

Державний вищий навчальний заклад
«Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника»
Факультет математики та інформатики
Кафедра комп'ютерних наук та інформаційних систем

ДИПЛОМНА РОБОТА

на здобуття другого (магістерського) рівня вищої освіти
на тему
«Вейвлет-перетворення в цифровій обробці інформації»

Виконала: студентка 6 курсу,
групи КНМ-21
спеціальності 122 «Комп'ютерні науки та
інформаційні технології»
Сеньків Вікторія Степанівна
Керівник: д.т.н. проф. Петришин Любомир
Богданович

Івано-Франківськ – 2021 р.

Державний вищий навчальний заклад
«Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника»
Факультет математики та інформатики
Кафедра комп'ютерних наук та інформаційних систем
Спеціальність 122 «Комп'ютерні науки»

Затверджено на засіданні

кафедри _____

Протокол № __ від _____

Завідувач кафедри _____

ЗАВДАННЯ
НА ДИПЛОМНУ РОБОТУ СТУДЕНТЦІ

Сеньків Вікторії Степанівні

1. Тема роботи – «Вейвлет-перетворення в цифровій обробці інформації»
Керівник роботи – д.т.н. проф. Петришин Любомир Богданович
2. Перелік питань які потрібно розробити: дослідження типів сигналів, аналіз методів функціонального аналізу і синтезу при цифровій обробці, обґрунтування ефективності застосування вейвлетів в порівнянні з іншими методами, дослідження та явний аналіз програмних пакетів за допомогою яких можна здійснювати вейвлет-перетворення.
3. Дата видачі завдання: 23.09.2020

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

п/п	Назва етапів роботи	Строк виконання етапів роботи	Примітка
1	Дослідження типів сигналів	23.09.20 – 11.12.20	
2	Аналіз методів функціонального аналізу і синтезу при цифровій обробці інформації	11.12.20 – 02.02.21	
3	Дослідження вейвлет-перетворень та їх властивостей	02.02.21 – 22.05.21	
4	Підбір навчальних матеріалів для аналізу області застосування вейвлетів	22.05.21 – 20.08.21	
5	Дослідження програмних пакетів за допомогою яких можна здійснювати вейвлет-перетворення	20.08.21 – 18.10.21	
6	Тестування різних видів вейвлет перетворень, їх роботи у MatLab	18.10.21 – 08.11.21	
7	Оформлення результатів	08.11.21 – 11.12.21	

Студентка _____
 Керівник роботи _____

Сеньків В.С.
 Петришин Л. Б.

АНОТАЦІЯ

Вейвлет-перетворення в цифровій обробці інформації

Сеньків В.С., студентка, спеціальність «Комп'ютерні науки та інформаційні технології»

Івано-Франківськ – 2021 р

В роботі проаналізовано методи функціонального аналізу та синтезу при цифровій обробці, одним з яких є вейвлет перетворення. Розглянуто властивості та застосування кожного з них, обґрунтовано ефективність вейвлет-перетворень в порівнянні з класичними методами. На основі запропонованих математичних моделей здійснено вейвлет аналіз прикладних процесів.

Дана дипломна робота містить 98 сторінок та 45 джерел інформації.

ANNOTATION

Wavelet transform in digital information processing

Senkiv V.S., student, specialty «Computer sciences and information technologies»

Ivano-Frankivsk – 2021

The paper analyzes the methods of functional analysis and functional synthesis in digital processing, one of which is the wavelet transform. We considered the properties and application of each of them, substantiated the efficiency of wavelet transforms in comparison with classical methods. On the basis of the offered mathematical models, the wavelet analysis of applied processes was suggested.

This thesis contains 98 pages and 45 sources of information

ЗМІСТ

Перелік Умовних Скорочень	6
ВСТУП.....	7
РОЗДІЛ 1. Основи цифрової обробки інформації	9
1.1 Поділ системи ЦОІ та її особливості	9
1.2 Поняття «сигналу» та його представлення.....	13
1.3 Математичний опис та моделі сигналів.....	19
1.4 Типи сигналів та їх перетворення	23
1.5 Переваги ЦОІ	29
Висновки до РОЗДІЛУ 1	33
РОЗДІЛ 2. Методи цифрової обробки сигналів	34
2.1 Перетворення Фур'є. Спектр його сигналів	34
2.2 Дискретне Перетворення Фур'є	38
2.3 Вейвлети. Основні властивості	42
2.4 Неперервне та дискретне вейвлет-перетворення. Властивості вейвлет-аналізу. ШВП.....	47
2.5 Порівняння перетворення Фур'є та вейвлет-перетворення.....	58
Висновки до РОЗДІЛУ 2.....	61
РОЗДІЛ 3. Аплікація для аналізу вейвлетів.....	63
3.1 MATLAB та його пакети для використання вейвлет-перетворень	63
3.2 Неперервні вейвлет-перетворення у MATLAB.....	68
3.3 Дискретні вейвлет-перетворення у MATLAB.....	74
Висновки до РОЗДІЛУ 3.....	94
ВИСНОВКИ	95
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	97

Перелік Умовних Скорочень

ЦОІ – Цифрова Обробка Інформації

ЦОС – Цифрова Обробка Сигналів

АЦП – Аналого-Цифровий Перетворювач

ЦАП – Цифро-Аналоговий Перетворювач

DSP – Digital Signal Processing

ВКФ – Взаємно-Кореляційна Функція

АКФ – Автокореляційна Функція

КМА – Кратномасштабний Аналіз

ШПФ – Швидке Перетворення Фур'є

НВП – Неперервне Вейвлет-Перетворення

ВП – Вейвлет-Перетворення

ДВП – Дискретне Вейвлет-Перетворення

ШВП – Швидке Вейвлет-Перетворення

ДЕФ – Дискретні Експоненціальні функції

АЧХ – Амплітудно-Частотна Характеристика

ФЧХ – Фазочастотна Характеристика

НВП-1D – Неперервне одновимірне вейвлет-перетворення

SWT – Stationary Wavelet Transform

ВСТУП

Актуальність теми. Незважаючи на те, що теорія вейвлет-перетворення вже в основному розроблена, точного визначення, що ж таке вейвлет, які функції можна назвати вейвлетами немає. З розвитком технологій у сучасному світі не стоїть на місці й розвиток вейвлет аналізу. Вейвлет аналіз є перспективною технологією аналізу даних. Його застосовують в різних сферах інтелектуальної діяльності. Останнім часом виник цілий науковий напрямок, пов'язаний з вейвлет-аналізом і теорією вейвлет-перетворення.

Вейвлети широко застосовуються для фільтрації і попередньої обробки даних, аналізу стану і прогнозування ситуації на фондових ринках, розпізнавання образів, при обробці і синтезі різних сигналів, наприклад мовних, медичних, для вирішення завдань стиску і обробки зображень, при навчанні нейромереж і в багатьох інших випадках.

Мета дипломної роботи полягає у дослідженні вейвлет-аналізу, вейвлет-перетворень, опису та представленні їхньої ролі у цифровій обробці інформації.

Виходячи з поставленої мети, завданнями написання дипломної роботи є:

- розкрити сутність поняття “сигнал”;
- вивчити особливості цифрової обробки інформації;
- здійснити оцінку методів цифрової обробки сигналів
- вивчити досвід використання ЦОС;
- дослідити актуальність перетворень Фур'є на даний час та швидкість їх виконання;
- провести аналіз вейвлет перетворень з завадами та без;
- дослідити різницю між перетворенням Фур'є та вейвлет-перетворенням;
- розглянути приклади побудови вейвлет-перетворень з метою кращого ознайомлення.

Об'єктом дослідження є вейвлети та їх поведінка у ЦОІ.

Предмет дослідження – практичні аспекти щодо методів цифрової обробки сигналів.

Методи дослідження. Під час проведення дослідження використовувались системний підхід, методи цифрової обробки сигналів, логічно-теоретичний метод, метод класифікації, порівняльного аналізу, групування, графічного моделювання організаційних структур, експертної оцінки.

Наукова новизна одержаних результатів полягає у дослідженні вейвлет перетворень, вейвлет-аналізу та вейвлетів в цілому, представленні його переваг та недоліків,

Інформаційна база. Під час написання дипломної роботи в якості інформаційної бази використовувалися наукові публікації та монографічні видання, книги, присвячені проблемам вейвлет-перетворення, вейвлет-аналізу.

Апробація результатів дослідження. Результати проведених досліджень були оприлюднені та обговорені на Міжнародній науково-технічній конференції здобувачів вищої освіти та молодих вчених «Комп'ютерні науки, інформаційні технології та системи управління», м. Івано-Франківську, 2020 р.

РОЗДІЛ 1. Основи цифрової обробки інформації

1.1 Поділ системи ЦОІ та її особливості

Цифрова обробка інформації є ключовою функцією інформаційних систем та систем управління об'єктами економіки, зокрема промислового виробництва, сфери послуг та зв'язку. Цифрова обробка інформації (ЦОІ) поділяється на первинну і вторинну. Первинна обробка забезпечує перетворення сигналів, що надходять на вхід системи ЦОІ в аналоговому або цифровому вигляді в набір цифрових даних для подальшої (вторинної) обробки, тому для її позначення набув широкого поширення термін «цифрова обробка сигналів» (ЦОС). В ході вторинної обробки інформації вирішуються завдання розпізнавання образів на основі аналізу спектрів сигналів, отриманих в процесі ЦОС, а також завдання управління і цифрового моделювання, контролю та діагностики, обробки статистичних даних та інші, які характеризуються різними алгоритмами [20].

Цифрова обробка сигналів – наука, що вивчає методи і алгоритми обробки цифрових сигналів і займається розробкою апаратних і програмних рішень відповідних систем. Цифрова обробка сигналів активно проникла в широке коло областей науки і техніки: комунікації, метеорологія, радіолокація і гідролокація, медична візуалізація зображень, цифрове аудіо- і телевізійне мовлення та багато інших. Це робить її однією з новітніх і найбільш потужних технологій. Сьогодні технологія ЦОС відноситься до числа базових знань [21].

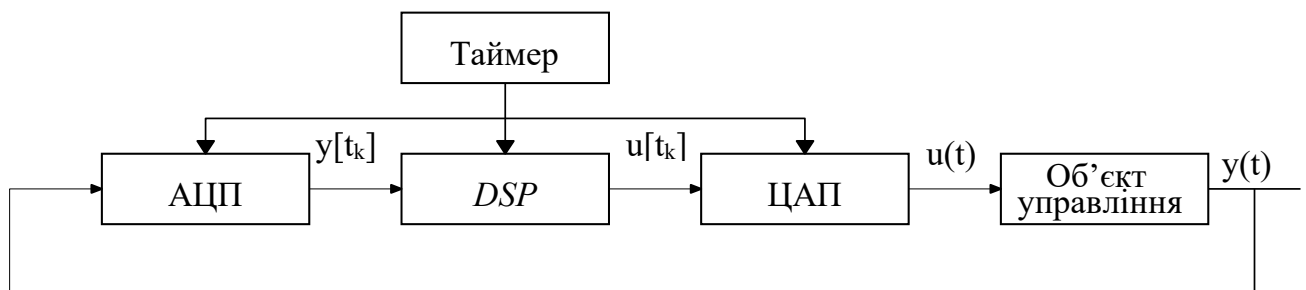


Рис. 1.1.1 Схема обробки інформації

Джерело: сформовано автором.

Аналоговий вхідний фільтр використовується для обмеження смуги частот аналогового вхідного сигналу перед його оцифровкою. Вхідний фільтр перешкоджає появі спотворень сигналу, спричиненого ефектом накладання спектрів.

Аналого-цифровий перетворювач (АЦП) трансформує аналоговий вхідний сигнал у цифрову форму. Якщо сигнал має широку смугу частот або якщо застосовується низькошвидкісний АЦП, то перед оцифровуванням сигналу потрібно скористатися пристроєм вибірки-зберігання (УВХ). У нові АЦП схеми УВХ вже вбудовані[16]. Пристрій цифрової обробки перетворює сигнал за заданим алгоритмом. Пристроями цифрової обробки можуть бути:

- 1) пристрої обробки на «жорсткій» логіці;
- 2) універсальні процесори;
- 3) сигнальні процесори;
- 4) логічні інтегральні схеми, що програмуються (ПЛІС).

Після цифрової обробки цифро-аналоговий перетворювач (ЦАП) знову перетворює оброблений сигнал аналогову форму [1]. Вихідний фільтр згладжує вихідний сигнал ЦАП та усуває небажані високочастотні компоненти.

Не у всіх системах дана схема повністю відтворюється:

- 1) у деяких додатках дані вже представлені у цифровому вигляді;
- 2) в інших їх не потрібно перетворювати на аналоговий сигнал.

Таким чином, цифрова обробка сигналів завдяки своїм перевагам має велике значення для багатьох сучасних технологій. Загалом система ЦОС реального часу полягає з АЦП, пристрої цифрової обробки та ЦАП.

Цифрові сигнали формуються з аналогових операцією дискретизації, тобто послідовним квантуванням (виміром) амплітудних значень сигналу через певні інтервали часу Δt або будь-якої іншої незалежної змінної Δx . В результаті рівномірної дискретизації неперервний по аргументу сигнал переводиться в упорядковану по незалежній змінній послідовність чисел[17]. Виразити умови, при яких можливе повне відновлення аналогового сигналу по його цифровому еквіваленті зі збереженням всієї інформації, яка початково містилася в сигналі,

можна аксіомами Найквіста, Котельникова, Шеннона, їх суть практично однакова.

Для того, щоб досягнути дискретизації аналогового сигналу і повністю зберегти його інформацію в цифровому еквіваленті, максимальні частоти в аналоговому сигналі повинні бути удвічі менші, ніж частота дискретизації. Тобто на одному періоді максимальної частоти має бути мінімум два відліки. За порушення цієї умови, в цифровому сигналі виникає ефект маскування, або ж підміни, дійсних частот більш низькими частотами. До цього ж, в цифровому сигналі замість фактичної реєструється "удавана" частота, що робить відновлення фактичної частоти в аналоговому сигналі стає неможливим [9].

Для того, що перетворити сигнал в цифрову форму потрібно скористатись аналого-цифровими перетворювачами (АЦП). Зазвичай, в них використовується використовують двійкову систему числення з певним числом розрядів. Збільшення числа розрядів дозволяє підвищити точність вимірювань і розширити динамічний діапазон вимірюваних сигналів [10]. Через нестачу розрядів АЦП втрачену інформацію не можливо відновити, тому існують лише оцінки похибки відліків. Одна із таких, це оцінка через потужність шуму, яка визначається за допомогою помилки в останньому розряді АЦП. Для цього використовується відношення «сигнал/шум» – відношення потужності сигналу до потужності шуму (в децибелах). 8-, 10-, 12-, 16-, 20- й 24-х розрядні АЦП застосовуються найбільш часто. В них, відношення сигнал/шум на 6 децибел покращується за рахунок кожен додаткового розряду. Проте зі збільшенням кількості розрядів знижується швидкість дискретизації [2].

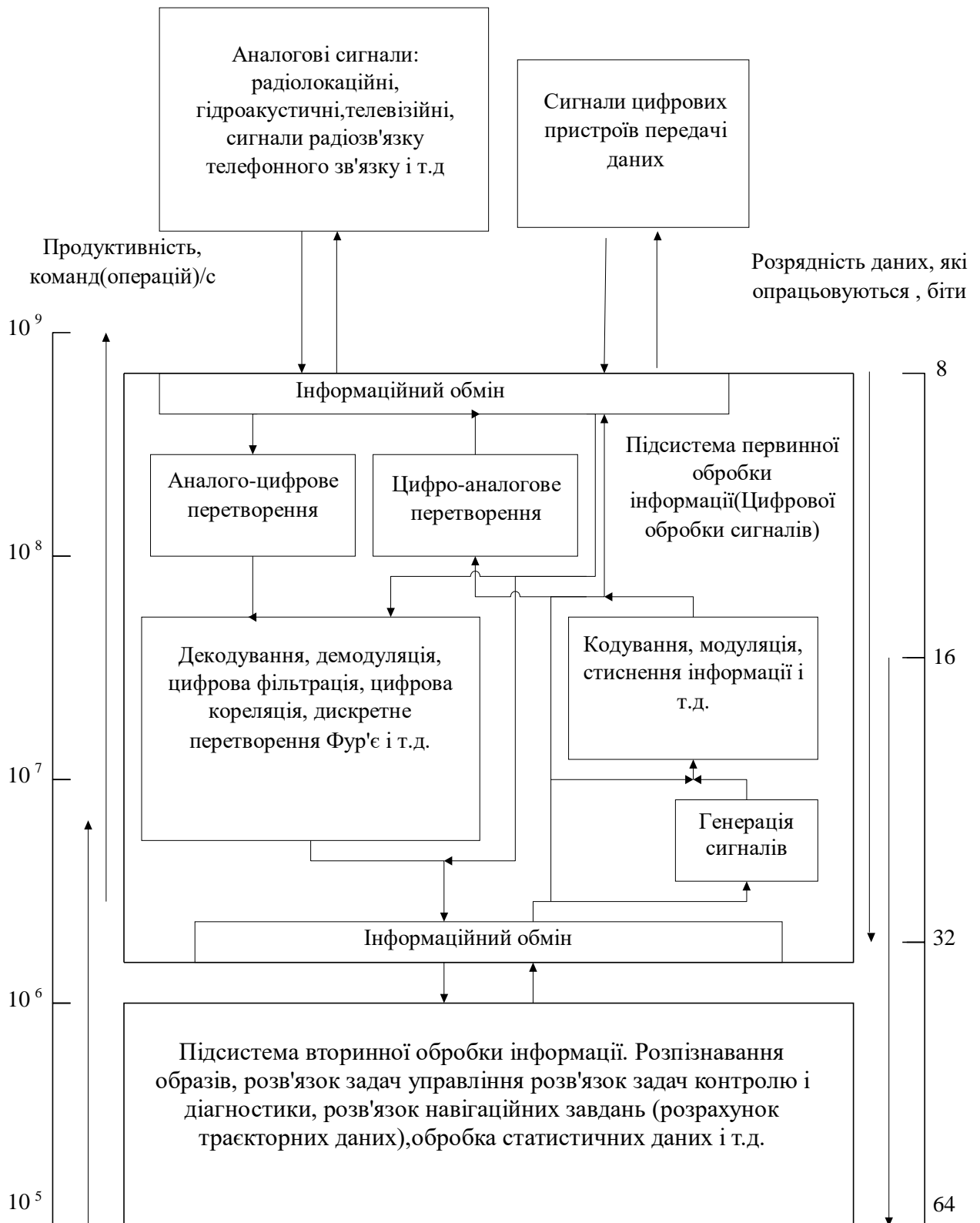


Рис. 1.1.2 Ієрархічна організація системи ЦОІ

Джерело: сформовано автором

1.2 Поняття «сигналу» та його представлення

Залежність якої небудь величини "у" від іншої величини – незалежної змінної "х", яка має вигляд $y(x)$ увійшло в теорію математики в XVIII, як означення функції. З плином часу математика функцій стала базовою основою теорії всіх природничих та технічних наук. Згодом для опису процесу передавання інформації було використано часові функції виду $s(t)$, $v(f)$, які називали сигналами в аудіо-, відео техніці, техніці зв'язку, де набула особливого значення функціональна математика [22].

Термін «сигнал» використовується у різних значеннях, часто у технічних галузях знань його вживають у широкому розумінні без дотримання строгої термінології. Наприклад його використання можливе для опису фізичного процесу, що є матеріальним втіленням інформаційного повідомлення – зміни якого-небудь параметра носія інформації (напруги, частоти, потужності електромагнітних коливань, інтенсивності світлового потоку) у часі, у просторі, залежно від зміни значень яких-небудь інших аргументів; для розуміння технічного запису для передавання, перетворення й використання інформації – електричний, магнітний, оптичний сигнал; або у розумінні значення певного фізичного стану або процесу, як, наприклад, сигнали світлофора, звукові попереджувачі сигнали і т.д [11]. Відповідно до цих прикладів сигнали уособлюють певні відомості, інформацію, повідомлення про якісь процеси, стани або фізичні величини об'єктів матеріального світу, виражені у формі зручній для передачі, обробки, зберігання й використання цих даних. Кінцеве призначення сигналів і об'єднує ці всі поняття.

Часто термін «сигнал» прирівнюють з поняттями «дані» або «інформація». Ці поняття насправді є схожими і пов'язаними, проте стосуються різних категорій. Термін «інформація» має багато трактувань, починаючи від (інформація – це формалізоване віддзеркалення реального світу) і закінчуючи (відомості й дані, що є об'єктом зберігання, передачі, перетворення, сприйняття й керування) [14].

Поряд з матерією й енергією, інформація відноситься до фундаментальних філософських категорій природознавства і є однією з властивостей об'єктивного світу. Щодо «даних», то це сукупність фактів, результатів спостережень, вимірів відносно об'єктів, явищ або процесів матеріального світу, які представлено у формалізованому вигляді (кількісному або якісному). Це не сама інформація, а тільки атрибут інформації, сировина для одержання інформації шляхом відповідної обробки й інтерпретації (тлумачення) [5].

Загально прийнятим для характеристики форми подання даних, які є результатом певних вимірів параметрів об'єкта досліджень у вигляді послідовності значень скалярних величин (аналогових, числових, графічних, тощо) використовується поняття «сигнал». Відповідно до цього упорядковане відображення у зміні фізичного стану якого-небудь об'єкта – матеріального носія сигналу, певних даних про характер зміни у просторі або часі називатимемо сигналом. Носієм загальної вимірювальної інформації є саме сигнал. Адже дані містять інформацію, включаючи як і основні цільові параметри об'єкта досліджень, так і різні супутні фактори та різні завади. Варто зазначити, що матеріальна форма носіїв сигналів (механічна, електрична, магнітна, акустична, оптична й будь-яка інша), а також форма відображення у певних фізичних параметрах не відіграє будь-якого значення. А будь-який параметр носія сигналу, функціонально зв'язаний із значеннями інформаційних даних, може бути інформативним параметром сигналу [2].

Сигнал у загальному розумінні – це залежність однієї величини від іншої й з математичної точки зору являє собою функцію .

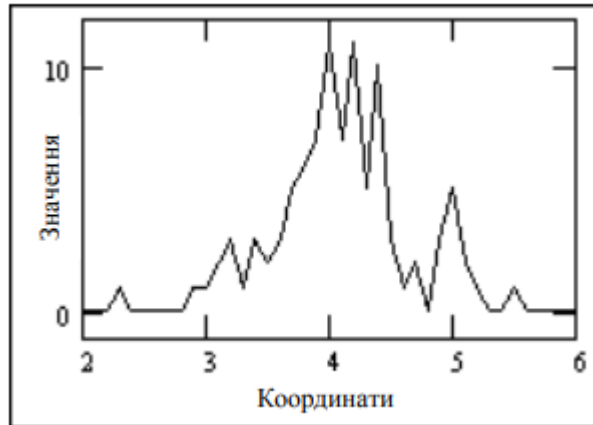


Рис. 1.2.1 Сигнал у вигляді функції

Джерело: [22].

Найбільш поширеною формою для подання сигналів є електрична форма, що виражається у вигляді залежності напруги від часу $U(t)$.

Сигнал – це інформаційна функція, що несе повідомлення про фізичні властивості, стан або поведження якої-небудь фізичної системи, об'єкта або середовища. Метою обробки сигналів можна вважати отримання певних інформаційних відомостей, що відображені в цих сигналах й перетворення цих відомостей у форму, зручну для сприйняття й подальшого використання [11].

Аналізуючи сигнали, обов'язковими є суто як математичні перетворення, а також, одержані, на основі цих перетворень, висновки, стосовно специфічних особливостей відповідних процесів та об'єктів.

Зазвичай, аналіз сигналів здійснюється для того, щоб:

- 1) визначити чи оцінити числові параметри сигналів (енергія, середня потужність, середньо квадратичне значення та ін.);
- 2) розкласти сигнали на елементарні складові для порівняння властивостей різних сигналів;
- 3) порівняти ступінь "близькості", "подібності", "спорідненості" різних сигналів, у тому числі з певними кількісними оцінками.

Поряд з терміном «сигнал» обов'язковим є поняття реєстрації що означає операцію виділення сигналу, його перетворення у зручну форму для подальшого використання. Термін реєстрація має теж багато означень кожне з яких

правильне для певної сфери. Якщо розглядати фізичні властивості якихось об'єктів то реєстрація це процес виміру фізичних властивостей об'єкта й перенесення результатів вимірювань на матеріальний носій сигналу або безпосереднє енергетичне перетворення властивостей об'єкта в інформаційні параметри матеріального носія сигналу (як правило – електричного) [2].

Під поняттям декодування будемо розуміти процес одержання інформації за допомогою технічних засобів, які знаходять співвідношення вимірюваної величини із прийнятої за визначенням зразковою одиницею цієї величини, і подання обмірюваного співвідношення в фізичній або числовій формі інформаційного сигналу.

Трапляється таке що при декодуванні сигналів, разом із основним сигналом реєструються і сигнали, що заважають, тобто шуми й завади будь якої природи.

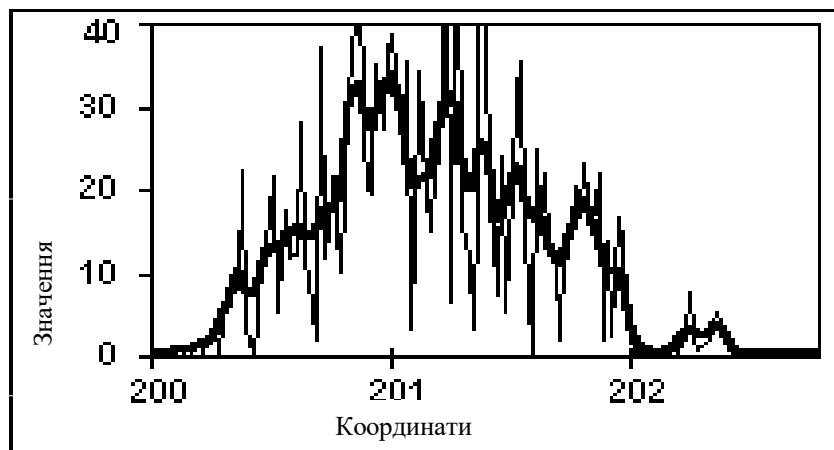


Рис. 1.2.2 Зображення сигналу із завадами

Джерело: [22].

Спотворення корисних сигналів, що відбувається під впливом різних дестабілізуючих факторів на процеси вимірів, також належить до завад. Однією із основних задач первинної обробки сигналів є максимальне придушення шумів і завад в інформаційному сигналі при цьому, зберігаючи його корисні складові та виділяючи їх із загальної суми зареєстрованих сигналів [5].

Типи завад визначають:

1) за джерелами їхнього виникнення є внутрішні та зовнішні. Внутрішні шуми властиві фізичній природі джерел сигналів (дробові ефекти в електронних приладах або теплові шуми електронних потоків). Зовнішні поділяються за походженням на штучні, тобто індустріальні заводи (перемикачі, двигуни) та природні – блискавки, сплески сонячної енергії;

2) за енергетичними спектрами;

3) за характеристиками впливів на сигнал;

4) за ймовірнісними характеристиками.

Електричні й магнітні поля різних джерел завод внаслідок наявності індуктивних, ємнісних і резистивних зв'язків створюють на різних ділянках і ланцюгах сигнальних систем паразитні різниці потенціалів і струми, що накладаються на корисні сигнали [11].

Завади поділяються на:

1) флуктуаційні, які представляють хаотичний у часі процес у вигляді нерегулярних випадкових сплесків різної амплітуди (впливають на сигнали низького рівня);

2) імпульсні, що є схожими до флуктуаційних і проявляються у вигляді окремих імпульсів або послідовностей імпульсів з випадковою формою і характером;

3) періодичні, які викликаються періодичними низькочастотними або високочастотними полями ліній електропередач, силових електроустановок та ін.

Залежно від характеру впливу на сигнал завади розділяють на адитивні й мультиплікативні. Адитивні (тобто ті, які накладаються) підсумовуються із сигналом, не залежать від його значень і форми й не змінюють інформативної складової самого сигналу. Мультиплікативні або деформуючі завади можуть змінювати форму інформаційної частини сигналу, залежати від його значень і від певних особливостей у сигналі й таке інше. При відомому характері мультиплікативних завод можлива корекція сигналу на їхній вплив [22].

В загальному означенні сигнали є багатомірними функціями просторових, часових і інших незалежних змінних, наприклад, відеосигнали.

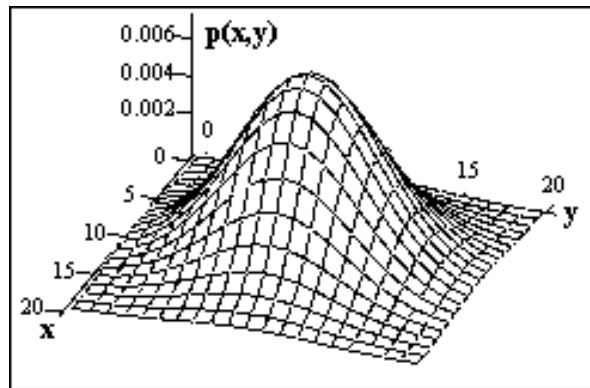


Рис. 1.2.3 Двовимірного сигналу

Джерело: [22].

Багатомірні сигнали можуть бути представлені за своїми аргументами, наприклад, дискретні за рівнем і неперервні за часом. Багатомірний сигнал може бути розглянутий, як упорядкована сукупність одномірних сигналів. Тому багато принципів і практичних методів, які використовуються для обробки одномірних сигналів, математичний апарат яких більше розвинений, при аналізі і обробці сигналів, застосовується й до багатомірних сигналів. Одномірні сигнали мультимедійних систем є найпростішими сигналами, оскільки значення одномірних сигналів залежать тільки від однієї незалежної змінної [14]. Наприклад, аудіосигнали, виміри якихось параметрів полів (електричних, магнітних, та ін.).

Обробка одномірних сигналів відрізняється від обробки багатомірних, наприклад внаслідок більшого числа ступенів волі. Тому, при дискретизації багатомірних сигналів важливим є не тільки частотний спектр сигналів, але й форма дискретизації. Прикладом особливості, що є не дуже корисною, можна назвати багатомірні поліноми сигнальних функцій. Вони, на відміну від одномірних, не розкладаються на прості множники. Що стосується порядку розмірності багатомірних сигналів, то її збільшення вище двох практично не змінює принципи й методи аналізу даних і позначається, в основному, тільки на ступені громіздкості формул і технічному ускладненні обчислень.

1.3 Математичний опис та моделі сигналів

В випадку представлення способу математичного опису сигналу та математичної моделі, сигнали можуть бути об'єктами теоретичних досліджень і практичного аналізу. За допомогою математичного опису, який дозволяє абстрагуватися від фізичної природи сигналу й матеріальної форми його носія можна класифікувати сигнали, порівнювати їх, встановлювати ступінь тотожності, моделювати системи обробки сигналів [2]. Сигнал описується функціональною залежністю певного інформаційного параметра сигналу від незалежної змінної.

Функції математичного опису сигналів можуть бути як дійсними, так і комплексними. Вибір математичного апарата опису визначається простотою й зручністю його використання при аналізі й обробці сигналів.

Математичні моделі сигналів за допомогою яких можна узагальнено, абстрагуючись від фізичної природи, робити висновок про властивості сигналів, передбачувати зміни сигналів в умовах, що змінюються, замінити фізичне моделювання досліджуваних процесів математичним, створюються на основі математичних моделей відповідних фізичних полів і фізичних процесів. Це допомагає описувати властивості сигналів, які є головними, визначальними в досліджуваних процесах, та ігнорувати велику кількість другорядних ознак [14].

В залежності від ознак, які характерні для того або іншого типу математичних моделей сигналів розділяють не випадкові й випадкові, залежно від можливості точного передбачення їхніх значень у будь-які моменти часу. Невипадковим або детермінованим називається сигнал, якщо математична модель дозволяє здійснювати таке передбачення [17]. Детермінований сигнал задається, як правило, математичною функцією або обчислювальним алгоритмом, а математична модель сигналу може бути представлена у вигляді:

$$s = F(t, z, \omega, \dots; A, B, C, \dots),$$

де s – інформативний параметр сигналу; t, z, ω, \dots – незалежні аргументи (час, просторова координата, частота та ін.); A, B, C, \dots – параметри сигналів [1].

В основному для визначення результатів вимірів модель має бути за можливістю, простіше й мінімізована за кількістю незалежних аргументів і адекватна досліджуваному процесу. Математичний опис в більшості випадках відображає не реальні об'єкти, а їх спрощені або гомоморфні моделі, тому він не може бути всеосяжним та ідеально точним. Моделі задаються таблицями, графіками, функціональними залежностями, рівняннями станів і переходів з одного стану в інше і т.д.

Формалізований опис вважається математичною моделлю оригіналу, якщо він з певною точністю прогнозує стан і поведінку досліджуваних об'єктів шляхом формальних процедур над їхнім описом. Область визначення сигналу, що встановлюється інтервалом завдання незалежної змінної є обов'язковою частиною будь-якої математичної моделі. Крім завдання області визначення сигналу при описі математичної моделі можуть задаватись види чисельних значень змінних (цілі, раціональні, дійсні, комплексні). Математичні моделі полів і сигналів на першому етапі обробки й аналізу результатів спостережень повинні дозволяти якоюсь мірою ігнорувати їхню фізичну природу й повертати її в модель тільки на заключному етапі інтерпретації даних [22].

При аналізі фізичних даних є два основних підходи, які використовуються для створення математичних моделей сигналів:

- 1) детермінований(невипадковий);
- 2) випадковий.

За допомогою першого підходу, ми можемо працювати з детермінованими сигналами, значення яких у будь-який момент часу або в довільній точці простору (а також залежно від будь-яких інших аргументів) є відомими або їх можна досить точно визначити. Для опису невідповідних сигналів використовують квазидетерміновані моделі, у яких значення одного або декількох параметрів є невідомими та вважаються випадковими величинами з малим випадковим компонентом, впливом якого можна зневажати. Другий

підхід дозволяє працювати з випадковими сигналами, закон зміни яких у часі (або в просторі) має випадковий характер і які набувають конкретних значень з деякою імовірністю [5]. Модель такого сигналу буде містити опис статистичних характеристик випадкового процесу шляхом задання законів розподілу ймовірностей, кореляційної функції, спектральної щільності енергії та ін.

Випадковість спричиняється як власною фізичною природою сигналів, що характерно, наприклад, для звукових сигналів, так й імовірнісним характером сигналів, що реєструються, як за часом або місцем їхньої появи, так і за змістом. Тому випадковий сигнал може розглядатися як відображення випадкового за своєю природою процесу або фізичних властивостей об'єкта (процесу), які визначаються випадковими параметрами чи складною структурою, результати вимірів у якій важко передбачити [14].

Між цими двома видами сигналів немає різкої границі. Строго кажучи, детермінованих процесів і детермінованих сигналів, що відповідають їм, у природі не існує. Навіть сигнали, добре відомі на вході в середовище (при зовнішньому впливі на неї), за місцем їхньої реєстрації завжди ускладнені випадковими завадами, впливом дестабілізуючих факторів і апріорно невідомими параметрами й будовою самого середовища. З іншого боку, модель випадкового поля часто апроксимується методом суперпозиції (накладення) сигналів відомої форми. Детерміновані моделі можуть використатися й для вивчення чисто випадкових процесів, якщо рівень корисного сигналу в цьому процесі значно вище рівня статистичних флуктуацій.

На вибір математичної моделі в тому або іншому випадку значно впливає також складність математичного апарату обробки сигналів і сформовані традиції інтерпретації результатів спостережень. Не виключається й зміна моделі, як правило, з імовірнісної в детерміновану, у процесі нагромадження інформації про досліджуване явище або об'єкт [11].

Нижче можемо розглянути класифікацію сигналів відповідно до двох вище розглянутих підходів. Відповідно до них за енергетичною позицією сигнали поділяються на сигнали з нескінченною енергією та кінцевою(обмеженою).

Для сигналів з обмеженою енергією повинне виконуватися співвідношення:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt < \infty$$

Як правило, до цього класу сигналів відносять аперіодичні й імпульсні сигнали, що не мають розривів 2-го роду при обмеженій кількості розривів 1-го роду, і особливих точок, що йдуть у нескінченність. Будь-які періодичні, полігармонійні й майже періодичні сигнали, а також сигнали з розривами й особливими точками 2-го роду, є сигналами з нескінченною енергією. Для їхнього аналізу застосовуються спеціальні методи. Іноді в окремий клас виділяють сигнали кінцевої тривалості, відмінні від нуля тільки на обмеженому інтервалі аргументів (незалежних змінних). Такі сигнали звичайно називають фінітними.

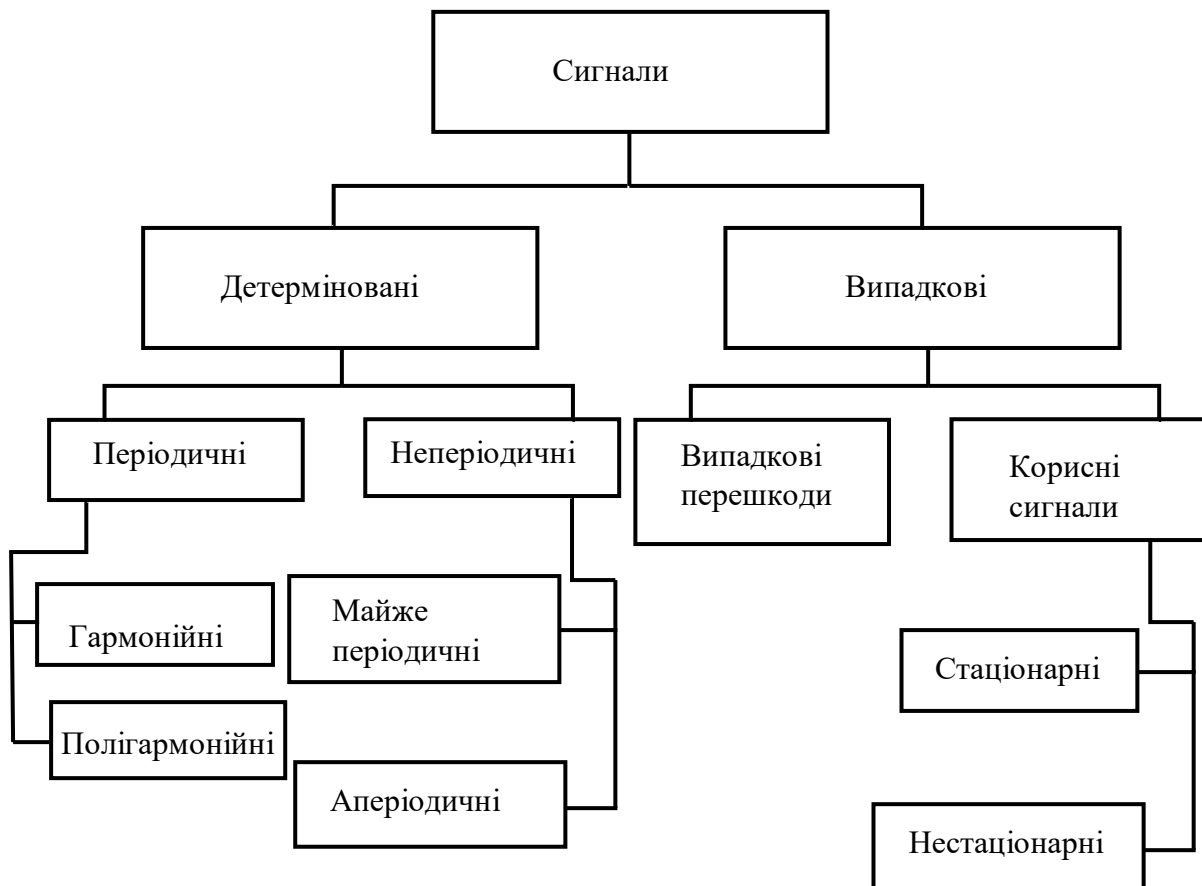


Рис. 1.3.1 Класифікація сигналів

Джерело: сформовано автором.

1.4 Типи сигналів та їх перетворення

Розглянемо три типи сигналів, які мають певні форми їхнього математичного опису Аналоговий – це сигнал, неперервний у часі та станом (Рис. 1.4.1 а). Сигнал описується безперервною (або кусково-неперервною) функцією $X(t)$. При цьому і аргумент і сама функція можуть набувати будь-яких значень з деяких інтервалів:

$$t' \leq t \leq t'', x' \leq x \leq x''$$

Дискретний – це сигнал, дискретний у часі та неперервний за станом (Рис. 1.4.1 б). Описується ґратчастою функцією $X(n * T)$, де n – номер відліку (1,2,3,...). Інтервал T називають періодом дискретизації, а обернену величину

$f_d = 1/T$ – частота дискретизації. Ґратчаста функція визначена тільки в моменти часу $n * T$ і може тільки в ці моменти набувати будь-яких значень деякого інтервалу $x' \leq x \leq x''$. Значення ґратчастої функції, відповідно і самого сигналу в моменти часу $n * T$ називають відліками. (Дискретний сигнал може бути як речовим, так і комплексним) [23].

Цифровий – це сигнал, дискретний як у часі, і станом (Рис. 1.4.1 в). Сигнали цього типу так само описуються ґратчастими функціями $X_c(n * T)$, які можуть приймати лише кінцеве число значень деякого кінцевого інтервалу

$x' \leq x \leq x''$. Ці значення називаються рівнями квантування, а відповідні функції квантованими.

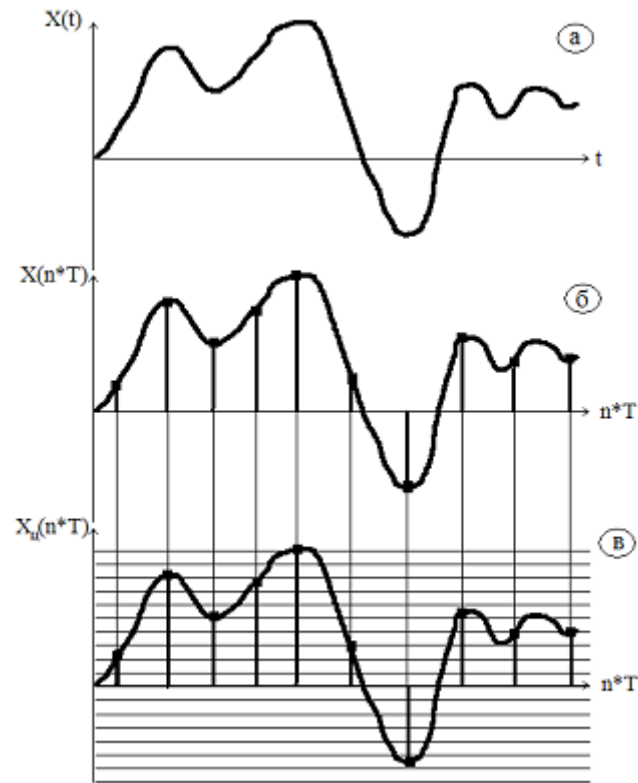


Рис. 1.4.1 Основні типи сигналів

Джерело: [22].

При аналізі дискретних сигналів зручно користуватися нормованим часом $\hat{t} = t/T$, інакше $\hat{t} = t/T = n \cdot T/T = n$, тобто. номер відліку дискретного сигналу може інтерпретуватися як нормований час. При переході до нормованого часу дискретний сигнал можна розглядати як функцію цілісної змінної n . Тобто далі $X(n)$ рівнозначно $X(n \cdot T)$.

За теоремою Котельникова максимальна частота аналогового сигналу f_b має бути більше $f_d/2$. Тому всі дискретні сигнали доцільно розглядати діапазоні $[0, f_d/2]$ [1]. При цьому вводиться поняття нормованої частоти

$$\hat{f} = f/f_{\Delta} = f \cdot T \text{ або } \hat{\omega} = \omega/f_{\Delta} = \omega \cdot T$$

та розглядати дискретний сигнал \hat{f} в області

$$\hat{f} \in [0; 0,5] \text{ або } \hat{\omega} \in [0; 0,5]$$

Застосування нормованої частоти дозволяє досліджувати частотні характеристики дискретних систем та спектри дискретних сигналів у єдиній смузі частот. Для ЦОС важливі не абсолютні значення частоти сигналу і частоти дискретизації, а їх відношення, тобто. значення нормованої частоти [23].

Наприклад для 2х дискретних косінусоїд:

$$X_1(n) = \cos(2\pi f_1 \cdot T_1 \cdot n) = \cos(2\pi \frac{f_1}{f_{\ddot{A}_1}} \cdot n)$$

$$X_2(n) = \cos(2\pi f_2 \cdot T_2 \cdot n) = \cos(2\pi \frac{f_2}{f_{\ddot{A}_2}} \cdot n)$$

$$f_1 = 2\text{Гц}, f_{\ddot{A}_1} = 16\text{Гц}; f_2 = 5\text{кГц}, f_{\ddot{A}_2} = 40\text{кГц}$$

В підсумку:

$$X_1(n) = \cos(2\pi \frac{2}{16} \cdot n) = \cos(\frac{\pi}{4} \cdot n)$$

$$X_2(n) = \cos(2\pi \frac{5000}{40000} \cdot n) = \cos(\frac{\pi}{4} \cdot n)$$

Дискретні сигнали їх однакові, оскільки рівні їх нормовані частоти, вони, лише, по-різному будуть у часі. У загальному випадку дискретна косинусоїда в області нормованих частот має вигляд:

$$X(n) = A \cdot \cos(2\pi \hat{f} \cdot n) = A \cdot \cos(\hat{\omega} \cdot n)$$

Процес ЦОС включає 3 етапи:

- Формувач послідовності чисел $X(n * T)$, з аналогового сигналу $x(t)$;
- Перетворення послідовності $X(n * T)$, за заданим алгоритмом цифровим процесором обробки сигналів у нову, вихідну числову послідовність $y(n * T)$;
- Формування результуючого аналогового сигналу $y(t)$ із послідовності $y(n * T)$;

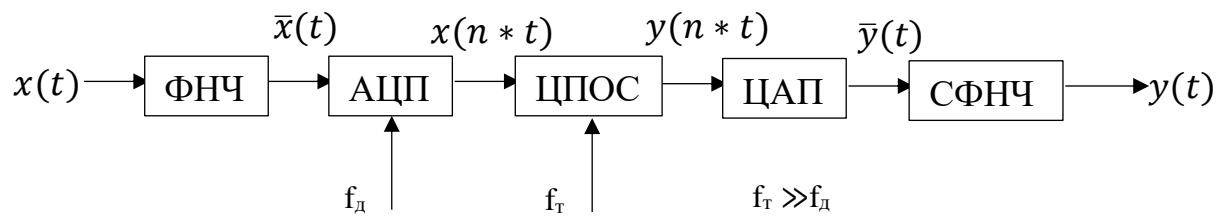


Рис. 1.4.2 Узагальнена схема ЦОС

Джерело: сформовано автором.

Схема складається із блоків:

- 1) аналоговий фільтр нижніх частот (ФНЧ);
- 2) АЦП;
- 3) Цифровий процесор обробки сигналів (ЦПОС);
- 4) ЦАП;
- 5) Згладжуючий фільтр НЧ (СФНЧ).

Приклад. Проходження сигналу через узагальнену схему ЦОС представлений Рис. 1.4.3.

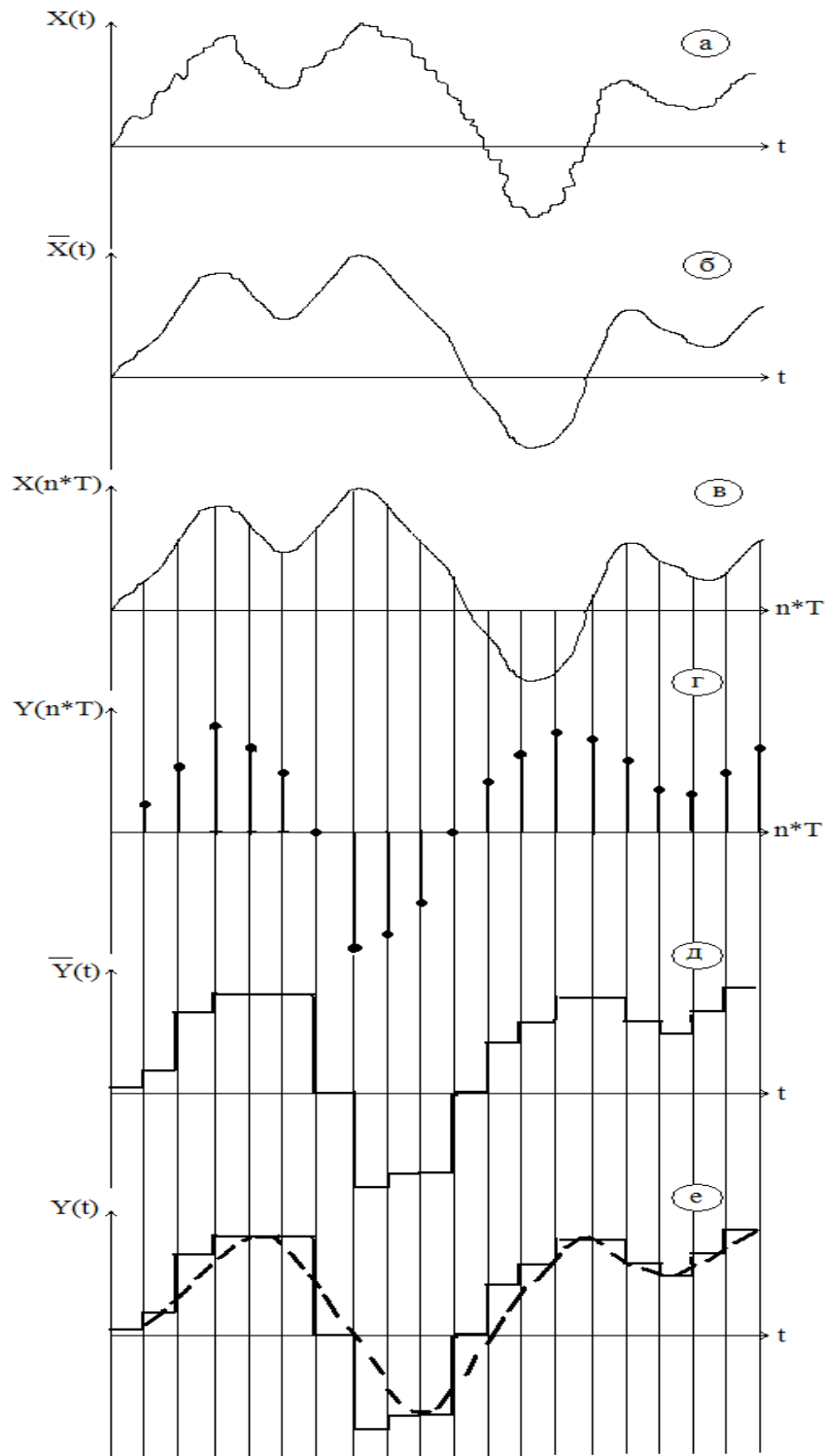


Рис. 1.4.3 Приклад тимчасових діаграм на входах та виходах елементів узагальненої схеми ЦОС.

Джерело: [22].

Частота дискретизації f_d вибирається: $f_d \geq 2f_b$. Реальні сигнали не задовольняють цю вимогу [23]. Тому ставлять ФНЧ, що обмежує спектр. Так як енергія реальних сигналів зменшується зі зростанням частоти, то спотворення ФНЧ, що вносяться, незначні (Рис. 1.4.3 а і б), а також спектри нижче:

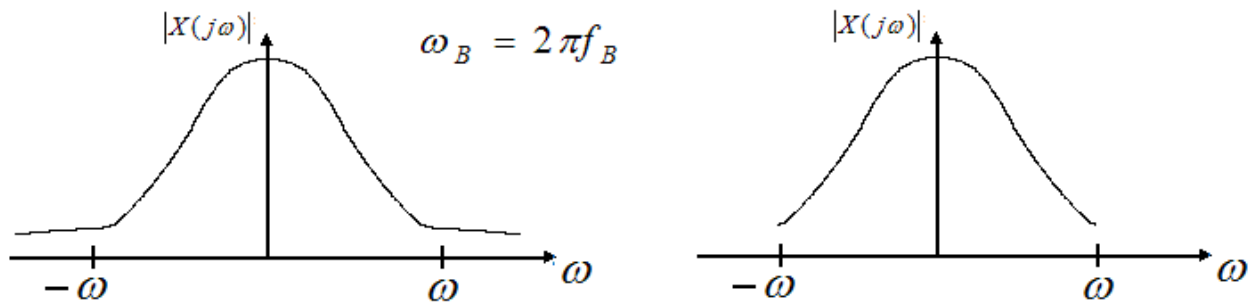


Рис. 1.4.3 Спектри сигналів до фільтра та після.

Джерело: [22].

Рівні квантування (Рис. 1.4.1 в.) кодується двійковими числами, тому на виході АЦП маємо послідовність двійкових чисел $x_{ц}(n \cdot T)$. Цифровий сигнал $x_{ц}(n \cdot T)$ відрізняється від дискретного $x(n \cdot T)$. на величину:

$$E_{кв}(n \cdot T) = x_{ц}(n \cdot T) - x(n \cdot T) - \text{Помилка квантування.}$$

Для її зниження необхідно збільшувати кількість рівнів квантування. Дискретний сигнал $x(n \cdot T)$. надходить у ЦПОС, який за алгоритмом кожному вхідному звіту $x(n \cdot T)$ ставить у однозначну відповідність вихідний сигнал $y(n \cdot T)$. При цьому кількість операцій (множень, додавань, інверсій, пересилань тощо) для отримання одного відліку $y(n \cdot T)$. може обчислюватися скільки завгодно [23]. Однак період обробки (час обчислення) не може бути більшим за період дискретизації T . І це можливо лише, якщо тактова частота f_T ЦПОС $\gg f_d$.

Далі ЦАП формує ступінчастий аналоговий сигнал $\tilde{y}(t)$, сходи згладжуються фільтром, отримуючи аналоговий $y(t)$.

1.5 Переваги ЦОІ

Під сигналом ми розуміємо будь яку змінну, яка передає або містить деякий вид інформації, яку можна, наприклад, переносити, виводити на екран або виконувати деякі дії [19]. Особливий інтерес представляють такі типи сигналів:

- 1) мова, з якою ми маємо діло, наприклад при розмові по телефону, прослуховування радіо і в повсякденному житті;
- 2) біомедицинські сигнали, такі як електроенцефалограма(сигнали мозку);
- 3) звуки і музика, подібні до тих, які відтворює програвач компакт-дисків;
- 4) відео- і телезображення;
- 5) сигнали радарів, які досліджують заданий діапазон і пеленгують віддалені цілі;

Більшість сигналів, які існують в природі, являються по своїй формі аналоговими, що часто означає неперервні зміни в часі, і тими які описують зміни фізичних величин(наприклад звукові хвилі). Сигнали, які застосовують в ЦОС, зазвичай виходять з аналогових сигналів, дискретизованих через однакові інтервали часу і перетворені в цифровий вигляд [19].

Обробка цифрового сигналу зазвичай потрібна для усунення інтерференції або шуму, отримання спектру даних або перетворення сигналу в більш зручну форму. Сьогодні ЦОС використовується в багатьох областях, де раніше використовувались аналогові методи, крім того, появились повністю нові області застосування, де було важко або неможливо користуватись аналоговими приладами [19].

Переваги ЦОС:

- 1) точність, яка визначається тільки числом задіяних бітів;
- 2) досконала відтворюваність. Можна ідентично відтворити кожен елемент, оскільки відсутні відхилення, обумовлені стійкістю відповідних складових. Наприклад, використовуючи методи ЦОС, цифрові записи можна копіювати і відтворювати багаторазово без погіршення якості сигналу;

3) гнучкість. Системи ЦОС можна запрограмувати та перепрограмувати на виконання різних функцій без зміни обладнання;

4) продуктивність. ЦОС можна використовувати для виконання функціях, які неможливо при аналоговій обробці сигналів. Наприклад, можна отримати лінійну фазову характеристику і реалізувати складні алгоритми адаптивної фільтрації [19].

Недоліки ЦОС:

1) швидкість і затрати. Проекти ЦОС можуть бути дорогими, особливо при великій ширині смуги сигналу. В теперішній час швидкісні АЦП/ЦАП або дорогі, або не є достатньо розширені для смуги великої ширини. На даний момент для обробки сигналів в мегагерцевому діапазоні можна використовувати тільки спеціальні інтегральні схеми, але вони достатньо дорогі. Більше того більшість ЦОС не ще не мають достатньої швидкості і можуть обробляти лише сигнали зі смуги середньої ширини;

2) час на розробку. Поки спеціаліст не знайомий з методами ЦОС, він не буде мати необхідні ресурси(програмні пакети і т.д.), розробка засобів ЦОС буде займати багато часу, а в деяких випадках може бути неможливою;

3) проблеми кінцевої розрядності. В реальних ситуаціях економічне міркування прописують використання в алгоритмах ЦОС обмежену кількість бітів. Що може в деяких випадках приводити до зниження якості роботи системи.

ЦОС – це одна з галузей сучасної електроніки, яка дуже швидко розвивається, використовується до будь-якої області, де інформація міститься в цифровому вигляді або контролюється цифровим процесором [19].

Області використання:

- 1) обробка зображень(розпізнавання зразків, машинне бачення, анімація);
- 2) інструментальні засоби/контроль(спектральний аналіз, зниження шуму, стиснення інформації);
- 3) мова/аудіо(синтез мови, цифрові аудіосистеми, озвучення тексту);
- 4) воєнні цілі(робота з радарями, безпечний зв'язок);
- 5) телекомунікація(передача даних, адаптивне вирівнювання);

- 6) біомедицина;
- 7) споживчі цілі.

Існує декілька алгоритмів ЦОС, ще більша кількість знаходиться в стадії розробки [19]. Проте для всіх цих алгоритмів, включаючи найважчі, необхідні основні операції:

- 1) Згортка;
- 2) Кореляція;
- 3) Фільтрація;
- 4) Перетворення.

Згортка

Згортка – це одна з найбільш використовуваних операцій в ЦОС. Наприклад це основна операція цифрової фільтрації. Для двох даних послідовностей кінцевої довжини $x(k)$ та $h(k)$ з довжиною N_1 та N_2 відповідна лінійна згортка матиме вигляд

$$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k),$$

$$n = 0, 1, \dots, (M-1), \text{ де } M = N_1 + N_2 - 1$$

Кореляція

Існує дві форми кореляції: автокореляція і взаємна кореляція. Взаємно-кореляційна функція – це показник схожості або спільних властивостей двох сигналів. В число областей застосування ВКФ входять: взаємний спектральний аналіз, відновлення сигналів прихованих в шумі наприклад, відновлення відповідних сигналів радара. Автокореляційна функція передбачає існування тільки одного сигналу і дає інформацію про структуру сигналу і його поведінку в часі. Це частковий випадок ВКФ, і їх сфери використання схожі [19].

Для двох даних послідовностей кінцевої довжини $x(k)$ та $y(k)$ з довжиною N і нульовими середніми значеннями оцінка їх взаємної кореляції рівна

$$p_{xy}(n) = \frac{r_{xy}(n)}{(r_{xx}(0)r_{yy}(0))^{1/2}}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

де, $r_{xy}(n)$ – оцінка взаємної коваріантності, визначається як

$$r_{xy}(n) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-n-1} x(k)y(k+n) & n = 0, 1, 2, \dots \\ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N+n-1} x(k-n)y(k) & n = 0, -1, -2, \dots \end{cases}$$

$$r_{xx}(0) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} [x(k)]^2 \quad r_{yy}(0) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} [y(k)]^2$$

Оцінка автокореляції $p_{xx}(n)$ послідовності $x(k)$ з довжиною N та нульовим середнім значенням задається

$$p_{xy}(n) = \frac{r_{xx}(n)}{r_{xx}(0)}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

де, $r_{xx}(n)$ – оцінка автоковаріантності, яка визначається як

$$r_{xx}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-n-1} x(k)x(k+n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Фільтрація

Рівняння для фільтрації з кінцевою імпульсною характеристикою має вигляд

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)x(n-k),$$

Де $x(k)$ і $y(k)$ відповідно вхід і вихід фільтра, а $h(k), k = 0, 1, \dots, N-1$ коефіцієнти фільтра.

Дискретне перетворення Фур'є

Дискретне перетворення дозволяє обробляти сигнали з дискретним часом в частотних координатах або переходити від описання з часової до частотної області [19]. Для отримання спектру сигнал розкладається на частотні складові з допомогою дискретного перетворення. Перехід часових координат до частотних

необхідний в багатьох додатках ЦОС. Дискретне перетворення Фур'є визначається наступним чином:

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)W^{kn}, \text{ де } W = \exp\left(-\frac{2\pi i}{N}\right)$$

Висновки до РОЗДІЛУ 1

Детальний розгляд поділу цифрової обробки інформації, дозволив зрозуміти процес формування сигналів та типи перетворювачів за допомогою, яких їх можна отримати. Особливу увагу було приділено терміну «сигнал», його визначенню та представленню у різних формах, зокрема в математичній. В даному розділі було розглянута класифікація сигналів, а саме:

1) цифровий, що є квантованим за своїми значеннями й дискретним за аргументом;

2) дискретний, який за своїми значеннями також є неперервною функцією, але визначеною тільки за дискретними значеннями аргументу;

3) аналоговий, що є неперервною функцією неперервного аргументу, тобто визначений для будь-якого значення аргументів.

Зупинились на моделях сигналів невинуватих й винуватих, в залежності від можливості точного передбачення їхніх значень у будь-які моменти часу та представлення їхніх графіків з завадами та без для кращого розуміння.

РОЗДІЛ 2. Методи цифрової обробки сигналів

2.1 Перетворення Фур'є. Спектр його сигналів

Для правильної роботи кожної технічної системи обов'язковими є отримання, обмін та обробка інформації. Як правило у більшості системах, таких як інформаційні системи, системи автоматичного управління інформація передається у вигляді сигналу. Матеріальні носії, у яких можна змінити один або кілька інформативних параметрів будуть вважатися сигналом. З бурхливим прогресом обчислювальної техніки набули популярності методи цифрової обробки інформації. Особливе застосування вони отримали в багатьох галузях наукових досліджень. Цифрова обробка сигналів – це область обчислювальної техніки, яка має динамічний розвиток і охоплення як технічних, так і програмних засобів [40].

Теорія оптимального прийому сигналів, теорія розпізнавання образів та теорія інформації є спорідненими областями до цифрової обробки сигналів. Причому основним завданням теорії інформації є виділення сигналу на тлі шумів і завад різної фізичної природи, для теорії оптимального прийому сигналів і теорії розпізнавання образів – автоматичне розпізнавання, тобто класифікація та ідентифікація сигналу. У теорії інформації сигнал – це матеріальний носій інформації. У цифровій обробці сигналів під сигналом розглядається його математичний опис, тобто деяка речова функція, яка містить інформацію, яка може бути визначена на неперервному або дискретному просторі зміни часу або просторових координат. Тобто під системами ЦОС розуміють комплекс алгоритмічних, апаратних і програмних засобів.

В більшості випадках, системи містять спеціалізовані технічні засоби для первинної та вторинної обробки сигналів. Засоби первинної обробки призначені для обробки вхідних сигналів, які спостерігаються в загальному випадку на тлі випадкових шумів і завад різної фізичної природи. Вони представлені у вигляді дискретних цифрових відліків, з метою виявлення і виділення корисного сигналу

і оцінки характеристик виявленого сигналу [13]. Отримана в результаті попередньої обробки корисна інформація надходить в систему вторинної обробки для класифікації, архівування, структурного аналізу і т.д. Потім сигнал аналізується в часовій або частотній областях. Аналіз сигналу у часовій області дозволяє оцінити зміну параметрів досліджуваного об'єкта в часі. Частотний аналіз дає уявлення про частотний діапазон складових досліджуваного сигналу. Основним математичним апаратом дослідження сигналів цифровими методами є дискретне перетворення Фур'є і вейвлет-перетворення.

Використання цифрової обробки сигналів у багатьох областях прискорилося за допомогою відкриття в 1965 р. ефективних алгоритмів для обчислень перетворень Фур'є. Ці алгоритми стали відомі як швидке перетворення Фур'є, їх можливості були значними з декількох точок зору. Багато алгоритмів обробки сигналів, які були отримані на цифрових ЕОМ, вимагали часу обробки на декілька порядків більше, ніж реальний час [2]. Це було пов'язане з тим, що спектральний аналіз був важливою складовою частиною обробки сигналів, а ефективні засоби для його виконання не були відомі. Алгоритм ШПФ допоміг зменшити час обчислення перетворення Фур'є на кілька порядків, що дозволило створити дуже складні алгоритми обробки сигналів у реальному часі. Крім того, з урахуванням можливостей дійсної реалізації алгоритму швидкого перетворення Фур'є на спеціалізованому цифровому пристрої, багато алгоритмів обробки сигналів, що були раніше непрактичними, стали знаходити втілення на спеціалізованих пристроях.

Нехай $x(t)$ – неперервний сигнал, який відповідає умові $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$. В цьому випадку сигнал $x(t)$ можна подати у вигляді інтегрального розкладу за системою комплексних синусоїдальних функцій – інтеграла Фур'є:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df \quad (2.1.1)$$

де $X(\omega)$ – комплексна функція, яка визначає амплітуду та фазову затримку комплексної синусоїди з частотою ω : $e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t)$. У загальному

випадку ця функція визначається на всій осі частот $\omega \in [-\infty, \infty]$ і називається Фур'є спектром сигналу $x(t)$.

У свою чергу Фур'є спектр $X(\omega)$ можна отримати з вихідного сигналу $x(t)$ за допомогою співвідношення:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \quad (2.1.2)$$

Співвідношення (2.1.1), (2.1.2) являють собою пари інтегральних перетворень Фур'є, причому (2.1.1) – пряме перетворення Фур'є, (2.1.2) – обернене перетворення Фур'є.

Сигнал $x(t)$ і Фур'є-спектр $X(\omega)$ є двома взаємно однозначними характеристиками, перша – часове поданням сигналу, друга – частотне. Часове подання більш наочне та звичне для повсякденного сприйняття, частотне – менш наочне, проте корисне в математичному описі перетворень сигналів у лінійних системах з постійними параметрами [40].

Основні властивості Фур'є-спектра $X(\omega)$:

1. Функція $X(\omega)$ комплексна в загальному випадку:

$$X(\omega) = \operatorname{Re}X(\omega) + i\operatorname{Im}X(\omega) = |X(\omega)|e^{i\arg X(\omega)} = A(\omega)e^{i\Phi(\omega)}$$

Функція $A(\omega) = |X(\omega)|$ називається амплітудним спектром (іноді магнітудою спектра), вона визначає дійсну амплітуду синусоїди із частотою ω , що бере участь у формуванні сигналу. Функція

$$\Phi(\omega) = \arg X(\omega) = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}X(\omega)}{\operatorname{Re}X(\omega)}\right)$$

називається фазовим спектром, вона показує фазовий зсув, якому варто піддати комплексну синусоїду частоти ω перед підсумовуванням при відновленні вихідного сигналу;

2. Внаслідок дійсності сигналу $x(t)$ функція $X(\omega)$ має комплексноспряжену симетрію

$$X(\omega) = X^*(-\omega),$$

$$\operatorname{Re}X(\omega) = \operatorname{Re}X(-\omega) \quad \operatorname{Im}X(\omega) = -\operatorname{Im}X(-\omega)$$

$$|X(\omega)| = |X(-\omega)|, \quad \operatorname{Arg}X(\omega) = -\operatorname{Arg}X(-\omega)$$

3. Енергія спектру Фур'є обмежена та рівна енергії вихідного сигналу (рівність Парсеваля):

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} X^2(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt < \infty$$

У теорії неперервних лінійних систем з постійними параметрами широко використовується поняття перетворення Лапласа (s-перетворення)

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt \quad (2.1.3)$$

функції, визначеної на комплексній s-площині: $s = \vartheta + j\omega$. При цьому пряме перетворення Фур'є (2.1.1) може бути розглянутим як перетворення Лапласа, обчислене на уявній осі в s-площині:

$$X(\omega) = X(s = j\omega)$$

У зв'язку з цим, у літературі часто можна зустріти позначення для Фур'є-спектра – $X(j\omega)$, в якому є вказівка на те, що це спектр неперервного сигналу [2].

В теорії дискретних лінійних систем замість s-перетворення Лапласа широко використовується поняття Z-перетворення дискретного сигналу

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \quad (2.1.4)$$

Z-перетворення має сенс для тих значень комплексної змінної z, при яких ряд (2.1.4) збігається. Z-перетворення лінійне, завдяки чому воно успішно використовується при описі лінійних дискретних систем. Вихідна послідовність може бути відновлена за допомогою оберненого Z-перетворення

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz$$

де C – замкнутий контур, що охоплює всі особливі точки функції $X(z)z^{n-1}$

Спектром Фур'є дискретних сигналів послідовності $x(n)$ називають комплексну функцію $X(e^{j\omega})$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \quad (2.1.5)$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega \quad (2.1.6)$$

Вираз (2.1.6) показує, як вихідна послідовність може бути представлена дискретизованими комплексними синусоїдами різних частот, узятих з вагами $X(e^{j\omega})$. Порівняння виразу (2.1.5) з (2.1.4) показує, що спектр Фур'є $X(e^{j\omega})$ є просто Z -перетворенням, обчисленим на одиничному колі $Z = e^{j\omega}$ в комплексній Z -площині. Властивості спектра Фур'є дискретних сигналів подібні до властивостей спектра Фур'є неперервних сигналів [40]. Однак є принципова відмінність. Спектр $X(e^{j\omega})$ періодичний за частотою з періодом 2π . Тому його значення розглядають на одному періоді – або $[-\pi, \pi]$ або $[0, 2\pi]$.

2.2 Дискретне Перетворення Фур'є

Дискретне перетворення Фур'є є базовим алгоритмом цифрової обробки сигналів у частотній області. Завдяки наявності ефективних алгоритмів його обчислення ДПФ широко використовується для цілей цифрової фільтрації та спектрально-кореляційного аналізу сигналів [2]. Для сигналу, заданого у вигляді дискретної послідовності $S(n)$, пряме й обернене дискретне перетворення Фур'є мають вигляд:

$$S(k) = \sum_{n=0}^{N-1} S(n) \exp \left[-j \frac{2\pi nk}{N} \right], \quad k = 0, \overline{N-1};$$

$$S(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S(k) \exp \left[j \frac{2\pi nk}{N} \right], \quad k = 0, \overline{N-1};$$

де k – номер гармоніки із частотою f_k , N – обсяг вибірки. $S(k)$, визначений як комплексний спектр сигналу, можна подати у вигляді

$$S(k) = A(k) - jB(k) = C(k)e^{-j\varphi(k)}$$

де амплітудно-частотна і фазочастотна характеристика сигналу відповідно визначається

$$C(k) = \sqrt{A^2(k) + B^2(k)};$$

$$\varphi(k) = \operatorname{arctg} \frac{B(k)}{A(k)} + 2\pi n.$$

Обернене ДПФ можна також виконати за допомогою співвідношення

$$S(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} C(k) \cos \left[\varphi(k) + \frac{2\pi}{N} kn \right], n = 0, \overline{N-1}. \quad (2.2.1)$$

Виходячи з (2.2.1), при використанні тільки інформації про його ФЧХ оцінювання форми сигналу можна зробити за допомогою формули

$$\hat{S}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \cos \left(\varphi(k) + \frac{2\pi}{N} \cdot n \cdot k \right).$$

Якість відновлення сигналів можна поліпшити, додатково використовуючи в (2.2.1) різні вагові функції, наприклад, трикутну, експонентну й ін [11]. Тоді вираз (2.2.1) можна переписати в такій формі

$$\hat{S}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W(k) \cdot \cos \left(\varphi(k) + \frac{2\pi}{N} \cdot n \cdot k \right),$$

де $W(k)$ – прийнята вагова функція.

Похибку, що виникає при відновленні сигналу, можна оцінити за середнім значенням квадрата похибки:

$$\varepsilon^2 = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} (\hat{S}(n) - S(n))^2}{\sum_{n=0}^{N-1} S^2(n)}.$$

Іншою відомою формою запису ДПФ є рівняння:

$$F(\Delta\xi) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k\Delta x) \delta(x - \Delta * x) e^{-j2\pi k \Delta\xi \Delta x} = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-j2\pi \frac{2x_{\max} * k}{N} * \frac{1}{2x_{\max} n}}$$

$$= k * \sum_{k=0}^{N-1} x_k * e^{-j \frac{2\pi}{N} kn},$$

$$\text{де } \begin{cases} \frac{2x_{\max}}{N} = \Delta x \\ \frac{1}{2x_{\max}} = \Delta \xi \end{cases}$$

Тоді отримаємо, що

$$\Delta x * \Delta \xi = \frac{1}{N}.$$

Подібним способом можна отримати і для оберненого перетворення

$$x_m = k \sum F_n * e^{j\frac{2\pi}{N}nm}, k = \frac{1}{\sqrt{N}}.$$

Таким чином, в матричній формі:

$$F = \frac{1}{\sqrt{N}} E_N X,$$

$$E_N = \begin{pmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & \dots & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & \dots & W^{N-1} \\ W^0 & W^2 & W^4 & \dots & W^{2(N-1)} \\ W^0 & W^3 & W^6 & \dots & W^{3(N-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ W^0 & W^{N-1} & W^{2(N-1)} & \dots & W^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix}.$$

де $W^k = e^{-j2\pi k}/N$, а сама матриця ядра ДПФ називається матрицею дискретних експоненціальних функцій. При цьому рядки матриці визначають набір ортогональних функцій або базис розкладання [13].

При виконанні перетворення Фур'є рядки матриці ядра задають набір ортогональних функцій, за якими виконується розкладання вихідного сигналу. Кожний елемент вектора результату визначає внесок відповідної ортогональної функції у формування вихідного сигналу [11]. Для перетворення Фур'є, як і для будь-якого ортогонального перетворення, визначник матриці ядра перетворення E_N відмінний від "0", що дозволяє виконати як пряме, так і обернене перетворення

$$\begin{cases} F = \frac{1}{\sqrt{N}} E_N X \\ X = \frac{1}{\sqrt{N}} E_N^{-1} F \end{cases},$$

Оскільки

$$\frac{1}{N} E_N * E_N^{-1} = \frac{1}{N} I_N = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Обчислення перетворень Фур'є вимагає приблизно N^2 числа множень і обчислень синусів. Існує спосіб виконати ці перетворення значно швидше: приблизно за $N \cdot \log_2 N$ операцій множення. Цей спосіб називається швидким перетворенням Фур'є [40]. Алгоритм ШПФ – це спосіб швидкого обчислення ДПФ $X(jk) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j(\frac{2\pi}{N})kn}$, що дозволяє усунути притаманну ДПФ надмірність. Дані перетворення ґрунтуються на властивостях комплексної експоненти $e^{-j(\frac{2\pi}{N})kn}$, для зручності позначають W_N^{kn}

$$(W_N^{kn} = e^{-j(2\pi/n)kn}),$$

її симетрії

$$W_N^{(N-k)n} = W_N^{(N-n)k} = (W_N^{kn})^*$$

і періодичності

$$W_N^{(N+k)(N+n)} = W_N^{kn}$$

з періодом, який дорівнює довжині оброблюваної реалізації сигналу N (числу точок ШПФ) [2]. Відповідно до останньої властивості експоненті $W_N^{pkn} = W_{N/p}^{kn}$ відповідає період N/p , де p – цілі числа, на які ділиться N . Використання даних властивостей в алгоритмах ШПФ дозволяє уникнути великого числа повторюваних при обчисленні ДПФ операцій.

У результаті швидкодія ШПФ може, в залежності від N , в сотні разів перевершувати швидкодію стандартного алгоритму. При цьому слід підкреслити, що алгоритм ШПФ є точним. Він навіть точніший стандартного, тому що, скорочує число операцій, він веде до менших помилок округлення.

Проте у багатьох алгоритмах ШПФ є особливість: вони здатні працювати тільки тоді, коли довжина аналізованого сигналу N є степенем двійки. Зазвичай, це не є великою проблемою, оскільки аналізований сигнал завжди можна

доповнити нулями до необхідного розміру. Число N називається розміром або довжиною ШПФ.

Для зображення, що являють собою двовимірний сигнал, спектром є також двовимірний сигнал. Базисні функції перетворення Фур'є мають вигляд добутків

$$h_{k_1, k_2}^{\sin}(n_1, n_2) = \sin \frac{2\pi k_1 n_1}{N_1} \cdot \sin \frac{2\pi k_2 n_2}{N_2},$$

$$h_{k_1, k_2}^{\cos}(n_1, n_2) = \cos \frac{2\pi k_1 n_1}{N_1} \cdot \cos \frac{2\pi k_2 n_2}{N_2},$$

де $N_{1 \times} \times N_2$ – розмір вихідного сигналу, він же – розмір спектра, k_1, k_2 – це номери базисних функцій (номери коефіцієнтів двовимірного ДПФ, при яких ці функції знаходяться). Оскільки розмір спектра дорівнює розміру вихідного сигналу, то $k_1 = 0, \dots, N_1 - 1; k_2 = 0, \dots, N_2 - 1, n_1, n_2$ – змінні аргумента базисних функцій. Оскільки область визначення базисних функцій збігається з областю визначення сигналу, то $n_1 = 0, \dots, N_1 - 1; n_2 = 0, \dots, N_2 - 1$.

Двовимірне ДПФ визначається такими формулами

$$X[k_1, k_2] = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} x[n_1, n_2] \cdot e^{-jn_1 k_1 (2\pi/N_1)} e^{-jn_2 k_2 (2\pi/N_2)};$$

$$x[n_1, n_2] = \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} X[k_1, k_2] \cdot e^{jn_1 k_1 (2\pi/N_1)} e^{jn_2 k_2 (2\pi/N_2)},$$

де $x[n_1, n_2]$ – вихідний сигнал, $X[k_1, k_2]$ – спектр вихідного сигналу.

2.3 Вейвлети. Основні властивості

Вейвлет-перетворення(ВП) одномірного сигналу – це його представлення в вигляді узагальненого ряду або інтегралу Фур'є по системі базисних функцій

$$\Psi_{ab}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \Psi \left(\frac{t-b}{a} \right) \quad (2.3.1)$$

побудованих із материнського(початкового) вейвлета $\Psi(t)$, який володіє певними властивостями за рахунок операцій зсуву в часі (b) і зміни часового

масштабу (a) (Рис. 2.3.1). Множник $\frac{1}{\sqrt{a}}$ забезпечує незалежність норми цих функцій від масштабуючого числа a [13].

Для заданих значень параметрів a і b функція $\Psi_{ab}(t)$ є вейвлет, породжений материнським вейвлетом $\Psi(t)$.

На Рис.2.3.1 в якості прикладу показані вейвлет «мексиканський капелюх» (a) і модуль його спектральної площини (б). Малі значення a відповідають малому масштабу $\Psi_{ab}(t)$ або високим частотам ($\omega \sim 1/a$), більші параметри a – більшому масштабу $\Psi_{ab}(t)$, тобто розтягненню материнського вейвлета $\Psi(t)$ і стисненню його спектру.

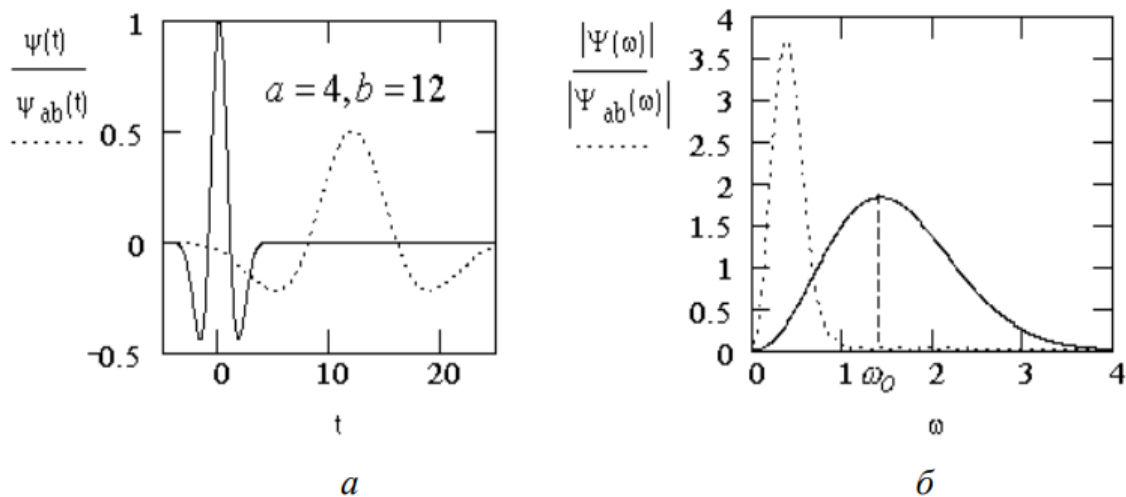


Рис. 2.3.1 Вейвлет «мексиканський капелюх»

Джерело: [13].

Таким чином в частотній області спектри вейвлетів схожі на сплески (хвилі) з піком на частоті ω_0 і полосою $\Delta\omega$, тобто мають вигляд полосового фільтру; при цьому ω_0 і $\Delta\omega$ зменшуються з ростом параметра a . Відповідно вейвлети локалізовані як в часовій так і в частотній областях [25].

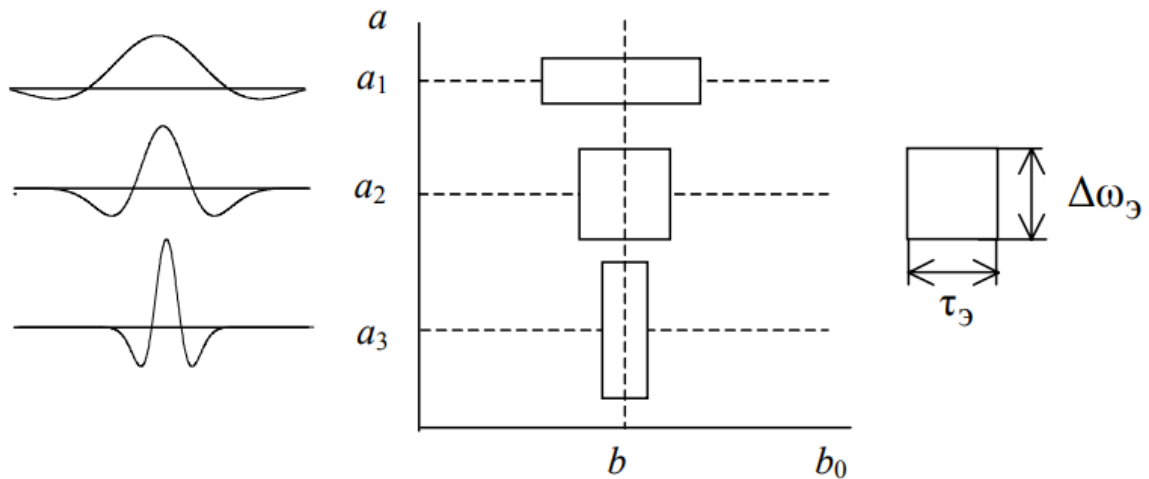


Рис. 2.3.2 Спектри вейвлетів в частотній області

Джерело: [13].

Відповідно до принципу невизначеності добуток ефективної довжини (τ_e) і ефективної ширини ($\Delta\omega_e$) функції $\Psi_{ab}(t)$ (площа прямокутників на Рис. 2.3.2) залишається незмінною. Крім того, через масштабування і часового зсуву ($b/a = \Delta = const$) зберігається відносна «щільність» розташування базисних функцій по осі t . Слід зазначити, що спектральне подання (образ) вейвлетів є аналогічним заданню вікна у віконному перетворенні Фур'є [3]. Але відмінність полягає в тому, що властивості вікна (його ширина і переміщення по частоті) притаманні самим вейвлетам. Це служить передумовою їх адаптації до сигналів, що подаються сукупністю вейвлетів. Тому неважко зрозуміти, що з допомогою вейвлетів можна здійснити аналіз і синтез локальної особливості будь-якого сигналу $S(t)$ (функції $S(x)$).

В якості базисних функцій, які утворюють ортогональний базис, можна використовувати широкий набір вейвлетів. Для практичного використання важливо знати ознаки, які обов'язково повинна мати вихідна функція, щоб стати вейвлетом [4].

Обмеженість. Квадрат норми функцій повинен бути кінцевим:

$$\|\Psi\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(t)|^2 dt < \infty$$

Локалізація. Вейвлет-перетворення навідміну від перетворень Фур'є використовує локалізовану вихідну функцію і по часу і по частоті. Для цього достатньо щоб виконувалась умова:

$$|\Psi(t)| \leq C(1 + |t|)^{-1-\varepsilon} \text{ і } |S_{\Psi}(\omega)| \leq C(1 + |\omega|)^{-1-\varepsilon}, \text{ при } \varepsilon > 0$$

Наприклад, дельта-функція $\delta(t)$ і гармонійна функції не задовольняють необхідній умові одночасної локалізації в часовій і частотній областях.

Нульове середнє. Графік вихідної функції повинен осилювати (бути знаковмінним) навколо нуля на осі часу і мати нульову площу

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(t) dt = 0$$

З цієї умови стає зрозумілим вибір назви «вейвлет» - маленька хвиля. Рівність нулю площі функції $\Psi(t)$, тобто нульового моменту, призводить до того, що Фур'є-перетворення $S_{\Psi}(\omega)$ цієї функції дорівнює нулю при $\omega = 0$ і має вигляд смугового фільтра. При різних значеннях a це буде набір смугових фільтрів. Часто для додатків буває необхідно, щоб не тільки нульовий, але і всі перші n моментів були рівні нулю [15].

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^n \Psi(t) dt = 0$$

Вейвлети n -го порядку дозволяють аналізувати більш тонку (високочастотну) структуру сигналу, подавляючи повільно його складові, які змінюються [24].

Автомодельність. Характерною ознакою ВП є його самоподібність. Всі вейвлети конкретного сімейства $\Psi_{ab}(t)$ мають те саме число осциляцій, що і материнський вейвлет $\Psi(t)$, оскільки отримані з нього за допомогою масштабних перетворень (a) і зсуву (b) [13].

Можна навести кілька яскравих представників сімейств вейвлет-функцій

Вейвлет	Аналітичний запис $\Psi(t)$	Спектральна щільність $\Psi(\omega)$
Дійсний неперервний базис		
Гаусові: - першого порядку або WAVE - вейвлет	$-t \exp(-t^2/2)$	$(i\omega)\sqrt{2\pi} \exp(-\omega^2/2)$
- другого порядку або МНАТ – вейвлет ("мексиканський капелюх" – mexican hat),	$(1 - t^2) \exp(-t^2/2)$	$(i\omega)^2 \sqrt{2\pi} \exp(-\omega^2/2)$
-n-го порядку	$(-1)^n \frac{d^n}{dt^n} [\exp(-t^2/2)]$	$(-1)^n (i\omega)^n \sqrt{2\pi} \exp(-\omega^2/2)$
DOG – difference of gaussians	$e^{-t^2/2} - 0,5e^{-t^2/8}$	$\sqrt{2\pi}(e^{-\omega^2/2} - e^{-2\omega^2})$
LP – Littlewood & Paley	$(\pi t)^{-1} (\sin 2\pi - \sin \pi t)$	$\begin{cases} (2\pi)^{-1/2}, \pi \leq t \leq 2\pi, \\ 0, \text{ в іншому випадку} \end{cases}$
Дійсний дискретний базис		
НААР – вейвлет	$\geq \begin{cases} 1, 0 \leq t \leq 1/2, \\ -1, 1/2 \leq t \leq 1, \\ 0, t < 0, t > 0. \end{cases}$	$i e^{i\omega/2} \frac{\sin^2 \omega/4}{\omega/4}$
ФНАТ – вейвлет, або "французький капелюх" (French hat – схожий на циліндр)	$\geq \begin{cases} 1, 0 \leq t \leq 1/3, \\ -1/2, 1/3 \leq t \leq 1, \\ 0, t > 1. \end{cases}$	$\frac{4 \sin^3 \omega/3}{3 \omega/3}$
Комплексні		
Морле (Morlet)	$e^{i\omega_0 t} e^{-t^2/2}$	$\sigma(\omega) \sqrt{2\pi} e^{-(\omega - \omega_0)^2/2}$
Пауля (Paul) (чим більший n, тим більше нульових моментів має вейвлет)	$\Gamma(n+1) \frac{i^n}{(1-n)^{n+1}}$	$\sigma(\omega) \sqrt{2\pi} (\omega)^n e^{-\omega}$

Рис. 2.3.3 Спектри вейвлетів в частотній області

Джерело: [13].

Вибір вейвлету за допомогою якого відбувається аналіз, як правило, визначається тим, яку інформацію необхідно витягти з сигналу. Кожен вейвлет має характерні особливості в часовій і в частотній області, тому іноді за допомогою різних вейвлетів можна повніше виявити і підкреслити ті чи інші властивості аналізованого сигналу [29].

2.4 Неперервне та дискретне вейвлет-перетворення. Властивості вейвлет-аналізу. ШВП

Побудуємо базис $\Psi_{ab}(t)$ з допомогою неперервних масштабних перетворень (a) і зсуву (b) материнського вейвлета $\Psi(t)$ з довільними значеннями базисних параметрів a і b (2.3.1).

Тоді по визначенню пряме(аналіз) і обернена(синтез) НВП сигналу $S(t)$ запишуться:

$$W_s(a, b) = (S(t), \Psi_{ab}(t)) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} S(t) \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \quad (2.4.1)$$

$$S(t) = \frac{1}{C_\Psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_s(a, b) \Psi_{ab}(t) \frac{dadb}{a^2},$$

де C_Ψ – нормувальний коефіцієнт

$$C_\Psi = \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(\omega)|^2 |\omega|^{-1} d\omega < \infty$$

$\Psi(\omega)$ – фур'є перетворення вейвлета $\Psi(t)$. Для ортонормованих вейвлетів $C_\Psi = 1$.

З (2.4.1) випливає, що вейвлет-спектр $W_s(a, b)$ на відміну від Фур'є-спектра (single spectrum) є функцією двох аргументів: перший аргумент a (часовий масштаб) аналогічний періоду осциляцій, тобто обернений частоті, а другий b – аналогічний зміщення сигналу по осі часу [3].

Слід зазначити, що $W_s(b, a_0)$ характеризує часову залежність (при $a = a_0$), тоді як залежності $W_s(b, a_0)$ можна поставити у відповідність частотну залежність (при $b = b_0$).

Якщо досліджуваний сигнал $S(t)$ є одиночним імпульсом тривалістю τ_u , зосереджений в околі $t = t_0$, то його вейвлет-спектр матиме найбільше значення в околі точки з координатами $a = \tau_u, b = t_0$.

Способи подання (візуалізації) $W_s(a, b)$ можуть бути різними. Спектр $W_s(a, b)$ є поверхнею в тривимірному просторі. Однак часто замість зображення

поверхні представляють її проекцію на площину ab з ізорівнями (Рис. 2.3.1), що дозволяють простежити зміну інтенсивності амплітуд ВП на різних масштабах (a) і в часі (b). Крім того, зображують картини ліній локальних екстремумів цих поверхонь, так званий скелетон (skeleton), який виявляє структуру сигналу, що аналізується [30].

Пряме ВП містить комбіновану інформацію про сигнал та вейвлет, який аналізується. Незважаючи на це, ВП дозволяє отримати об'єктивну інформацію про сигнал, бо деякі властивості ВП не залежать від вибору аналізуючого вейвлета. Незалежність від вейвлета робить ці прості властивості дуже важливими [13].

Лінійність. Вона впливає з скалярного добутку (16):

$$W[\alpha S_1(t) + \beta S_2(t)] = \alpha W_1(a, b) + \beta W_2(a, b).$$

Зміщення. Зсув сигналу у часовій області на b_0 веде до зміщення вейвлет-образу також на b_0 :

$$W[S(t - b_0)] = W[a, b - b_0]$$

Масштабування. Розтягування (стиснення) сигналу призводить також до розтягування (стиснення) його в області $W(a, b)$:

$$W[S(t/a_0)] = \frac{1}{a_0} W\left[\frac{a}{a_0}, \frac{b}{b_0}\right]$$

Диференціювання.

$$W[d_t^m S] = (-1)^m \int_{-\infty}^{\infty} S(t) d_t^m [\Psi_{ab}(t)] dt,$$

де $d_t^m = d^m[\dots]/dt^m, m \geq 1$. З цієї властивості випливає, що проігнорувати, наприклад, великомасштабні складові і проаналізувати особливості високого порядку або дрібномасштабні варіації сигналу $S(t)$ можна диференціюванням потрібного числа разів або вейвлета, або самого сигналу. Якщо врахувати, що частотний сигнал заданий цифровим рядом, а аналізуючий вейвлет-формулою, то це властивість дуже корисна [25].

Масштабно-часова локалізація. Вона обумовлена тим, що елементи базису ВП добре локалізовані і мають рухоме частотно-часове вікно.

За рахунок зміни масштабу (збільшення a призводить до звуження Фур'є-спектра функції $\Psi_{ab}(t)$) вейвлети здатні виявляти відмінність в характеристиках на різних шкалах (частотах), а за рахунок зсуву проаналізувати властивості сигналу в різних точках на всьому досліджуваному інтервалі. Тому при аналізі нестационарних сигналів за рахунок властивості локальності вейвлетів отримують перевагу перед перетворенням Фур'є, яке дає тільки глобальні відомості про частоти(масштаби) аналізуючого сигналу, так як використовується при цьому система функцій (комплексна експонента або синуси і косинуси) визначена на нескінченному інтервалі [29].

Тому не випадково багато дослідників називають вейвлет-аналіз «математичним мікроскопом». Ця назва відображає властивості методу зберігати дозвіл на різних масштабах. Параметр зсуву b фіксує точку фокусування мікроскопа, масштабний коефіцієнт a – збільшення, і, нарешті, вибором материнського вейвлета Ψ визначають оптичні якості мікроскопа. Здатність цього мікроскопа виявляти внутрішню структуру істотно неоднорідного процесу і вивчати його локальні властивості продемонстрована на багатьох прикладах [13].

Приклад. Сигнал $S(t)$ являє собою суму двох гармонійних коливань з кратними частотами:

```
function binar
t = 0:0.000001:0.0004;
A1 = 1; A2 = 1; F1 = 10000; F2 = 2*F1; a = 90; b = 90;
a1 = a*0.0174533; a2 = b*0.0174533;
s = A1*sin(2*pi*F1*t-a1) + A2*sin(2*pi*F2*t-a2);
figure (1); plot(t,s); axis([0 0.0004 -3 3]); grid on;
subplot(211), plot(t,s); title('Сигнал S(t)');
subplot(212), c = cwt(s,1:2:50,'mexh','abs1v');
title('Вейвлет-спектр сигналу S(t)');
xlabel('Часовий зсув, b');
ylabel('Часовий масштаб, a');
end
```

Лістинг 1 Сума двох гармонійних коливань

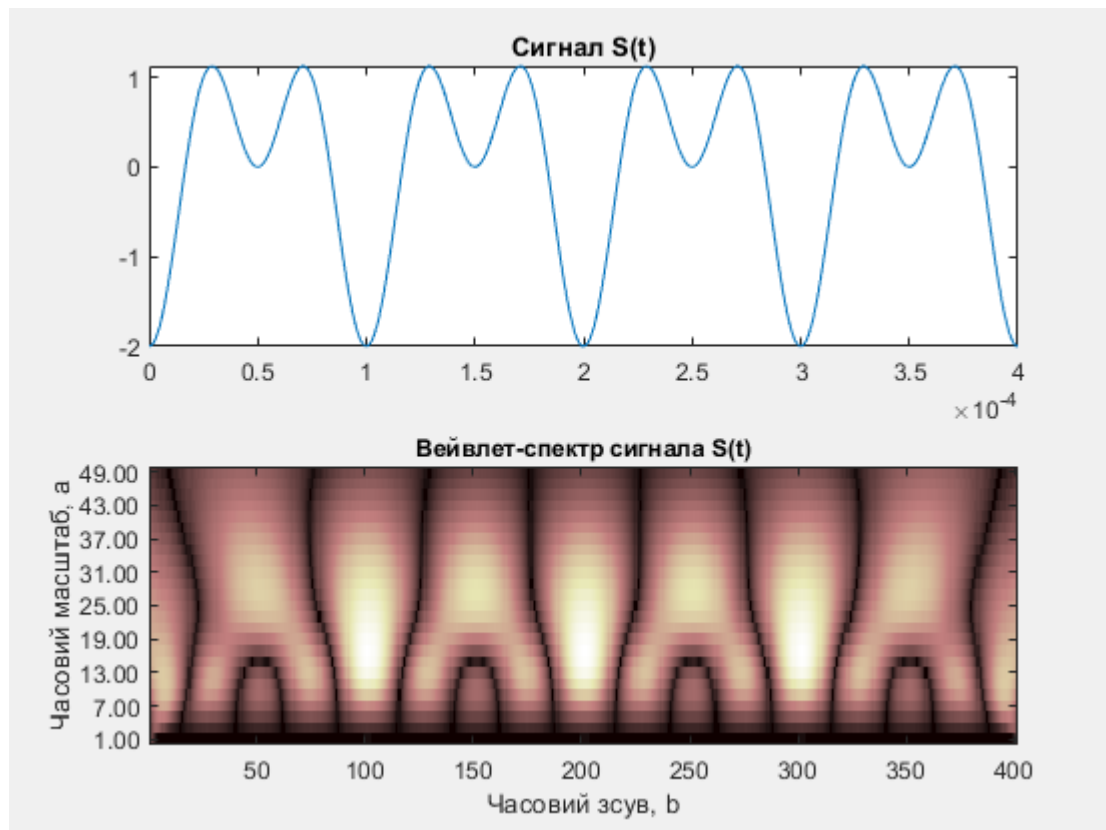


Рис. 2.4.1 Сума двох гармонійних коливань

Джерело: сформовано автором

У нижній частині спектрограми добре проглядається структура другої гармоніки, а з ростом a - першої; при цьому чітко фіксуються темним тоном переходи сигналу через нуль, а світлим тоном - екстремуми.

Приклад. Сигнал $x(t)$ є сумою бігармонічного сигналу $S(t)$ і білого гауссова шуму $n(t)$ з математичним очікуванням $m = 0$ і середньоквадратичним відхиленням g :

```

function Sum
t = 0:0.000001:0.001;
A1 = 1; A2 = 1; F1 = 10000; F2 = 2*F1; a = 90; b = 90;
a1 = a*0.0174533; a2 = b*0.0174533;
s1(1:200) = 0; t2 = 0.0002:0.000001:0.0007;
s2 = A1*sin(2*pi*F1*t2-a1) + A2*sin(2*pi*F2*t2-a2);
s3(1:300) = 0; s = [s1 s2 s3];
randn('state',0); g = 0.5; n = g *randn(size(t)); x = s+n;
figure (1); subplot(211), plot(t,x,'k');
title('Сигнал x(t)'); grid on;
gtext('F=10кГц, A1=A2=1В, g=0.5 В');
subplot(212), c = cwt(x,1:124,'mexh','absglb');
title('Вейвлет-спектр W(a,b)');
xlabel('Часовий зсув, b');
ylabel('Часовий масштаб, a');
end

```

Лістинг 2 Сума бігармонічного сигналу і білого гауссова шуму

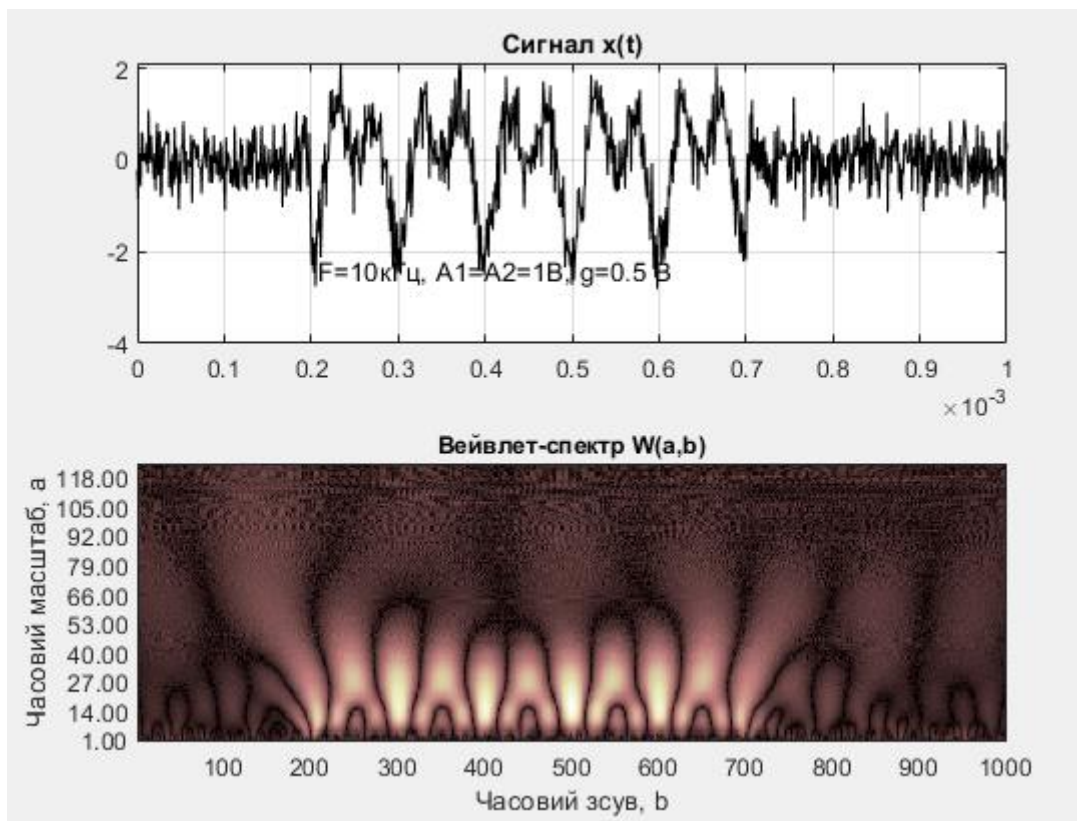


Рис. 2.4.2 Бігармонічний сигнал з шумом

Джерело: сформовано автором

У нижній частині спектрограми добре видна складна структура вейвлет-спектра шуму, з ростом параметра a проглядається структура другої гармоніки, а потім - першої; при цьому чітко фіксуються початок і кінець імпульсу. Як і

раніше темним тоном фіксуються переходи сигналу через нуль, а світлим тоном – екстремуми.

Приклад.

```
function |
t = 0:0.000001:0.000300; A1 = 2; F1 = 0; s1(1:75) = 0;
t2 = 0.000075:0.000001:0.000175; s2 = A1*cos(2*pi*F1*t2);
s3(1:125) = 0; s = [s1 s2 s3];
randn('state',0); g = 0.5; n = g*randn(size(t));
x = s + n; figure (1);
subplot(211), plot(t,x,'k'); title('Сигнал x(t)'); grid on;
subplot(212), c = cwt(x,1:27,'mexh','absglb');
title('Вейвлет-спектр');
xlabel('Часовий зсув, b');
ylabel('Часовий масштаб, a');
end
```

Лістинг 3 Висока роздільна здатність вейвлетів

У нижній частині спектрограми видно складну структуру спектра шуму, верхня частина спектрограми чітко показує наявність розривів. Цей приклад є наочним свідченням високої роздільної здатності вейвлетів при виявленні локальної (тонкої) структури сигналів.

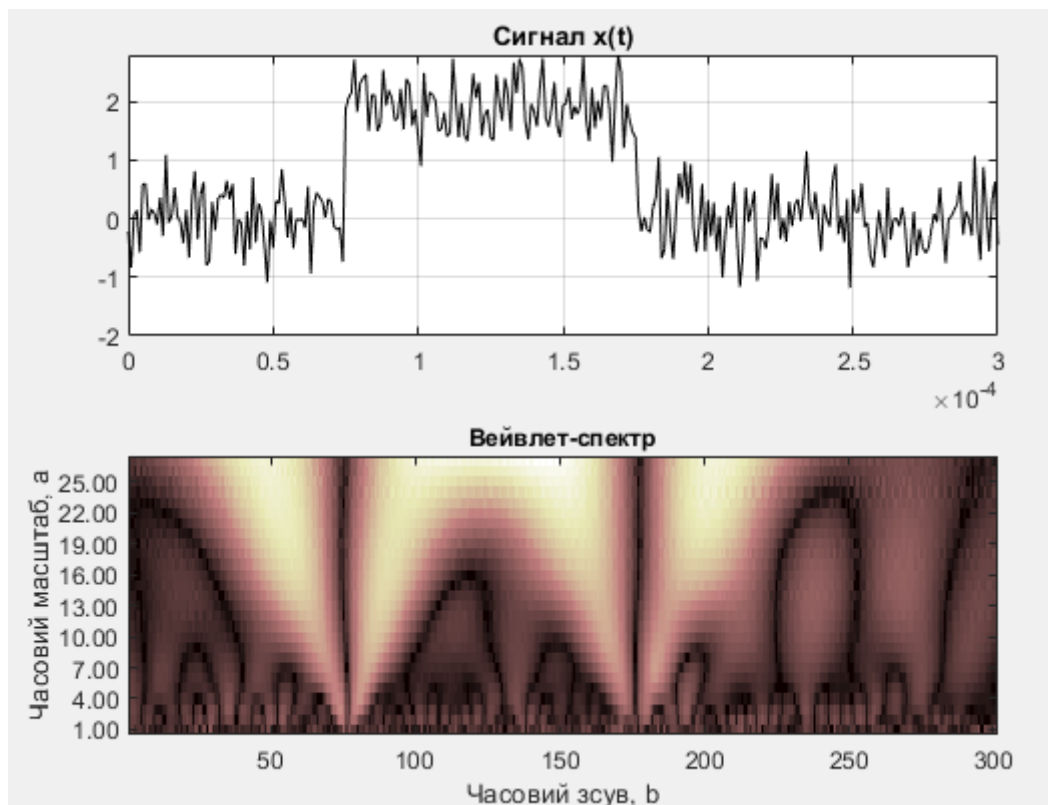


Рис. 2.4.3 Прямокутний імпульс з шумом

Джерело: сформовано автором

Приклад. Частота змінюється стрибком так, щоб сигнал залишався неперервним.

```
clear, clc, close all
% частота квантування, тривалість сигналу, період квантування, час
Fs = 1024; T = 0.25; dt = 1/Fs; t = 0:dt:T;
f1 = 20; f2 = 80;
x = (t < 0.125) .* sin(2*pi*f1*t) - (t >= 0.125) .* sin(2*pi*f2*t); % сигнал
wname = 'mexh'; % вейвлет, який використовується
Fc = centfrq(wname); % центральна частота
% задаємо границі діапазону частот, в якому хочемо виконати аналіз сигналу
F_min = 8; F_max = 256;
% так як вейвлет перетворення працює з масштабом, а не з частотою,
% переводим частоту в масштаб
a_max = Fc/F_min/dt; a_min = Fc/F_max/dt;
a = a_min:1:a_max; C = swt(x,a,wname); % виконуємо перетворення
% виводимо результат на графіку
figure, subplot(2,1,1), plot(t,x,'k') xlabel('time'), ylabel('x(t)')
subplot(2,1,2), imagesc(t,a,abs(C)) axis xy, grid on
xlabel('b (time)'), ylabel('a (scale)')
```

Лістинг 4 Неперервний сигнал

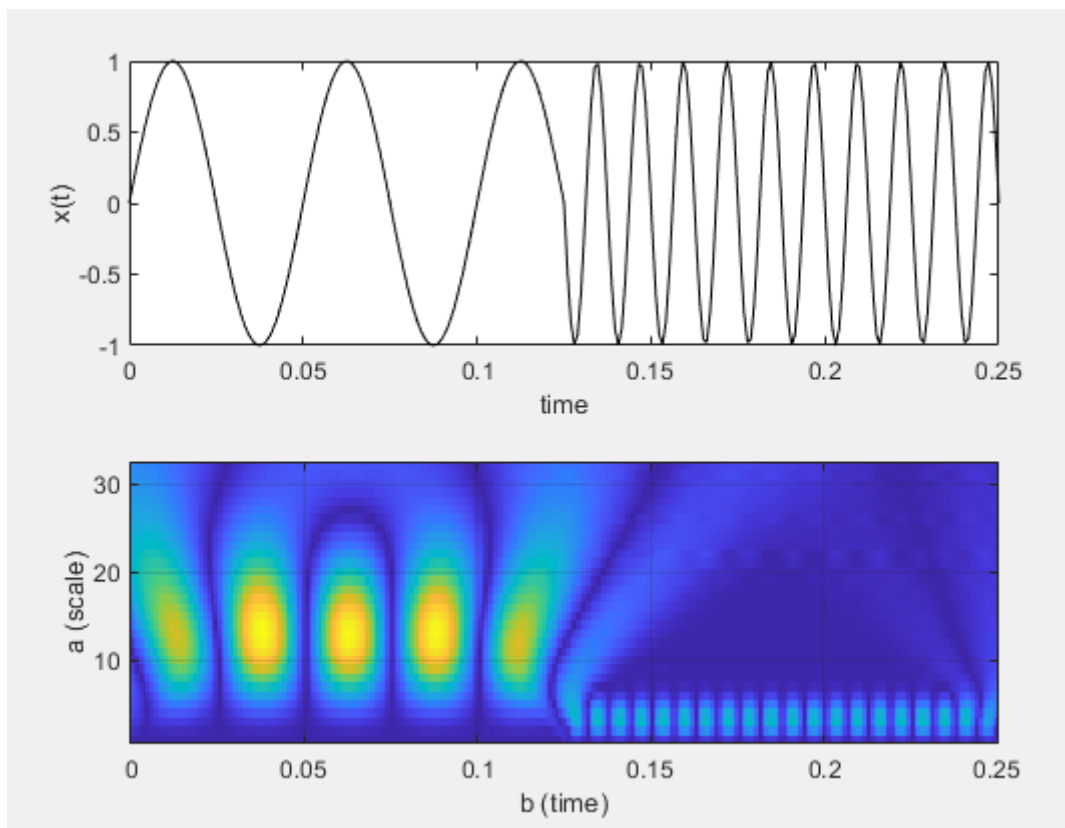


Рис. 2.4.4 Прямокутний імпульс з шумом

Джерело: сформовано автором.

В результаті вийшло дві групи максимумів, на різних масштабах, кожен відповідає своїй частоті і інтервалу часу.

На основі теореми Котельникова (теорема відліків) неперервний сигнал $S(t)$, спектр якого не має частоти вище f_m , повністю визначається дискретною послідовністю своїх миттєвих значень $\{S_i\}, i = 0, 1, \dots, N - 1$, відлічуваних через інтервал часу Δt :

$$\Delta t = 1/2f_m, \quad f_d = 1/\Delta t = 2f_m$$

де Δt і f_d – інтервал (крок) і частота дискретизації.

Таким чином, дискретизований з кроком Δt сигнал можна визначити виразом:

$$S_d(t) = \{S_i\} = \sum_{i=1}^{N-1} S(i\Delta t)\delta(t - i\Delta t)$$

де $\delta(t)$ – дельта-функція.

Приклад.

Знайдемо неперервний і дискретний вейвлет-спектри:

```
function wave
t = 0:0.000001:0.001; A1 = 1; A2 = 1; F1 = 10000;
F2 = 2*F1; a1 = 0; a2 = 0; s1(1:200) = 0; t2 = 0.0002:0.000001:0.0008;
s2 = A1*sin(2*pi*F1*t2 + a1) + A2*sin(2*pi*F2*t2+a2);
s3(1:200) = 0; s = [s1 s2 s3];
randn('state',0); g = 0.5; n = g*randn(size(t));
x = s + n; figure(1); subplot(311), plot(t,x,'k');
title('Сигнал x(t)'); grid on; gtext('F=10кГц, A1=A2=1В, g=0.5 В');
subplot(312), c = cwt(x,1:64,'mexh','absglb');
title('Вейвлет-спектр'); xlabel('Часовий зсув, b');
ylabel('Часовий масштаб, a'); set(gca,'xlim',[0 1000]);
[c,l] = wavedec(s,6,'db4');
for m = 1:6
    d = detcoef(c,l,m); d = d(ones(1,2^m),:);
    cfd(m,:) = wkeep(d(:)',1000);
end
cfd = cfd(:); I = find(abs(cfd)<sqrt(eps));
cfd(I) = zeros(size(I)); cfd = reshape(cfd,6,1000);
subplot(
313), colormap(pink(16));
img = image(flipud(wcodemat(cfd,64,'row')));
set(get(img,'parent'),'YtickLabel',[]);
title('Дискретне перетворення');
ylabel('Рівень, m'); xlabel('Часовий зсув, b');
end
```

Лістинг 5 Неперервний і дискретний вейвлет-спектри

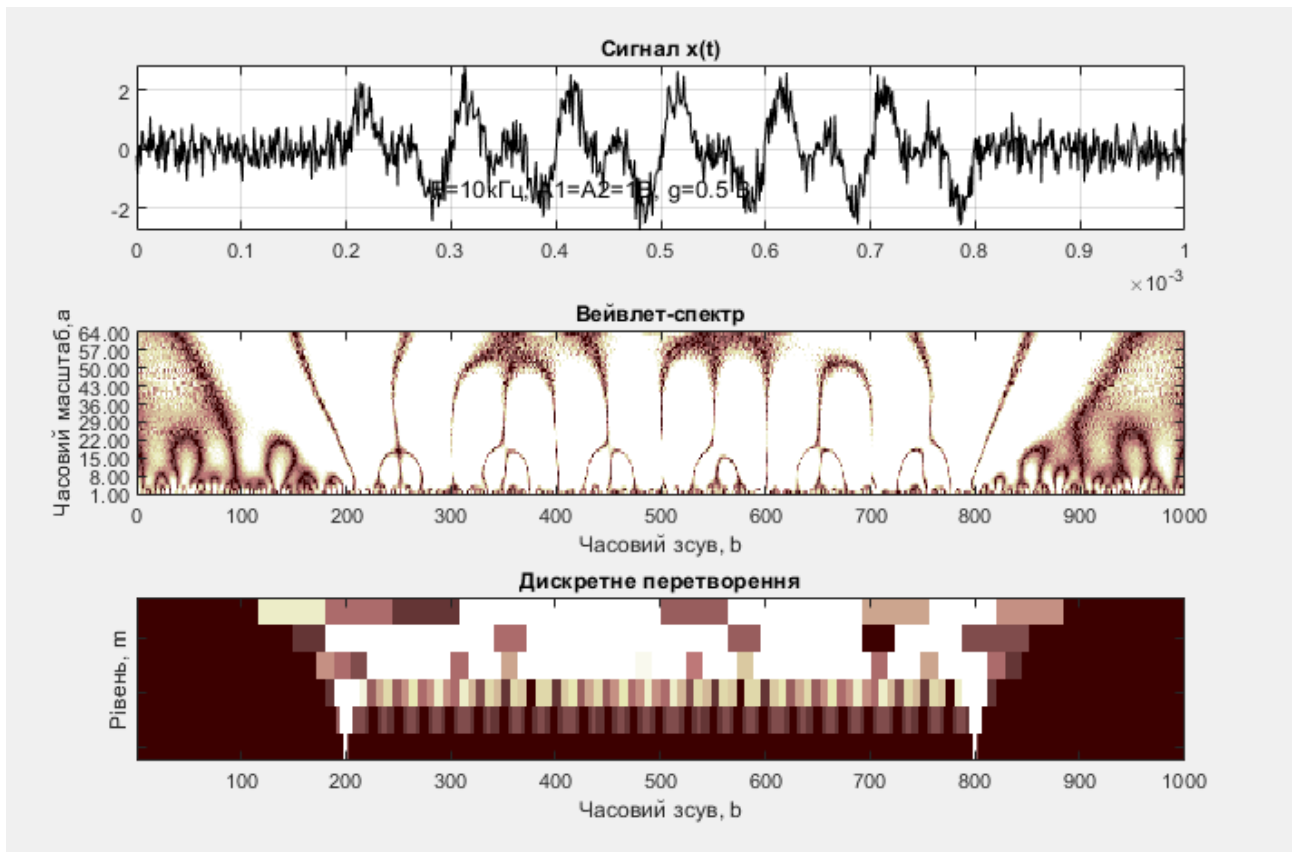


Рис. 2.4.5 Бігармонічні сигнал з шумом.

Джерело: сформовано автором

На Рис. 2.4.5 наведені діаграма сигналу і його спектрограми. Очевидно, що деталі сигналу проглядаються і на спектрограмі дискретного ВП, але з гіршим дозволом.

При дослідженні сигналів корисно їх пред'явити у вигляді сукупності послідовних приближених грубих (апроксимуючий) $A_m(t)$ і уточненої (деталізуючий) $D_m(t)$ складових

$$S(t) = A_m(t) + \sum_{j=1}^m D_j(t)$$

з наступним уточненням ітераційним методом. Кожний крок уточнення відповідає певному масштабу a^m (рівню m) аналізу (декомпозиції) і синтезу (реконструкції) сигналу. Таке представлення кожної складовою сигналу

вейвлетами можна розглядати як в часовій так і в частотній областях. В цьому суть кратномасштабного аналізу [15].

Як вже відмічалось, в практиці ВП в більшості випадків ми маємо справу з дискретними сигналами. Однак формули для ВП дискретних сигналів не можуть бути отримані простою дискретизацією формул діадного ВП для неперервного сигналу. Знайдемо їх із передумов КМА.

Нехай, є неперервний сигнал $S(t) \in V_0$. Дискретний сигнал S_d , який інтерпретується як послідовність коефіцієнтів a_k , отриману в ході КМА сигналу $S(t)$ при масштабуючих функціях $\varphi_{0k}(t)$:

$$S(t) = A_0(t) = \sum_k a_{0k} \varphi_{0k}(t)$$

де

$$a_{0k} = a_k = (S(t), \varphi_{0k}(t))$$

- коефіцієнти апроксимації на рівні $m = 0$.

За концепцією КМА сигнал $S(t)$ декомпозиується на дві складові (що належать підпростору V_1 і W_1):

$$S(t) = A_1(t) + D_1(t) = \sum_k a_{1k} \varphi_{1k}(t) + \sum_k d_{1k} \Psi_{1k}(t).$$

Відповідно, отримані дві нові послідовності a_{1k} і d_{1k} . Відмітим, що послідовності a_{1k} і d_{1k} мають половину довжини порівняно з a_{0k} . Далше процес декомпозиції може бути продовжено по $A_1(t)$ підпростору V_2 і W_2 . Сигнал $S(t)$ на рівні декомпозиції m буде представлений сукупністю коефіцієнтів a_{mk} і d_{mk} .

Однак розрахунок a_{mk} і d_{mk} як і раніше залежить від неперервних базисних функцій $\varphi(t)$ і $\Psi(t)$. Як показано в додатку 3, ці функції однозначно визначаються коефіцієнтами h_l :

$$\varphi(t) = 2 \sum_l h_l \varphi(2t - l), \quad (2.4.1)$$

$$\Psi(t) = 2 \sum_l (-1)^l h_{1-l} \varphi(2t - l) = 2 \sum_l g_l \varphi(2t - l), \quad (2.4.2)$$

$$h_l = (\varphi(t), \varphi(2t - l)),$$

$$g_l = (-1)^l h_{2n-1-l},$$

де $l = 0, 1, \dots, l_0 = 2n - 1, n$ - порядок вейвлета. Вейвлети n -го порядку існують тільки на інтервалі довжиною $2n-1$ і мають $2n$ відрізняючих від нуля коефіцієнтів h_l .

З (2.4.1) і (2.4.2) можна отримати наступне співвідношення:

$$a_{mk} = (S(t), \varphi_{mk}(t)) = \sum_l h_{l-2k} (\varphi(t), \varphi_{m-1,l}(t)) = \sum_l h_{l-2k^{a_{l,m-1}}},$$

$$d_{mk} = (S(t), \Psi_{mk}(t)) = \sum_l g_{l-2k} (\varphi(t), \varphi_{m-1,l}(t)) = \sum_l g_{l-2k^{a_{l,m-1}}}.$$

Ітераційна процедура швидкого вейвлета-аналізу отримала назву аналізу від «тонкого» до «грубого» масштабу. На практиці найменший можливий масштаб (найбільший рівень розширення n_0) визначається числом N дискретних значень сигналу ($N = 2^{n_0}$).

На «тонкому» значення масштабу ($m=0, a=2^m=1$) за апроксимуючі коефіцієнти a_{0k} приймаються відліки S_i сигналу $S(t), a_{0k} = S_i, k = i, i = 0, 1, \dots, N - 1$. При переході від теперішнього масштабу m до наступного $m+1$ число вейвлет-коефіцієнтів зменшиться в два рази і вони визначаються по рекурентним співвідношенням:

$$a_{m+1,k} = \sum_l h_{l-2k^{a_{ml}}}, \quad d_{m+1,k} = \sum_l g_{l-2k^{a_{ml}}}.$$

Процес зупиняється після кінцевого числа рівнів $m = \text{MMAH}$, яке залежить від протяжності сигналу (N) і порядку (l) фільтра h_l [24]. При відновленні (реконструкції) сигналу по його вейвлет-коефіцієнтам процес йде від великих масштабів до малих і на кожному кроці описується виразом

$$\Phi_{m-1,k} = \sum_l (h_{l-2l^{a_{ml}}} + g_{k-2l^{d_{ml}}},$$

яке можна отримати з співвідношень (2.4.1) і (2.4.2).

Число операцій множення при прямому швидкому ВП (УВП) буде $2LN$,

де $L = 2_n$ [29]. Стільки ж операцій необхідно і для реконструкції сигналу. Таким чином, для аналізу-синтезу сигналу в базисі вейвлетів необхідно виконати $4LN$ операцій, що не перевищує числа операцій для швидкого перетворення Фур'є ($N \log_2 N$). Таким чином, в практичних додатках із застосуванням БВП використовуються тільки коефіцієнти h_l , самі ж вейвлети не обчислюються і в розрахунках не використовуються [13].

На Рис. 2.4.6: декомпозиція сигналу - зверху-вниз і реконструкція - знизу-вгору.

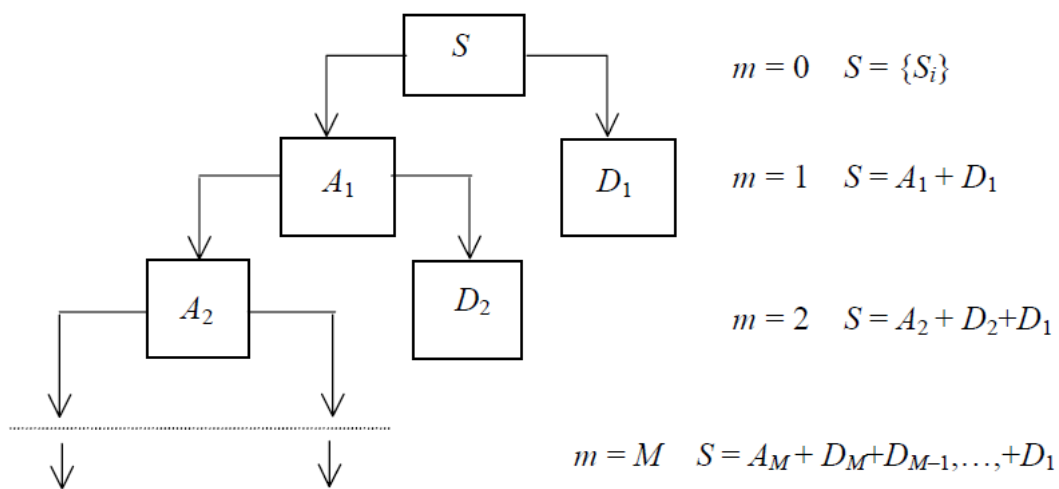


Рис. 2.4.6 «дерево» коефіцієнтів.

Джерело: [13]

2.5 Порівняння перетворення Фур'є та вейвлет-перетворення

Класичне перетворення Фур'є (ПФ) є традиційним математичним апаратом для аналізу стаціонарних процесів. При цьому сигнали розкладаються в базисі косинусів і синусів або комплексних експонент. Ці базисні функції простягаються уздовж всієї осі часу [13].

З практичної точки зору і з позиції точного представлення довільних сигналів ПФ має *ряд обмежень і недомог*. Володіючи хорошою локалізацією по частоті, воно не володіє часовим дозволом. ПФ навіть для однієї заданої частоти потребує знання сигналу не тільки в минулому, а й в майбутньому, а це – теоретична абстракція. Обумовлено це тим, що базисна

функція при розкладанні в ряд Фур'є являється гармонійним коливанням, яке математично визначено на часовому інтервалі від $-\infty$ до $+\infty$. ПФ не враховує, що частота коливання може змінюватися в часі. Локальні особливості сигналу (розриви, сходинки, піки і т.д.) дають мало помітні складові спектра, за якими виявити ці особливості, і тим більше їх місце і характер, практично неможливо. В цьому випадку неможливо і точне відновлення сигналу через появлення ефекту Гіббса. Для отримання про сигнал високочастотної інформації з хорошою точністю потрібно витягувати її з відносно малих часових інтервалів, а не з цілого сигналу, а для низькочастотної спектральної інформації – навпаки. Крім цього, на практиці не всі сигнали стаціонарні, а для нестационарних сигналів труднощі ПФ виростають багаторазово.

Частина вказаних труднощів долаються при використанні *віконного* ПФ:

$$S(\omega, b) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t)w(t - b)e^{-j\omega t} dt,$$

в якому використовується попередньо операція множення сигналу $S(t)$ на «вікно» $w(t - b)$; при цьому вікно являється локальна в часі функція (наприклад, прямокутна, тобто $w(t) = 1$ при $0 \leq t \leq \tau$ і $w(t) = 0$ при $t < 0$ і $t > \tau$), переміщуючи по осі часу t (Рис. 2.5.1) для обчислення ПФ в різних позиціях b . В результаті отримуємо поточний спектр, тобто частотно-часове описування сигналу [13].

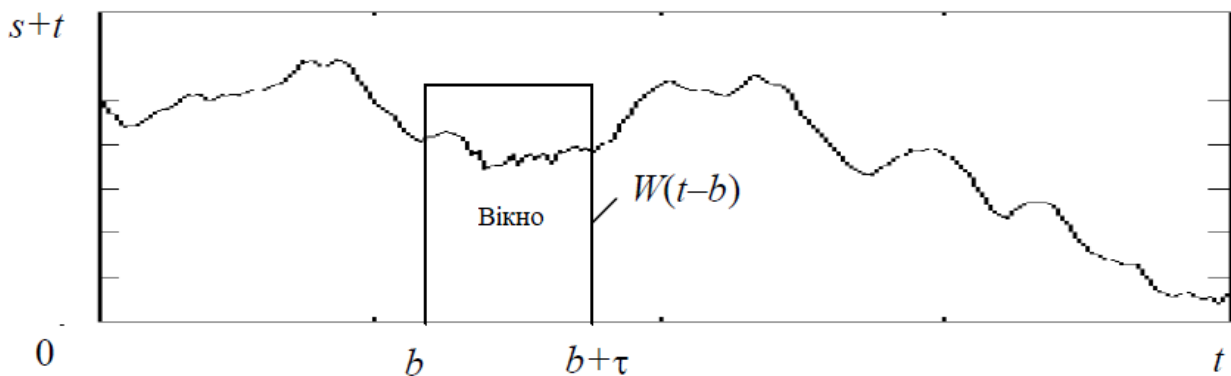


Рис. 2.5.1 Частотно-часове описування сигналу.

Джерело: [13].

Якщо, вікно показане на Рис. 2.5.1, переміщувати скачками (через τ) уздовж всього часу існування сигналу $S(t)$, то за деякий час число таких переміщень можливий «перегляд» всього сигналу. Так що, замість стандартної спектрограми отримується набір спектрограм, схематично представлені в вигляді прямокутників на Рис. 2.5.2, *a*. Такий спектральний аналіз рівносильний аналізу за допомогою наборів фільтрів з постійною шириною полоси пропускання, рівної $\Delta\omega \approx 2\pi/\tau$.

Вочевидь, що, оскільки кожне вікно виділяє свій не велику ділянку у часі, точність представлення і роздільна здатність (по часу) можуть бути збільшені. Однак, з огляду на відомого принципу невизначеності ($\Delta\omega\tau = const$) неможливо отримати одночасно високе розширення і по частоті, і по часу. Вікну з вузькою шириною (τ) в часі буде відповідати погане розширення по частоті (велика величина $\Delta\omega$).

Недолік віконного ПФ полягає в тому що, використовується фіксоване вікно і, відповідно, *фіксоване розширення* по часу і частоті для всіх точок площині перетворення (Рис. 2.5.1, *a*), яке не може бути адаптоване до локальних властивостях сигналу.

ВП має значущу перевагу перед ПФ перш за все за рахунок властивостей локальності вейвлетів [4]. У вейвлет-перетворенні операція множення на вікно міститься в самій базисній функції, яка звужує і розширює вікно (Рис. 2.5.1, *b*): з ростом параметра a збільшується розширення по частоті і зменшується розширення по частоті і збільшується по часу. Звідси появляється можливість адаптивного до сигналу вибору параметрів вікна. Пересувне частотно-часове вікно однаково добре виділяє і низькочастотні, і високочастотні характеристики сигналів. Ця властивість ВП дає йому велику перевагу при аналізі локальних властивостей сигналів.

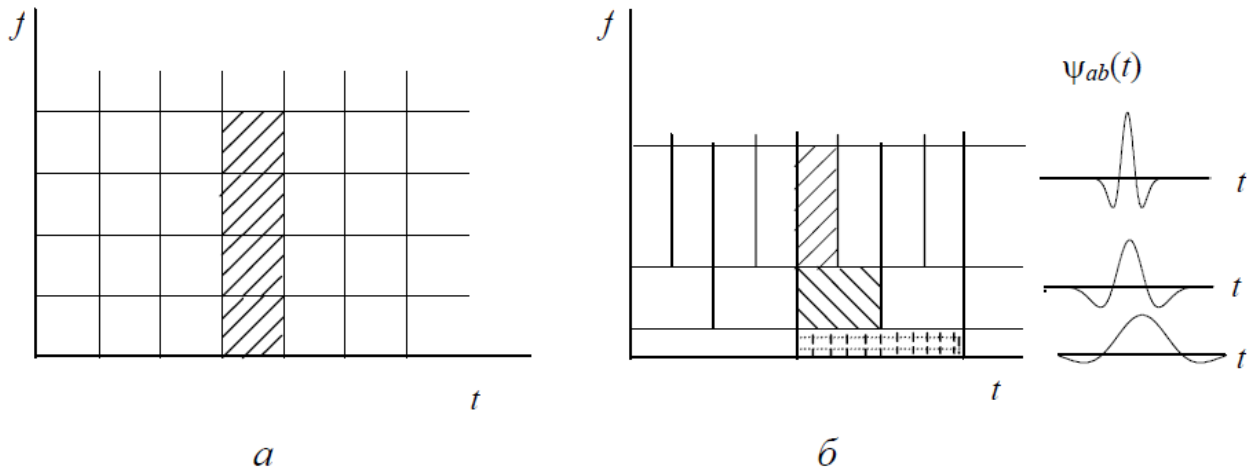


Рис. 2.5.2 Набір спектрограм

Джерело: [13].

Можливо локально реконструювати сигнал: реконструювати тільки частину сигналу або виділяти вклад певного масштабу. Якщо вейвлет-коефіцієнти схильні до випадкових помилок, вони будуть діяти на реконструйований сигнал локально поблизу положення обурення, а ПФ поширює помилки по всьому відновлюваному сигналу [13].

Завдяки виявленню локальних особливостей сигналу, принципово відсутньому у ПФ, ВП знайшло широке застосування для аналізу тонкої структури сигналів і зображень, для їх стиснення і очистки від шуму, що важливо і корисно в радіотехніці, електроніці, гідроакустиці, геофізиці, медицині і в інших областях науки і техніки. При цьому варто відмітити, що ВП ні в якому разі не являються заміною традиційного перетворення Фур'є і не зменшує його достоїнств і значущості при роботі зі стаціонарними процесами і коли немає необхідності досліджувати локальну структуру сигналів. ВП просто інше і дозволяє подивитися на досліджуваний процес з іншої точки зору [3].

Висновки до РОЗДІЛУ 2

В даному розділі розглядались два методи цифрової обробки інформації задля їх оцінки. Першим методом було перетворення Фур'є в якому сигнал може бути поданий у вигляді інтегрального розкладу за системою комплексних

синусоїдальних функцій – інтеграла Фур'є. Дискретне перетворення Фур'є є базовим алгоритмом цифрової обробки сигналів у частотній області. Завдяки наявності ефективних алгоритмів його обчислення, алгоритмів швидкого перетворення Фур'є – ДПФ широко використовується для цілей цифрової фільтрації та спектрально-кореляційного аналізу сигналів. Другим і найбільш ефективним в теперішній час було розглянуте вейвлет-перетворення. Особливу увагу приділили ознакам, які обов'язково повинна мати вихідна функція, щоб стати вейвлетом:

- 1) обмеженість;
- 2) локалізація;
- 3) нульове середнє;
- 4) автомодельність.

Для кращого розумінні були розглянуті неперервне та дискретне вейвлет-перетворення, властивості вейвлет-аналізу та ШВП. Зрештою при порівнянні цих двох методів було доведено ефективність та практичність вейвлетів.

РОЗДІЛ 3. Аплікація для аналізу вейвлетів

3.1 MATLAB та його пакети для використання вейвлет-перетворень

Система комп'ютерної математики MATLAB найбільш популярна серед інженерів і математиків, які займаються прикладними розробками. Крім того, саме в MATLAB вейвлети представлені найбільш повно. У цьому розділі розглянемо роботу з вейвлетами з аналізу сигналів та зображень у системі, ознайомимось з командами MATLAB Wavelet Toolbox.

Для полегшення дослідження сигналу за допомогою вейвлетів у MATLAB створено комплекс графічних оболонок для візуалізації вихідних даних та результатів вейвлет-аналізу. Пакет представляє великі та одночасно унікальні засоби для роботи з вейвлетами, причому як у командному режимі, так і з допомогою спеціальних засобів графічного інтерфейсу користувача GUI цього пакета. За різноманіттям типів вейвлетів та функцій для обробки сигналів, а також за кількістю дуже повчальних та наочних прикладів, цей пакет є найкращим серед пакетів розширення для систем комп'ютерної математики у цій галузі [42].

Пакет Wavelet Toolbox надає:

- 1) інструментальні засоби для вейвлет-аналізу та синтезу сигналів та зображень;
- 2) безліч вже вбудованих вейвлетів різного типу, у тому числі пакетних;
- 3) можливість задання свого вейвлета із заданими властивостями;
- 4) можливість обробляти сигнали та зображення;
- 5) можливість для неперервного та дискретного вейвлет-аналізу;
- 6) засоби очищення сигналів від шуму та спеціальної обробки;
- 7) засоби обробки та компресії сигналів зображень;
- 8) потужні засоби візуалізації вейвлетів і всіх операцій з ними.

При знайомстві з вейвлетами зручно користуватись головним меню пакета розширення Wavelet Toolbox (User GUI), яке викликається за командою

wavemenu. У командному режимі для отримання початкової інформації про вейвлет можна використовувати такі функції [41].

Інформація про вейвлети:

- 1) *waveinfo* – інформація про вейвлети;
- 2) *waveletfamilies* – сімейства вейвлетів та члени сімейств;
- 3) *wavefun* – вейвлет і функція, що масштабує;
- 4) *wavefun2* – вейвлет і функція 2D, що масштабує;
- 5) *bswfun* – біортогональні вейвлети та масштабуючі функції;
- 6) *centfrq* – центральна частота вейвлету;
- 7) *intwave* – первісна вейвлет-функція ψ (ψ);
- 8) *scal2frq* – перерахунок масштабу частоти;
- 9) *wavsupport* – носій вейвлету.

Спеціальні вейвлети:

- 10) *cgauwavf* – комплексний Гауссів вейвлет;
- 11) *cmorwavf* – комплексний вейвлет Морлі;
- 12) *fbspwavf* – комплексний частотний В-сплайновий вейвлет;
- 13) *gauswavf* – Гауссів вейвлет;
- 14) *mexihat* – вейвлет «мексиканська капелюх»;
- 15) *meyer* – вейвлет Меєра;
- 16) *meyeraux* – допоміжна функція вейвлету Мейєра;
- 17) *morlet* – вейвлет Морлі;
- 18) *shanwavf* – комплексний вейвлет Шеннона.

Додаткові можливості керування вейвлетами:

- 1) *wavemenu* – головне хвилеве вейвлет-меню, GUI;
- 2) *wavemngr* – менеджер вейвлетів (Wavelet manager);
- 3) *wavedemo* – демонстраційні приклади використання вейвлет-аналізу у MATLAB (Wavelet Toolbox software examples);
- 4) *wtbxmngr* – відображає поточну версію Wavelet Toolbox та дозволяє встановити параметри Wavelet Toolbox (Wavelet Tool box manager) [42].

Розглянемо докладніше функції першої групи, які дозволяють отримати корисну інформацію про вейвлети. Функція *waveinfo* – інформація про вейвлети [41].

Синтаксис:

waveinfo, waveinfo('wname')

Функція *waveinfo* видає наступну класифікацію всіх вейвлетів, що використовуються у Wavelet toolbox.

1. Передвейвлети. Це Гаусові вейвлети (*gaus*), вейвлети Морле і мексиканські капелюхи (*mexihat*). Вони мають мінімальні властивості:

- 1) функція не існує;
- 2) аналіз неортогональний;
- 3) функція має некомпактний носій;
- 4) відновлення не гарантується;
- 5) можливе неперервне розкладання.

Основні добрі властивості: симетрія, має явний вираз.

Основні труднощі: швидкі алгоритми та реконструкція неможливі.

2. Нескінченні регулярні вейвлети Мейєра (*meyr*) та дискретні вейвлети Мейєра (*dmeyr*). Властивості вейвлетів Мейєра (*meyr*):

- 1) функція ϕ існує;
- 2) ортогональний аналіз;
- 3) функції ψ і ϕ не мають аналітичного виразу;
- 4) функції ψ та ϕ не мають компактного носія.

Можливий аналіз: неперервне розкладання, дискретне перетворення.

Основні хороші властивості: симетрія, нескінченна диференційованість.

Основні проблеми: швидкі алгоритми недоступні.

3. Ортогональні вейвлети із компактим носієм. Це вейвлет Добеші (*dbN*), сімплети (*symN*), койфлети (*coifN*).

Загальні властивості:

- 1) функція існує і аналіз ортогональний;
- 2) функції ψ та ϕ мають компактного носія;

3) функція ψ має кілька нульових моментів.

Можливий аналіз: неперервне розкладання, дискретне перетворення з використанням швидких алгоритмів.

Основні добрі властивості: компактний носій, що обертаються в нуль моменти, FIR-фільтри.

Основні проблеми: слабка регулярність.

Властивості симетрії:

1) добеші dbN несиметричні;

2) сімлеті $symN$ майже симетричні;

3) койфлети $coifN$ майже симетричні, і функція ϕ , як і ψ , має кілька нульових моментів.

4. Біортогональні пари вейвлетів із компактним носієм. Це В-сплайнові біортогональні вейвлети ($biorNr.Nd$ та $rbiorNr.Nd$).

Властивості:

1) функція існує і аналіз біортогональний;

2) всі функції $\tilde{\phi}$, $\tilde{\psi}$ та ϕ , ψ для декомпозиції та реконструкції мають компактний носій;

3) функції $\tilde{\phi}$ та $\tilde{\psi}$ для розкладання мають нульові моменти;

4) функції ψ і ϕ для відновлення мають деяку регулярність.

Можливий аналіз: неперервне розкладання, дискретне перетворення з використанням швидких алгоритмів.

Основні добрі властивості: симетрія, FIR-фільтри.

Основні проблеми: відсутність ортогональності [42].

5. Комплексні вейвлети. Це комплексні гаусові вейвлети ($cgauN$), комплексні вейвлети Морле ($cmorFb-Fc$), комплексні вейвлети Шеннона ($shanFb-Fc$), комплексні частотні В-спланові вейвлети ($fbspM-Fb-Fc$).

Мінімальні властивості:

1) функція не існує;

2) аналіз неортогональний;

3) функція з некомпактним носієм;

4) якість реконструкції не забезпечено.

Можливий аналіз: комплексне неперервне розкладання.

Основні добрі властивості: симетрія, має явний вираз.

Основні труднощі: швидкі алгоритми та реконструкція неможливі.

Функція *waveinfo('wname')* дає більш детальну інформацію про сімейство вейвлетів з ім'ям *wname*.

Функція *waveletfamilies* – сімейства вейвлетів та члени сімей. Використовується у трьох видах:

1) *waveletfamilies* – відображає імена всіх сімейств вейвлетів, доступних у MATLAB (табл. 3.1.1);

2) *waveletfamilies('n')* – відображає імена всіх сімейств вейвлетів, доступних у MATLAB, з іменами вейвлетів у сімействі;

3) *waveletfamilies('a')* – відображає імена всіх сімейств вейвлетів, доступних у MATLAB, з іменами вейвлетів у сімействі та їх властивостями [41].

Таблиця 3.1.1 Сімейство вейвлетів в MATLAB

Коротке ім'я	Ім'я сімейства вейвлетів
Haar	Вейвлети Хаара
Db	Вейвлети Добеші
Sym	Симлети
Coif	Койфлети
Bior	Біортогональні вейвлети
Rbio	Дуальні біортогональні вейвлети
Meur	Вейвлети Меєра
Dmey	Дискретні апроксимації вейвлетів Мейєра
Gaus	Гаусові вейвлети
Mexh	Вейвлет «мексиканська капелюх»
Morl	Вейвлети Морле
Cgau	Комплексні гаусові вейвлети

Shan	Вейвлети Шеннона
Fbsp	Частотні B-сплайнові вейвлети
Сmor	Комплексні вейвлети Морле

Джерело: сформовано автором.

3.2 Неперервні вейвлет-перетворення у MATLAB

Використання вейвлет аналізу і перетворення даних у різних галузях науки і техніки дозволяє пакет Wavelet Toolbox системи MATLAB. За допомогою програмного забезпечення пакета виконання вейвлет-перетворень дозволяється як із командного режиму так і з діалогового, за інтерфейсом GUI (включення командою `wavemenu` або з вікна редактора, Toolbox → Main Menu).

Для кращого розуміння в пакеті містяться демонстраційні приклади вейвлетних перетворень, вікно яких включаються командою `wavedemo`. При натисканні на Command line mode зустрічаємось з широким меню прикладів одно-і двовимірних вейвлетів всіх типів у звичайному та пакетному виконанні (неперервних та дискретних вейвлет-перетворень з декомпозицією та реконструкцією сигналів, стиснення сигналів, очищення від шумів та ін.). Слайди прикладів супроводжуються відповідними лістингами програмних фрагментів, які можна переносити до буфера і потім використовувати в командному рядку Matlab [42].

Аналогічно другою та третьою кнопками включається доступ до демонстраційних прикладів в інтерфейсі GUI.



Рис. 3.2.1 Вигляд інтерфейсу GUI

Джерело: сформовано автором.

Неперервне одновимірне вейвлет-перетворення вже саме собою, без реконструкції сигналів, використовується для аналізу форми сигналів та виявлення їх локальних особливостей [42].

Для цього використовуються такі функції:

- 1) *cwt* – неперервне одновимірне вейвлет-перетворення;
- 2) *cwtext* – неперервне одновимірне вейвлет-перетворення з параметрами розширення масиву;
- 3) *cwtft* – неперервне вейвлет-перетворення, що використовує FFT-алгоритм;
- 4) *icwtft* – зворотнє неперервне вейвлет-перетворення;
- 5) *icwtlin* – зворотнє неперервне вейвлет-перетворення для лінійно розподілених масштабів;
- 6) *cwtftinfo* – інформація про допустимі вейвлети для CWT на основі FFT;
- 7) *conofinf* – конус впливу;
- 8) *localmax* – визначення ланцюжків локальних максимумів коефіцієнтів;
- 9) *wcoher* – вейвлет-когерентність;

10) *wscalogram* – скелограма неперервного вейвлет-перетворення.

Для неперервного вейвлет-перетворення використовуються також згадані раніше функції *pat2cwav*, *wavemenu* та *wavemngr*.

Функція *cwt* – неперервне одновимірне вейвлет-перетворення. Команда *cwt* виконує неперервне вейвлет-перетворення одновимірного сигналу. Нехай $x(t)$ – сигнал та $\psi(t)$ – вейвлет. При неперервному перетворенні вейвлет-коефіцієнти сигналу x , що відповідають масштабному коефіцієнту a і положенню b , визначаються формулою

$$C_{a,b} = W[f](a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} S(t) \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt$$

Якщо сигнал $x(t)$ є дискретним та заданим вибіркою значень $\{x_k\}$, тоді в якості $x(t)$ можна взяти кусково-постійну функцію, що приймає значення x_k , на проміжках $t \in [k\Delta t, (k+1)\Delta t)$, тоді $x_k = x(k\Delta t)$. Параметр зсуву b пробігає значення з кроком Δt , тоді $b = n\Delta t$, $n = 1: l_x$, $l_x = \text{length}(x)$. Будемо вважати, що значення масштабного параметра a також є дискретними і становлять вектор, який далі позначатиметься *scales* [41].

Основною відмінністю команди *cwt* в порівнянні з дискретним багаторівневим вейвлет-перетворенням *wavedec* є те, що в *cwt* можна брати будь-які значення масштабного коефіцієнта a , тоді як у *wavedec* використовуються степені двійки. Для команди *cwt* передбачена можливість графічного кольорового зображення вейвлет-коефіцієнтів сигналу x .

Функція *coefs = cwt(x,scales,'wname')* обчислює неперервні вейвлет-коефіцієнти дійсного вектора сигналу x в додатніх масштабах *scales*, використовуючи вейвлет *'wname'*. Сигнал x дійсний, але вейвлет може бути як дійсним, так і комплексним. Вихідний масив *coefs* – це матриця l_a на l_x , де l_a – довжина вектора масштабів і l_x – довжина вхідного сигналу x . Яким буде вихідний масив *coefs*, дійсною чи комплексною матрицею, залежить від вейвлета [42]. Для кожного даного значення масштабного коефіцієнта a в межах вектора *scales* вейвлет-коефіцієнти $C[a,n]$ обчислюються для зрушень часу $b = n\Delta t$, $n =$

$1:l_x$ і зберігаються у вигляді вектора-рядка $coefs(i,:)$, що відповідає i -му значенню параметра $a = scales(i)$.

$coefs = cwt(x,scales,'wname','plot')$ додатково зображує неперервні вейвлет-коефіцієнти, використовуючи забарвлення за замовчуванням $'absglb'$.

$coefs = cwt(x,scales,'wname','coloration')$ використовує для зображення задане забарвлення [42].

$[coefs,sgram] = cwt(x,scales,'wname','scal')$ відображає вихідний сигнал і масштабований образ скелограми $sgram$.

$[coefs,sgram] = cwt(x,scales,'wname','scalCNT')$ відображає вихідний сигнал і контурні лінії рівня скелограми $sgram$.

$coefs = cwt(x,scales,'wname','coloration',xlim)$ забарвлює коефіцієнти, використовуючи $'coloration'$ та частину масиву коефіцієнтів, визначену вектором $xlim$, який вказує межі частини масиву за аргументом x , $xlim$ є вектором $[x1\ x2]$, де $1 \leq x1 < x2 \leq \text{length}(x)$.

Результат $coefs$ операції cwt є матриця la на lx , вона зображується на площині у вигляді матриці, що складається з комірок у кількості la – по вертикалі та lx – по горизонталі. Кожна комірка містить елемент матриці коефіцієнтів і забарвлюється відповідно до значення свого коефіцієнта. Спосіб забарвлення визначається параметром $coloration$, значення якого наведено нижче.

Забарвлення – це метод, який використовується для масштабування значень коефіцієнтів їхнього зображення у кольорі. Кожен коефіцієнт ділиться на значення забарвлення, що виходить:

- 1) $'lvl'$ – використовує максимальне значення у кожному масштабі;
- 2) $'glb'$ – використовує максимальне значення у всіх масштабах;
- 3) $'abslvl'$ або $'lvlabs'$ – використовує максимальне абсолютне значення у кожному масштабі;
- 4) $'absglb'$ або $'glbabs'$ – використовує максимальне абсолютне значення у всіх масштабах;
 - $'scal'$ – робить масштабований образ скелеграми;
 - $'scalCNT'$ – робить контурне уявлення скелограмми.

Приклад. Неперервне вейвлет-перетворення синусоїди за допомогою двох типів вейвлетів. Результати будуть представлені двома видами забарвлень (Рис. 3.2.2).

```
t=linspace(-3,3,2048); s=sin(t).^17;
subplot(331); plot(t,s);
subplot(334); [psi,X] = mexihat(-4,4,100); plot(X,psi);
subplot(337); [p1,psi,p2,p3,X] = wavefun('bior1.5',8); plot(X,psi);
subplot(335); w1=cwt(s,1:32, 'mexh', 'lvl',[100 600]);
subplot(336); w2=cwt(s,1:32, 'bior1.5', 'lvl',[100 600]);
subplot(338); w1=cwt(s,1:32, 'mexh', 'abslvl',[100 400]);
subplot(339); w2=cwt(s,1:32, 'bior1.5', 'abslvl',[100 400]);
subplot(332); plot(t,w1(10,:)); subplot(333); plot(t,w2(10,:));
```

Лістинг 1 Функції для побудови неперервних вейвлет-перетворень

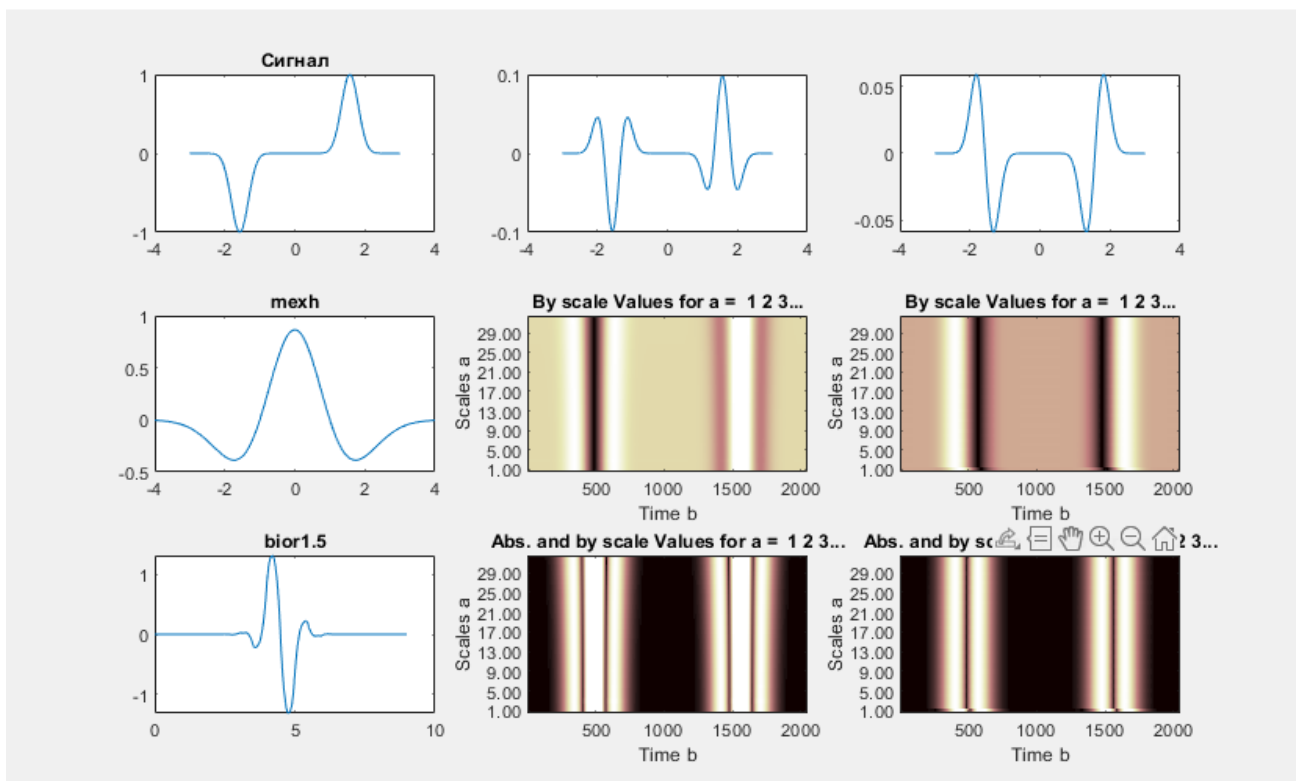


Рис. 3.2.2 Неперервне вейвлет-перетворення синусоїди

Джерело: сформовано автором.

Приклад. Неперервне вейвлет-перетворення гамма-каротажної кривої (Рис.3.2.3)


```

A = dlmread ('c:\MATLAB6\Example.prn', '', 120);
xn = 1; xk = 2000; xd = xk-xn; GK = A ([xn: xk], 5); da = 1; dk = 32;
subplot (311); plot (GK); grid; axis ([0, xd, 1,5]);
subplot (312); c1 = cwt (GK, 1: da: dk, 'mexh', 'abslvl', [100 400]);
subplot (313); c1 = cwt (GK, 1: da: dk, 'sym4', 'abslvl', [100 400]);

```

Лістинг 2 Функції для побудови різноманітних НВП

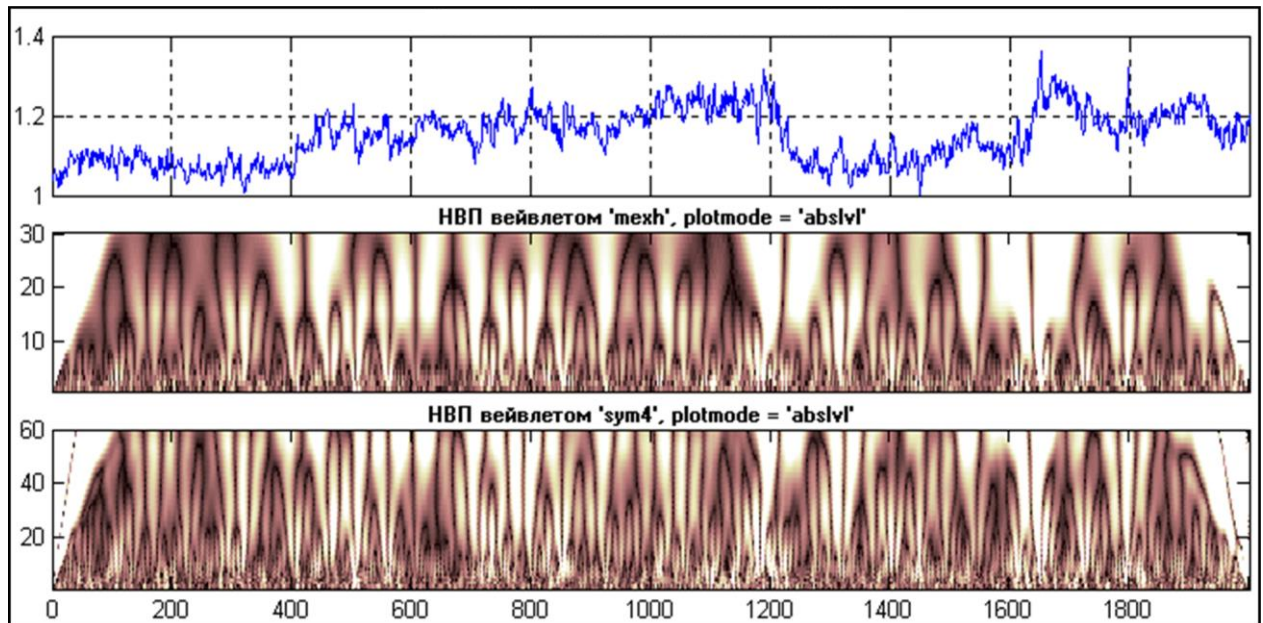


Рис. 3.2.3 Неперервне вейвлет-перетворення гамма-каротажної кривої

Джерело: сформовано автором.

На Рис. 3.2.4 наведено вікно, яке включається з 'Wavelet Toolbox Main Menu' кнопкою 'Continuous Wavelet 1-D' для отримання зображення сигналу та результатів його розкладу в повному виді, перетині за середнім рівнем розкладу та за лінією локальних максимумів.

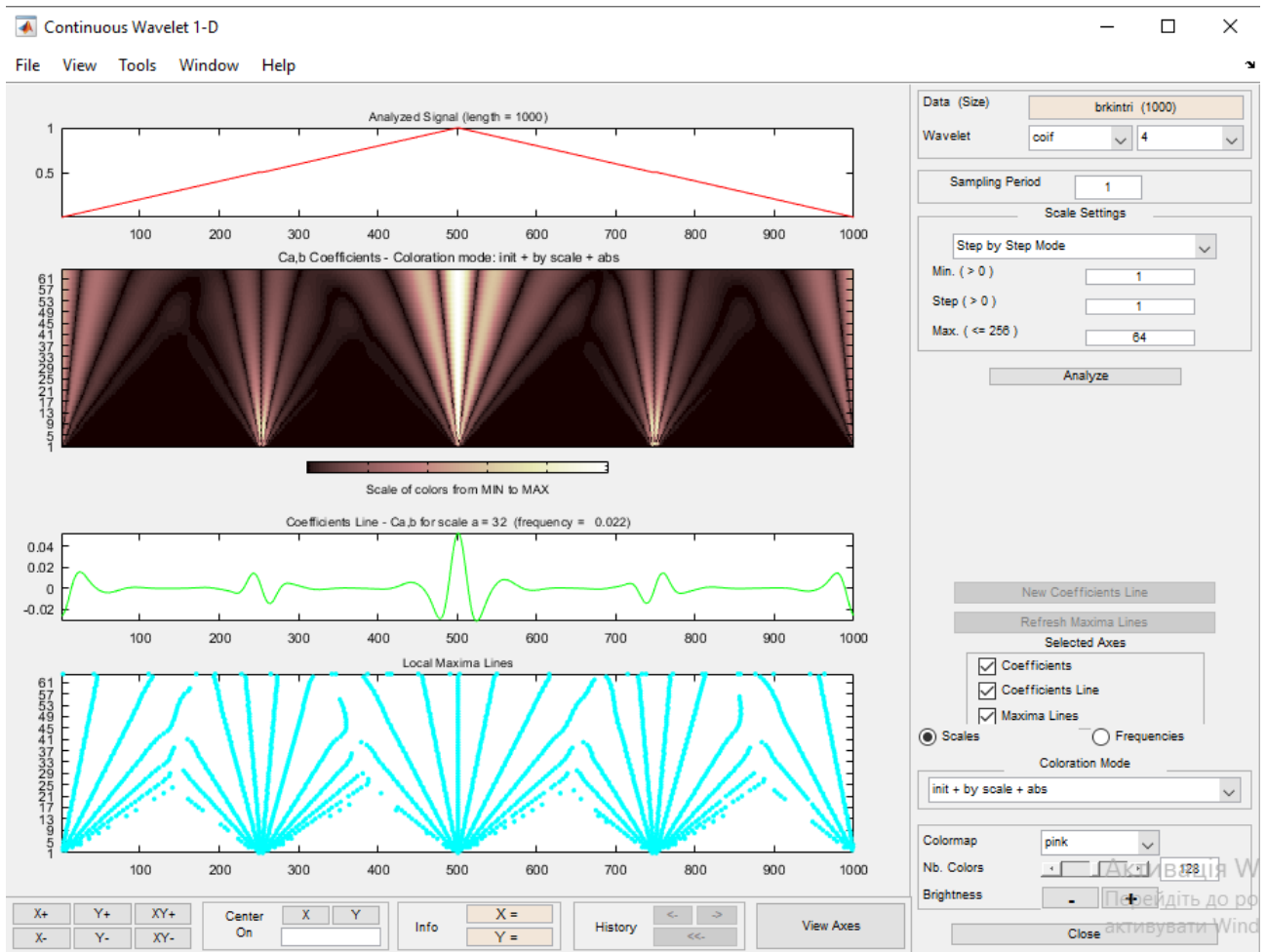


Рис. 3.2.4 Інтерфейс GUI графічного зображення сигналу

Джерело: сформовано автором.

Під час неперервного розкладання комплексними вейвлетами в 'Wavelet Toolbox Main Menu' використовується кнопка 'Complex Continuous Wavelet 1-D'.

3.3 Дискретні вейвлет-перетворення у MATLAB

Головною перевагою дискретних вейвлет-перетворення є можливість швидкого перетворення із пірамідальним алгоритмом обчислення, що дозволяє виконувати аналіз великих вибірок даних. Не зважаючи на те, що можливості ШВП реалізуються не для всіх типів вейвлетів, при обробці даних ШВП використовується дуже інтенсивно і в пакеті Wavelet Toolbox представлено великою кількістю спеціальних функцій [42].

Для дискретних вейвлет-перетворень використовуються такі функції.

Однорівневе розкладання:

- 1) *dwt* – однорівневе дискретне одновимірне вейвлет-перетворення;
- 2) *idwt* – зворотнє однорівневе дискретне одновимірне вейвлет перетворення.

Багаторівневе розкладання:

- 1) *wavedec* – багаторівневе одновимірне вейвлет-розкладання;
- 2) *waverec* – багаторівневе одновимірне вейвлет-відновлення;
- 3) *prcoef* – пряме відновлення з коефіцієнтів;
- 4) *apprcoef* – обчислює апроксимуючі коефіцієнти 1D-сигналу;
- 5) *detcoef* – обчислення деталізуючі коефіцієнти 1D-сигналу;
- 6) *wrcoef* – відновлення сигналу з однієї гілки вейвлет-коефіцієнтів;
- 7) *upwlev* – однорівнева реконструкція одновимірного вейвлету розкладання;
- 8) *ndwt* – недецимоване 1D-вейвлет-перетворення;
- 9) *indwt* – зворотнє недецимоване 1D-вейвлет-перетворення;
- 10) *wmaxlev* – максимальний рівень вейвлет-розкладання [41].

Дискретні вейвлет-перетворення стаціонарного сигналу:

- 1) *swt* – дискретне стаціонарне вейвлет-перетворення;
- 2) *iswt* – зворотнє стаціонарне вейвлет-перетворення.

Моделювання броунівського руху:

- 1) *wfbm* – синтез дробового броунівського руху;
- 2) *wfbmesti* – оцінка параметра дробового броунівського руху.

Характеристики сигналу та його наближення:

- 1) *wenergy* – енергія 1D-вейвлет або вейвлет-пакетних коефіцієнтів;
- 2) *wvarchg* – пошук точок зміни дисперсії сигналу;
- 3) *measerr* – оцінка якості наближення.

Для одновимірного вейвлет-аналізу сигналу створено графічний інтерфейс користувача *wavemenu* і можна також використовувати загальні функції:

- 1) *dwtmode* – мода розширення дискретного вейвлет-перетворення;
- 2) *dyaddown* – діадична децимація;

- 3) *dyadup* – діадична зворотна децимація;
- 4) *wrev* – перестановка елементів вектора у зворотному порядку;
- 5) *wkeep* – вилучення частини вектора чи матриці.

У теорії вейвлетів сигнали і вейвлети визначені на всій чисельній прямій \mathbb{R} . У разі оцифрованого сигналу він представляється у вигляді нескінченної в обидві сторони послідовності. Реально сигнал завжди кінцевої довжини. Стандартний спосіб зробити його нескінченним у тому, щоб продовжити його нулями. Однак при цьому можуть виникнути небажані граничні ефекти внаслідок розриву значень у кінцевих точках сигналу [42]. Тому використовуються та інші методи (моди) розширення значень сигналу (Табл. 3.3.1). Для цих цілей – функція `dwtmode`.

Таблиця. 3.3.2 Моду розширення

Параметр mode	Мода розширення
'sym' або 'symh'	Симетричне розширення щодо точки, розташованої на відстані 1/2 від кінцевої точки, у цьому випадку кінцева точка «повторюється двічі» (default mode)
'symw'	Симетричне розширення щодо граничної точки
'asym' або 'asymh'	Симетричне продовження щодо точки, розташованої на відстані 1/2 від кінцевої точки ($t = n + 1/2$), з відображенням по осі значень Ox щодо значення $x = 0$, у цьому випадку кінцева точка «повторюється», а значення змінюють знак
'asymw'	Симетричне продовження щодо кінцевої точки ($t = n$) з відображенням

	по осі значень Ox щодо значення наприкінці $x = xp$
'zpd'	Доповнення нулями
'spd' або 'sp1'	Гладке продовження, тобто лінійне продовження у напрямку першої похідної
'sp0'	Безперервне продовження (постійне продовження пер - вого значення – вліво та останнього значення – направо)
'ppd' або 'per'	Періодичне продовження значень

Джерело: сформовано автором.

Функція $ST = dwtmode$ чи $ST = dwtmode('status')$ виводить на екран і надає параметру ST поточну моду. Функція $dwtmode('mode')$ встановлює нову моду розширення. Функція $dwtmode('save', MODE)$ зберігає метод $MODE$ як новий.

$dwtmode('save')$ еквівалентно

$dwtmode('save', CURRENTMODE)$.

Багаторівневий вейвлет-розклад сигналів (декомпозиція) виконується за допомогою функції $wavedec$, яка використовується у двох формах:

$[M, Z] = wavedec(S, N, 'wname')$.

$[M, Z] = wavedec(S, N, ZD, HD)$.

Функція повертає вектори розкладу сигналу S на рівні N з використанням вейвлета $wname$ або його низькочастотного (ZD) і високочастотного (HD) фільтрів декомпозиції. N повинне бути ціле число, що визначає довжину вектора L ($length(Z)=N+2$). Значення N при K -точках сигналу має не перевищувати $K/2 > 2N \leq K$. Склад векторів M і Z пояснює наведений нижче приклад[41].

Приклад. Обчислення коефіцієнтів багаторівневого вейвлет-розкладу сигналу (Рис. 3.3.1).

```
dwtmode('save','per');load sumsin; S=sumsin(1:200);
[M,Z]=wavedec(S,3,'db4');
subplot(131); plot(S); grid; title('Сигнал S');
subplot(132); plot(M); grid; title('Сигнал M');
subplot(133); plot(Z); grid; title('Сигнал Z');
```

Лістинг 1 Функції для побудови багаторівневого вейвлет-розкладу сигналу

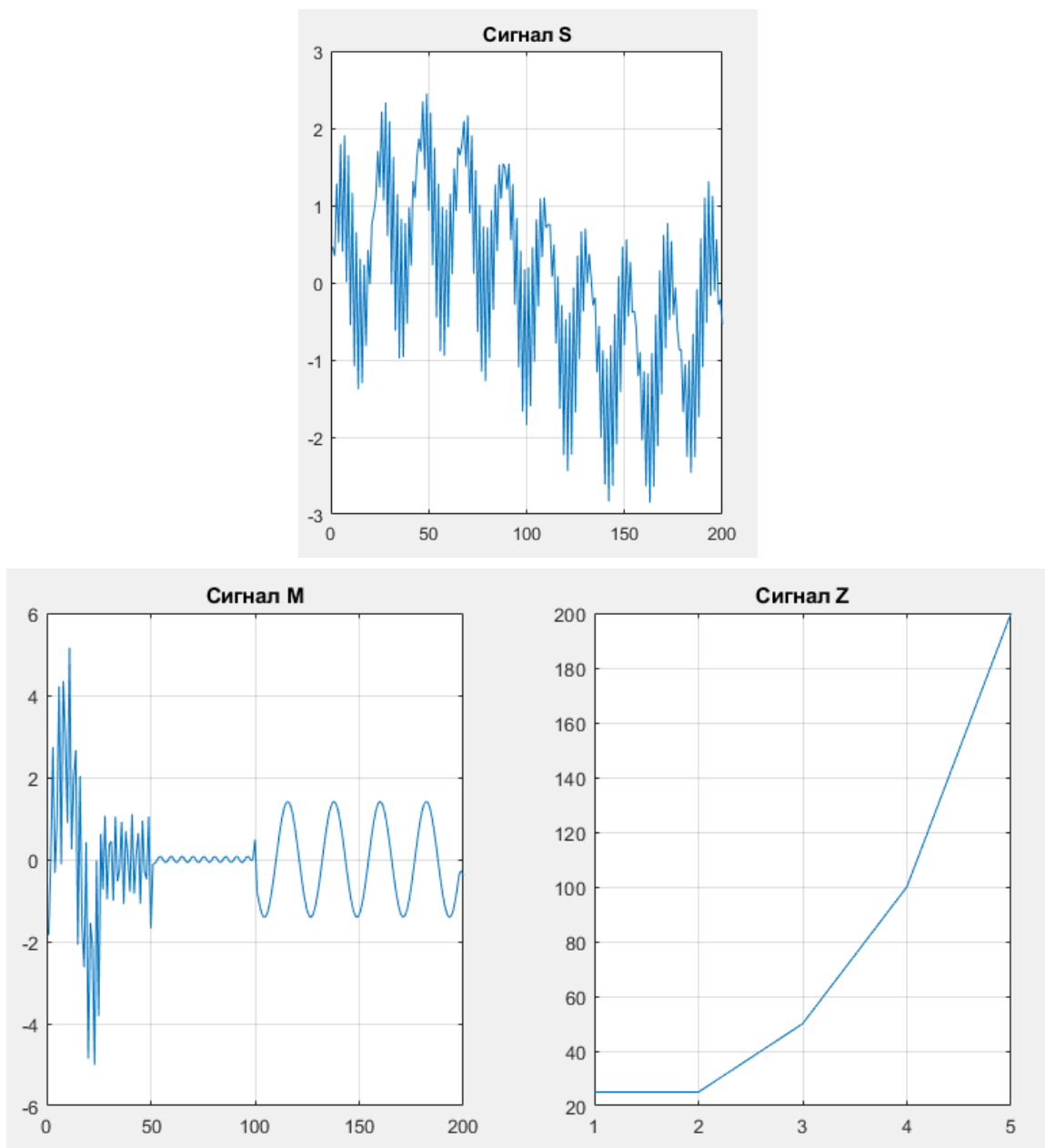


Рис. 3.3.1 Багаторівневе вейвлет-розкладання сигналу

Джерело: сформовано автором.

Приклад. Багаторівневе вейвлет-розкладання та відновлення сигналу (Рис. 3.3.2).

```
load sumsin; S=sumsin(1:200);  
[M,Z]=wavedec(S,6,'db4');  
s=waverec(M,Z,'db4');  
err=norm(S-s)  
subplot(131); plot(s); grid;  
title('Сигнал S');  
M(Z(7)+1:Z(8))=0;  
s1=waverec(M,Z,'db4');  
subplot(132); plot(s1); grid;  
title('Сигнал S1');  
M(Z(3)+1:Z(8))=0;  
s2=waverec(M,Z,'db4');  
subplot(133); plot(s2); grid;  
title('Сигнал S2');
```

Лістинг 2 Функції для багаторівневого вейвлет-відновлення сигналу

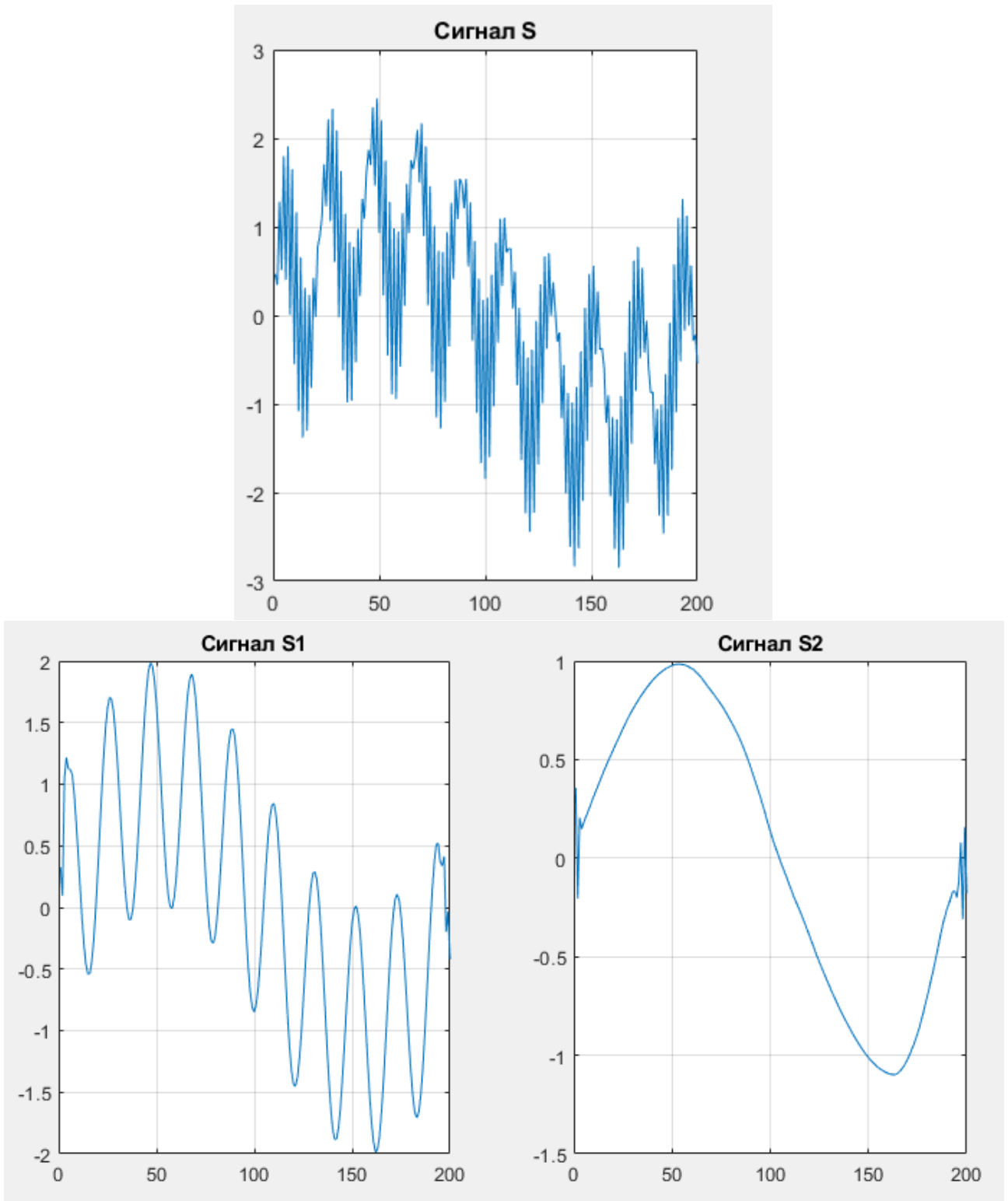


Рис. 3.3.2 Багаторівневе вейвлет-розкладання та відновлення сигналу

Джерело: сформовано автором.

На Рис. 3.3.2 представлені три відновлення сигналу: S – повної відновлення, $S1$ – відновлення з зануленням деталізуючих коефіцієнтів 1-го рівня, $S2$ – з

зануленням всіх деталізуючих коефіцієнтів. Обчислена метрика повної реконструкції має порядок 12 ступеня, тобто, по суті є точністю машинних обчислень ($\text{err} = 5.8021\text{e-}11$).

Відновлення одиночної гілки коефіцієнтів структури $[M,Z]$ може бути виконано функцією *wrcoef*:

wrcoef('type',M,Z,'wname',N) – повертає вектор відновлених коефіцієнтів рівня N , наведених до вихідних координат сигналу. Рівень N може бути будь-яким, але не більше за рівень $N_{\max} = \text{length}(L)-2$ структури $[M,Z]$. Параметром 'type' задається тип коефіцієнтів: 'a' – апроксимації, 'd' – деталізації.

wrcoef('type',M,Z,ZR,HR,N) – з використанням фільтрів реконструкції даного вейвлета.

Приклад. Відновлення сигналу з використанням двох типів вейвлетів (Рис. 3.3.3).

```
load sumsin;
S=sumsin; subplot(311); plot(S); grid;
axis([0,1000,-3,3]);
[M1,Z1]=wavedec(S,5,'haar');
[M2,Z2]=wavedec(S,5,'db10');
subplot(323); plot(M1); grid;
axis([0,1000,-6,6]);
subplot(324); plot(M2); grid;
axis([0,1000,-6,6]);
a5h=wrcoef('a',M1,Z1,'haar',5);
a5d=wrcoef('a',M2,Z2,'db10',5);
subplot(325); plot(a5h); grid;
axis([0,1000,-1.1,1.1]);
subplot(326); plot(a5d); grid;
axis([0,1000,-1.1,1.1]);
```

Лістинг 3 Функції для відновлення сигналу

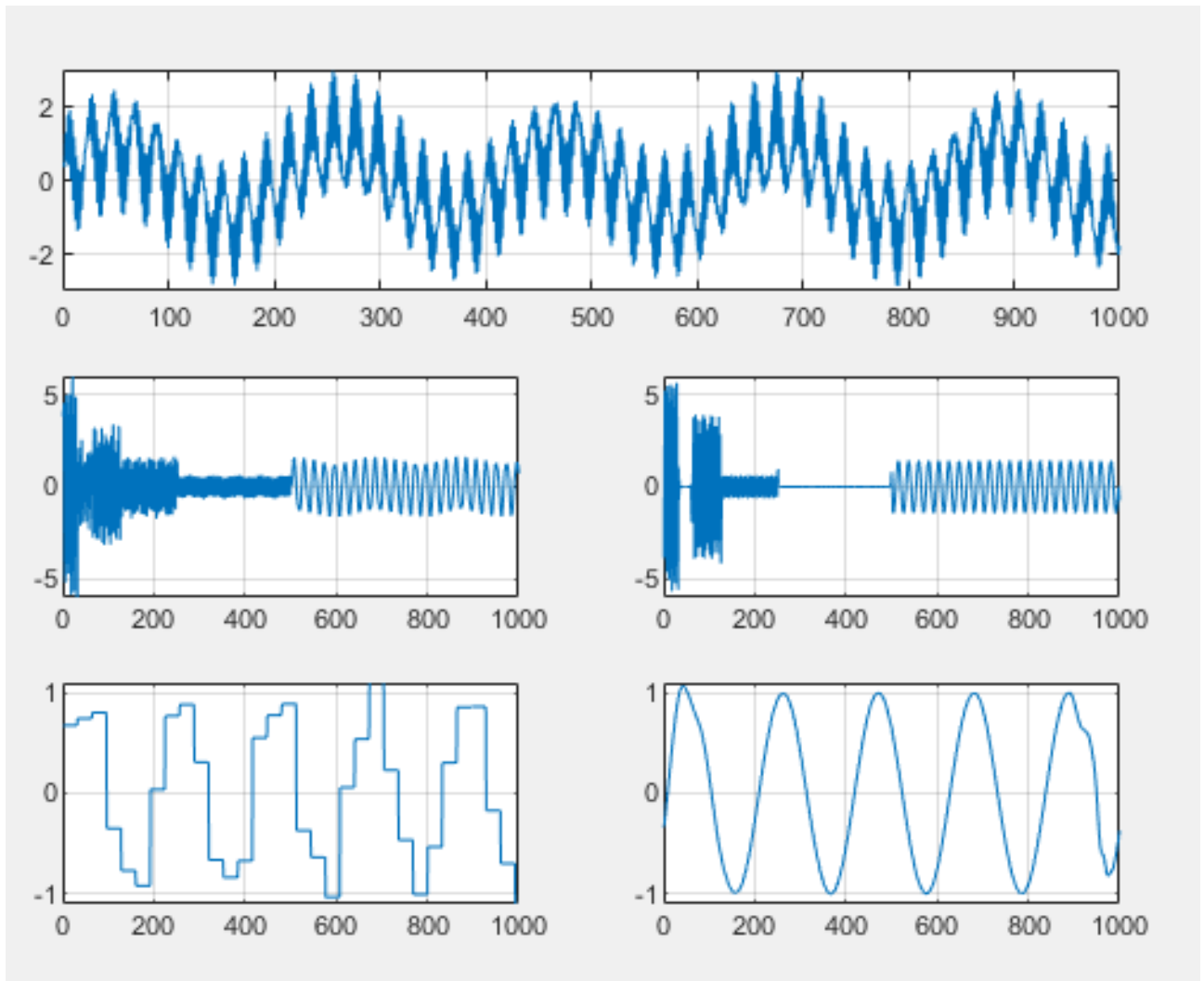


Рис. 3.3.3 Відновлення одиночної гілки коефіцієнтів апроксимації

Джерело: сформовано автором.

На Рис. 3.3.3 можна побачити відсутність деталізаційних коефіцієнтів $M2$ на рівнях 2 та 5, відновлення на рівнях 1, 3, 4 та суми коефіцієнтів на рівнях 3 та 4 дозволяють виділити високочастотні складові сигналу, показані на Рис. 3.3.4.

Приклад. Відновлення одиночних гілок коефіцієнтів вейвлет-розкладання вейвлету 'db10' (продовження попереднього прикладу). Для наочності результати на Рис. 3.3.4 наведено лише в обмеженій частині інтервалу відновлення.

```

d1=wrcoef('d',M2,Z2,'db10',1);
d3=wrcoef('d',M2,Z2,'db10',3);
d4=wrcoef('d',M2,Z2,'db10',4); a=d3+d4;
subplot(141); plot(d1); grid;
subplot(142); plot(d3); grid;
subplot(143); plot(d4); grid;
subplot(144); plot(a); grid

```

Лістинг 4 Функції для відновлення одиничної гілки сигналу

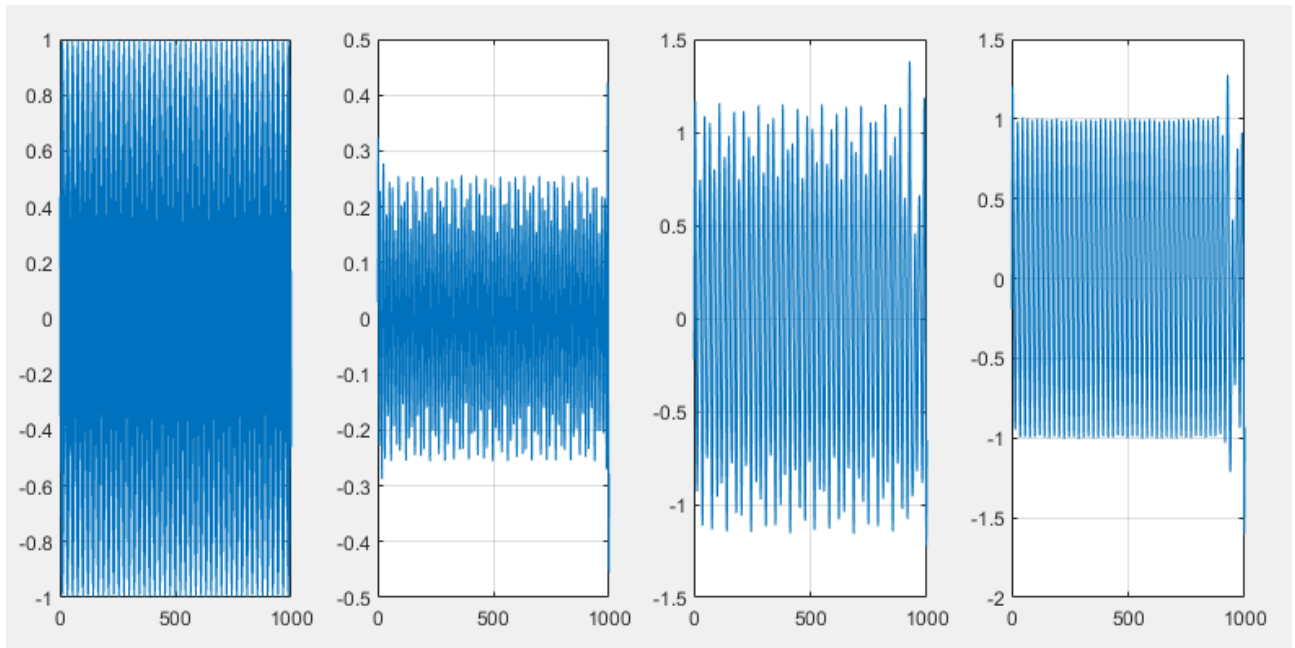


Рис. 3.3.4 Відновлення вейвлет-розкладу 'db10'

Джерело: сформовано автором.

Зворотнє однорівневе відновлення виконується функцією *upwlev*.

Приклад. Декомпозиції та зворотнього однорівневого відновлення (Рис. 3.3.5).

```

load sumsin;
S=sumsin(1:200);
[M,Z]=wavedec(S,4,'db4');
[nM,nZ,cA] = upwlev(M, Z, 'db4');
subplot(221); plot(S); grid;
subplot(222); plot(M); grid;
subplot(223); plot(cA); grid;
subplot(224); plot(nM); grid;

```

Лістинг 5 Функції зворотнього однорівневого відновлення

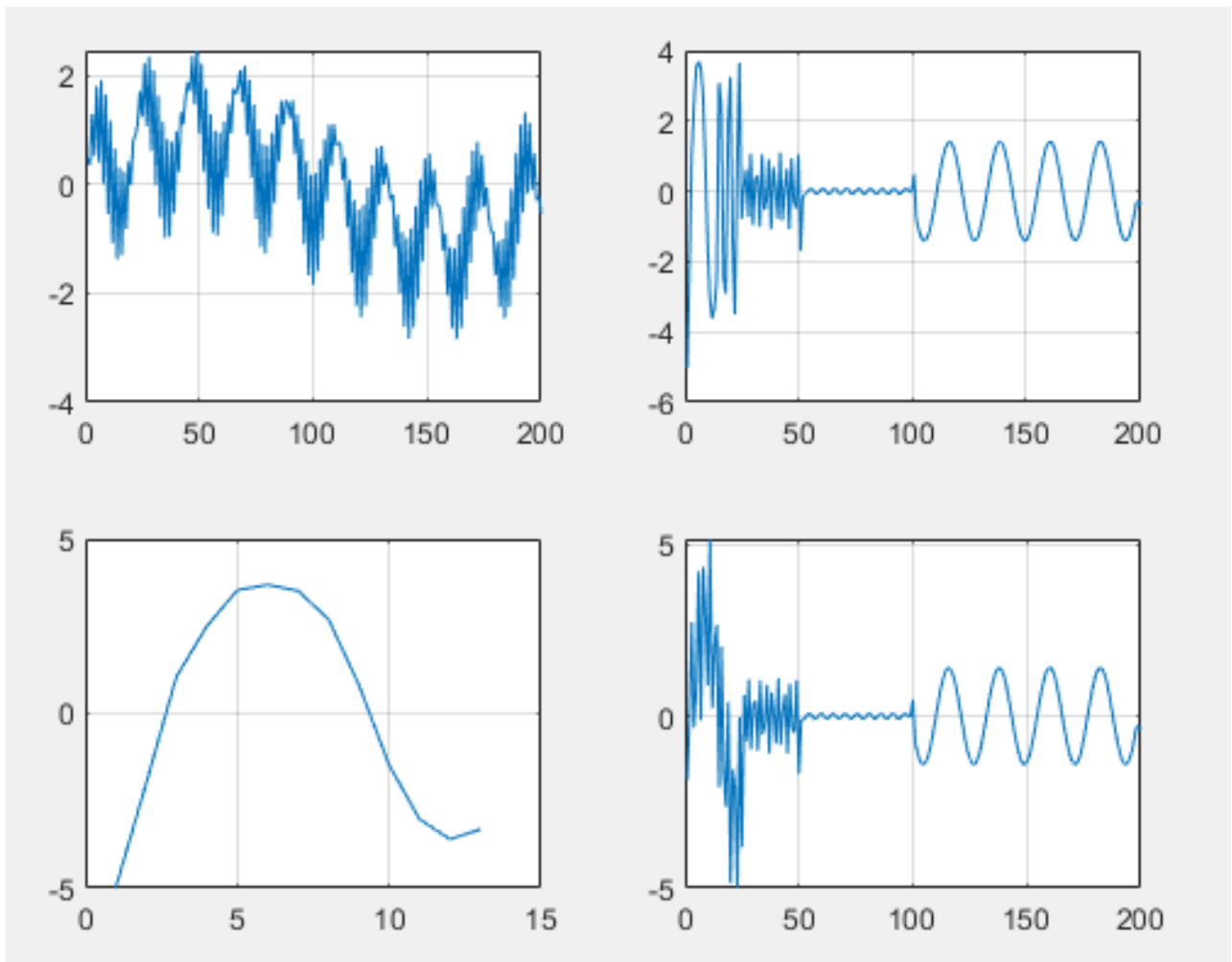


Рис. 3.3.5 Зворотнє однорівневе відновлення

Джерело: сформовано автором.

За допомогою функцій *appcoef* і *detcoef* витягуються коефіцієнти апроксимації та деталізації зі структури вейвлет-розкладу $[M, Z]$.

$A = \text{appcoef}(M, Z, 'wname', N)$ – повертає коефіцієнти апроксимації сигналу вейвлетом 'wname' лише на рівні N без зміни масштабу їх представлення.

$D = \text{detcoef}(M, Z, N)$ – повертає деталізуючі коефіцієнти на рівні N із структури розкладання $[M, Z]$. Значення N може бути будь-яким в інтервалі $1 \leq N \leq \text{length}(Z) - 2$ [42].

Приклад. Виділення коефіцієнтів апроксимації сигналу (Рис. 3.3.6).

```

load sumsin; S = sumsin (1:800);
[M, Z] = wavedec (S, 4, 'sym8');
A = appcoef (M, Z, 'sym8', 4);
subplot (131); plot (S); grid;
subplot (132); plot (M); grid;
subplot (133); plot (A); grid;

```

Лістинг 6 Функції виділення коефіцієнтів апроксимації

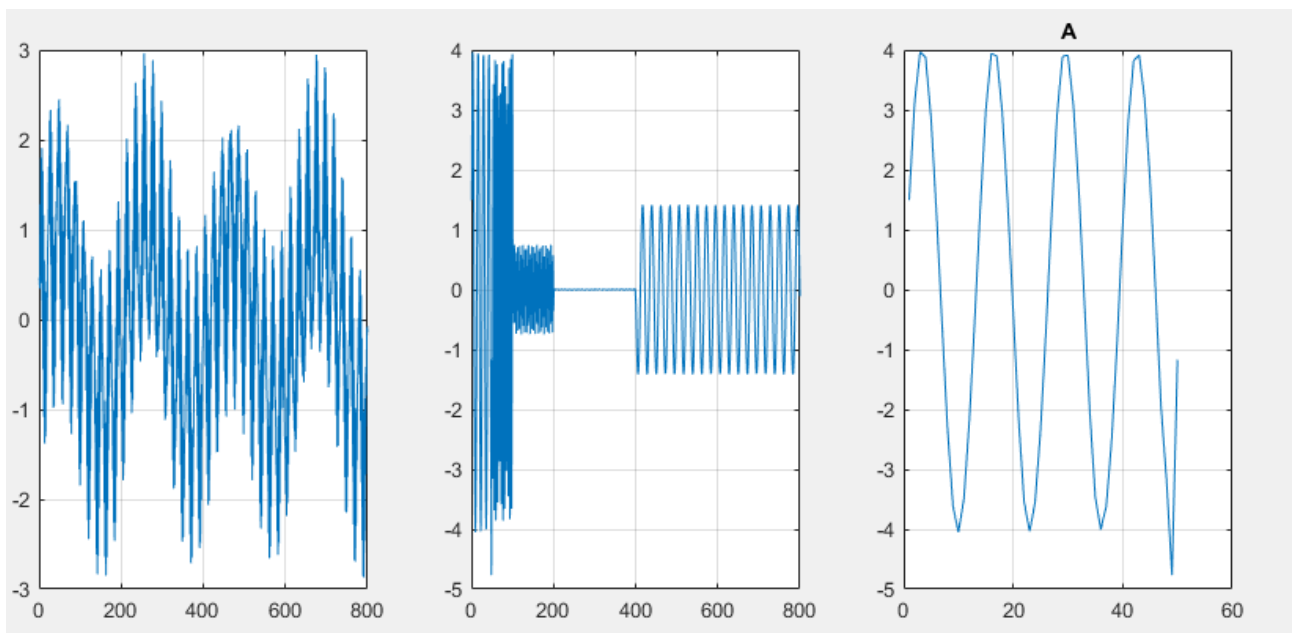


Рис. 3.3.6 Виділення коефіцієнтів апроксимації сигналу

Джерело: сформовано автором.

Приклад. Виділення коефіцієнтів деталізації сигналу (Рис. 3.3.7).

```

load sumsin;
S=sumsin; [M,Z]=wavedec(S,3,'db3');
D1=detcoef(M,Z,1);subplot(131); plot(S); grid;
subplot(132); plot(M); grid; subplot(133); plot(D1); grid;

```

Лістинг 7 Функції виділення коефіцієнтів деталізації

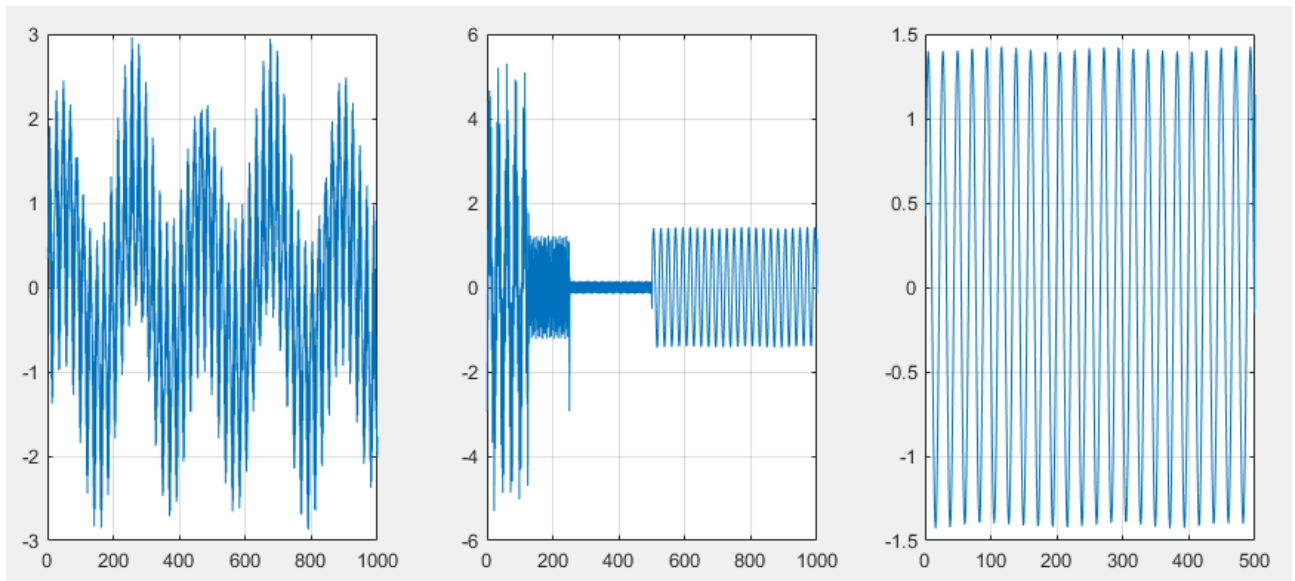


Рис. 3.3.7 Виділення коефіцієнтів деталізації сигналу

Джерело: сформовано автором.

Вейвлет-перетворення однорівневого вейвлету *'wname'* вектору *S* виконується функцією *dwt*:

$[v1, v2] = dwt(S, 'wname')$ – повертає вектори коефіцієнтів апроксимації *v1* та деталізації *v2*;

Зворотнє перетворення однорівневого вейвлету *'wname'* виконується функцією *idwt* (Рис. 3.3.8):

$$S = idwt(v1, v2, 'wname');$$

Приклад. Декомпозиція та реконструкція однорівневого дискретного сигналу на 1-му рівні (Рис. 3.3.8).

```
randn ('seed', 123456789)
s = 2 + kron (ones (1,10), [1, -1]) + ((1:20).^2)/32 + 0.5 *randn (1,20);
[v1, v2] = dwt (s, 'db4');
subplot (221); plot (v1); grid;
subplot (222); plot (v2); grid;
ss = idwt (v1, v2, 'db4');
err = norm (s-ss); t = kron (1:20,1);
subplot (212); plot (t, s, t, ss); grid; xlabel(['err = ', num2str(err)])
```

Лістинг 8 Функції однорівневого дискретного вейвлет-перетворення та зворотнього

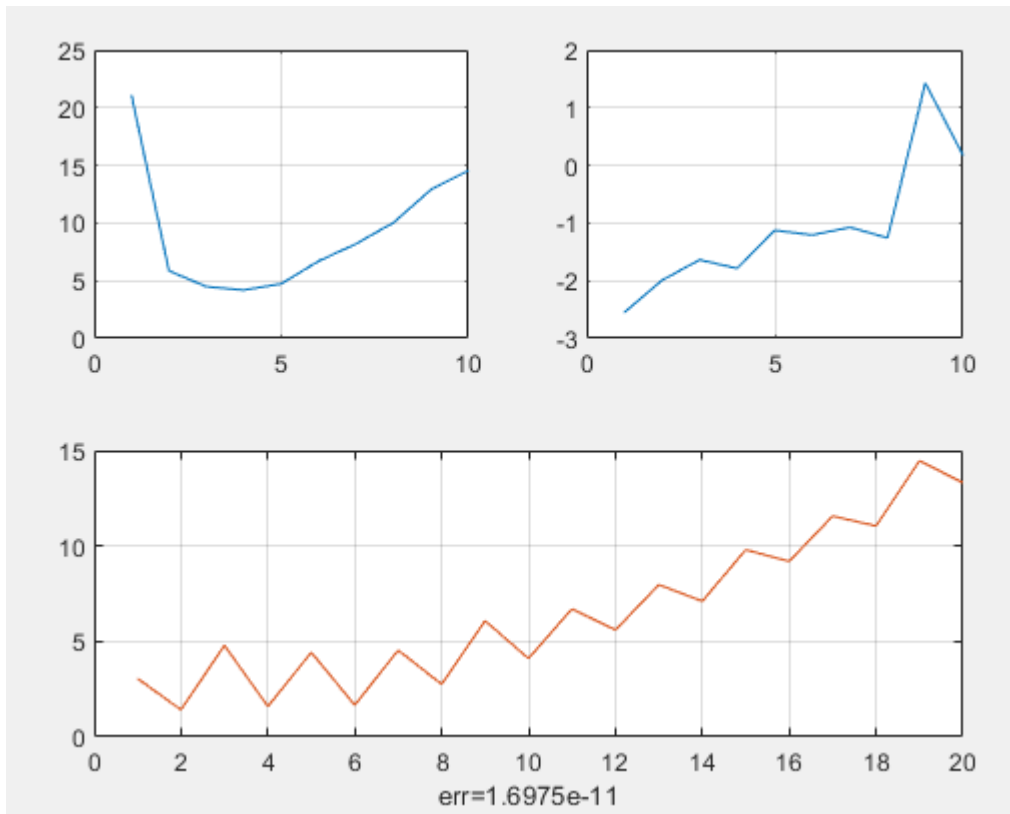


Рис. 3.3.8 Декомпозиція та реконструкція однорівневого дискретного сигналу на 1-му рівні

Джерело: сформовано автором.

Пряме відновлення сигналу з коефіцієнтів рівня N задається функцією *upcoef* у наступному форматі (Рис.3.3.9):

Приклад. Пряме відновлення сигналу з апроксимаційних коефіцієнтів розкладання (Рис. 3.3.9).

```
S=1; N=4; es=10;
for i=1:N
    reg=upcoef('a', S, 'db8',i);
    ax=subplot(N,1,i); h=plot(reg(1:es)); grid;
    set(ax, 'xlim', [1 80]); es=es*2;end
```

Лістинг 9 Функції прямого відновлення сигналу

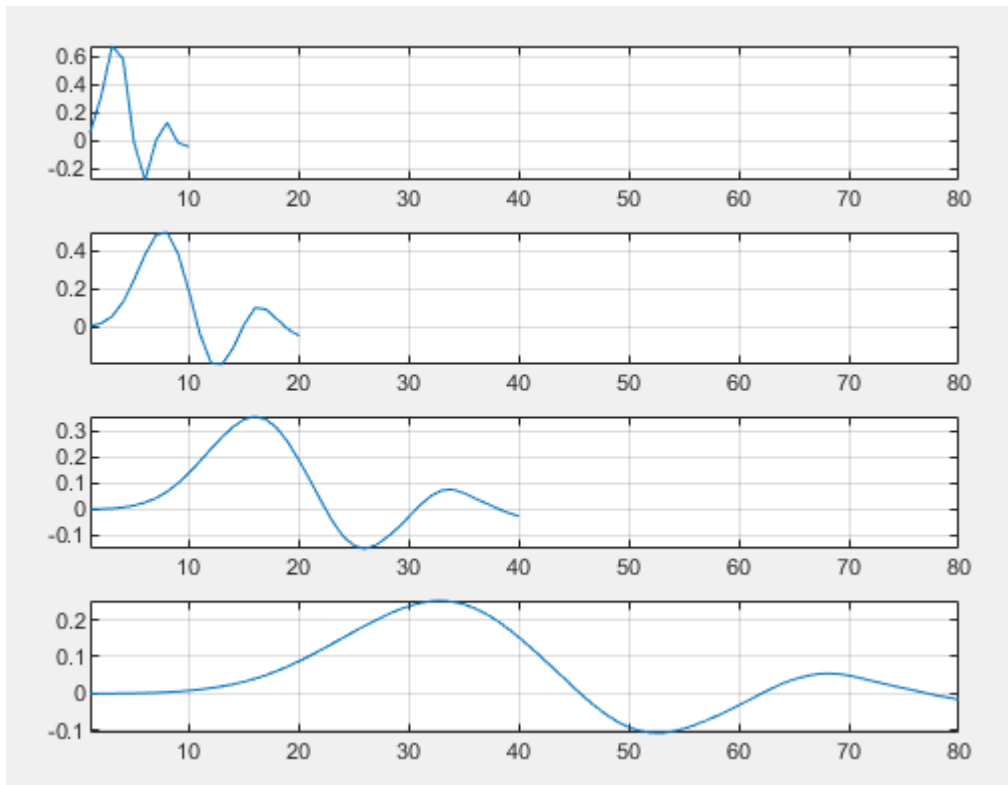


Рис. 3.3.9 Пряме відновлення сигналу з апроксимаційних коефіцієнтів розкладання

Джерело: сформовано автором.

Інтерфейс GUI під час дискретного перетворення використовується аналогічно до неперервного перетворення. Вікно перетворення включається з 'Wavelet Toolbox Main Menu' кнопкою "Wavelet 1-D" і має дещо більші функціональні можливості. Приклад вікна наведено на Рис. 3.3.10 у режимі графічного виведення всіх коефіцієнтів розкладання (Separate Mode).

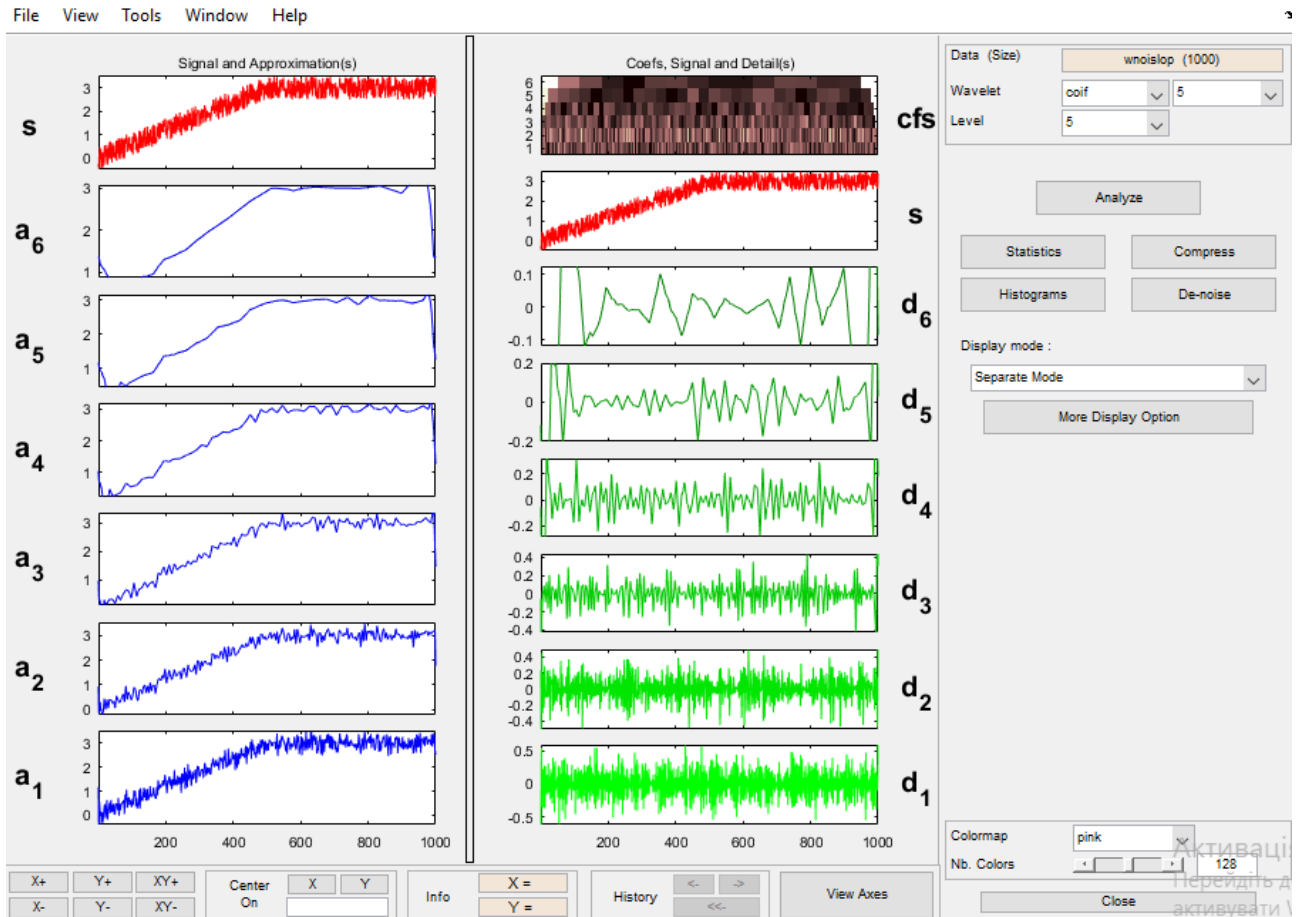


Рис. 3.3.10 Інтерфейс GUI під час дискретного перетворення

Джерело: сформовано автором.

Вікна "Statistics" та "Histograms" призначені для аналізу та графічного виведення статистичних характеристик сигналу та всіх коефіцієнтів його розкладання. У вікнах "Compress" та "De-noise" встановлюються режими компресії (стиснення) сигналів та очищення сигналів від шумів, та виконуються ці операції.

Для двовимірних вейвлет-перетворень використовуються функції аналогічні описаним вище одновимірних перетворень та ідентифікуються цифрою 2 наприкінці однойменних функцій одновимірних перетворень, тобто: *wavedec2*, *wavereg2*, *wrcoef2*, *upwlev2*, *appcoef2*, *dtco2*.

На Рис. 3.3.11 розглянемо приклад обробки двовимірного сигналу, інформаційну частину якого можна порівняти з потужністю шумів. Результати обробки наведені у вигляді контурних карт і карт поверхонь. При двовимірній

обробці вхідний сигнал S являє собою двовимірну матрицю, структура розкладання $[M,Z]$ складається з вектора коефіцієнтів апроксимації та деталізації M і матриці структури запису коефіцієнтів Z . Вектор M складається з послідовностей коефіцієнтів апроксимації та деталізації горизонтальних, вертикальних та діагональних рядків розкладання сигналу.

```
randn('seed',12345);
S(1:100,1:100)=0; S(60:70,60:70)=10;
S=S+5*randn(100,100);
[M,Z]=wavedec2(S,4,'db2');
a3=wrcoef2('a',M,Z,'db2',3);
a4=wrcoef2('a',M,Z,'db2',4);
figure(1); subplot(132); contour(a3);
subplot(131); contour(S);
subplot(133); contour(a4);
figure(2);
subplot(131); mesh(S);
subplot(132); mesh(a3);
subplot(133); mesh(a4);
```

Лістинг 10 Функції прямого відновлення сигналу

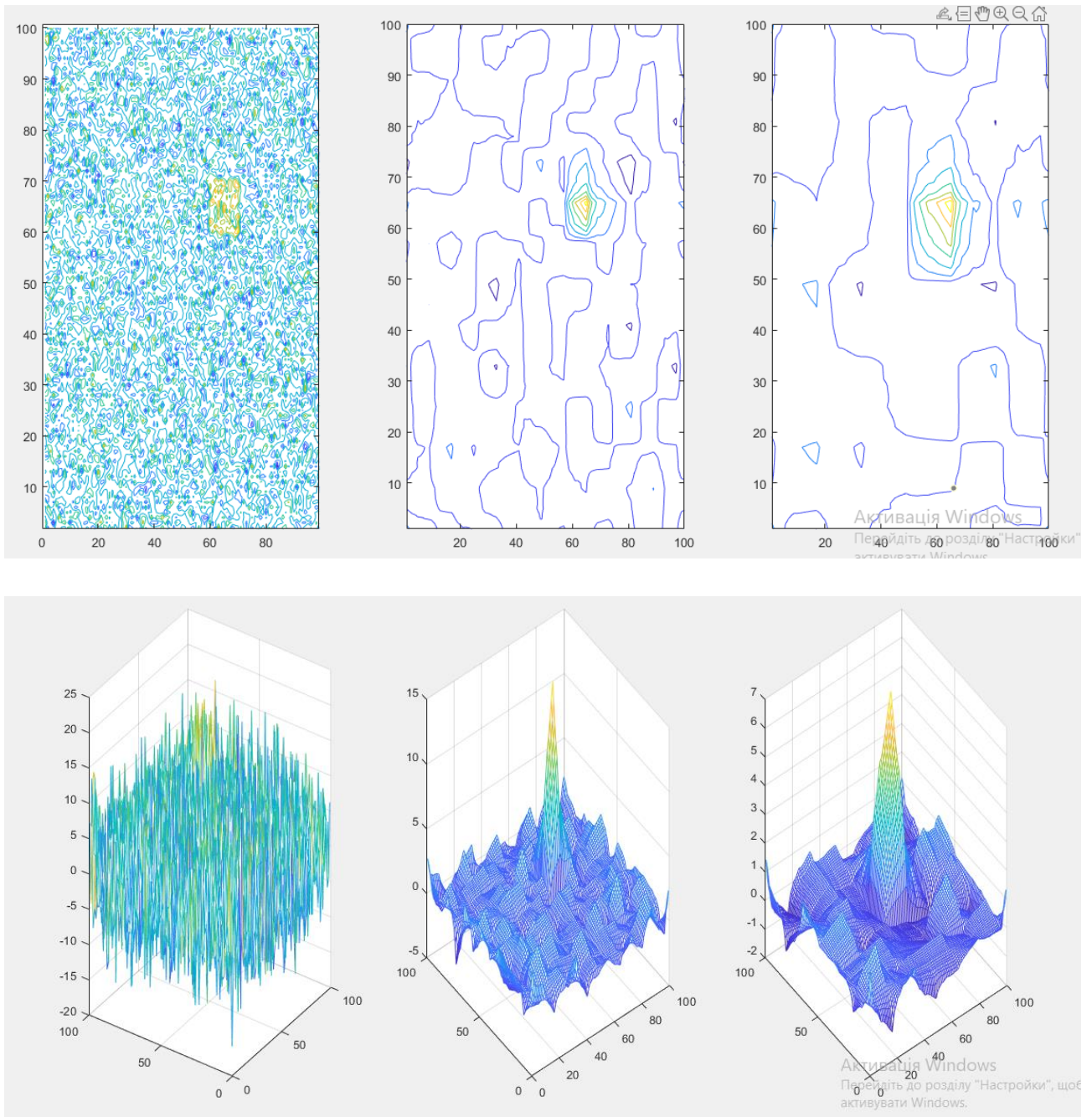


Рис. 3.3.11 Декомпозиція та апроксимаційна реконструкція двовимірного сигналу

Джерело: сформовано автором.

Аналогічним чином працюють інші функції двовимірного перетворення.

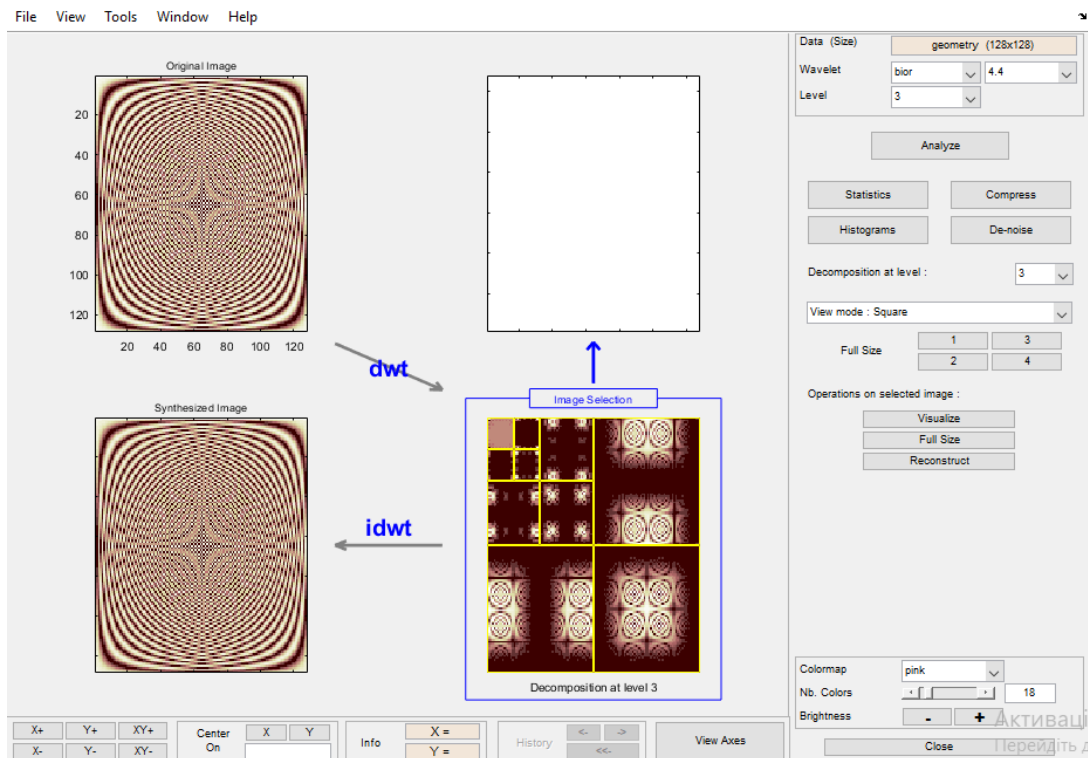


Рис. 3.3.12 Функції двовимірного перетворення

Джерело: сформовано автором.

Інтерфейс двовимірного перетворення GUI з 'Wavelet Toolbox Main Menu' включається кнопкою "Wavelet 2-D". Вікно перетворення показано на Рис. 3.3.12 та по використанню багато в чому подібно до вікна одновимірного перетворення

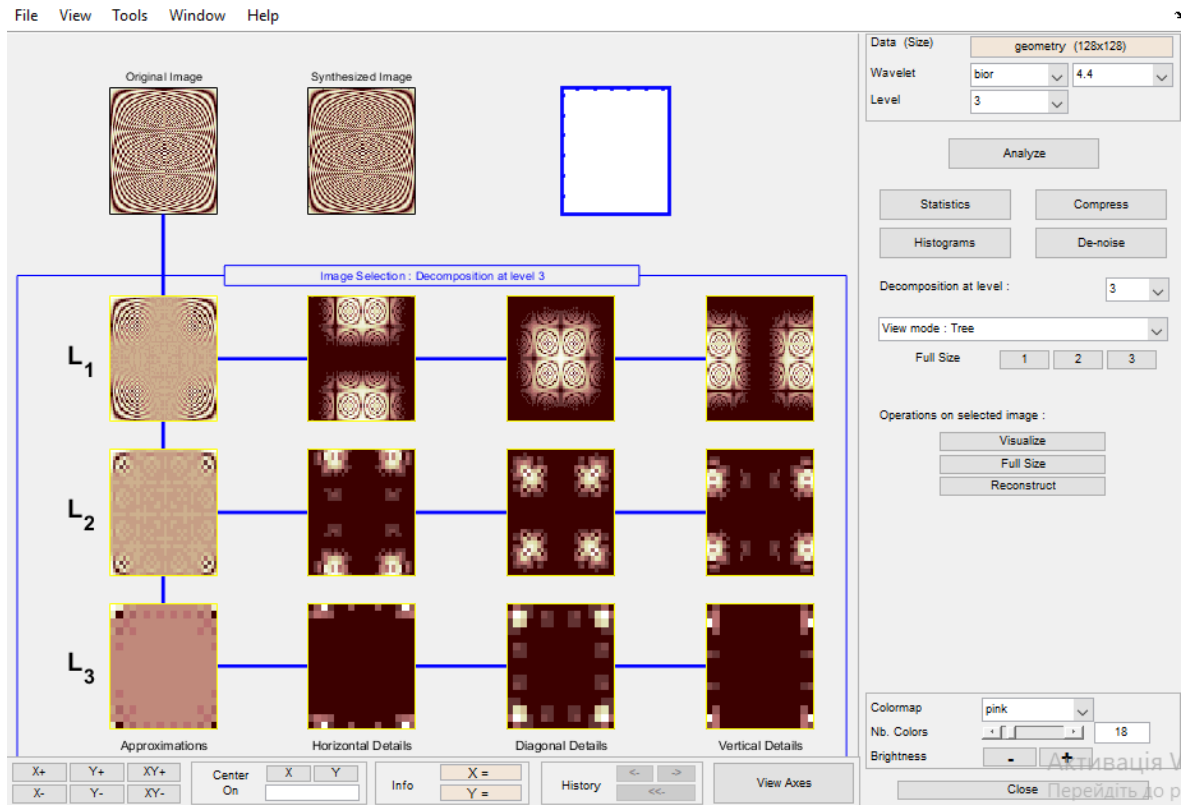


Рис. 3.3.13 Інтерфейс двовимірного перетворення

Джерело: сформовано автором.

Діагональні коефіцієнти деталізації першого рівня розкладання знаходяться у правому нижньому куті графіка, горизонтальні коефіцієнти над ним у правому верхньому кутку, вертикальні – ліворуч, у лівому нижньому кутку. Ліва верхня чверть графіка – коефіцієнти наступних рівнів, у разі другого і третього, які розташовуються за аналогічним принципом. Лівий верхній квадрат графіка – коефіцієнти апроксимації останнього рівня розкладання. У верхньому правому графіку вікна можна спостерігати зазначені коефіцієнти розкладання у вихідному масштабі вхідного сигналу (Visualize), у збільшеній формі (Full Size), і в режимі реконструкції. Кнопками 1,2,3 і 4 Full Size можна включати перегляд у збільшеному масштабі будь-який з чотирьох графіків вікна. Вигляд графічної частини вікна як View mode: Tree наведено на Рис. 3.3.13 та коментарів не вимагає.

Інтерфейс GUI немає спеціального вікна SWT. Але з використанням SWT виконується стиск сигналів та очищення від шумів у вікні 'Wavelet Toolbox

Main Menu', а, відповідно, у цьому вікні за необхідності можна переглядати і вейвлет-розклад сигналу.

Висновки до РОЗДІЛУ 3

Для кращого ознайомлення та роботи з вейвлетами було розглянуто інтерфейс MATLAB. Для дослідження сигналу за допомогою вейвлетів у MATLAB створено комплекс графічних оболонок для візуалізації вихідних даних та результатів вейвлет-аналізу. Пакет представляє великі та одночасно унікальні засоби для роботи з вейвлетами, причому як у командному режимі, так і з допомогою спеціальних засобів графічного інтерфейсу користувача GUI цього пакета.

У даному розділі було розглянуто пакет Wavelet Toolbox , ряд функцій для їх побудови, дослідження та перетворення, приклади дискретних одномірних та двовимірних перетворень.

ВИСНОВКИ

Можливості використання вейвлетів не обмежуються наведеними вище прикладами. Статистична обробка, редукція надлишкової інформації, криптографія та стеганографія, обробка мультимедійної інформації - це лише короткий список тих областей, де вейвлети активно застосовуються.

Для кращого розуміння як працюють вейвлети в першому розділі був розглянутий поділ цифрової обробки інформації, що допоміг з'ясувати процес формування сигналів та типи перетворювачів за допомогою, яких їх можна отримати. Особливу увагу було приділено терміну «сигнал», його визначенню та представленню у різних формах, зокрема в математичній. В даному розділі було розглянута класифікація сигналів, а саме:

- 1) цифровий, що є квантованим за своїми значеннями й дискретним за аргументом;
- 2) дискретний, який за своїми значеннями також є неперервною функцією, але визначеною тільки за дискретними значеннями аргументу;
- 3) аналоговий, що є неперервною функцією неперервного аргументу, тобто визначений для будь-якого значення аргументів.

Зупинились на моделях сигналів не випадкові й випадкові, в залежності від можливості точного передбачення їхніх значень у будь-які моменти часу та представлення їхніх графіків з завадами та без для кращого розуміння.

В другому розділі розглядалися два методи цифрової обробки інформації задля їх оцінки. Першим методом було перетворення Фур'є в якому сигнал може бути поданий у вигляді інтегрального розкладу за системою комплексних синусоїдальних функцій – інтеграла Фур'є. Дискретне перетворення Фур'є є базовим алгоритмом цифрової обробки сигналів у частотній області. Завдяки наявності ефективних алгоритмів його обчислення, алгоритмів швидкого перетворення Фур'є – ДПФ широко використовується для цілей цифрової фільтрації та спектрально-кореляційного аналізу сигналів. Другим і найбільш ефективним в теперішній час було розглянуте вейвлет-перетворення. Особливу

увагу приділили ознакам, які обов'язково повинна мати вихідна функція, щоб стати вейвлетом:

- 1) обмеженість;
- 2) локалізація;
- 3) нульове середнє;
- 4) автомодельність.

Були розглянуті неперервне та дискретне вейвлет-перетворення, властивості вейвлет-аналізу та ШВП. Зрештою при порівнянні цих двох методів було доведено ефективність та практичність вейвлетів.

Для ознайомлення та роботи з вейвлетами було розглянуто інтерфейс MATLAB. Для дослідження сигналу за допомогою вейвлетів у MATLAB створено комплекс графічних оболонок для візуалізації вихідних даних та результатів вейвлет-аналізу. У даному розділі було розглянуто пакет Wavelet Toolbox, ряд функцій для їх побудови, дослідження та перетворення, приклади дискретних одновимірних та двовимірних перетворень.

Незважаючи на те, що математичний апарат вейвлет-аналізу добре розроблений і теорія, в загальному, є сформованою, вейвлети залишають велике поле для досліджень. Досить сказати, що вибір вейвлета, що найбільш пасує для аналізу конкретних даних, являє собою скоріше мистецтво, ніж рутинну процедуру.

Саме тому, в даній роботі проаналізовано ефективність застосування вейвлет-перетворення у цифровій обробці інформації з метою швидкого та якісного формування та обробки сигналів. Оскільки їх розвиток не стоїть на місці, дослідження такої теми є перспективним та допоможе розкрити їх користь та необхідність.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Павлов А.В. Обработка информации оптическими методами. Санкт-Петербург, 2010. 65с.
2. Колонов С.О. Цифрова обробка інформації. Київ, 2008. 126с.
3. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам: пер. з англ. Ижевск, 2001. 464с.
4. Левкович-Маслюк Л., Переберин А. Введение в вейвлет-анализ: навч. посібник. Москва, 1999. 256с
5. Уидроу Б., Стириз С. Адаптивная обработка сигналов. М.: Радио и связь, 1989. 440 с.
6. Ахмад Х.М., Жирков В.Ф. Введение в цифровую обработку речевых сигналов. Владимир, 2007. 192с.
7. Ватолин Д.С. Алгоритмы сжатия изображений. М.: Радио и связь, 1999. 348с.
8. Винцюк Т.К. Анализ, распознавание и интерпретация речевых сигналов. К.: Наук.думка, 1987. 264с.
9. Лукин А. Введение в цифровую обработку сигналов. М.: МГУ, 2007. 54с.
10. Рабинер Л.Р., Шафер Р.В. Цифровая обработка речевых сигналов.М.: Радио и связь, 1981. 496с.
11. Сато Ю. Обработка сигналов. М.:ОДЭКА, 1999. 17с.
12. Хуанга Т.С. Быстрые алгоритмы в цифровой обработке изображений. М.: Радио и связь, 1984. 356с.
13. Яковлев А.Н. Введение в вейвлет-преобразования. Новосибирск, 2003. 104с.
14. Блейхут Р. Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов.М.: Мир, 1989. 448с.
15. Воробьев В.И., Грибунин В.Г. Теория и практика вейвлет-преобразования. Спб.: ВУС. 204с.
16. Глинченко А.С. Цифровая обработка сигналов: В 2 ч. Ч. 1. Красноярск, 2001. 199с.

17. Глинченко А.С. Цифровая обработка сигналов: В 2 ч. Ч. 2. Красноярск, 2001. 181с.
18. Малозёмов В.Н., Певний А.Б., Третьяков А.А. Быстрое вейвлетное преобразование дискретных периодических сигналов и изображений, 1998. 125с.
19. Айфицер Э.С., Джервис Б.У. Цифровая обработка сигналов: практический подход. М.: «Вильямс», 2004. 992с.
20. Баранов Л.А. Модели систем автоматического управления. М.: МИИТ, 2008. 552с.
21. Сидоренко В. Г., Егорова Е.В., Хачатурян А.Р., Федоров А.В. Сборник типовых задач по дисциплине «Цифровая обработка сигналов». М.: МИИТ, 2004. 132с.
22. О.В. Дробик, В.В. Кідалов, В.В. Коваль, Б.Я. Костік, В.С. Лазебний, Г.М. Розорінов, Г.О. Сукач. Навчальний посібник з дисципліни «Цифрова обробка аудіо- та відеоінформації у мультимедійних системах» К.: Наукова думка, 2008. 144с.
23. Сюезев В.В. Основы теории цифровой обработки сигналов: навч. посібник: М.: «РТСофт», 2014. 752с.
24. Новиков Л.В. Спектральный анализ сигналов в базисе вейвлетов, 2000. 70–76с.
25. Новиков Л.В. Основы вейвлет-анализа сигналов: навч. посібник.СПб.: «МОДУС», 1999. 152с.
26. Петухов А.П. Введение в теорию базисов всплесков.СПб.:СПбГТУ, 1999. 132с.
27. Истомина Т.В., Чувьикин Б.В., Щеголев В.Е. Применение теории wavelets в задачах обработки информации: Монография. Пенза, 2000. 188с.
28. Кашин Б.С., Саакян А.Д. Ортогональные ряды. М.: АФЦ. Гл. 7 «Введение в теорию всплесков».244–296с.
29. Чуи Т.К. Введение в вейвлеты. М.: Мир, 2001. 412с.
30. Дьяконов В.П., Абраменкова И.В. MATLAB. Обработка сигналов и изображений. Специальный справочник. Питер, 2002. 608с.

31. Дьяконов В.П. Вейвлеты. От теории к практике. М.: СОЛОН-Р, 2002. 446с.
32. Столниц Э., ДеРоуз Т., Салезин Д. Вейвлеты в компьютерной графике. Теория и приложения. Ижевск, 2002. 272с.
33. Бердышев В.И., Петрак Л.В. Аппроксимация функций. Сжатие численной информации. Приложения. Екатеринбург, 1999. 127–150с.
34. Фрик П.Г. Турбулентность: модели и подходы. Курс лекций. Пермь, 1999. 71–108с.
35. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Высшая школа, 2000. 65–68с.
36. Гоноровский И. С. Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Радио, 1986.
37. Никамин В. А. Аналого-цифровые и цифро-аналоговые преобразователи. Справочник. М.: Альтекс, 2003. 224с.
38. Сергиенко А. Б. Цифровая обработка сигналов. Питер, 2003. 604с.
39. Гольденберг Л. М. и др. Цифровая обработка сигналов: Учебное пособие для вузов. М.: Радио и связь, 1990. 256с.
40. Рибальченко М.О., Єгоров О.П., Зворикін В.Б. Цифрова обробка сигналів. Навчальний посібник. Дніпро, 2018. 79с.
41. Павлейно М.А., Ромаданов В.М. СПЕКТРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В MATLAB. СПб., 2007
42. Смоленцев Н. К. Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в MATLAB. М.: ДМК Пресс, 2014. 628с.
43. Dutkay D. E., Jorgensen P. E. T. Wavelets on fractals: Rev. Mat. Iberoamericana. 2006. 131–180p.
44. Daubechies I. The wavelet transform, time-frequency localization and signal analysis: IEEE Trans. Inform. Theory, 1990. 961–1005p.
45. Fabec R., Ólafsson G. The Continuous Wavelet Transform and Symmetric Spaces :Acta Applicandae Math, 2003. 41–69p.