c$ .

Основними інтегральними показниками якості є *звичайна*  $J_2[e_n(t)] = \int_0^\infty e_n^2(t)dt$  і *узгацьована*  $J_2^k[e_n(t)]$  *інтегральні квадратичні оцінки* (тут  $e_n$  — перехідна складова помилки).

Числовими показниками якості в усталеному режимі є *коефіцієнти позиційної помилки*  $C_{g0}$  і  $C_{f0}$ , *коефіцієнти швидкісної помилки*  $C_{g1}$  і  $C_{f1}$ , *коефіцієнти прискорювальної помилки*  $C_{g2}$  і  $C_{f2}$ .

Вибір алгоритму керування є однією з головних задач у процесі проектування САК. Найчастіше на практиці використовують PID-контролери із закладеним у них пропорційно-інтегро-диференціальним алгоритмом керування:

$$u(t) = k_p e(t) + k_i \int_0^t e(\tau) d\tau + k_d \frac{de(t)}{dt},$$

де  $k_p, k_i, k_d$  — коефіцієнти передачі пропорційної, інтегральної і диференціальної складових. Передавальна функція PID-контролера має вигляд

$$W_k(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s = \frac{k_d s^2 + k_p s + k_i}{s},$$

але, оскільки виконувати ідеальне диференціювання сигналу помилки  $e(t)$  не вдається, то в реальних САК передавальна функція PID-контролера насправді має вигляд

$$W_K(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + \frac{k_d}{T_d s + 1} = \frac{(k_d + k_p T_d) s^2 + (k_p + k_i T_d) s + k_i}{s(T_d s + 1)},$$

де  $T_d$  — часовий коефіцієнт, що характеризує інерційні властивості реальної диференціюючої ланки. Оптимальне налаштування параметрів  $k_p, k_i, k_d, T_d$  є основною задачею при проектуванні PID-контролерів.

## ЗАСОБИ АНАЛІЗУ І СИНТЕЗУ САК

У комплекті інструментів CST для аналізу і синтезу САК передбачені такі функції:

- `stepinfo(sys)` — повертає прямі числові показники (за винятком усталеного значення) якості керування САК `sys` без виводу графіки;
- `ltiview(sys)` — дозволяє отримати числові показники якості на вкладці `Characteristics` контекстного меню відповідних часових і частотних характеристик;
- `margin(sys)` — дозволяє знайти запаси стійкості по амплітуді і по фазі;
- `pid(k_p, k_i, k_d, T_d)` — формує неперервний паралельний регулятор з незалежними пропорційним  $k_p$ , інтегральним  $k_i$ , диференціальним  $k_d$  і часовим  $T_d$  (час інерції реальної диференціюючої ланки) коефіцієнтами;
- `pidstd(k_p, T_i, T_d, N)` — формує неперервний регулятор у стандартній формі зі спільним пропорційним коефіцієнтом підсилення  $k_p$ , часовими коефіцієнтами інтегрування  $T_i$  і диференціювання  $T_d$  і дільником  $N$  інерційного часового коефіцієнта;
- `piddata(contr)`, `pidstddata(contr)` — повертає параметри PID-контролера `contr` відповідної форми (паралельна, стандартна);
- `pidtune(plant, 'type', options)` — для об'єкта керування `plant` проектується контролер паралельної форми вказаного типу `type` ('P', 'I', 'PI', 'PD', 'PDF', 'PID', 'PIDF'), параметри якого вибрані збалансовано між вимогами задовільних часу регулювання і запасів стійкості, із заданням додаткових опцій `options`;
- `pidtune(plant, basecontr, options)` — проектування проводиться у порівнянні з еталонним (базовим) контролером `basecontr`, причому отримуваний результат є контролером того ж типу;
- `pidtool(plant, 'type')` — викликає конструктор PID Tuner для проектування (в інтерактивному режимі) PID-контролера типу `type` для об'єкта керування `plant`;
- `pidtool(plant, basecontr)` — проектування проводиться у порівнянні з еталонним (базовим) контролером `basecontr`;
- `pidTuner(plant, 'type')` — у новіших версіях замінює `pidtool`;
- `pidTuner(plant, basecontr)` — у новіших версіях замінює `pidtool`;
- `sisotool` — викликає конструктор SISO Design Tool для проектування (в інтерактивному режимі) PID-контролера.

## ЗАВДАННЯ НА ЛАБОРАТОРНУ РОБОТУ

Структурна схема САК з від'ємним зворотним зв'язком наведена на рисунку 1 нижче, де АКП — це автоматичний керуючий пристрій, що складається з контролера (регулятора) і вимірювального пристрою (ВП), ОК — це об'єкт керування,  $g(t)$  — задаючий вплив (вхідний сигнал),  $y(t)$  — керована змінна (вихідний сигнал),  $u(t)$  — керуюча змінна (вихідний сигнал з контролера),  $e(t)$  — помилка керування,  $W_k(p)$ ,  $W_{ок}(p)$ ,  $W_{вп}(p)$  — передавальні функції (ПдФ) відповідно контролера, ОК (по керуванню) та ВП (варіанти ПдФ наведені в таблиці 1 нижче). Виконати аналіз і синтез САК.

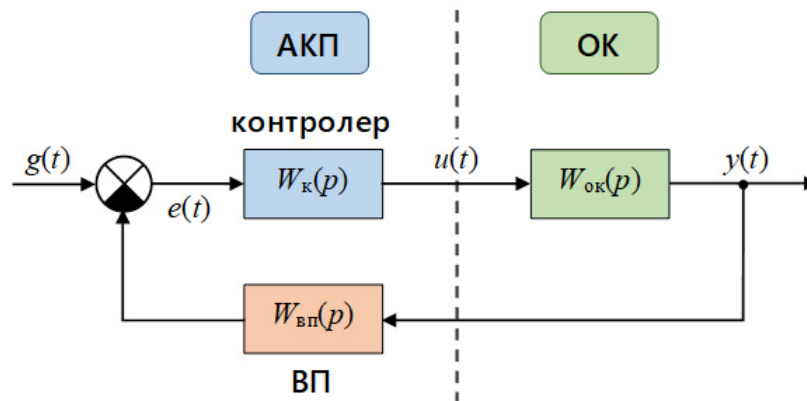


Рис. 1. Структурна схема САК

1. Написати сценарій `rib_lab61.m` (`rib` — ваші ініціали), в якому потрібно:
  - (a) побудувати (`series`, `parallel`, `feedback`) ПдФ в зображеннях Лапласа  $W_{gy}(s)$  САК з від'ємним зворотним зв'язком на основі ПдФ базового ( $k_p = k_i = k_d = 1$ ,  $T_d = 0.01$ ) PID-контролера (з реальною диференціюючою ланкою)  $W_k(s)$  (`pid`), ПдФ ОК  $W_{ок}(s)$  і ПдФ ВП  $W_{вп}(p)$ ;
  - (b) побудувати з допомогою графічного інтерфейсу `ltviewer` перехідну характеристику отриманої САК і через контекстне меню `Characteristics` визначити її усталене значення (`FinalValue`), час наростання (`RiseTime`), час регулювання (`SettlingTime`), перерегулювання (`Overshoot`), максимум (`Peak`), час досягнення максимуму (`PeakTime`);
  - (c) обчислити (`stepinfo`) прямі числові показники якості побудованої САК і порівняти основні з них з отриманими в (b), зробити висновок про додаткові показники;
  - (d) обчислити з допомогою `ltview/Characteristics` (якщо є така можливість) або самостійно з командного рядка за формулами кореневі числові показники якості САК: степені коливальності і стійкості (можуть бути корисними функції `zero` і `pole`);
  - (e) так само обчислити частотні числові показники якості САК: резонансний пік і частоту, смугу пропускання, запаси стійкості по амплітуді і по фазі (`margin`);
  - (f) із командного рядка спроектувати (`pidtune`) PID-контролер на основі базового контролера;
  - (g) побудувати САК на основі спроектованого контролера і порівняти числові показники якості з базовою САК (`ltview/step` та `stepinfo`);

- (h) виконати синтез PID-контролера на основі базового контролера з допомогою конструктора PID Tuner в інтерактивному режимі (pidtool або pidTuner), ставлячи за мету покращити (ResponseTime, TransientBehavior) окремі числові показники (ShowParameters).
2. Побудувати візуальну модель `pid_lab6.mdl` в Simulink для проектування PID-контролера:
- для побудови ланки PID-контролера і визначення запізнення у ПдФ ОК використати блоки PIDController і TransportDelay з бібліотеки Simulink Library/Continuous;
  - виконати імітацію базової моделі і отримати перехідну функцію на осцилографі;
  - виконати синтез PID-контролера на основі базового контролера ( $P = I = D = 1$ ,  $N = 100$ ) з допомогою кнопки Tune... у блоці налаштування його параметрів;
  - показати таблицю числових характеристик отриманої САК;
  - виконати синтез PID-контролера за встановленими межами допустимої зони з допомогою блоку обмежень Check Step Response бібліотеки Simulink Design Optimization/Signal Constraints.
3. Спроекувати PID-контролер з допомогою конструктора SISO Design Tool (sisotool).

Таблиця 1 Варіанти завдань (ПдФ та їх коефіцієнти)

$$W_{\text{ок}}(p) = \frac{ke^{-0.2p}}{T^2p^2 + 2\xi Tp + 1}, \quad W_{\text{вп}}(p) = 1$$

Варіант	$k$	$T$	$\xi$	Варіант	$k$	$T$	$\xi$
1	1.0	1.00	0.2	16	1.0	4.50	1.4
2	1.7	1.25	0.4	17	1.1	4.25	1.5
3	2.3	1.50	0.5	18	1.3	4.00	0.5
4	2.8	1.75	1.3	19	1.6	3.75	0.6
5	3.2	2.00	1.4	20	2.0	3.50	0.7
6	3.5	2.25	1.5	21	2.5	3.25	0.8
7	3.7	2.50	0.5	22	3.1	3.00	0.9
8	3.8	2.75	0.6	23	3.8	2.75	1.0
9	3.1	3.00	0.7	24	3.7	2.50	1.1
10	2.5	3.25	0.8	25	3.5	2.25	1.2
11	2.0	3.50	0.9	26	3.2	2.00	1.3
12	1.6	3.75	1.0	27	2.8	1.75	1.4
13	1.3	4.00	1.1	28	2.3	1.50	1.5
14	1.1	4.25	1.2	29	1.7	1.25	0.5
15	1.0	4.50	1.3	30	1.0	1.00	0.6

**ЗВІТ ПО ЛАБОРАТОРНІЙ РОБОТІ**

Зміст звіту:

1. Титульний аркуш зі стандартними атрибутами.
2. Сценарій аналізу і синтезу САК.
3. Аргументовані відповіді на питання.
4. Візуальна (імітаційна) модель аналізу і синтезу САК.
5. Висновки.

## СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

---

1. Бахрушин В.Є., Огаренко Т.Ю. Теорія керування: навч. посіб. Запоріжжя : КПУ, 2014. 224 с.
2. Гайдук А.Р., Беляев В.Е., Пьявченко Т.А. Теория автоматического управления в примерах и задачах с решениями в MATLAB: Учебное пособие. 2-е изд. СПб : Лань, 2011. 464 с.
3. Ким Д.П. Теория автоматического управления. Т.1. Линейные системы. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003. 288 с.
4. Лазарев Ю.Ф. Довідник з MATLAB / Електронний навчальний посібник з курсового і дипломного проектування. К. : НТУУ "КПІ", 2013. 132 с.
5. Мартяков А.И. Теория автоматического управления: Сборник задач и упражнений. М. : МГИУ, 2008. 147 с.
6. Попович М.Г., Ковальчук О.В. Теорія автоматичного керування: Підручник. 2-ге вид. К. : Либідь, 2007. 656 с.
7. Соколов Ю.Н. Функции MATLAB в задачах анализа и проектирования систем управления: Учеб. пособие. Харьков : НАУ "ХАИ", 2004. 93 с.
8. Худолей Г.М. Теорія автоматичного управління: конспект лекцій у 2 ч. Ч.1. Аналіз лінійних систем автоматичного управління. Суми : СДУ, 2016. 179 с.

Навчальне видання

Мазуренко Віктор Володимирович  
Махней Олександр Володимирович

**ТЕОРІЯ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ**  
(лабораторний практикум з навчальної дисципліни)

Підписано до друку 07.06.2023. Формат 60×84/8.

Папір офсетний. Друк цифровий.

Гарнітура «СМ Roman». Ум. друк. арк. 3,7.

Наклад 100. Зам. № 3 від 07.06.2023.

Віддруковано: Приватний підприємець Голіней О. М.

76008, м. Івано-Франківськ, вул. Галицька, 128,

тел.: (0342) 58-04-32, + 38 050 540 30 64