$$\eta_E = \left|\frac{E(40)-E(38)}{E(38)}\right| = 9{,}290497\cdot 10^{-4}$$

(або 0,092905%).

Висновки

1. Знайдено верхню межу зростання гармонійного ряду в проміжку [N; 2N], яка дорівнює ln2=0,69314718…

2. Уточнено нижню межу зростання гармонійного ряду в проміжку [N; 2N], де N≥3, яка більше за 0,5 і дорівнює 0,605528633…

3. Введено у науковий обіг вираз для аналітичної функції частинної суми гармонійного ряду.

4. Знайдені верхні та нижні межі зростання частинної суми гармонічного ряду.

Переклад з рос. Сіренка Г.О.

Література

1. **Маркушевич А.И.** Ряды. – Москва: Наука, 1979. – 192 с.
2. **Шевелев И.Ш., Марутаев М.А., Шмелев И.Т.** Золотое сечение. Три взгляда на природу гармонии. – Москва: Стройиздат, 1990. – 343 с.
3. **Математический энциклопедический** словарь. – Москва: Советская энциклопедия, 1988. – С. 641.
4. **Картавов С.А.** Математические термины. Справочно-библиографический словарь. – Киев: Высшая школа, 1988. – С. 280.
5. **Золотое сечение** // Математическая энциклопедия. – Т.2. – Москва: Сов. энциклопедия, 1979. – 1103 с.: ил. –С. 466–467.

Стефанюк Б.М. – доктор фізико-математичних наук, автор понад ста наукових статей і монографій, винахідник, математик, кібернетик, розробник нових методів вуглевидобутку. А ще – самобутній поет і політкаторжанин комуністичного тоталітаризму. Народився він 1 січня 1930 року в селі Суботові Галицького району на Станіславщині (сучасна Івано-Франківська область) в селянській родині. У 1948 році, завершивши середню освіту у Галичі, вступає до Львівського держуніверситету на фізико-математичний факультет. У квітні 1952 року заарештований за написання «націоналістичних творів» і засуджений військовим трибуналом до 25 років позбавлення волі. Ув'язнення відбував у сумнозвісній Інті, працював на шахтах. 1 липня 1956 року був звільнений за відсутности складу злочину зі зняттям судимости, але продовжити навчання у Львові йому було заборонено. У грудні цього ж року прибув у місто Новокузнецьк Кемеровської области в Росії, де проживає дотепер. З того часу беззмінно працює у Науково-дослідному інституті з видобутку вугілля гідравлічним способом.

Референт Солтис Л.М.

Рецензенти:

Сіренко Г.О. – доктор технічних наук, професор, завідувач катедри теоретичної та прикладної хемії Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника.

Солтис Л.М. – аспірант катедри теоретичної та прикладної хемії Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника.

Г.О. Сіренко, Л.М. Солтис

Уточненя та зауваги до статті Б.М. Стефанюка «Межі зростання гармонійного ряду»

1. Гармонійний ряд. Числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \quad (1)$$

носить назву гармонійного [1], кожний член якого, починаючи з n=2, є **гармонійним (h) середнім** [2]:

$$\overline{n}_h = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{n_i}\right)\Big/N} \quad (2)$$

двох сусідніх членів ряду (1), наприклад, член 1/n є гармонійним середнім 1/(n–1) та 1/(n+1), де N=2, 3, 4, … Гармонійна середня чисел не перевершує такі середні цих же чисел:

• **ґеометричну**

$$\overline{n}_g = \sqrt[N]{\prod_{i=1}^{N} n_i} = \sqrt[N]{n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_i \cdot \ldots \cdot n_N}\ ; \qquad (3)$$

• **аритметичну**

$$\overline{n} = \frac{\sum_{i=1}^{N} n_i}{N} = \frac{n_1 + n_2 + \ldots + n_i + \ldots + n_N}{N}\ ; \qquad (4)$$

• **квадратичну**

$$\overline{n}_q = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} n_i^2}{N}} = \sqrt{\frac{n_1^2 + n_2^2 + \ldots + n_i^2 + \ldots + n_N^2}{N}}\ ; \qquad (5)$$

• **кубічну**

$$\overline{n}_Q = \sqrt[3]{\frac{\sum_{i=1}^{N} n_i^3}{N}} = \sqrt[3]{\frac{n_1^3 + n_2^3 + \ldots + n_i^3 + \ldots + n_N^3}{N}}\ , \qquad (6)$$

що можна подати мажорантним рядом:

$$\overline{n}_h < \overline{n}_g < \overline{n} < \overline{n}_q < \overline{n}_Q\ . \qquad (7)$$

2. Гармонійний ряд (1) розбігається (G. Leibniz, 1673) [1], а його частинні суми

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \qquad (8)$$

зростають як lnN [1] (L. Euler, 1740) [або за означення автора статті частинні суми

$$S_{2N} = \sum_{n=1}^{2N} \frac{1}{n} \qquad (9)$$

зростають як ln(2n)]: існує така константа E>0 (стала Ейлера), що

$$S_N = \ln N + E + \varepsilon_N\ , \qquad (10)$$

де

$$\lim_{N \to \infty} \varepsilon_N = 0\ . \qquad (11)$$

3. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \qquad (12)$$

носить назву узагальненого гармонійного ряду [1]. Цей ряд збігається за $\alpha>1$, а за $\alpha\leq1$ розбігається [1].

4. Тому, дійсно, за $\alpha>1$ ряд (12), що перетворюється у ряд (1), який розбігається, але знаходиться на межі «збіжности – розбіжности», тому знаходження нижньої та верхньої межі зростання гармонійного ряду є актуальним завданням.

5. Автор статті доводить, що ці межі зростання гармонійного ряду у проміжку [N; 2N] дорівнюють:

0,60552863…(нижня межа)

0,69314718…(верхня межа).

6. Тоді ряд (1) знаходиться на невичерпній межі «гармонії – дисгармонії» Природи, Всесвіту. При ідеалізації межі вона відповідає межі «абсолютної гармонії (абсолютного порядку)», коли ентропія, прагнучи S→0, досягає S=0, та «абсолютної дисгармонії (абсолютного хаосу)», коли ентропія, прагнучи S→∞, досягає свого абсолютного максимуму S=∞.

Відповідно, ця невичерпна межа знаходиться між абсолютною рівноваґою та абсолютною нерівноваґою, абсолютною оборотністю та абсолютною необоротністю термодинамічних процесів, термодинамічного стану ідеального та реального ґазів, стану термодинамічних систем, який характеризується мінімумом ентропії та максимумом термодинамічних потенціялів Ґіббса і Гельмгольца.

А тому межа між абсолютною термодинамічною оборотністю та абсолютною необоротністю потребує ретельного теоретичного дослідження.

7. Автором знайдені за виразом функції

$$C_{2N} = \frac{a + \ln(2N)}{b + \ln(2N)} \qquad \textbf{(13)}$$

та значеннями $\mathbf{C_{2N}}$, що входить у рівняння

$$S_{2N} = C_{2N}(1 + \ln 2N) \qquad \textbf{(14)}$$

характеристичні числа **a** і **b** (a<b), що пов'язані з числами Фібоначчі [3] та сталою Ейлера, за двома точками:

(•1) А (C_6) та (•9) В (C_{210}):

$$\begin{cases} b_1 = 2{,}399838271 \\ a_1 = 1{,}886714474\,, \end{cases} \qquad \textbf{(15)}$$

а співвідношення **a:b** дорівнюють:

$$\begin{cases} \dfrac{a_1}{b_1} = 0{,}786184009 \\ \dfrac{b_1}{a_1} = 1{,}271966852\,. \end{cases} \qquad \textbf{(16)}$$

8. Розрахуємо характеристичні числа a і b за двома точками (•1) А (C_6) та (•13) С (C_{300}); (•9) В (C_{210}) та (•13) С (C_{300}) (табл. 1 та рис. 1 рец. статті):

а) за точками (•1) А (C_6) та (•13) С (C_{300}):

$$\begin{cases} a_2 = C_6 b_2 - (1 - C_6)\ln 6 \\ a_2 = C_{300} b_2 - (1 - C_{300})\ln 300\,, \end{cases} \qquad \textbf{(17)}$$

$$\begin{cases} a_2 = 0{,}877582767 \cdot b_2 - (1 - 0{,}877582767)\cdot 1{,}791759469 \\ a_2 = 0{,}937182183 \cdot b_2 - (1 - 0{,}937182183)\cdot 5{,}703782475\,. \end{cases} \qquad \textbf{(18)}$$

Звідки:

$$\begin{cases} b_2 = 2{,}331514909 \\ a_2 = 1{,}826755069\,, \end{cases} \qquad \textbf{(19)}$$

$$\begin{cases} \dfrac{a_2}{b_2} = 0{,}783505634 \\ \dfrac{b_2}{a_2} = 1{,}276315007\,. \end{cases} \qquad \textbf{(20)}$$

б) за точками (•9) В (C_{210}) та (•13) С (C_{300}):

$$\begin{cases} a_3 = C_{210} b_3 - (1 - C_{210})\ln 210 \\ a_3 = C_{300} b_3 - (1 - C_{300})\ln 300\,, \end{cases} \qquad \textbf{(21)}$$

$$\begin{cases} a_3 = 0{,}933764375 \cdot b_3 - (1 - 0{,}933764375)\cdot 5{,}347107531 \\ a_3 = 0{,}937182183 \cdot b_3 - (1 - 0{,}937182183)\cdot 5{,}703782475\,. \end{cases} \qquad \textbf{(22)}$$

Звідки:

$$\begin{cases} b_3 = 1{,}208421889 \\ a_3 = 0{,}774212301\,, \end{cases} \qquad \textbf{(23)}$$

$$\begin{cases} \dfrac{a_3}{b_3} = 0{,}640680467 \\ \dfrac{b_3}{a_3} = 1{,}560840466\,. \end{cases} \qquad \textbf{(24)}$$

9. Відносна різниця між характеристичними числами та їх співвідношеннями становить:

а) між числами, розрахованими за сукупностями точок (1 – 9) та (1 – 13):

$$\Delta_{12}^{a} = \left|\frac{a_1 - a_2}{a_1}\right| \cdot 100 = 3{,}177980\,\% ; \quad \textbf{(25)}$$

$$\Delta_{12}^{b} = \left|\frac{b_1 - b_2}{b_1}\right| \cdot 100 = 2{,}846999\,\% ; \quad \textbf{(26)}$$

$$\Delta_{12}^{a/b} = \left|\frac{a_1/b_1 - a_2/b_2}{a_1/b_1}\right| \cdot 100 = 0{,}340680\,\% ; \quad \textbf{(27)}$$

$$\Delta_{12}^{b/a} = \left|\frac{b_1/a_1 - b_2/a_2}{b_1/a_1}\right| \cdot 100 = 0{,}341845\,\% ; \quad \textbf{(28)}$$

б) між числами, розрахованими за сукупностями точок (1 – 9) та (9 – 13):

$$\Delta_{13}^{a} = \left|\frac{a_1 - a_3}{a_1}\right| \cdot 100 = 58{,}965052\% ; \quad \textbf{(29)}$$

$$\Delta_{13}^{b} = \left|\frac{b_1 - b_3}{b_1}\right| \cdot 100 = 49{,}645695\% ; \quad \textbf{(30)}$$

$$\Delta_{13}^{a/b} = \left|\frac{a_1/b_1 - a_3/b_3}{a_1/b_1}\right| \cdot 100 = 18{,}507568\% ; \quad \textbf{(31)}$$

$$\Delta_{13}^{b/a} = \left|\frac{b_1/a_1 - b_3/a_3}{b_1/a_1}\right| \cdot 100 = 22{,}710782\% . \quad \textbf{(32)}$$

10. Таким чином, від вибраних точок (табл. 1 рец. статті) значно залежать величини характеристичних чисел **a** і **b** гармонійного ряду та їх співвідношення.

11. За результатами $\mathbf{C_{2N}}$ та ln(2N) (табл. 1 рец. статті) розраховували величини **a** і **b** за (13):

$$\begin{cases} a_i = C_{2N(i)} \cdot b_i - [1 - C_{2N(i)}]\ln[2N(i)] \\ a_j = C_{2N(j)} \cdot b_j - [1 - C_{2N(j)}]\ln[2N(j)], \end{cases} \quad \textbf{(33)}$$

за двома методами:

(А) між точками (•1) (2N=6) та (•*i*) (2N=10, 32, …, 1000) (табл. 1);

(Б) між сусідніми точками (•1) (2N=6) та (•2) (2N=10); (•2) (2N=10) та (•3) (2N=32); … (•14) (2N=320) та (•15) (2N=1000) (табл. 2).

Як видно з табл. 1, величини $\boldsymbol{b_{ij}}$ (рис. 1), $\boldsymbol{a_{ij}}$ (рис. 2) та співвідношення $\boldsymbol{a_{ij}:b_{ij}}$ (рис. 3), що розраховані за методом (А), спадають при зростанні $(2N)_j$ та const $(2N)_i$=6:

• **для $\boldsymbol{b_{ij}}$:** від 4,430004 до 2,251802 під час зміни $(2N)_j$ від 10 до 320 (при $(2N)_j$=1000 b_{ij}=2,331608);

• **для $\boldsymbol{a_{ij}}$:** від 3,668353 до 1,756800 під час зміни $(2N)_j$ від 10 до 320 (при $(2N)_j$=1000 a_{ij}=1,826837);

• **для $\boldsymbol{a_{ij}:b_{ij}}$:** від 0,828070 до 0,780175 під час зміни $(2N)_j$ від 10 до 320, а при $(2N)_j$=1000 $a_{ij}:b_{ij}$=0,783509;

• **для $\boldsymbol{b_{ij}:a_{ij}}$** величини співвідношення (рис. 4) зростають від 1,207628 до 1,281763 під час зміни $(2N)_j$ від 10 до 320 та const $(2N)_i$=6, а при $(2N)_j$=1000 $b_{ij}:a_{ij}$=1,276309.

Як видно з табл. 2, величини $\boldsymbol{b_{ij}}$ (рис. 5), $\boldsymbol{a_{ij}}$ (рис. 6) та співвідношення $\boldsymbol{a_{ij}:b_{ij}}$ (рис. 7), що розраховані за методом (Б), спадають при зростанні парних сусідніх точок $(2N)_i$ – $(2N)_j$:

• **для $\boldsymbol{b_{ij}}$:** від 4,430004 до 1,888412 під час зміни $(2N)_i$ – $(2N)_j$ від 6–10 до 280–300 (а потім зростають від 2,075552 до 3,015096 під час зміни $(2N)_i$ – $(2N)_j$ від 300–320 до 320–1000);

• **для $\boldsymbol{a_{ij}}$:** від 3,668353 до 0,755459 під час зміни $(2N)_i$ – $(2N)_j$ від 6–10 до 280–300 (а потім зростають від 1,591429 до 2,472984 під час зміни $(2N)_i$ – $(2N)_j$ від 300–320 до 320–1000);

• **для $\boldsymbol{a_{ij}:b_{ij}}$:** від 0,828070 до 0,635688 під час зміни $(2N)_i$ – $(2N)_j$ від 6–10 до 280–300 (а потім зростають від 0,766750 до 0,820201 під час зміни $(2N)_i$ – $(2N)_j$ від 300–320 до 320–1000);

• **для $\boldsymbol{b_{ij}:a_{ij}}$** величини співвідношення (рис. 8) зростають від 1,207628 до 1,573099 під час зміни $(2N)_i$ – $(2N)_j$ від 6–10 до 280–300 (а потім спадають від 1,304207 до 1,219214 під час зміни $(2N)_i$ – $(2N)_j$ від 300–320 до 320–1000).

12. Порівняння розрахунків характеристичних чисел ряду **a** і **b** та їх співвідношень за табл. 1 і табл. 2 [за двома методами (А) і (Б)] показує, що на ці величини значно впливають $(2N)_i$ та $(2N)_j$ та розмах між ними. Вплив величини розмаху суттєвий на функцію $\mathbf{C_{2N}}$ та суму $\mathbf{S_{2N}}$ (табл. 3).

Як видно з табл. 3, функція $\mathbf{C_{2N}}$ і, відповідно, сума $\mathbf{S_{2N}}$, які розраховані за характеристичними числами $\boldsymbol{a_{ij}}$ та $\boldsymbol{b_{ij}}$, зростають:

•**метод (А):** від C_{2N}=0,877582 до 0,944870 (рис. 9) та від S_{2N}=2,450 до 7,471804 (рис. 11) під час збільшення $(2N)_i$ від 6 до 1000, при цьому відносна похибка η_C зменшується від 0,4522 до 0,0080% під час зростання $(2N)_i$ від 10 до 200 [при $(2N)_9$=210 – η_C=0%], а потім зростає від 0,0075 до 0,1172% (рис. 10) під час збільшення $(2N)_i$ від 220 до 320 [при $(2N)_{15}$=1000 – η_C=0,0526%], а відносна похибка η_S (рис. 12) зменшується від 0,4521 до 0,0080% під час зростання $(2N)_i$ від 10 до 200 [при $(2N)_9$=210 – η_S=0%], а потім зростає від 0,0075 до 0,1173% під час збільшення $(2N)_i$ від 220 до 320 [при $(2N)_{15}$=1000 – η_S=0,0526%] {для a_{ij}, b_{ij} за точками 1(2N=6)~9(2N=210)};

•**метод (Б):** від C_{2N}=0,877583 до 0,945958 (рис. 13) та від S_{2N}=2,450 до 7,480404 (рис. 15) під час збільшення $(2N)_i$ від 6 до 1000, при цьому відносна похибка η_C зменшується від 0,5009 до 0,0637% (рис. 14) під час зростання $(2N)_i$ від 10 до 300 [при $(2N)_{14}$=320 – η_C=0%, а при $(2N)_{15}$=1000 – η_C=0,0625%], а відносна похибка η_S зменшується від 0,5008 до 0,0637% (рис. 16) під час зростання $(2N)_i$ від 10 до 300 [при $(2N)_{14}$=320 – η_S=0,0001%≈0%, а при $(2N)_{15}$=1000 – η_S=0,0625%] {для a_{ij}, b_{ij} за точками 1(2N=6)~14(2N=320)}.

Таблиця 1

Розрахункові дані величин характеристичних чисел **a** і **b** гармонійного ряду
та їх співвідношень **a:b** і **b:a** між точками i=1 та j за методом (А)

№ точок $i-j$	$(2N)_i-(2N)_j$	b_{ij}	a_{ij}	$a_{ij}:b_{ij}=(a:b)_{ij}$	$b_{ij}:a_{ij}=(b:a)_{ij}$
1 – 2	6 – 10	4,430004394	3,668353278	0,828069896	1,207627526
1 – 3	6 – 32	3,097019388	2,498548608	0,806759111	1,239527371
1 – 4	6 – 50	2,851630920	2,283199918	0,800664595	1,248962431
1 – 5	6 – 80	2,661168720	2,116053573	0,795159494	1,257609332
1 – 6	6 – 100	2,587985192	2,051828970	0,792828713	1,261306488
1 – 7	6 – 150	2,476143241	1,953678401	0,789000558	1,267426225
1 – 8	6 – 200	2,410148139	1,895762237	0,786574985	1,271334607
1 – 9	6 – 210	2,399838271	1,886714474	0,786184009	1,271966852
1 – 10	6 – 220	2,390242380	1,878293286	0,785817079	1,272560786
1 – 11	6 – 256	2,360419505	1,852121244	0,784657659	1,274441137
1 – 12	6 – 280	2,343828809	1,837561536	0,783999893	1,275510378
1 – 13	6 – 300	2,331514909	1,826755069	0,783505634	1,276315007
1 – 14	6 – 320	2,251801732	1,756800159	0,780175329	1,281763165
1 – 15	6 – 1000	2,331608491	1,826837195	0,783509410	1,276308856

Таблиця 2

Розрахункові дані величин характеристичних чисел **a** і **b** гармонійного ряду
та їх співвідношень **a:b** і **b:a** між сусідніми точками i та j за методом (Б)

№ точок $i-j$	$(2N)_i-(2N)_j$	b_{ij}	a_{ij}	$a_{ij}:b_{ij}=(a:b)_{ij}$	$b_{ij}:a_{ij}=(b:a)_{ij}$
1 – 2	6 – 10	4,430004394	3,668353278	0,828069896	1,207627526
2 – 3	10 – 32	2,532627023	1,985624311	0,784017659	1,275481474
3 – 4	32 – 50	1,779978881	1,301611659	0,731251181	1,367519159
4 – 5	50 – 80	1,561404755	1,101406939	0,705394892	1,417645649
5 – 6	80 – 100	1,435549843	0,985292694	0,686352131	1,456978065
6 – 7	100 – 150	1,349245370	0,905421098	0,671057406	1,490185476
7 – 8	150 – 200	1,273169558	0,834654236	0,655571939	1,525385606
8 – 9	200 – 210	1,238517320	0,802314342	0,647802278	1,543680893
9 – 10	210 – 220	1,231147136	0,795432326	0,646090384	1,547771061
10 – 11	220 – 256	1,214704546	0,780071174	0,642190051	1,557171430
11 – 12	256 – 280	1,199971530	0,766285432	0,638586344	1,565958948
12 – 13	280 – 300	1,188411844	0,755459242	0,635688079	1,573098556
13 – 14	300 – 320	2,075551957	1,591428511	0,766749541	1,304206845
14 – 15	320 – 1000	3,015095961	2,472983906	0,820200729	1,219213742

Таблиця 3

Залежність функції $\mathbf{C_{2N}}$ та суми $\mathbf{S_{2N}}$ від (2N), розрахованих за величинами $\boldsymbol{a_{ij}}$ та $\boldsymbol{b_{ij}}$ для двох розмахів точок

№ точки	$(2N)_i$	a_{ij}, b_{ij} розраховані за точками [•1(2N=6)] та [•9(2N=210)] (метод А)				a_{ij}, b_{ij} розраховані за точками [•1(2N=6)] та [•14(2N=320)] (метод Б)			
		C_{2N}	η_C, %	S_{2N}	η_S, %	C_{2N}	η_C, %	S_{2N}	η_S, %
1	6	0,877582767	0,0	2,450000000	0,0	0,877582767	0,0	2,450000000	0,0
2	10	0,890880986	0,452150	2,942210264	0,452107	0,891313234	0,500888	2,943637800	0,500845
3	32	0,912519425	0,408384	4,075070758	0,408411	0,913423993	0,507917	4,079110320	0,507945
4	50	0,918704836	0,299887	4,512699289	0,299917	0,919692464	0,407711	4,517550541	0,407742
5	80	0,924338835	0,188037	4,974816230	0,188039	0,925382215	0,301128	4,980431729	0,301130
6	100	0,926749011	0,138959	5,194585926	0,138959	0,927810471	0,253654	5,200535590	0,253654
7	150	0,930756949	0,058261	5,594440568	0,058298	0,931840844	0,174782	5,600955465	0,174819
8	200	0,933344580	0,007991	5,878500378	0,007977	0,934437086	0,125142	5,885381327	0,125039
9	210	0,933764375	0,0	5,926702897	0,0	0,934858865	0,117213	5,933649742	0,117213
10	220	0,934159742	0,007466	5,972669459	0,007461	0,935255228	0,109795	5,979673588	0,109795
11	256	0,935415634	0,030818	6,122461308	0,030774	0,936513672	0,086531	6,129648162	0,086575
12	280	0,936135959	0,043889	6,211065128	0,043868	0,937235042	0,073466	6,218357312	0,073487
13	300	0,936679687	0,053618	6,279296870	0,053618	0,937779356	0,063720	6,286668812	0,063720
14	320	0,937179996	0,117242	6,343135044	0,117341	0,938280050	0,0	6,350580563	0,000099
15	1000	0,944870412	0,052561	7,471803988	0,052562	0,945957913	0,062473	7,480403680	0,062473

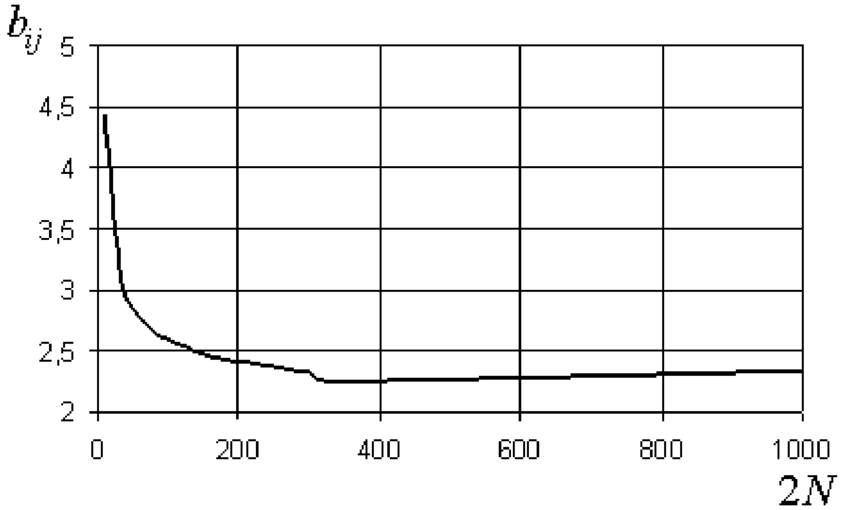

Рис. 1

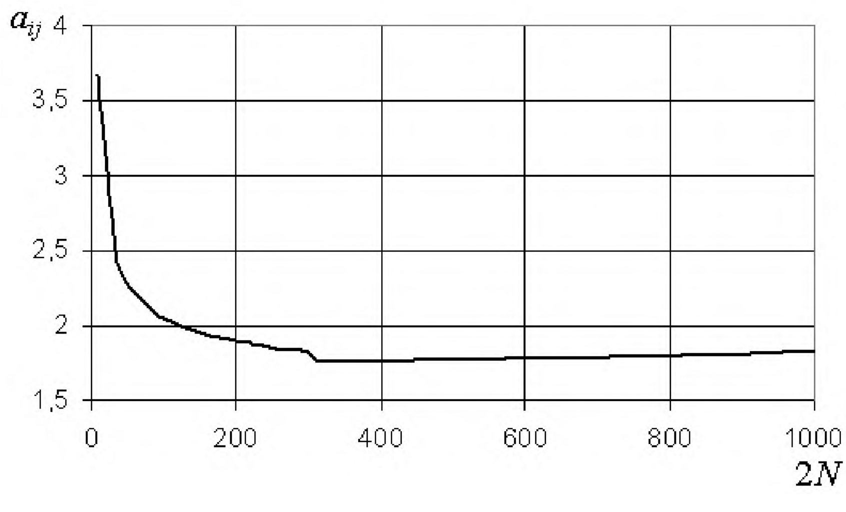

Рис. 2

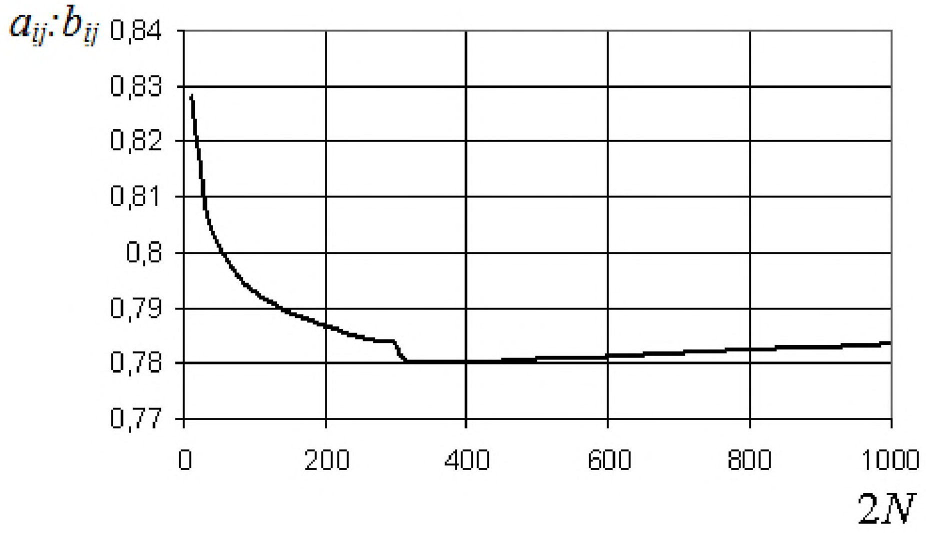

Рис. 3

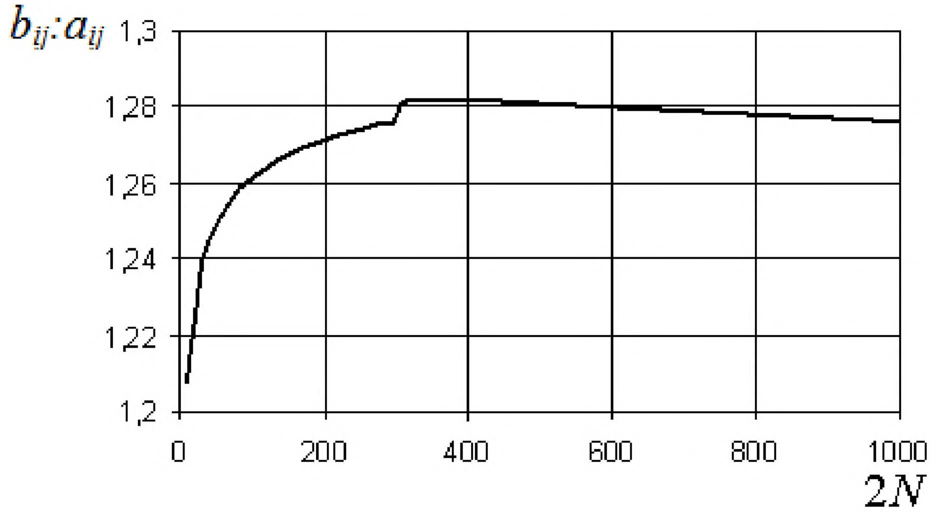

Рис. 4

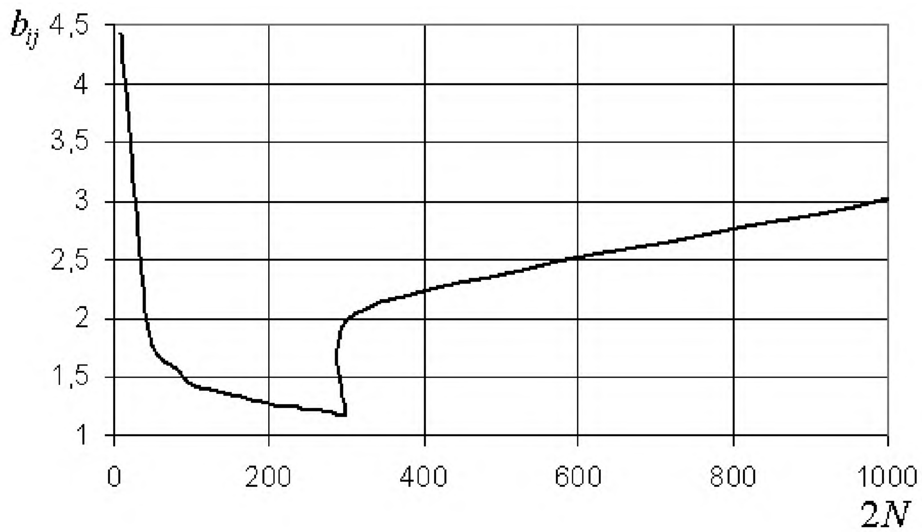

Рис. 5

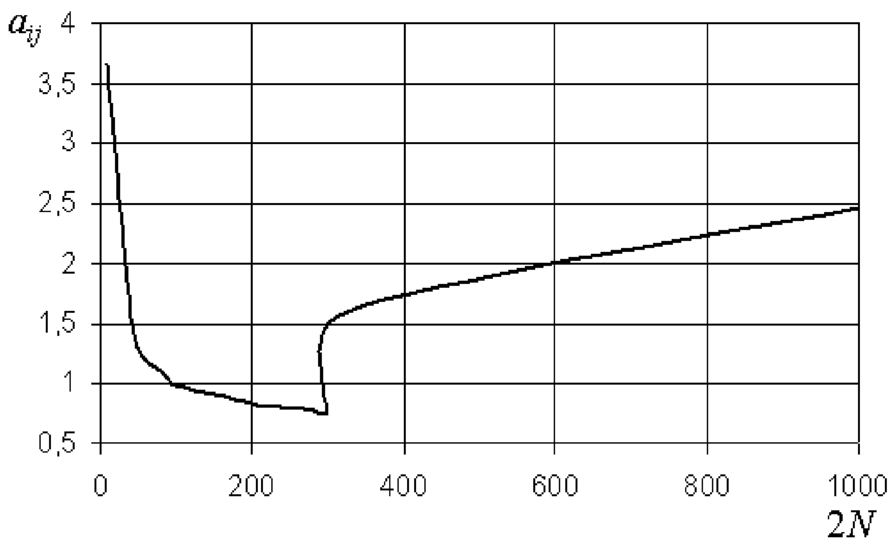

Рис. 6

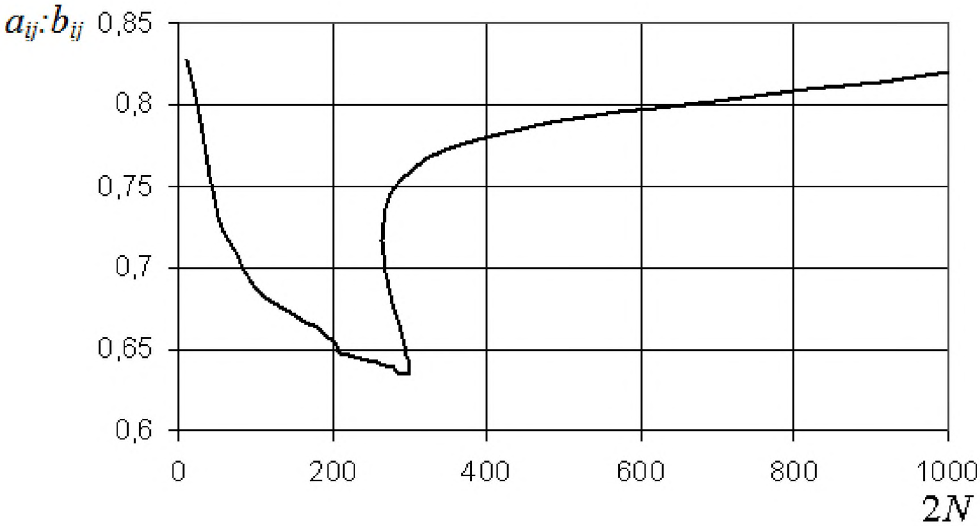

Рис. 7

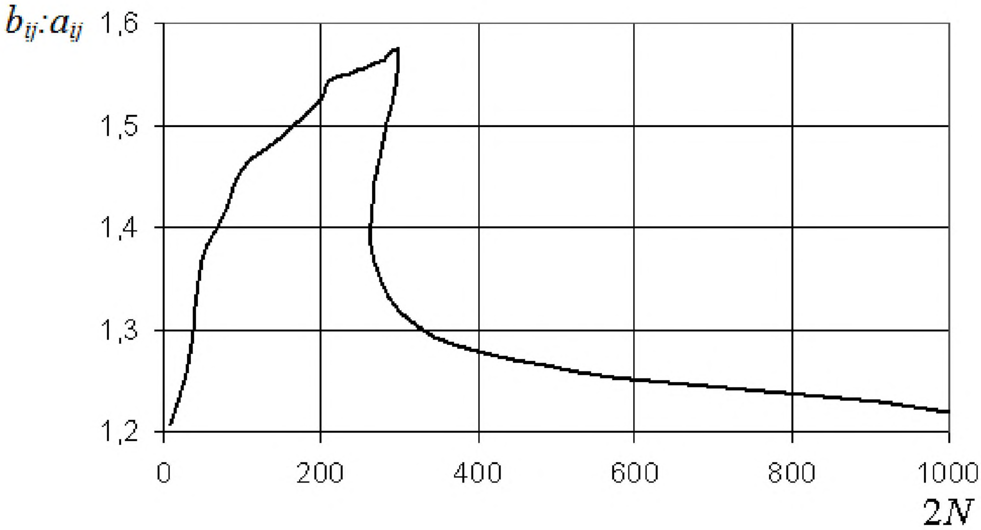

Рис. 8

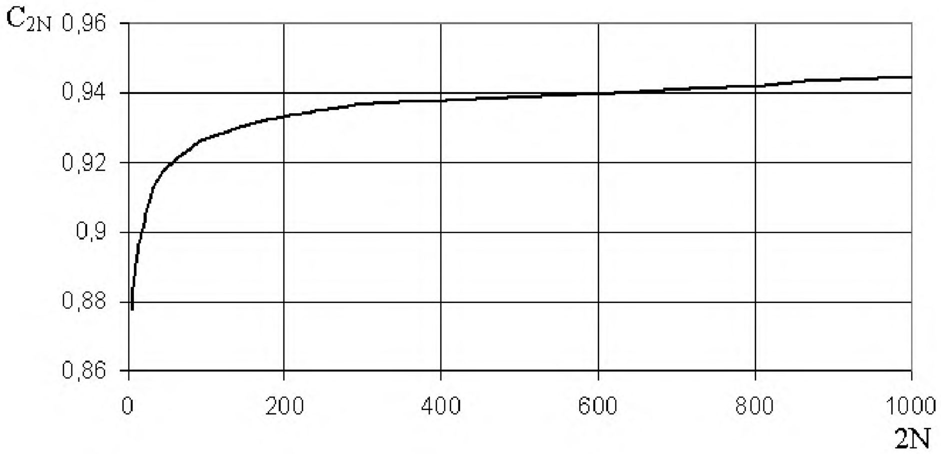

Рис. 9

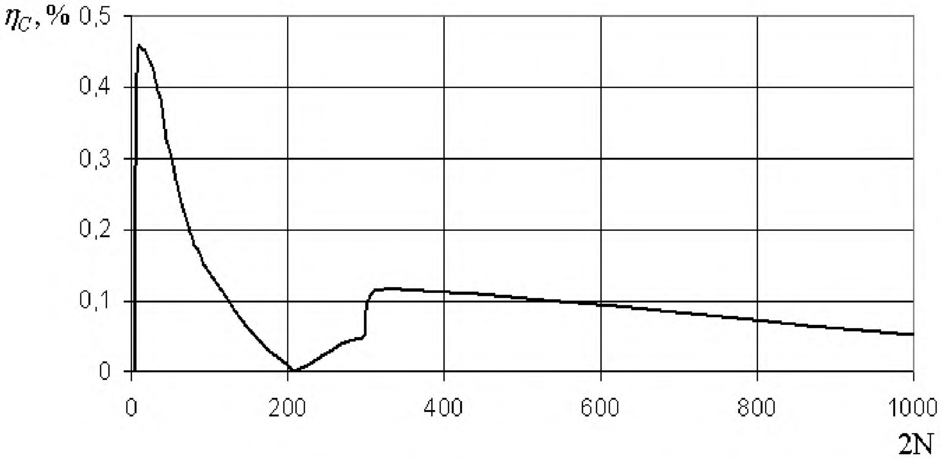

Рис. 10

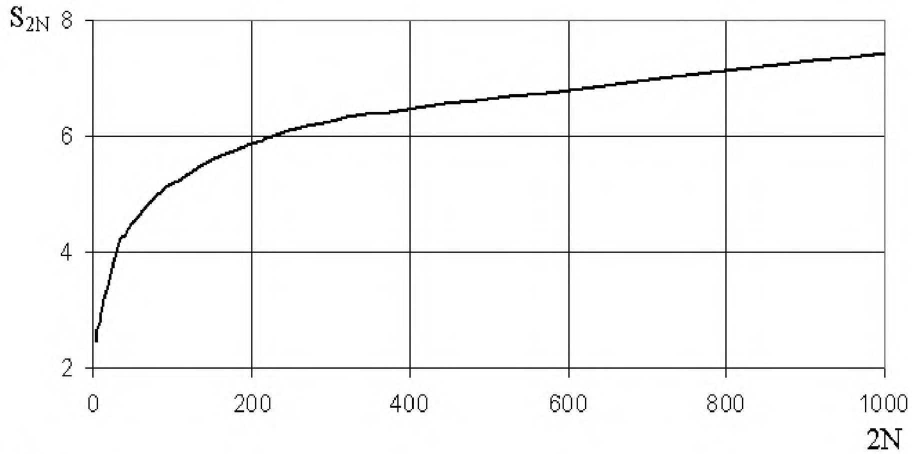

Рис. 11

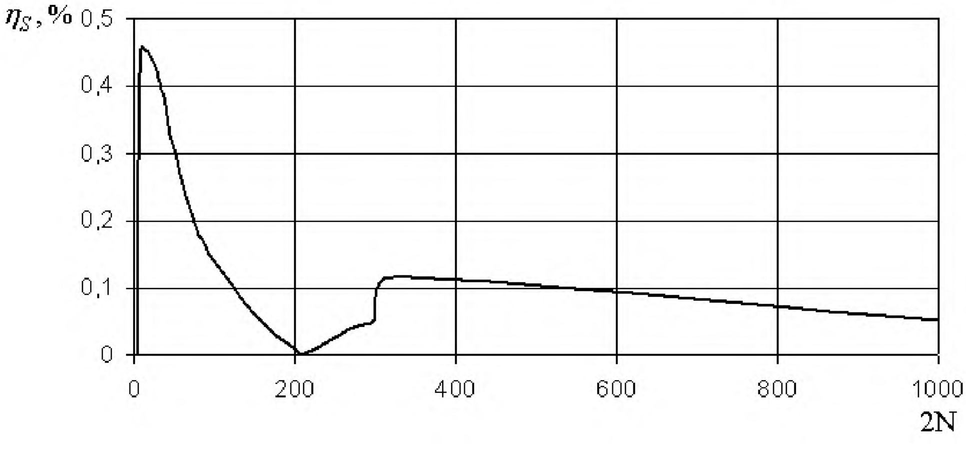

Рис. 12

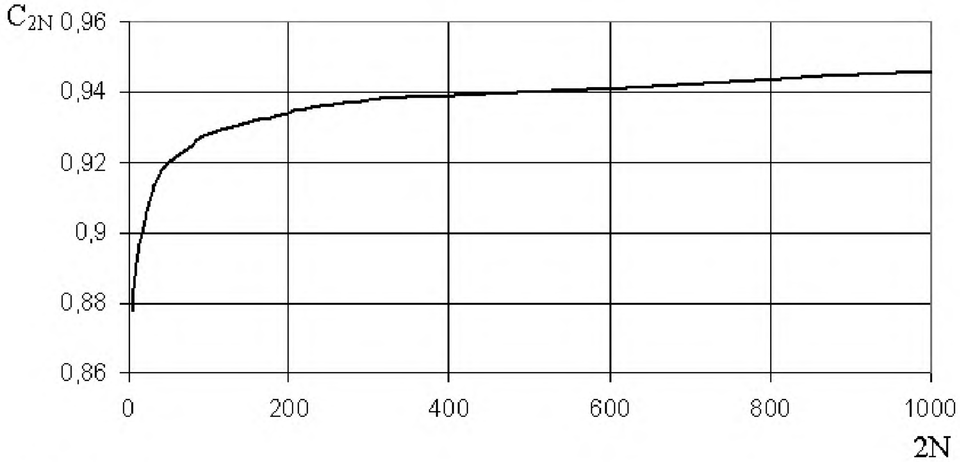

Рис. 13

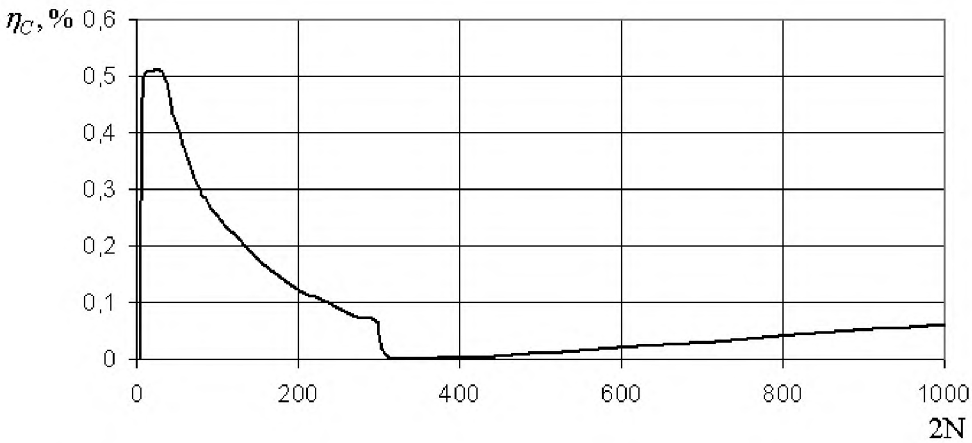

Рис. 14

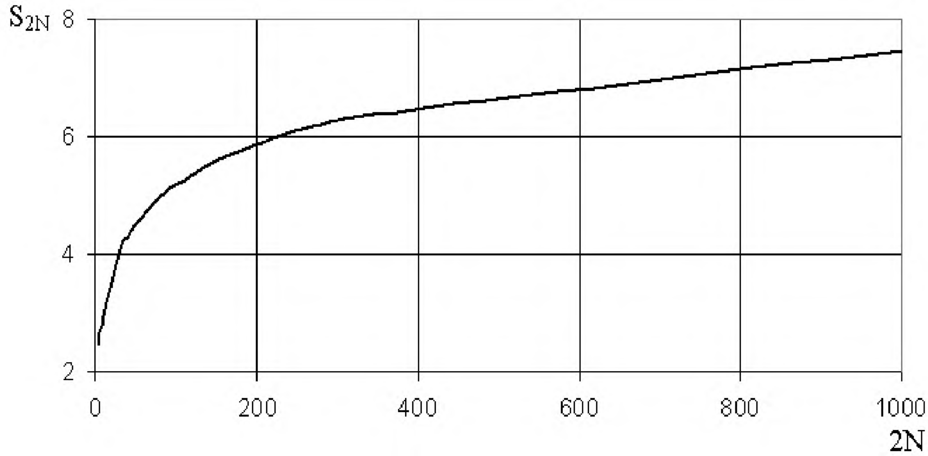

Рис. 15

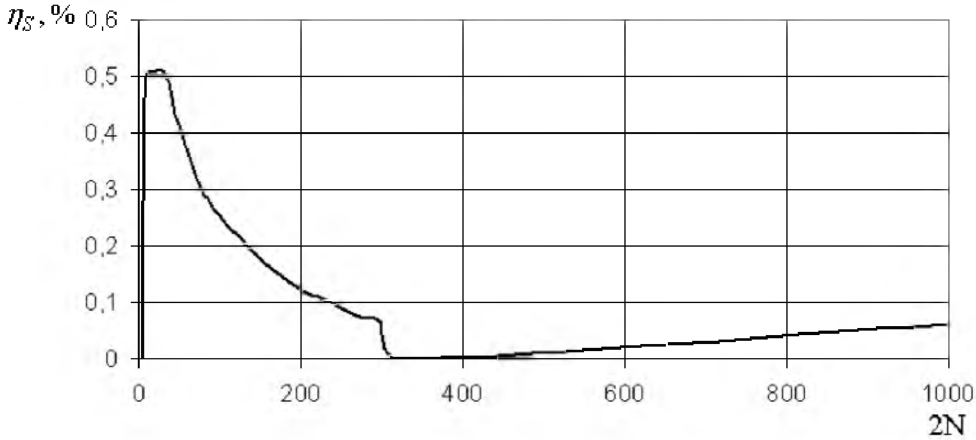

Рис. 16

13. Числа Фібоначчі (Fibonacci) [3] – елементи числової зворотної **послідовности**

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89\ldots \quad \textbf{(34)}$$

(ряду Фібона́ччі), у якої кожний з наступних членів ряду дорівнює сумі двох попередніх [4, 5] названі за іменем італійського математика XIII ст. Леона́рдо Піза́нського (Фібона́ччи) [3, 6]. Леонардо Пізанський (Leonardo Pisano) (1170–1228) на Сході познайомився з арабською математикою. Його основні праці: «Liber Abaci» (1202) – трактат про аритметику (числа та цифри) та алґебру (до квадратичних рівнянь включно); «Practica Geometriale» (1220) – прикладні задачи від алґебри до ґеометрії [3, 6].

14. «Золотий переріз» (гармонійне ділення; ділення у крайньому та середньому співвідношеннях [7, 8]) – ділення відрізка ***b***, при якому більша його частина ***a*** є середньою пропорційною між цілим відрізком ***b*** та меншою його частиною (***b–a***), тобто [7, 8]:

$$\frac{b}{a} = \frac{a}{b-a}. \quad \textbf{(35)}$$

Ґеометрично «золотий переріз» визначається за співвідношеннями [7] (див. рис. 17):

$$\left.\begin{aligned} &AB = b;\ AC = a;\ CB = (b-a);\\ &BE = 1/2AB = r = 1/2b;\\ &ED = EB = 1/2AB = r = 1/2b;\\ &AD = AC = R = a;\\ &AB : AC = AC : CB;\\ &b : a = a : (b-a). \end{aligned}\right\} \quad \textbf{(36)}$$

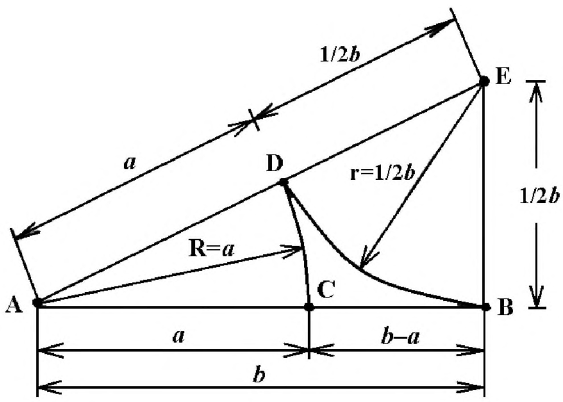

Рис. 17. Ґеометричне означення співвідношень «золотого перерізу» [8].

Для знаходження ***a*** з (35) отримаємо квадратичне рівняння [8]:

$$a^2 + ab - b^2 = 0, \quad \textbf{(37)}$$

рішення якого приводить до [8]:

$$a = \frac{(\sqrt{5}-1)}{2}b = 0{,}618033988 \cdot b. \quad \textbf{(38)}$$

З (38) випливають співвідношення:

$$\Phi^{-1} = \left(\frac{a}{b}\right)_{\Phi} = 0{,}618033988; \quad \textbf{(39)}$$

$$\Phi = \left(\frac{b}{a}\right)_{\Phi} = 1{,}618033989, \quad \textbf{(40)}$$

де Ф – число «золотого перерізу» (число Фібоначчі).

Означення «золотого перерізу» (35) можна записати у такому вигляді [8]:

$$\frac{a}{b}\left(1 + \frac{a}{b}\right) = 1, \quad \textbf{(41)}$$

або

$$a = \frac{b}{1 + a/b}, \quad \textbf{(42)}$$

або у вигляді неперервного дробу, наприклад [8]:

$$a = b \cdot \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}}}, \qquad \mathbf{(43)}$$

сприятливі дроби до якої є:

$$\frac{1}{1}; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{5}; \frac{5}{8}; \frac{8}{13}; \frac{13}{21}; \frac{21}{34}; \frac{34}{55}; \frac{55}{89}; \ldots, \qquad \mathbf{(44)}$$

де 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89…– числа Фібоначчі (34).

15. Співвідношення «золотого перерізу» (36) були відомі з античних часів, наприклад за [8] до нас дійшли «Начала» Евкліда (3 ст. до н.д.), які містять (36). Означення «золотого перерізу» у науковий та мистецький обіги ввів Леонардо да Вінчи (Leonardo da Vinci) (1452–1519) [9]. Принципи та співвідношення «золотого перерізу» або близькі до нього пропорції були покладені в основи композиційної побудови багатьох творів світового мистецтва, головним чином архітектури античного періоду та епохи Відродження [7, 8].

16. Числа *a* та *b* гармонійного ряду (1) пов’язані з числом Фібоначчі співвідношеннями:

$$\frac{a}{b} = \sqrt{\Phi^{-1}} = \sqrt{0{,}618033988} = 0{,}786151377 \qquad \mathbf{(45)}$$

$$\frac{b}{a} = \sqrt{\Phi} = \sqrt{1{,}618033989} = 1{,}272019651 \qquad \mathbf{(46)}$$

Відносна похибка між співвідношенням характеристичних чисел (чисел гармонійности) гармонійного ряду (1), розрахованих за методом А і Б (за даними табл. 1 і 2), та цими ж числам, розрахованими за числами гармонійности ряду Фібоначчі (45), (46) складає:

$$\Delta_{a/b} = \left| \frac{a_{ij}/b_{ij} - (a/b)_\Phi}{(a/b)_\Phi} \right| \cdot 100\% \qquad \mathbf{(47)}$$

$$\Delta_{b/a} = \left| \frac{b_{ij}/a_{ij} - (a/b)_\Phi}{(a/b)_\Phi} \right| \cdot 100\% \qquad \mathbf{(48)}$$

Результати оцінки відносної похибки за (47), (48) зведені в табл. 4 та показані на рис. 18 (a:b) і рис. 19 (b:a) для методу А та на рис. 20 (a:b) і рис. 21 (b:a) для методу Б.

Таблиця 4

Оцінка відносної похибки відношень чисел гармонійности **a** і **b** гармонійного ряду (1), розрахованих за функцією $\mathbf{C_{2N}}$, відносно цих чисел, розрахованих за числом Фібоначчі для двох методів вибору точок для розрахунків (за табл. 1 та табл. 2)

Метод (А) (табл. 1)				Метод (Б) (табл. 2)			
№ точок $i-j$	$(2N)_i$ – $(2N)_j$	$\Delta^1_{a/b}$, %	$\Delta^1_{b/a}$, %	№ точок $i-j$	$(2N)_i - (2N)_j$	$\Delta^2_{a/b}$, %	$\Delta^2_{b/a}$, %
1 – 2	6 – 10	5,332118	5,062196	1 – 2	6 – 10	5,332118	5,062196
1 – 3	6 – 32	2,621344	2,554385	2 – 3	10 – 32	0,271413	0,272152
1 – 4	6 – 50	1,846110	1,812647	3 – 4	32 – 50	6,983413	7,507707
1 – 5	6 – 80	1,145850	1,132869	4 – 5	50 – 80	10,272384	11,448408
1 – 6	6 – 100	0,849370	0,842217	5 – 6	80 – 100	12,694660	14,540531
1 – 7	6 – 150	0,362421	0,361113	6 – 7	100 – 150	14,640179	17,151136
1 – 8	6 – 200	0,053884	0,068504	7 – 8	150 – 200	16,609961	19,918399
1 – 9	6 – 210	0,004151	0,004151	8 – 9	200 – 210	17,598277	21,356685
1 – 10	6 – 220	0,042523	0,042541	9 – 10	210 – 220	17,816034	21,678235
1 – 11	6 – 256	0,190004	0,190365	10 – 11	220 – 256	18,312164	22,417246
1 – 12	6 – 280	0,273673	0,274424	11 – 12	256 – 280	18,770562	23,108078
1 – 13	6 – 300	0,336544	0,337680	12 – 13	280 – 300	19,139227	23,669360
1 – 14	6 – 320	0,760165	0,765988	13 – 14	300 – 320	2,467952	2,530401
1 – 15	6 – 1000	0,336063	0,337196	14 – 15	320 – 1000	4,331144	4,151344

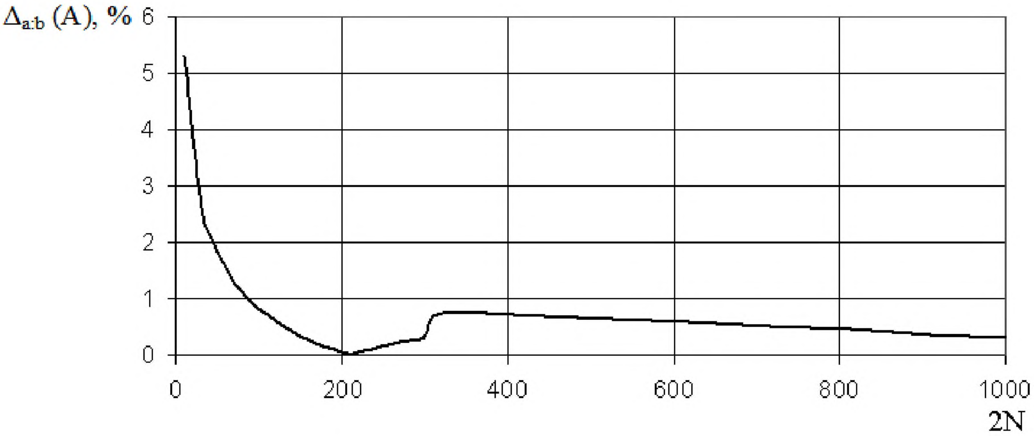

Рис. 18

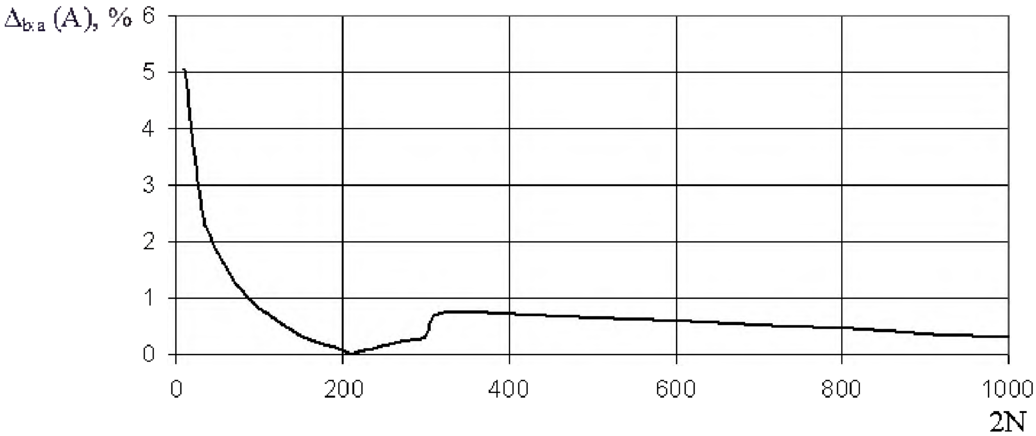

Рис. 19

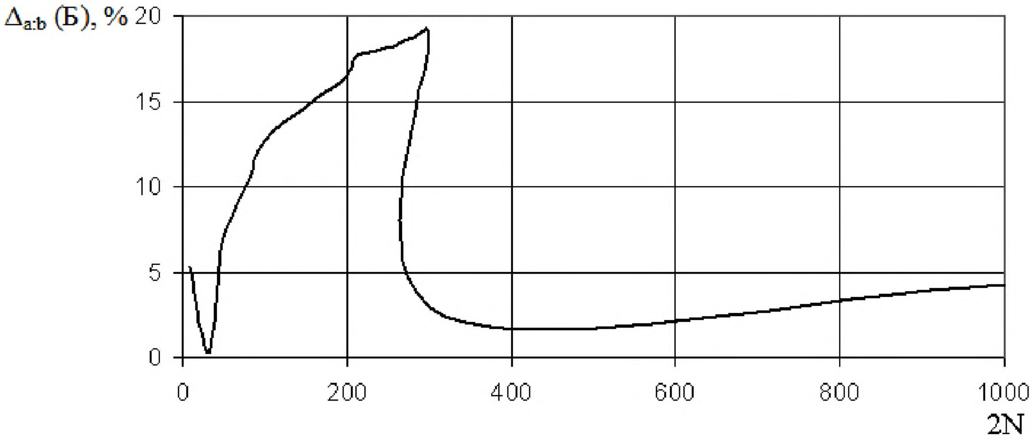

Рис. 20

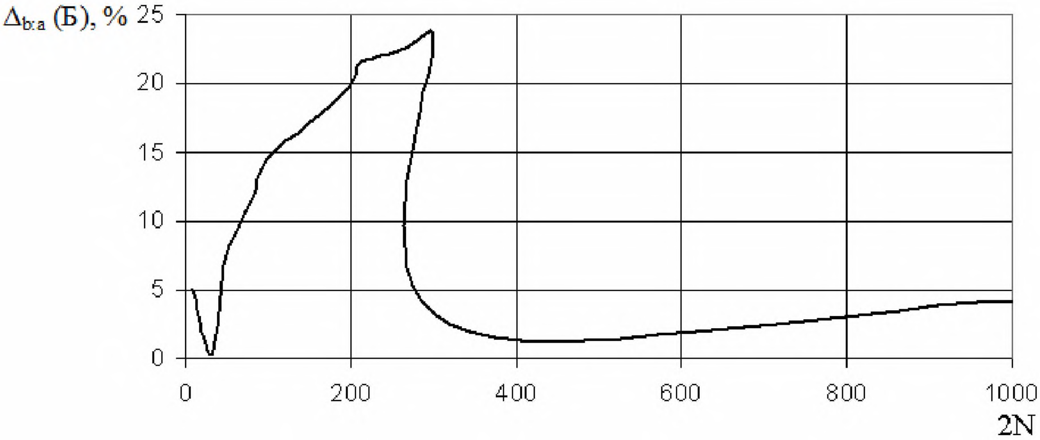

Рис. 21

Післямова: Все і Ніщо, кінечність та нескінченність, множинність форм і перетворень, невичерпаність, гармонія та дисгармонія, порядок і хаос, мінімальна та максимальна ентропія замкнутої та ізольованої самої в себе термодинамічної системи – це і є Природа – Всесвіт. І пошук межі та границь гармонії Природи – завдання неймовірної складности. Всі, хто прилучилися до цього пошуку, заслуговують на повагу!

Література

1. **Кудрявцев Л.Д.** Гармонический ряд // Математическая энциклопедия. – Т.1. – Москва: Сов. энциклопедия, 1977. – (Энциклопедии. Словари. Справочники). – Стб. 887.
2. **Кудрявцев Л.Д.** Гармоническое среднее // Математическая энциклопедия. – Т.1. – Москва: Сов. энциклопедия, 1977. – (Энциклопедии. Словари. Справочники). – Стб. 890.
3. **Фибона́ччи (Fibonacci)** // БСЭ. – Т.27. – Москва: Сов. энциклопедия, 1977. – 624 с.: ил. – С. 328.
4. **Фибона́ччи числа** // БСЭ. – Т.27. – Москва: Сов. энциклопедия, 1977. – 624 с.: ил. – С. 328.
5. **Воробьёв Н.Н.** Числа Фибоначчи. – 3-е изд. – Москва: Наука, 1969.
6. **Леонардо Пізанський** (Leonardo Pisano), Фибоначчи (Fibonacci) // БСЭ. – Т.14. – Москва: Сов. энциклопедия, 1973. – 624 с.: ил. – С. 339.
7. **Золото́е сече́ние** // БСЭ. – Т.9. – Москва: Сов. энциклопедия, 1972. – 624 с.: ил. – С. 566.
8. **Золотое сечение** // Математическая энциклопедия. – Т.2. – Москва: Сов. энциклопедия, 1979. – 1103 с.: ил. –С. 466–467.
9. **Соколов М.Н.** Леона́рдо да Винчи (Leonardo da Vinci) (1452–1519) // БСЭ. – Т.14. – Москва: Сов. энциклопедия, 1973. – 624 с. – С. 337–338.