

УДК 621.891+621.89+621.567; 539.62

Г.О. Сіренко¹, Л.М. Солтис¹, М.Ф. Семенюк²

Питома площа гавсовської анізотропної та ізотропної шорстких поверхонь

¹Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,
вул. Шевченка, 57, м. Івано-Франківськ, 76025, Україна
²Хмельницький національний університет,
вул. Інститутська, 11, м. Хмельницький, 29016, Україна

Виходячи з опису гавсовських шорстких поверхонь на основі моделі випадкового поля знайдені математичні вирази для розрахунку питомої площі анізотропної шорсткої поверхні з жорсткою рівною. З отриманих формул знайдені аналогічні вирази для ізотропної моделі шорсткої поверхні. За результатами дослідження зношування полімерного композиту під час контакту зі сталевим контртілом знайдена залежність величин питомої площі поверхні контртіла від шляху тертя та питомої інтенсивності зношування композиту від питомої площі поверхні контртіла, отриманої під час тертя та зношування.

Ключові слова: питома площа, анізотропна шорстка поверхня, ізотропна шорстка поверхня, жорстка рівна поверхня, модель випадкового поля, номінальна площа.

H.O. Sirenko¹, L.M. Soltys¹, M.F. Semenyuk²

The Specific Square of Gaussian Anisotropic and Isotropic Rough Surfaces

¹Vasyl Stefanyk¹ Precarpathian National University,
57, Shevchenko Str., Ivano-Frankivsk, 76025, Ukraine
²Khmelnitsky National University,
11, Instytutska Str., Khmelnytsky, 29016, Ukraine

The mathematical expressions for calculation of the specific square of anisotropic rough surface with hard even have been found, based on the description of Gaussian rough surfaces on the base of random field model. From the obtained formulas similar expressions for isotropic model of rough surface have been found. The subjection of values of the specific surface from the way of friction has been found as a result of research of wear of polymer composite during contact with the steel counterface.

Key words: specific square, anisotropic rough surface, isotropic rough surface, hard even surface, model of random field, nominal square.

Стаття постуила до редакції 14.03.2011; прийнята до друку 20.04.2011.

Вступ

1. У [1] приведена аналіза математичних моделей опису шорсткості поверхні твердих тіл на основі теорії випадкового поля, з якої випливають висновки про продуктивність використання моделі випадкового поля.

2. Використовуючи модель випадкового поля шорсткої поверхні і не пов'язуючи її з

автокореляційною функцією (АКФ) якогось певного виду, і не використовуючи припущення, які прийняті для опису поверхні одномірними випадковими функціями або поверхні із сильною анізотропією і орієнтованими мікронерівностями, а також не припускаючи певної форми нерівностей, в [2–6] отримано співвідношення для щільності ймовірності розподілу висот вершин, розподілу кривин у вершинах мікронерівностей,

розподілу градієнту анізотропної та ізотропної поверхонь.

3. У [7–23] показана придатність теорії випадкового поля та, відповідно, отриманих співвідношень [2–6], для опису контактних явищ, при цьому порівняння розрахунків фактичної площі пружного контакту (ФПК) шорсткої гавсовської анізотропної поверхні з рівною методом випадкового поля з результатами експериментального визначення ФПК оптико-акустичним методом показало на близькість експериментальних даних і результатів розрахунків [24–26].

4. Тому, під час опису таких контактних явищ, як тертя, зношування та мащення, адсорбція, змочування, електрокінетичні та електрохімічні процеси, процеси хемічної кінетики та каталізу та ін., необхідно знати питому площу \bar{s} шорсткої поверхні. Наприклад, крайові кути змочування для рівної (θ) та шорсткої поверхонь (θ_m) пов'язані співвідношенням: $\cos\theta_m = \bar{s} \cos\theta$ [27].

I. Теоретична частина

Нехай шорстка поверхня твердого тіла уявляє собою гавсовську модель і описується рівнянням $z = z(x, y)$, де z – висота нерівностей шорсткої поверхні, а x, y – декартові координати. Введемо змінні: $\varepsilon_1 = z$; $\varepsilon_2 = \frac{\partial z}{\partial x}$; $\varepsilon_3 = \frac{\partial z}{\partial y}$.

1. Питома площа гавсовської поверхні.

1.1. Введемо означення питомої площі гавсовської анізотропної шорсткої поверхні, яка припадає на одиницю номінальної площі ідеально рівної поверхні, як площу, що дорівнює [7]:

$$s = \frac{1}{L^2} \int_0^L \int_0^L \sqrt{1 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2} dx dy, \quad (1)$$

спільна щільність ймовірностей величин $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ має вигляд [2, 5]:

$$p(\varepsilon_2, \varepsilon_3) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\Delta_1}} \times \exp\left[-\frac{1}{2\Delta_1}(m_{02}\varepsilon_2^2 - 2m_{11}\varepsilon_2\varepsilon_3 + m_{20}\varepsilon_3^2)\right], \quad (2)$$

$$\text{де } \Delta_1 = \begin{vmatrix} m_{20} & m_{11} \\ m_{11} & m_{02} \end{vmatrix};$$

m_{02}, m_{11}, m_{20} – моменти спектральної щільності другого порядку анізотропної шорсткої поверхні [1, 3].

1.2. Математичне сподівання питомої площі анізотропної поверхні дорівнює [7]:

$$\begin{aligned} \bar{s} &= M\bar{s} = M\left(\frac{1}{L^2} \int_0^L \int_0^L \sqrt{1 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2} dx dy\right) = \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{\Delta_1}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{1 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2} \times \\ &\times \exp\left[-\frac{1}{2\Delta_1}(m_{02}\varepsilon_2^2 - 2m_{11}\varepsilon_2\varepsilon_3 + m_{20}\varepsilon_3^2)\right] d\varepsilon_2 d\varepsilon_3, \end{aligned} \quad (3)$$

де L – довжина профілю поверхні.

Введемо нові змінні ζ, φ :

$$\begin{cases} \varepsilon_2 = \zeta \cos \varphi; \\ \varepsilon_3 = \zeta \sin \varphi. \end{cases} \quad (4)$$

Площина зміни нових змінних:

$$\begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi; \\ 0 \leq \zeta < \infty. \end{cases} \quad (5)$$

Тоді питома площа анізотропної шорсткої поверхні дорівнює [7]:

$$\begin{aligned} \bar{s} &= \frac{1}{2\pi\sqrt{\Delta_1}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \zeta (1 + \zeta^2)^{1/2} \exp\left[-\frac{\zeta^2}{2\Delta_1} \times \right. \\ &\times (m_{02} \cos^2 \varphi - 2m_{11} \sin \varphi \cdot \cos \varphi + \\ &\left. + m_{20} \sin^2 \varphi)\right] d\varphi d\zeta = \Delta_1^{-1/2} \int_0^{\infty} \zeta (1 + \zeta^2)^{1/2} \times \\ &\times \exp\left(-\frac{M_2 \zeta^2}{4\Delta_1}\right) I_0\left[\frac{\zeta^2 (M_2^2 - 4\Delta_1)^{1/2}}{4\Delta_1}\right] d\zeta, \end{aligned} \quad (6)$$

де $M_2 = m_{20} + m_{02}$;

I_0 – нульова функція Бесселя з уявним аргументом [28].

Якщо позначити $t = \zeta^2$, то (6) буде зведено до (7):

$$\bar{s} = \frac{1}{2\Delta_1^{1/2}} \int_0^{\infty} (1+t)^{1/2} \left(-\frac{M_2 t}{4\Delta_1}\right) I_0\left[\frac{t(M_2^2 - 4\Delta_1)^{1/2}}{4\Delta_1}\right] dt. \quad (7)$$

1.3. Для ізотропної шорсткої поверхні, коли $m_{02} = m_{11} = m_{20} = m_2$; $M_2 = 2m_2$; $\Delta_1 = m_2^2$, то (7) набуде вигляду для питомої поверхні:

$$\bar{s} = \frac{1}{2m_2} \int_0^{\infty} (1+t)^{1/2} \exp\left(-\frac{t}{2m_2}\right) dt, \quad (8)$$

де m_2 – момент спектральної щільності другого порядку ізотропної шорсткої поверхні [1–6].

Після інтегрування (8) отримаємо у кінцевому вигляді вираз для питомої площі ізотропної шорсткої поверхні [7]:

$$\begin{aligned}\bar{s} &= 1 + \sqrt{\frac{\pi m_2}{2}} \exp\left(\frac{1}{2m_2}\right) \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{2m_2}}\right)\right] = \\ &= 1 + \sqrt{\frac{\pi m_2}{2}} \exp\left(\frac{1}{2m_2}\right) \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{2m_2}}\right).\end{aligned}\quad (9)$$

2. Інтеграл помилок.

2.1. У виразі (9)

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt \quad (10)$$

інтеграл ймовірностей (інтеграл помилок; функція помилок) [28, 29], де $|x| < \infty$, $x = \frac{1}{\sqrt{2m_2}}$.

У виразі (10) властивості функції помилок: $\operatorname{erf}(0) = 0$; $\operatorname{erf}(0,5) = 0,5284$; $\operatorname{erf}(x) = -\operatorname{erf}(-x)$; $\operatorname{erf}(-x) = -\operatorname{erf}(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{erf}(x) \rightarrow 1$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{erf}(x) \rightarrow -1$ [28,

$$29]; \frac{d[\operatorname{erf}(x)]}{dx} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-x^2) \quad [30].$$

Інші позначення [29]:

$$\operatorname{Erf}(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(x);$$

$$\operatorname{Erf}(i \cdot x) = -i \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(ix) = \int_0^x \exp(t^2) dt;$$

$$\operatorname{Erfc}(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \operatorname{Erf}(x) = \int_x^\infty \exp(-t^2) dt;$$

$$\alpha(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt - 1 = \frac{2}{\pi} \operatorname{Erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right).$$

2.2. Додатковий інтеграл ймовірностей (доповнююча функція помилок) [28, 29]:

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty \exp(-t^2) dt. \quad (11)$$

2.3. Комплексна функція помилок визначається через функцію помилок [30]:

$$w(x) = \exp(-x^2) = \operatorname{erfc}(-ix), \quad (12)$$

причому для будь-якого комплексного числа x виконується залежність [30]:

$$\operatorname{erf}(\bar{x}) = \overline{\operatorname{erf}(x)}, \quad (13)$$

де риска зверху позначає комплексне числа x .

2.4. Неелементарні функції $\operatorname{erf}(x)$ і, відповідно, $\operatorname{erfc}(x)$ малодосліджені, тому приведемо кілька формул для їх розрахунку [28–30].

2.5. Функцію помилок як неелементарну функцію (10) можна представити через елементарні функції, розкладаючи інтегральний вираз (10) у ряд Тейлора [28, 31] та інтегруючи

його почленно, тоді (10) можна подати у вигляді ряду [28–30] в околі точки $x = 0$:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \frac{x^9}{4!9} - \dots + \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{n!(2n+1)} + \dots \right). \quad (14)$$

Ряд (14) збігається (рівність (14) виконується) як для будь-якого дійсного числа x , так і на всій комплексній площині [30].

Для ітеративного обчислення елементів ряду (14) за [30] його представляють у вигляді:

$$\begin{aligned}\operatorname{erf}(x) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \left[x \prod_{i=1}^n \left(\frac{-(2i-1)x^2}{i(2i+1)} \right) \right] = \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{2n+1} \prod_{i=1}^n \left(\frac{-x^2}{i} \right),\end{aligned}\quad (15)$$

де \prod – знак добутку;

i – загальне позначення номера співмножника.

Для ряду (15) співмножник

$$\left(\frac{-(2i-1)x^2}{i(2i+1)} \right) \quad (16)$$

перетворює i -й член ряду в $(i+1)$ -й, при цьому вважають першим членом (x).

2.6. Обернена функція помилок уявляє собою ряд [30]:

$$\operatorname{erf}^{-1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{C_k}{2k+1} \left(\frac{x\sqrt{\pi}}{2} \right)^{2k+1} \right], \quad (17)$$

де для $k = 0$ $C_0 = 1$;

$$\text{для } k \geq 1 \quad C_k = \sum_{m=0}^{k-1} \frac{C_m C_{k-m-1}}{(m+1)(2m+1)}. \quad (18)$$

Звідки: $C_1 = 1$; $C_2 = 1,16667$; $C_3 = 1,41111$;

$C_4 = 1,73373$; $C_5 = 2,14858$; $C_6 = 2,67717$; ... (19)

Тому, ряд (17), враховуючи (19), можна подати у такому вигляді [32]:

$$\begin{aligned}\operatorname{erf}^{-1}(x) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(x + \frac{2\pi x^3}{3 \cdot 2^3} + \frac{7\pi^2 x^5}{3 \cdot 5 \cdot 2^5} + \frac{127\pi^3 x^7}{3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 2^7} + \right. \\ &+ \frac{4369\pi^4 x^9}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 2^9} + \frac{243649\pi^5 x^{11}}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 2^{11}} + \\ &\left. + \frac{20036983\pi^6 x^{13}}{2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 2^{13}} + \dots \right).\end{aligned}\quad (20)$$

2.7. При великому аргументі (x) та дійсної частини числа (x) $\text{Re}x > 0$ продуктивним є асимптотичний розклад для додаткової функції помилок $erfc(x)$ [29, 30]:

$$1 - erf(x) = erfc(x) \approx \frac{\exp(-x^2)}{x\sqrt{\pi}} \times \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{(2x^2)^n} \right]. \quad (21)$$

За [30] асимптотичний ряд (21) для будь-якого скінченного (x) є розбіжним, але практично достатньо перших декількох членів для обчислення $erfc(x)$ із доброю точністю (зауважимо, що, незважаючи на те, що ряд Тейлора (14) збігається, це відбувається доволі повільно).

З (21) випливає вираз до прямої функції помилок $erf(x)$ [30]:

$$erf(x) \approx 1 - \frac{\exp(-x^2)}{x\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{n!(2x)^{2n}}. \quad (22)$$

2.8. Наближена формула для розрахунку прямої функції помилок $erf(x)$ дана в [30]:

$$erf(x) \approx \sqrt{1 - \exp\left(-\frac{x^2(4/\pi + ax^2)}{1 + ax^2}\right)}, \quad (23)$$

де $a = \frac{-8(\pi-3)}{3\pi(\pi-4)} \approx 0,14001$.

2.9. Узагальнені функції помилок. На напіввісі $x > 0$ всі узагальнені функції помилок можна виразити, виходячи з виразу для узагальнених функцій помилок [30], через гамма-функцію $\Gamma(x)$ [28, 29]:

$$E_n(x) = \frac{x(x^n)^{-1/n} \Gamma(n) [\Gamma(1/n) - \Gamma(1/n, x^n)]}{\sqrt{\pi}}, \quad (24)$$

де $x > 0$.

Отже, наближену формулу для розрахунку прямої функції помилок $erf(x)$ можна виразити через гамма-функцію [30]:

$$erf(x) \approx 1 - \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}, x^2\right)}{\sqrt{\pi}}. \quad (25)$$

У (24), (25) за [28, 29] гамма-функція може бути виражена так:

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)(z+2) \cdot \dots \cdot (z+n)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^z}{z(1+z)(1+\frac{z}{2}) \cdot \dots \cdot (1+\frac{z}{n})}. \end{aligned} \quad (26)$$

За виразом (26) Л. Ейлер отримав інтеграл для $\text{Re}x > 0$ [29]:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} \exp(-t) dt. \quad (27)$$

У (27) багатовизначеність функції (t^{x-1}) усувається заміною її виразом [28]:

$$t^{x-1} = \exp[(x-1) \ln t]. \quad (28)$$

Тоді

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} \exp[(x-1) \ln t] \exp(-t) dt. \quad (29)$$

Основні співвідношення гамма-функції [28, 29]:

добуток Вейерштрасса [28]:

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x \exp(C_0 x) \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{k}\right) \exp\left(-\frac{x}{k}\right), \quad (30)$$

де стала Ейлера-Маскерони визначена за [28] так:

$$\begin{aligned} C_0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k}\right) - \ln n \right] = - \int_0^{\infty} \exp(-t) \ln t dt = \\ &= - \int_0^1 \ln\left(\ln \frac{1}{\tau}\right) d\tau \approx 0,5772157, \end{aligned} \quad (31)$$

а інші співвідношення [28, 29]:

$$x\Gamma(x) = \Gamma(x+1); \quad (32)$$

$$\Gamma(x)\Gamma(-x) = \frac{\pi}{x \sin(\pi x)}; \quad (33)$$

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n+1)}{x(x+1) \cdot \dots \cdot (x+n)}; \quad (34)$$

$\Gamma(1) = 1$; $\Gamma(n+1) = n!$ (де $n = 0, 1, 2, 3, \dots, n$, $n > 0$ – ціле число, а $0! = \Gamma(1) = 1$);

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}; \quad (35)$$

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi};$$

$$\Gamma(1/2+x) \cdot \Gamma(1/2-x) = \frac{\pi}{\cos(\pi x)}; \quad (36)$$

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)}{2^n} \sqrt{\pi}. \quad (37)$$

Якщо $n > 0$ – ціле число, то за [28, 29]:

$$\left| \Gamma\left(\frac{1}{2} + iy\right) \right|^2 = \frac{\pi}{ch(y\pi)}, \quad (38)$$

де y – дійсне число;

ch – гіперболічний косинус за [29] означений так:

$$ch(x) = \cosh(x) = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2} = \frac{1 + \exp(2x)}{2 \exp(x)};$$

• при великих значеннях (x):

$$\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1) = (x-1)(x-2)\Gamma(x-2) = \\ = (x-1)(x-2)(x-3)\Gamma(x-3) = \dots; \quad (39)$$

• при $x < 1$ ($x \neq 0, -1, -2, \dots$):

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} = \frac{\Gamma(x+2)}{x(x+1)} = \dots; \quad (40)$$

$$\Gamma(nx) = \sqrt{\frac{n^{2nx-1}}{(2\pi)^{n-1}}} \cdot \Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{n}\right) \times \\ \times \Gamma\left(x+\frac{2}{n}\right) \dots \Gamma\left(x+\frac{n-1}{n}\right), \quad (41)$$

де $n = 2, 3, 4, \dots, n$.

2.10. Знайдемо наближену формулу для визначення питомої площі. Відомо, що при $0 \leq x < \infty$ має місце наближення [7]:

$$\operatorname{erf} x \approx 1 - \exp(-x^2) \sum_{i=1}^5 a_i y^i, \quad (42)$$

де $y = 1/(1+0,3275911x)$;

a_1, \dots, a_5 – числові коефіцієнти.

Найбільша абсолютна помилка такої заміни складає $1,5 \cdot 10^{-7}$. Тоді за [7] питома площа поверхні:

$$\bar{s} \approx 1 + \sqrt{\frac{\pi m_2}{2}} \sum_{i=1}^5 a_i \tilde{y}^i, \quad (43)$$

$$\text{де } \tilde{y} = \left(1 + \frac{0,3275911}{\sqrt{2m_2}}\right)^{-1}. \quad (44)$$

II. Експериментальна частина

1. Матеріали зразків.

1.1. Отримання волокнистого матеріалу.

Досліджували зносостійкість композитного матеріалу – карбопластика «флубон-15 (20)» [22, 33, 34] на основі ПТФЕ, наповненого 20% карбонізованого низькомодульного (LM) вуглецевого волокна, отриманого з гідратцелюлозного волокна тканини УТМ-8 під час термообробки у печі «Таммана» (за температури 1123 К у середовищі CH_4 в присутності антипіренів $\text{Na}_2\text{V}_4\text{O}_7 \cdot 10\text{H}_2\text{O}$ та $(\text{NH}_4)_2\text{HPO}_4$).

1.2. Дисперсії вуглецевого волокна та композицію матеріалу отримували за такою технологією: для попереднього подрібнення вуглецевої тканини УТМ-8 застосовували модифіковану молоткову дробарку КДУ 2,0 «Українка» з рухомими молотками, сепаруючим пристроєм у вигляді змінної ґратки з діаметром отворів 1,5–5,0 та 0,8–1,5 мм і вентилятором, який гнав повітря через ґратки. Діаметр робочих органів з молотками становив 0,48 м, число обертів 2700 за хвилину, що визначало частоту обертання 45 с^{-1} та максимальну лінійну швидкість 67 м/с. Дробарка КДУ 2,0 забезпечувала тонину помелу

волокон 3–15 мм. Для більш тонкого подрібнення волокон та активаційного змішування інгредієнтів композиції використали дробарку-млинок МРП-1 з подовими ножами при 7000 обертання ножів за хвилину, діаметрі ножів 0,205 м, частоті обертання 117 с^{-1} , максимальній лінійній швидкості 75 м/с. Після здрібнення волокна мали широкий розподіл за довжинами від 0 до 3500 мкм з основною фракцією 50–200 мкм.

2. За [35, 36] у композит вводили короткі вуглецеві волокна, що отримані за ХМА-технологією [22, 33], які мали об'ємний (масовий) розподіл за довжинами за ймовірним гамма-законом розподілу в композиції [37]:

$$P_2(l) = \frac{\lambda^{\theta+1} l^\theta \exp(-\lambda l)}{\Gamma(\theta+1)}, \quad (45)$$

де $l \geq 0$ – довжина волокна;

θ, λ – параметри гамма-розподілу;

$\Gamma(x)$ – гамма-функція [28];

$P_2(l)$ – щільність ймовірностей об'ємного (масового) гамма-розподілу за довжинами волокон з математичним сподіванням:

$$M_2(l) = \frac{\theta+1}{\lambda}; \quad (46)$$

та дисперсією:

$$D_2^2(l) = \frac{\theta+1}{\lambda^2}. \quad (47)$$

Щільність ймовірностей об'ємного (масового) гамма-розподілу за довжинами волокон $P_2(l)$ пов'язана із щільністю ймовірностей числового гамма-розподілу за довжинами волокон $\varphi_2(l)$ так:

$$P_2(l) = \frac{l}{E_2(l)} \varphi_2(l), \quad (48)$$

$$\text{де } \varphi_2(l) = \frac{\lambda^\theta}{\Gamma(\theta)} l^{\theta-1} \exp(-\lambda l) \quad (49)$$

з математичним сподіванням:

$$E_2(l) = \frac{\theta}{\lambda} = M_2(l) - \frac{1}{\lambda}, \quad (50)$$

та дисперсією:

$$\sigma_2^2(l) = \frac{\theta}{\lambda^2} = D_2^2(l) - \frac{1}{\lambda^2}. \quad (51)$$

3. Для вирішення завдання лінійної аналізи вихідних дроблених волокон, отриманих за ХМА-технологією, та після змішування їх з порошком полімеру шляхом дроблення, використовували автоматичний аналізатор зображень мікрооб'єктів «Морфоквант» із обчислювальною машиною ЕС-5060. Аналізатор був налагоджений на максимальну кількість кроків 512, мінімальний крок 0,2 мкм, діапазон кроків під час сканування 512*512 та на кількість різних ступенів тонів 128. При цьому відносна похибка вимірювання лінійних розмірів волокон становила 0,2%. Програма забезпечувала аналіз 250 частинок за одну пробу (кількість проб 20–25). Статистичну

відповідність емпіричного розподілу теоретичному гамма-розподілу перевіряли за критеріями хі-квадрат та омега-квадрат з рівнем значущості $\alpha = 0,05$.

4. У результаті технологічних операцій в композиції отримали волокна, що мали об'ємний (масовий) розподіл за гамма-законом за довжинами з параметрами $\lambda = 0,005 - 0,045 \text{ мкм}^{-1}$, $\theta = 1,0 - 2,55$, отриманих із вихідних вуглецевих волокон, розподілених за довжинами за тим же законом з параметрами розподілу $\lambda = 0,002 - 0,04 \text{ мкм}^{-1}$, $\theta = 0,5 - 2,5$, щільність ймовірностей розподілу в обох випадках $P_2(l) = (0,2 - 6,0) \cdot 10^{-3} \text{ мкм}^{-1}$ при наборі довжин $l = 0 - 3500 \text{ мкм}$ з основною фракцією $l = 20 - 200 \text{ мкм}$.

5. Фрикційні випробування без машення. Зносостійкість композитного матеріалу під час тертя та зношування без машення досліджували на трибометрі ХТІ-72 за схемою контакту [I-1] [22]: торець пальчика діаметром $10 \pm 0,05 \text{ мм}$ і висотою $15 \pm 0,1 \text{ мм}$ по площині металевого контртіла. Контртіло було виконано порожнистим діаметром $60 \pm 0,15 \text{ мм}$, висотою $35 \pm 0,2 \text{ мм}$, товщиною робочої частини поверхні тертя $5 \pm 0,2 \text{ мм}$. Через порожнину контртіла проходила холодна вода, або розміщувався термонагрівач, завдяки яким підтримувався заданий тепловий режим поверхні тертя вуглецевої сталі 45, термообробленої до НВ 4,5 ГПа, з вихідним середнім арифметичним відхиленням профілю поверхні: $Ra_0 = 0,085 \text{ мкм}$ (дослід №70); $Ra_0 = 0,22 \text{ мкм}$ (дослід №72); $Ra_0 = 0,49 \text{ мкм}$ (дослід №73); $Ra_0 = 0,85 \text{ мкм}$ (дослід №74); $Ra_0 = 1,42 \text{ мкм}$ (дослід №75). Питоме навантаження на 3 зразки складало $p = 3 \text{ МПа}$ (нормальне навантаження на зразок $N_i = 235,62 \text{ Н}$); швидкість ковзання $v = 1,1 \text{ м/с}$; температура $T = 373 \pm 1 \text{ К}$, що була визначена термопарою ХК на відстані $1 \pm 0,05 \text{ мм}$ від поверхні тертя контртіла зі сталі 45, а величини (в мВ) записувались на стрічку потенціометра КСП-4. Шлях тертя складав $S = 1000 \text{ км}$ із заміром величини зносу через 100 км .

Знос полімерних зразків визначали за зміною їх висоти Δh до та після кожного етапу зношування (шляху тертя), вимірюючи висоту зразка разом із гніздовою головкою, після 1 год. релаксації за кімнатної температури, на вертикальному оптиметрі з точністю $\pm 0,5 \text{ мкм}$. За лінійним зносом Δh [мм] розраховували об'ємний знос ΔV [мм³], за яким розраховували об'ємну інтенсивність зношування:

$$J_i = \frac{\Delta V_i}{S} \left[\frac{\text{мм}^3}{\text{м}} \right], \quad (52)$$

де S – шлях тертя [м], а потім об'ємну питому інтенсивність зношування:

$$J = \frac{\Delta V_i}{N_i \cdot S} = \frac{\Delta V}{N \cdot S} \left[\frac{\text{мм}^3}{\text{Н} \cdot \text{м}} \right], \quad (53)$$

де ΔV_i , ΔV – об'ємний знос [мм³] одного або трьох зразків відповідно;

N_i , N – нормальне навантаження [Н] на один (N_i) або три (N) зразки відповідно.

Полімерні зразки послідовно припрацьовували на шліфувальній шкурці, що знаходилась на масивному плоскому металевому тілі, та металевому контртілі при терті та зношуванні. Металево контртіло шліфували, а потім оброблювали на шліфувальній шкурці в одному напрямку (для того, щоб отримати анізотропну поверхню) і у випадкових напрямках (для того, щоб отримати поверхню, яка була б близькою до ізотропної поверхні). Після припрацьовання полімерних зразків металеве контртіло знову припрацьовували на шліфувальній шкурці.

6. Методи дослідження мікросорсткості поверхні. Профілограми мікросорсткості знімали за допомогою профілометра-профілографа моделі ВЭИ «Калибр» та моделі «252». Для одного напрямку знімали 50-60 базових довжин профілограм для металевого контртіла і 10-15 базових довжин профілограм для полімерного зразка. Для ізотропної поверхні профілограму знімали під кутом $\sim 45^\circ$ до напрямку ковзання. Ділянки зйомки поверхні були рівнорозподілені за слідом тертя. Статистичні характеристики різних ділянок поверхні були однаковими в статистичному відношенні.

Профілограми оброблялися за методом МНК: знаходили середньоарифметичне відхилення профіля поверхні R_a , щільність нулів D_0 і щільність екстремумів D_{extr} . Виміряна R_a і розрахована за профілограмами D_0 (для моделі «252» D_0 виміряна) були статистично рівні. За R_a , D_0 , D_{extr} , використовуючи методику [38], розраховували моменти спектральної щільності поверхні: m_0 , m_2 , m_4 .

Великий об'єм виборки і рівномірний розподіл її по поверхні забезпечили рівень вмісту довгохвильових компонентів спектру, і, таким чином, показність m_{00} . Границя дрібномасштабних мікронерівностей у ділянці малих довжин хвиль спектру була обмежена величиною, яка не перебільшувала у 2-3 рази похибку вимірювань. Параметер широкосмугастості α був більше 1,8, тобто тієї величини, яка характерна для «білого шуму».

7. Електронні мікроскопічні дослідження. Поверхні зразків тертя, металевих спряжених поверхонь та композиту досліджували на растровому електронному мікроскопі РЭМ-200 із здатністю до розв'язання об'єкту 30–50 нм та збільшенням від 20 до 26000. Збільшення змінювали ступенями з компенсацією під час зміни прискорюючої напруги і цифровій реєстрації. Зразки знімали у звичайному режимі та з використанням «у-модуляції». Рівень «у-модуляції» підбирали візуально за знімальним об'єктом (при необхідності навмисно збільшували рівень

«у-модуляції» для виявлення ефекту і межі розділу фаз). Поверхня зразка перед зйомкою ретельно очищалася розчином хромпіка та етиловим спиртом. Зразки, які мали великий питомий електричний опір, під дією електронного пучка заряджалися, що приводило до викривлення зображення об'єкту. З метою зняття електричного заряду поверхні таких зразків покривалися шаром золота товщиною 10–12 нм. Термічне наплення золота проводили за допомогою вакуумного універсального приладу ВУП-4.

III. Результати та обговорення

1. Результати дослідження інтенсивності зношування (J) зразків полімерного композиту «флубон-15(20)» по контртілу із загартованої сталі 45 та моментів спектральної щільності шорсткої поверхні контртіла від шляху тертя $S = 0-1000$ км та шорсткості Ra_0 вихідної поверхні сталі 45 зведені в табл. 1.

Таблиця 1

Результати дослідження залежностей інтенсивності зношування (J) зразків полімерного композиту «флубон-15(20)» по сталі 45 та зміни параметрів шорсткості поверхні контртіла (m_0, m_2, m_4) від шляху тертя та вихідної шорсткості поверхні за Ra_0

S, км	$J, \times 10^7 \frac{MM^3}{H \cdot m}$	$m_0, \text{мкм}^2$	m_2	$m_4, \text{мкм}^{-2}$	α	Λ
$Ra_0=0,085$ мкм (дослід №70)						
0	0	0,011301	0,0002309	0,00002147	4,550899	0,780263
50	2,14	0,017490	0,0003738	0,00003378	4,228349	0,763501
100	1,24	0,007712	0,0001702	0,00000869	2,313490	0,567753
200	2,38	0,011500	0,0002528	0,00002195	3,949828	0,746824
300	2,11	0,009625	0,0002915	0,00003063	3,469530	0,711777
400	0,97	0,006723	0,0002368	0,00005701	6,835193	0,853698
500	1,37	0,009753	0,0004727	0,00013932	6,081077	0,835555
600	1,47	0,017220	0,0005206	0,00005391	3,425265	0,708052
700	2,31	0,008728	0,0001078	0,00001236	9,283157	0,892278
800	0,70	0,013110	0,0000788	0,00000593	12,520020	0,920128
900	3,05	0,015860	0,0003121	0,00006753	10,995430	0,909053
1000	1,84	0,012060	0,0001524	0,00001404	7,290285	0,862831
$Ra_0=0,22$ мкм (дослід №72)						
0	0	0,053360	0,0003492	0,00001198	5,242328	0,809245
50	3,6	0,012178	0,0001126	0,00000417	4,005302	0,750331
100	2,07	0,061022	0,0004435	0,00001498	4,647410	0,784826
200	2,73	0,057614	0,0003605	0,00001114	4,938587	0,797513
300	3,83	0,061716	0,0004616	0,00001101	3,188992	0,686421
400	1,63	0,074445	0,0014758	0,00009749	3,332273	0,699905
500	1,70	0,059589	0,0001444	0,00000194	5,544130	0,819629
600	1,83	0,036553	0,0002337	0,00000458	3,065287	0,673766
700	1,63	0,044434	0,0002070	0,00000567	5,879735	0,829924
800	1,07	0,045120	0,0001390	0,00000295	6,889084	0,854843
900	1,63	0,046281	0,0001268	0,00000329	9,470221	0,894406
1000	2,17	0,044685	0,0001576	0,00000668	12,017823	0,916790
$Ra_0=0,49$ мкм (дослід №73)						
0	0	0,373363	0,0037697	0,00009350	2,456571	0,592929
50	8,53	0,181631	0,0009309	0,00001285	2,693314	0,628710
100	3,00	0,272209	0,0009657	0,00001437	4,194448	0,761590
200	1,83	0,296093	0,0010464	0,00001226	3,315302	0,698368
300	3,36	0,215600	0,0004321	0,00000282	3,256337	0,692906
400	2,50	0,093830	0,0004773	0,00000749	3,084897	0,675840
500	3,12	0,059555	0,0003875	0,00001332	5,282981	0,810713
600	2,64	0,058638	0,0003944	0,00001248	4,704570	0,787441
700	1,95	0,049754	0,0002573	0,00000967	7,267330	0,862398

Продовження табл. 1

800	2,74	0,068332	0,0003258	0,00000879	5,658624	0,823279
900	2,15	0,055481	0,0003112	0,00001085	6,215769	0,839119
1000	1,98	0,061226	0,0002504	0,00000965	9,423116	0,893878
Ra ₀ =0,85 мкм (дослід №74)						
0	0	0,688124	0,0094013	0,0030556	23,789613	0,957965
50	21,4	0,441975	0,0091864	0,0049251	25,794199	0,961232
100	3,60	0,453603	0,0049997	0,0018954	34,394492	0,970926
200	4,03	0,277977	0,0022508	0,0005449	29,898669	0,966554
300	4,27	0,271635	0,0019342	0,0005616	40,776512	0,975476
400	5,13	0,201744	0,0014471	0,0003060	29,479829	0,966079
500	2,93	0,220691	0,0015783	0,0003146	27,871749	0,964121
600	3,53	0,095866	0,0004918	0,0001009	39,992516	0,974995
700	2,60	0,113902	0,0002131	0,0000233	58,441368	0,982889
800	2,24	0,129203	0,0002578	0,0000326	63,375934	0,984221
900	2,15	0,109305	0,0002475	0,0000445	79,405326	0,987406
1000	2,43	0,098982	0,0002656	0,0000654	91,765161	0,989103
Ra ₀ =1,42 мкм (дослід №75)						
0	0	3,189049	0,0137365	0,0001935	3,270318	0,694219
50	49,93	1,336082	0,0023406	0,00000693	1,690098	0,408318
100	7,67	0,986542	0,0012404	0,00000536	3,436821	0,709033
200	2,47	0,235362	0,0008864	0,00001089	3,262156	0,693454
300	5,00	0,312807	0,0012212	0,00002005	4,205496	0,762216
400	2,80	0,362825	0,0003567	0,00000217	6,188006	0,838397
500	3,20	0,510053	0,0005029	0,00000259	5,223382	0,808553
600	2,27	0,785134	0,0011900	0,00000465	2,578118	0,612120
700	2,27	0,430828	0,0007116	0,00000373	3,173517	0,684892
800	3,02	0,475262	0,0006761	0,00000452	4,699478	0,787210
900	2,42	0,449981	0,0005867	0,00000316	4,130942	0,757924
1000	2,11	0,505112	0,0006315	0,00000405	5,129748	0,805059

У табл. 1 широкосмугастість спектру характеризує чинник [6, 38]:

$$\alpha = \frac{m_0 m_4}{m_2^2} \quad (\text{де } 1 \leq \alpha < \infty), \quad (54)$$

а середнє квадратичне значення ширини спектру характеризує чинник [6, 38]:

$$\Lambda = 1 - \frac{1}{\alpha} = \frac{m_0 m_4 - m_2^2}{m_0 m_4} \quad (\text{де } 0,33(3) \leq \Lambda \leq 1). \quad (55)$$

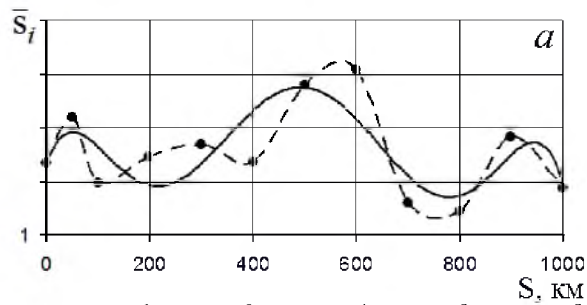
2. За результатами табл. 1 за формулою (9) та використання виразів (10)–(25) для розрахунку інтеграла помилки $\text{erf}(x)$ та виразів (26)–(41) – для розрахунку гамма-функції знаходили значення питомої поверхні. Виявлено, що жоден вираз (10)–(25) непридатний для виконання цієї процедури. Найбільш продуктивними виявилися вирази (42)–(44). Для розрахунку питомої площі за результатами табл. 1 прийняли значення a_i у виразі (43) такими:

$$a_i = \{1; 2; 3; 4; 5\} \quad (56)$$

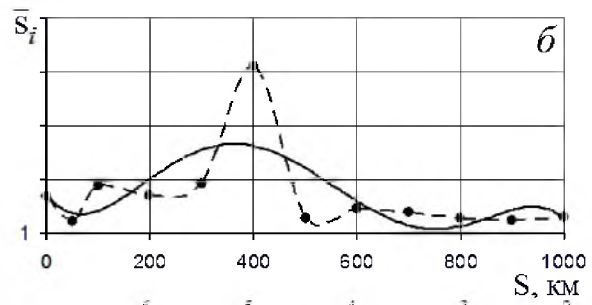
та

$$a_i = \{10; 20; 30; 40; 50\}. \quad (57)$$

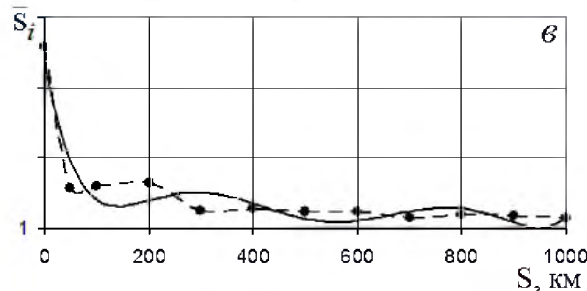
На рис. 1 показана якісна картинка зміни питомої поверхні [для a_i за (56) та (57) у виразах (42)–(44)] контргіла зі сталі 45 під час тертя та зношування полімерного композиту «флубон-15(20)» на шляху тертя від 0 до 1000 км. Як видно з рис. 1, ці зміни \bar{s}_i визначаються не лише шляхом тертя S , а й, у значній мірі, вихідною шорсткістю поверхні: для відносно рівних поверхонь сталі [Ra₀=0,085 мкм (дослід №70, рис. 1 а); Ra₀= 0,22 мкм (дослід №72, рис. 1 б)] спостерігається хвильовий характер змін, при цьому коефіцієнти апроксимації залежності $\bar{s}_i = f(S)$ поліномами шостого порядку дорівнюють $R^2 = 0,5773$ та $R^2 = 0,4344$ відповідно. А для більш шорстких поверхонь [Ra₀=0,49 мкм (дослід №73, рис. 1 в); Ra₀= 0,85 мкм (дослід №74, рис. 1 г); Ra₀=1,42 мкм (дослід №75, рис. 1 г)] залежності $\bar{s}_i = f(S)$ різко спадають під час зростання шляху тертя від 0 до 100-200 км з подальшою хвильовою зміною \bar{s}_i малої висоти до 1000 км, при цьому коефіцієнти апроксимації становлять $R^2 = 0,9224 - 0,9702$.



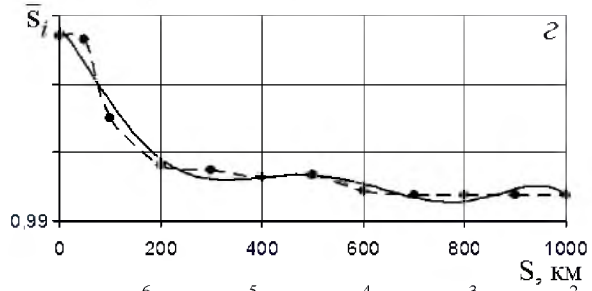
$$y = -1E-18x^6 + 4E-15x^5 - 4E-12x^4 + 2E-09x^3 - 4E-07x^2 + 3E-05x + 1,0013 \quad (R^2 = 0,5773).$$



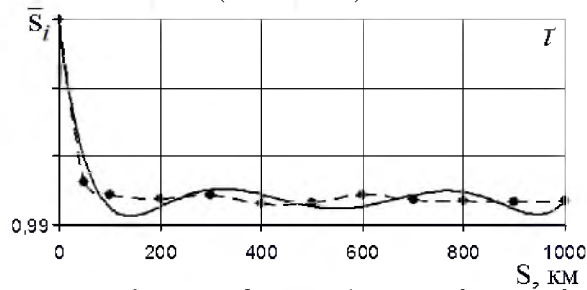
$$y = -2E-19x^6 + 5E-17x^5 + 7E-13x^4 - 9E-10x^3 + 3E-07x^2 - 4E-05x + 1,0021 \quad (R^2 = 0,4344).$$



$$y = 4E-18x^6 - 1E-14x^5 + 2E-11x^4 - 1E-08x^3 + 3E-06x^2 - 0,0004x + 1,0242 \quad (R^2 = 0,9224).$$



$$y = -7E-18x^6 + 2E-14x^5 - 2E-11x^4 + 1E-08x^3 - 1E-06x^2 - 0,0003x + 1,075 \quad (R^2 = 0,9702).$$



$$y = 2E-17x^6 - 7E-14x^5 + 8E-11x^4 - 5E-08x^3 + 2E-05x^2 - 0,0022x + 1,1048 \quad (R^2 = 0,9567).$$

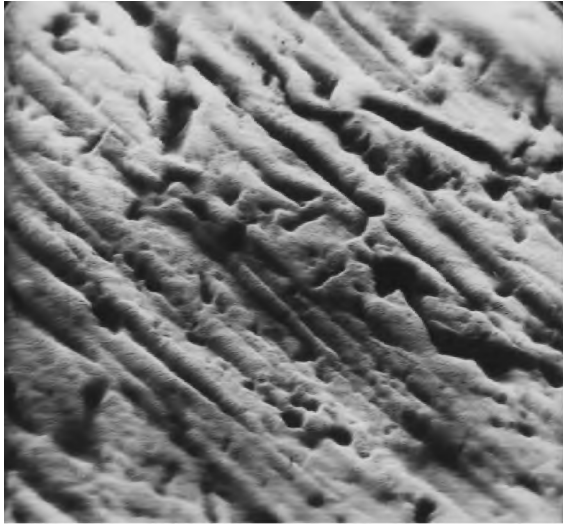
Рис. 1. Залежності питомої поверхні \bar{S}_i сталого контртіла від шляху тертя під час тертя та зношування полімерного композиту «флубон-15(20)» при вихідній шорсткості поверхні контртіла із сталі 45: а – $Ra_0=0,085$ мкм (дослід №70); б – $Ra_0=0,22$ мкм (дослід №72); в – $Ra_0=0,49$ мкм (дослід №73); г – $Ra_0=0,85$ мкм (дослід №74); р – $Ra_0= 1,42$ мкм (дослід №75). Крижована лінія – експеримент, суцільна лінія – апроксимація поліномом 6-го порядку.

Така закономірність зміни питомої поверхні зі шляхом тертя та вихідної шорсткості поверхні контртіла пов'язана із формуванням на поверхні металевго контртіла проміжної плівки із композиту (переважно із ПТФЕ) під час тертя та зношування (рис. 2), стан якої визначається умовами тертя (N , T , v , середовище), вихідною шорсткістю поверхні (Ra_0), складом композиту та технологією її отримання, станом вихідної поверхні металевго контртіла тощо:

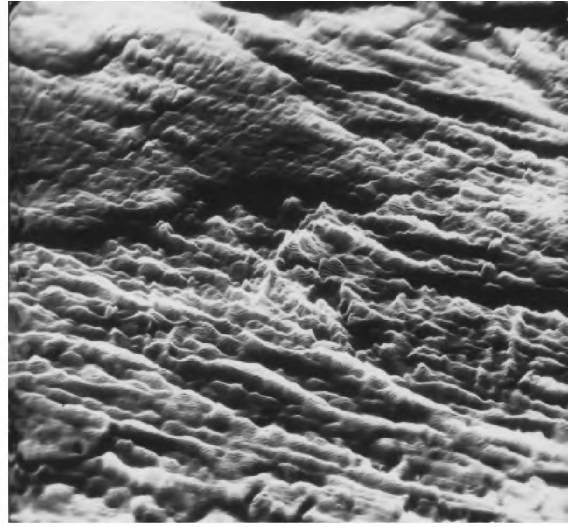
1. На рис. 2 а, б, в показані електронні мікросвітлинні поверхонь тертя металевго контртіла із сталі 45 (НВ 1,9 ГПа; $Ra_0=0,25$ мкм) після 13 год. ($S=42$ км) ковзання зразка композиту «флубон-15(20)» [ПТФЕ + 20% карбонізованого волокна УТМ-8] за схемою контакту [IV-6]: торець втулки (зовнішній діаметер $d_3 = 41 \pm 0,1$ мм; внутрішній діаметер $d_b = 28 \pm 0,1$ мм; висота $h = 22 \pm 0,1$ мм) – площа контртіла [22]; при параметрах випробувань: питоме навантаження $p=1,3$ МПа; нормальне навантаження $N=915,85$ Н; швидкість ковзання $v=0,9$ м/с; температура поверхні контртіла $T=323$ К (а); $T=503$ К (б); $T=613$ К (в) [x2850 (а); x2100 (б); x950 (в)].

2. На рис. 2 г, р показані електронні мікросвітлинні поверхонь тертя металевго контртіла із сталі 45 (НВ 4,5 ГПа; $Ra_0=0,23$ мкм) після 6 год. ($S=18$ км) ковзання зразка композиту «флубон-ДМГ-С 1» [ПТФЕ + 13% карбонізованого волокна УТМ-8 + 8% порошку MoS_2 + 6% порошку колоїдного графіту С 1] за схемою контакту [I-1]: торці 3-х пальчиків (діаметер $d_i = 10 \pm 0,05$ мм; висота $h = 15 \pm 0,1$ мм) – площа контртіла [22]; при параметрах випробувань: $p=1,3$ МПа; $N=306,31$ Н; $N_i=102,10$ Н; $v=0,9$ м/с; $T=373$ К (г); $T=473$ К (р) [x820 (г); x1250 (р)].

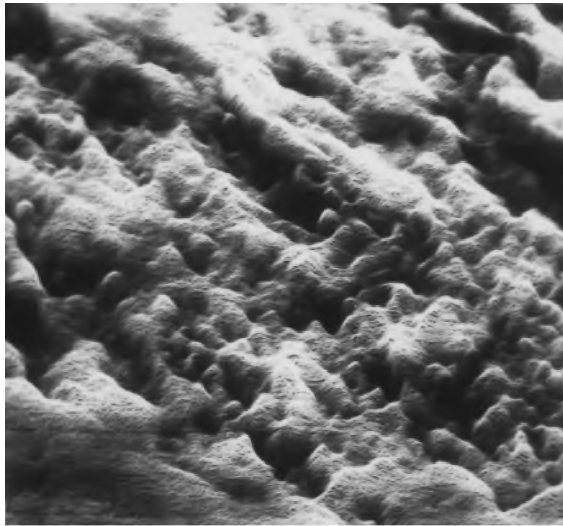
3. На рис. 2 д, е, є показані електронні мікросвітлинні поверхонь тертя металевго контртіла із сталі 45 (НВ 1,9 ГПа; $Ra_0=0,25$ мкм) після 13 год. ($S=42$ км) ковзання зразка композиту «флубон-310» [ПТФЕ + 10% КВ УТМ-8 + 10% порошку колоїдного графіту С 1 + 10% Al-порошку] за схемою контакту [IV-6]: торець втулки (зовнішній діаметер $d_3 = 41 \pm 0,1$ мм; внутрішній діаметер $d_b = 28 \pm 0,1$ мм; висота $h = 22 \pm 0,1$ мм) – площа контртіла [22]; при параметрах випробувань: $p=1,3$ МПа; $N=915,85$ Н; $v=0,9$ м/с; $T=323$ К (д); $T=423$ К (е); $T=473$ К (є) [x2350 (д); x2100 (е); x1050 (є)].



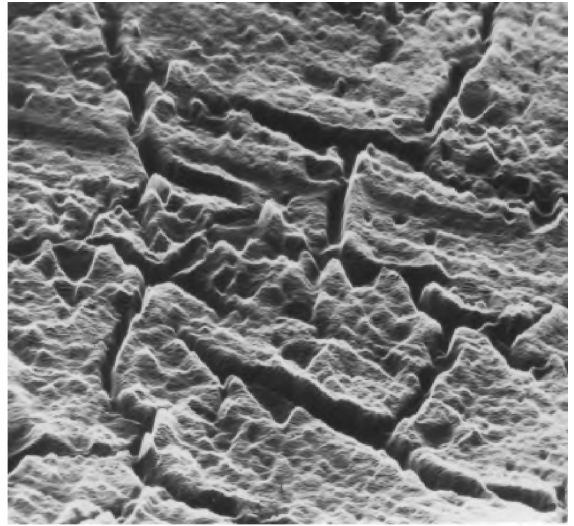
а



г



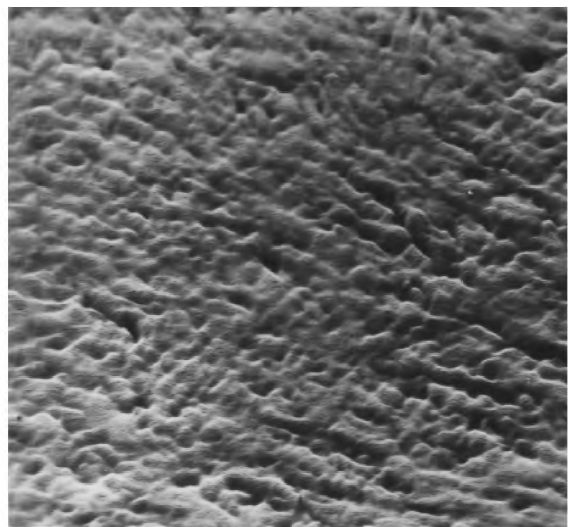
б



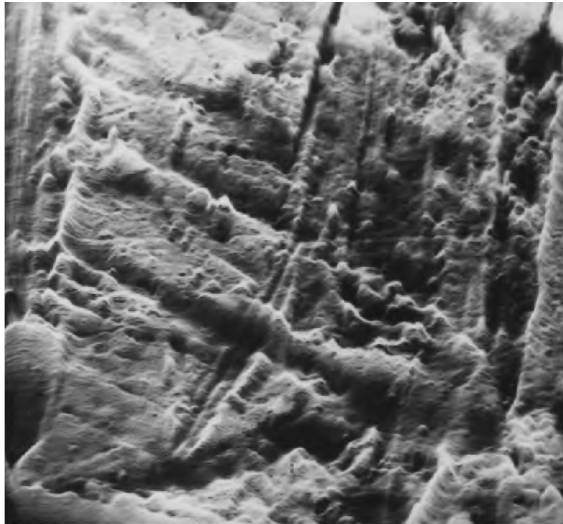
г



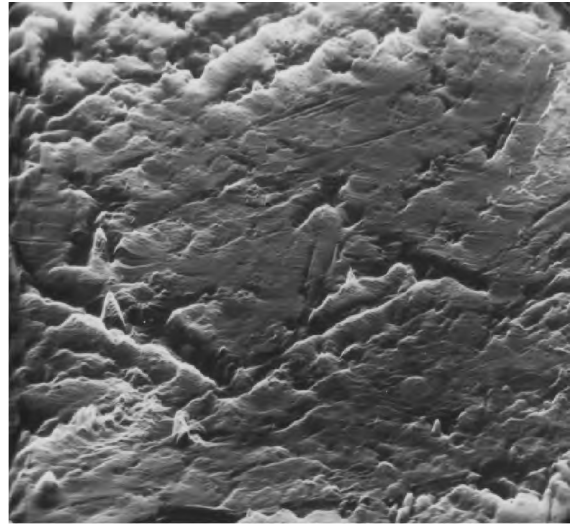
в



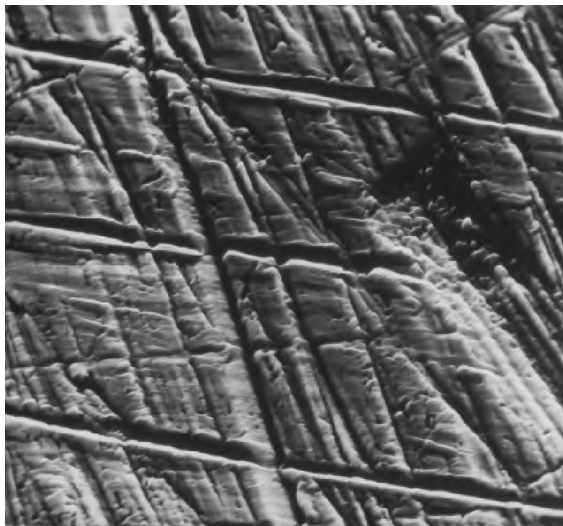
д



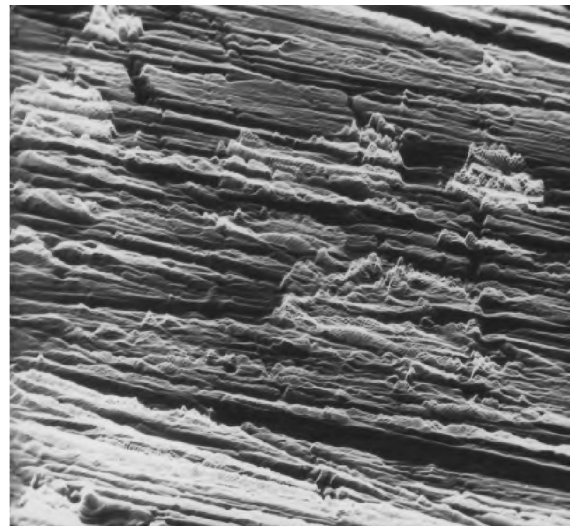
е



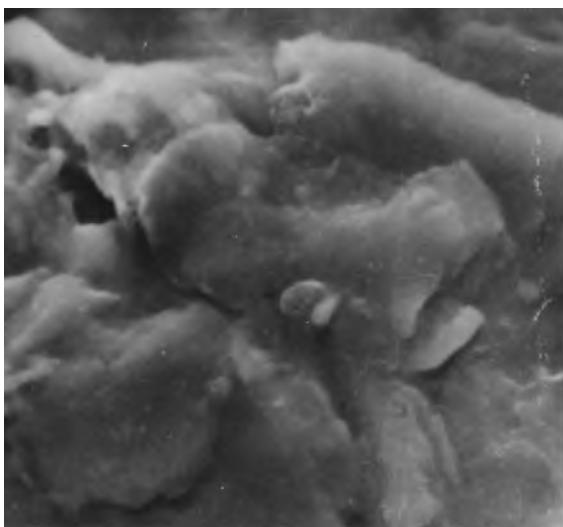
з



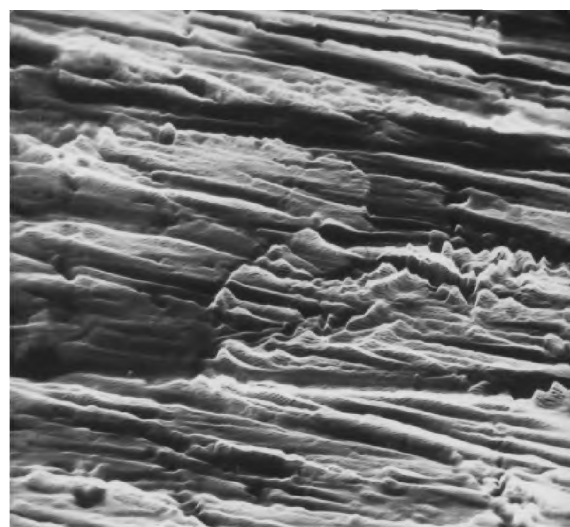
є



к



ж



л

Рис. 2. Електронні мікросвітлини поверхонь тертя металевого контргіла із сталі 45 під час контакту з полімерними композитами «флубон» при різних схемах контакту, температури та шляху тертя (x 415 – 2850).

4. На рис. 2 ж показана електронна мікросвітлина поверхні тертя металевого контртіла із сталі 45 (НВ 4,5 ГПа; Ra₀=0,22 мкм) після 6 год. (S=18 км) ковзання зразка композиту «флубон-К15 ВВ 5» [ПТФЕ + 15% порошку термообробленого коксу + 5% карбонізованого волокна УТМ-8] за схемою контакту [I-1]: торці 3-х пальчиків (діаметер d_i = 10 ± 0,05 мм; висота h = 15 ± 0,1 мм) – площа контртіла [22]; при параметрах випробувань: p=1,3 МПа; N=306,31 Н; N_i=102,10 Н; v=0,9 м/с; T=323 К [x1820].

5. На рис. 2 з, к, л показані електронні мікросвітлинні поверхні тертя металевого контртіла із сталі 45 (НВ 4,5 ГПа; Ra₀=0,22 мкм) після 6 год. (S=18 км) ковзання зразка композиту «флубон-К10 ВВ 10» [ПТФЕ + 10% порошку термообробленого коксу + 10% карбонізованого волокна УТМ-8] за схемою контакту [I-1]: торці 3-х пальчиків (діаметер d_i = 10 ± 0,05 мм; висота h = 15 ± 0,1 мм) – площа контртіла [22]; при параметрах випробувань: p=1,3 МПа; N=306,31 Н; N_i=102,10 Н; v=0,9 м/с; T=428 К (з); T=528 К (к); T=628 К (л) [x415 (з); x850 (к); x1050 (л)].

3. Кореляційна аналіза залежностей питомих інтенсивностей зношування (J) та питомої площі поверхні контртіла: вихідної – перед кожним етапом дослідження $\bar{S}_i = f(S_i)$, де S_i=0, 100, 200, ..., 900 км (i = 0, 1, 2, ..., 9) (а); після кожного етапу дослідження $\bar{S}_{i+1} = f(S_{i+1})$, де S_{i+1}=100, 200, 300, ..., 1000 км (i+1=1, 2, 3, ..., 10) (б) та середньої за етап $\bar{\bar{S}}_{i,j+1} = f(S_{i,j+1})$, де $S_{i,j+1} = \frac{0+100}{2}; \frac{100+200}{2}; \frac{200+300}{2}; \dots; \frac{900+1000}{2}$ км (i,j+1=0, 0+1; 1, 1+2; 2, 2+3; ..., 9, 9+10 (в)).

3.1. Розраховували коефіцієнти кореляції між величинами інтенсивності зношування полімерного композитного матеріалу та питомою площею зазору за формулою [39–42]:

$$r_{J,\bar{S}} = \frac{\sum_{i=1}^N [(J_i - \bar{J})(\bar{S}_i - \bar{\bar{S}})]}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (J_i^2) - N(\bar{J})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^N (\bar{S}_i^2) - N(\bar{\bar{S}})^2}}, \quad (58)$$

де N = 50.

3.2. Висунемо нульову гіпотезу:

$$\left. \begin{array}{l} H_0^0: \rho = 0 \\ \uparrow \\ r_p \neq 0 \end{array} \right\} \quad (59)$$

Про рівність нулю генерального коефіцієнта кореляції (ρ), статистичною оцінкою якого є вибірковий коефіцієнт кореляції (r_p), перевіряли H₀⁰ за трьома критеріями: критичним значенням коефіцієнта кореляції (r_{кр.}), критерієм Стюдента

(t_T) та за Z-перетворенням Фішера (z_T · σ_z) з рівнями значущості α = 0,05 та α = 0,01.

3.3. Розраховували статистику r_{кр.} за Р. Фішера [39]:

$$r_{кр.} = \frac{t_T}{\sqrt{f + t_T^2}} = \frac{t_\alpha}{\sqrt{f + t_\alpha^2}}, \quad (60)$$

де f = N - 2 – число ступенів вільностей;

t_T {q = 1 - $\frac{\alpha}{2}$; f} = t_α – табличне (теоретичне)

значення критерія Стюдента [39–41].

Критичне значення коефіцієнта кореляції за [39]:

- α = 0,05 r_α = r_{0,05} = r_{кр.} {q=1-α/2=0,975; f=N-2=50-2=48} = 0,2787;
- α = 0,01 r_α = r_{0,01} = r_{кр.} {q=1-α/2=0,995; f=N-2=50-2=48} = 0,3610.

Розраховані значення коефіцієнтів кореляцій:

• a_i = 1, 2, 3, 4, 5 у виразі (43):

(а) r_p (а) = 0,68921;

(б) r_p (б) = 0,42197;

(в) r_p (в) = 0,67338.

• a_i = 10, 20, 30, 40, 50 у виразі (43):

(а) r_p' (а) = 0,68881;

(б) r_p' (б) = 0,42197;

(в) r_p' (в) = 0,67338.

3.4. Ступінь лінійності кореляційного зв'язку за критичним значенням коефіцієнта кореляції.

При виконанні нерівності |r_p| > r_{кр.}, нульову гіпотезу H₀⁰ відкидали на рівні значущості α = 1 - p, стверджуючи з ймовірністю p, що між двома змінними існує статистично надійний лінійний зв'язок зі ступенем лінійності:

$$\xi_2(r)_\alpha = \frac{|r_p(j)|}{r_{кр}(\alpha)}, \quad (61)$$

де j ≡ а, б, в,

та залишковим ступенем нелінійності у лінійному кореляційному зв'язку:

$$\xi_1(r)_\alpha = \frac{r_{кр}(\alpha)}{|r_p(j)|}, \quad (62)$$

де j ≡ а, б, в.

3.5. Ступінь лінійності кореляційного зв'язку за критерієм Стюдента.

Розраховуємо статистику t_p за [42]:

$$t_p = \frac{r_p}{\sqrt{1 - r_p^2}} \sqrt{N - 2}. \quad (63)$$

Розрахункові значення статистики t_p:

• a_i = 1, 2, 3, 4, 5 у виразі (43):

(а) t_p (а) = 6,59017;

(б) t_p (б) = 3,22464;

(в) t_p (в) = 6,31047.

• $a_i = 10, 20, 30, 40, 50$ у виразі (43):

(а) $t_p'(a) = 6,58289$;

(б) $t_p'(б) = 3,22464$;

(в) $t_p'(в) = 6,31047$.

Табличне (теоретичне) значення критерія Стьюдента $t_T = t_\alpha$ за [39]:

• $\alpha = 0,05$ $t_\alpha = t_{0,05} = t_T \{q=1-\alpha/2=0,975; f=N-2=50-2=48\} = 2,0110$;

• $\alpha = 0,01$ $t_\alpha = t_{0,01} = t_T \{q=1-\alpha/2=0,995; f=N-2=50-2=48\} = 2,6828$.

При виконанні нерівності $|t_p| > t_T$, нульову гіпотезу H_0^0 відкидали з рівнем значущості $\alpha = 1 - p$, стверджуючи, що з ймовірністю p , між двома змінними існує статистично надійний лінійний зв'язок зі ступенем лінійності кореляційного зв'язку:

$$\xi_2(t)_\alpha = \frac{|t_p(j)|}{t_T(\alpha)}, \quad (64)$$

де $j \equiv a, б, в$,

та залишковим ступенем нелінійності у лінійному кореляційному зв'язку:

$$\xi_1(t)_\alpha = \frac{t_T(\alpha)}{|t_p(j)|}, \quad (65)$$

де $j \equiv a, б, в$.

3.6. Ступінь лінійності кореляційного зв'язку за Z-перетворенням Фішера.

За перетворенням Фішера розраховували статистику z_p [42]:

$$Z_p = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r_p}{1-r_p}. \quad (66)$$

Розрахункові значення статистики z_p :

• $a_i = 1, 2, 3, 4, 5$ у виразі (43):

(а) $z_p(a) = 0,84645$;

(б) $z_p(б) = 0,45009$;

(в) $z_p(в) = 0,81690$.

• $a_i = 10, 20, 30, 40, 50$ у виразі (43):

(а) $z_p'(a) = 0,84569$;

(б) $z_p'(б) = 0,45009$;

(в) $z_p'(в) = 0,81690$.

Розраховували добуток $(z_T \cdot \sigma_z)$, де $z_T = z_\alpha \{q=1-\alpha/2\}$ – квантиль нормованого нормального розподілу [42];

$\sigma_z = \frac{1}{\sqrt{N-3}}$ – середнє квадратичне відхилення у

нормальному законі розподілу Z [42].

Розрахункові значення добутку $(z_T \cdot \sigma_z)$:

• $\alpha = 0,05$ $Z_{0,975} = Z_T \{q=0,975\} = 1,96$ [42];

• $\alpha = 0,01$ $Z_{0,995} = Z_T \{q=0,995\} = 2,58$ [42];

$$\sigma_z = \frac{1}{\sqrt{N-3}} = \frac{1}{\sqrt{50-3}} = 0,145865;$$

• $\alpha = 0,05$ $(Z_{0,975} \cdot \sigma_z) = 0,28590$;

• $\alpha = 0,01$ $(Z_{0,995} \cdot \sigma_z) = 0,37633$.

У разі виконання нерівності $|z_p| > (z_\alpha \cdot \sigma_z)$, нульову гіпотезу H_0^0 відкидали, стверджуючи, що між двома змінними існує статистично надійний лінійний зв'язок зі ступенем лінійності кореляційного зв'язку:

$$\xi_2(z)_\alpha = \frac{|z_p(j)|}{[z_T(q) \cdot \sigma_z]}, \quad (67)$$

де $q = 1-\alpha$;

$j \equiv a, б, в$,

та залишковим ступенем нелінійності у лінійному кореляційному зв'язку:

$$\xi_1(z)_\alpha = \frac{[z_T(q) \cdot \sigma_z]}{|z_p(j)|}, \quad (68)$$

де $q = 1-\alpha$; $j \equiv a, б, в$.

3.7. У табл. 2 і 3 приведені ступені лінійності (ξ_2) та нелінійності (ξ_1) лінійних кореляційних зв'язків, які визначені за $r_{кр. t}$, Z -критеріями з рівнем значущості $\alpha = 0,05$ та $\alpha = 0,01$.

4. На рис. 3 і 4 приведені залежності питомої об'ємної інтенсивності зношування полімерного композиту на основі ПТФЕ та карбонізованих волокон («флубон-15(20)») від питомої поверхні (\bar{s}_i) контртіла із сталі 45 до і після тертя та зношування (розрахованої за виразом (43) за коефіцієнтами $a_i = 1, 2, 3, 4, 5$ (рис. 3) та $a_i = 10, 20, 30, 40, 50$ (рис. 4)) за вихідною питомою поверхнею перед кожним етапом випробувань \bar{s}_i (а), за питомою поверхнею після кожного етапу випробувань \bar{s}_{i+1} (б) та середньою питомою поверхнею до і після кожного етапу випробувань $\bar{\bar{s}}_{i,i+1}$ (в). Для побудови залежностей використаний весь масив інформації табл. 1 ($N = 50$ даних випробувань для вихідної шорсткості поверхні сталі $Ra_0 = 0,085; 0,22; 0,49; 0,85; 1,42$ мкм).

Як видно із підписункових даних до рис. 3 і 4, результати досліджень апроксимуються як поліномами шостого порядку $R_1^2 = 0,6008 - 0,6065$ для випадку (а), $R_1^2 = 0,3869$ – для (б) та $R_1^2 = 0,6240$ – для (в), так і поліномом першого порядку $R_2^2 = 0,4745$; $r_{x,y} = 0,6888 - 0,6892$ для випадку (а), $R_2^2 = 0,1781$; $r_{x,y} = 0,4220$ – для (б) та $R_2^2 = 0,4534$; $r_{x,y} = 0,6734$ – для (в).

Судячи за коефіцієнтами кореляції, лінійна кореляція більше прийнятна у широкому діапазоні питомих поверхонь.

Як видно з рис. 3 і 4, інтенсивність зношування полімерного композиту лінійно зростає із збільшенням питомої поверхні металевого контртіла.

Таблиця 2

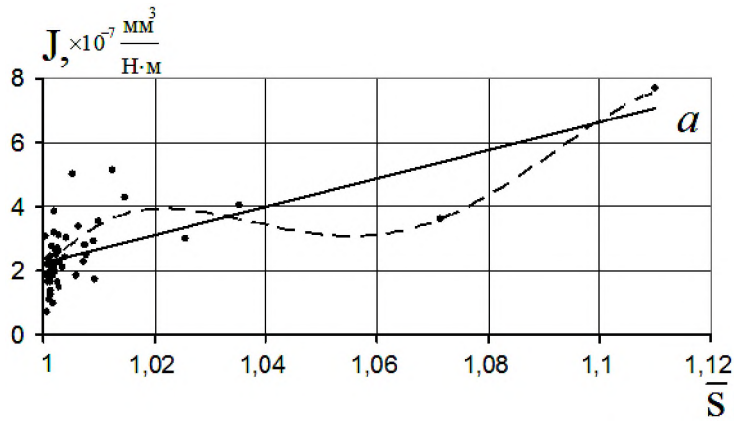
Ступені лінійності $\xi_2(\theta)$ та нелінійності $\xi_1(\theta)$ лінійних кореляційних зв'язків між інтенсивністю зношування (J) та питомою поверхнею контртіла із сталі 45 (\bar{s}_i) (розрахованої за виразом (43) за коефіцієнтами $a_i = 1, 2, 3, 4, 5$), що утворилася під час тертя та зношування полімерного композиту «флубон-15(20)», за критичним значенням коефіцієнта кореляції ($r_{кр.}$), критерієм Стьюдента (t_T) та критерієм Z_T перетворення Фішера ($\theta \equiv r, t, Z$)

Критерій лінійності	(j)	$\alpha=0,05$		$\alpha=0,01$	
		$\xi_2(\theta)$	$\xi_1(\theta)$	$\xi_2(\theta)$	$\xi_1(\theta)$
$r_{кр.}$	а	2,473	0,404	1,909	0,524
	б	1,514	0,660	1,169	0,856
	в	2,416	0,414	1,865	0,536
t_T	а	3,277	0,305	2,456	0,407
	б	1,604	0,624	1,202	0,832
	в	3,138	0,319	2,352	0,425
Z_T	а	2,961	0,338	2,249	0,445
	б	1,574	0,635	1,196	0,836
	в	2,857	0,350	2,171	0,461

Таблиця 3

Ступені лінійності $\xi_2(\theta)$ та нелінійності $\xi_1(\theta)$ лінійних кореляційних зв'язків між інтенсивністю зношування (J) та питомою поверхнею контртіла із сталі 45 (\bar{s}_i) (розрахованої за виразом (43) за коефіцієнтами $a_i = 10, 20, 30, 40, 50$), що утворилася під час тертя та зношування полімерного композиту «флубон-15(20)», за критичним значенням коефіцієнта кореляції ($r_{кр.}$), критерієм Стьюдента (t_T) та критерієм Z_T перетворення Фішера ($\theta \equiv r, t, Z$)

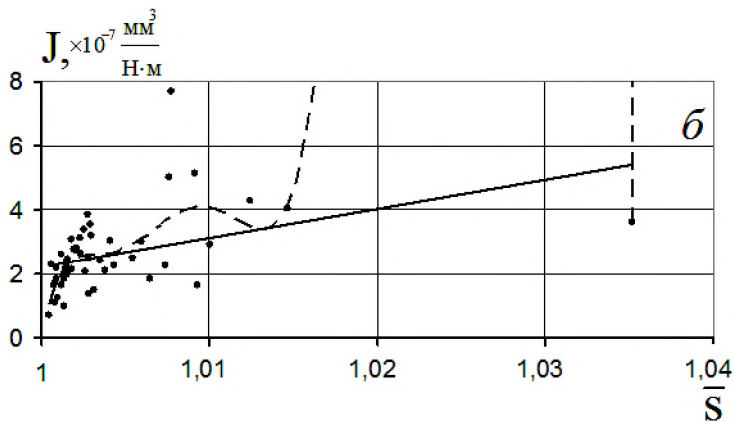
Критерій лінійності	(j)	$\alpha=0,05$		$\alpha=0,01$	
		$\xi_2(\theta)$	$\xi_1(\theta)$	$\xi_2(\theta)$	$\xi_1(\theta)$
$r_{кр.}$	а	2,472	0,405	1,908	0,524
	б	1,514	0,660	1,169	0,856
	в	2,416	0,414	1,865	0,536
t_T	а	3,273	0,306	2,454	0,408
	б	1,604	0,624	1,202	0,832
	в	3,138	0,319	2,352	0,425
Z_T	а	2,958	0,338	2,247	0,445
	б	1,574	0,635	1,196	0,836
	в	2,857	0,350	2,171	0,461



$$y_1 = -305443x^6 + 1E+06x^5 - 2E+06x^4 + 641352x^3 + 196404x^2 - 155710x$$

$$(R^2 = 0,6008)$$

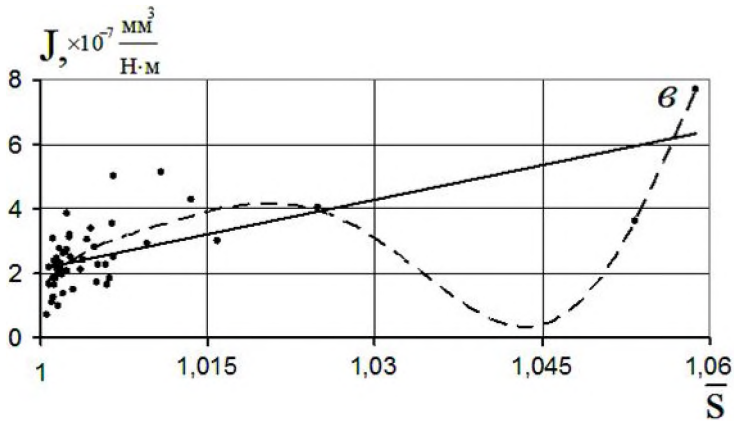
$$y_2 = 44,211x - 41,988 (R^2 = 0,4745)$$



$$y_1 = -1E+13x^6 + 7E+13x^5 - 2E+14x^4 + 3E+14x^3 - 2E+14x^2 + 8E+13x - 1E+13$$

$$(R^2 = 0,3869)$$

$$y_2 = 90,94x - 88,731 (R^2 = 0,1781)$$

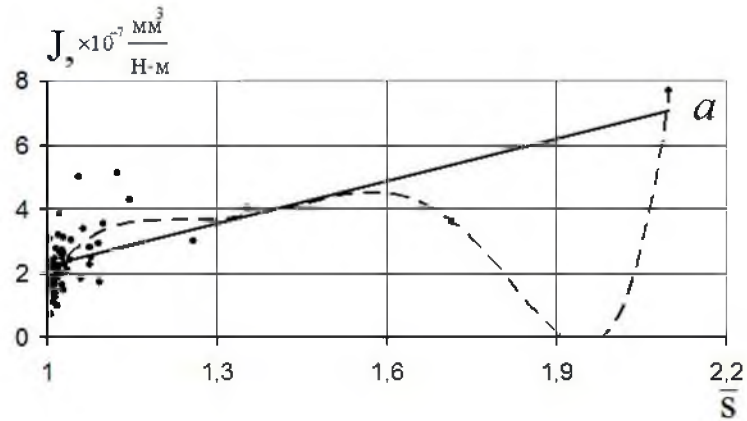


$$y_1 = -1E+10x^6 + 9E+10x^5 - 2E+11x^4 + 3E+11x^3 - 2E+11x^2 + 1E+11x - 2E+10$$

$$(R^2 = 0,624)$$

$$y_2 = 71,464x - 69,32 (R^2 = 0,4534)$$

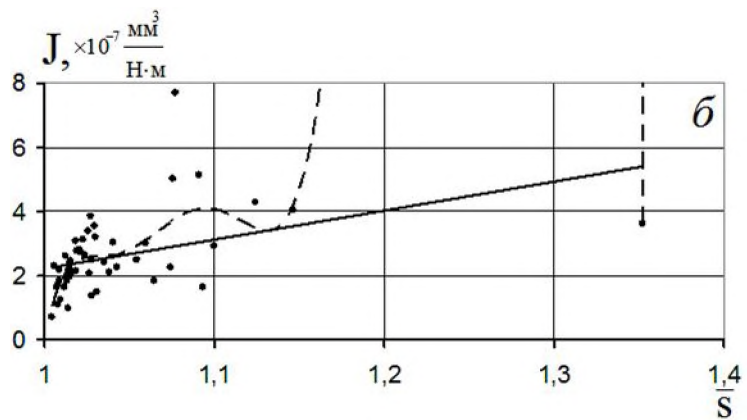
Рис. 3. Залежність питомої об'ємної інтенсивності зношування полімерного композиту «флубон-15(20)» (J_i) від питомої поверхні контртіла із сталі 45 до та під час тертя та зношування (розрахованої за виразом (43) за коефіцієнтами $a_i = 1, 2, 3, 4, 5$), за вихідною питомою поверхнею перед кожним етапом \bar{S}_i (а), за питомою поверхнею після кожного етапу \bar{S}_{i+1} (б) та середньою питомою поверхнею до та після кожного етапу $\bar{\bar{S}}_{i,i+1}$ (в). Суцільна лінія – лінійна апроксимація, крижована лінія – апроксимація поліномом 6-го порядку.



$$y_1 = 203,27x^6 - 1518,2x^5 + 4477,2x^4 - 6521,3x^3 + 4694,1x^2 - 1333,3x$$

$$(R^2 = 0,6065)$$

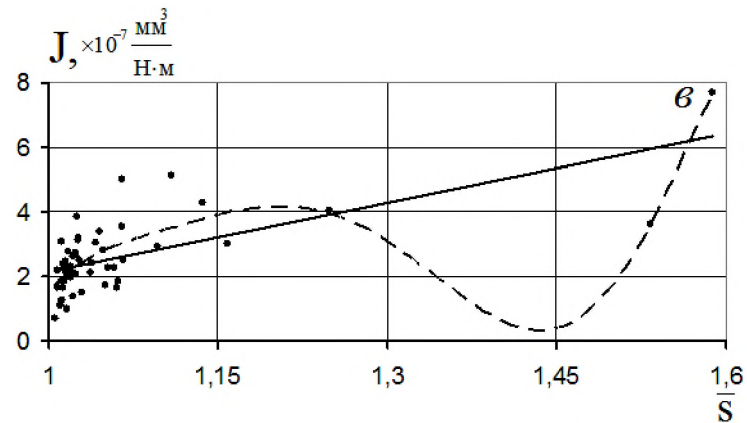
$$y_2 = 4,4211x - 2,1985 (R^2 = 0,4745)$$



$$y_1 = -1E+07x^6 + 8E+07x^5 - 2E+08x^4 + 3E+08x^3 - 3E+08x^2 + 1E+08x - 2E+07$$

$$(R^2 = 0,3869)$$

$$y_2 = 9,094x - 6,885 (R^2 = 0,1781)$$



$$y_1 = -14206x^6 + 109173x^5 - 346976x^4 + 584014x^3 - 549308x^2 + 273899x - 56593$$

$$(R^2 = 0,624)$$

$$y_2 = 7,1464x - 5,0016 (R^2 = 0,4534)$$

Рис. 4. Залежність питомої об'ємної інтенсивності зношування полімерного композиту «флубон-15(20)» (J_i) від питомої поверхні контртіла із сталі 45 до та під час тертя та зношування (розрахованої за виразом (43) за коефіцієнтами $a_i = 10, 20, 30, 40, 50$), за вихідною питомою поверхнею перед кожним етапом \bar{S}_i (а), за питомою поверхнею після кожного етапу \bar{S}_{i+1} (б) та середньою питомою поверхнею до та після кожного етапу $\bar{S}_{i,i+1}$ (в). Суцільна лінія – лінійна апроксимація, крижкована лінія – апроксимація поліномом 6-го порядку.

Висновки

1. На основі математичного опису анізотропної та ізотропної гавсівських шорстких поверхонь за допомогою випадкового поля отримані математичні вирази для розрахунку питомих площ поверхонь.

2. Показано, що для розрахунку питомої площі поверхні необхідно піддати аналізу функцію помилок, яка входить у математичний вираз для питомої площі поверхні. Представлення функції помилок у вигляді ряду Тейлора з інтегруванням почленно чи методом ітеративного обчислення, ряду з оберненою функцією помилок, через експоненціальний асимптотичний розклад додаткової функції помилок, представлення

інтегралу помилок через гамма-функцію не є продуктивним. Знайдений вираз у вигляді поліному п'ятої степені для розрахунку питомої площі поверхні, за яким надійно з малою помилкою проведені розрахунки.

3. Досліджена зміна питомої площі металеві поверхні від шляху тертя під час зношування полімерного композиту по сталевій поверхні контртіла, при цьому показано, що характер цих змін обумовлений вихідною шорсткістю поверхні.

4. Знайдений надійний лінійний зв'язок між питомою інтенсивністю зношування полімерного композиту та питомою площею поверхні металічного контртіла як вихідною, так й утвореної в процесі тертя та зношування.

Література

1. **Сіренко Г.О., Солтис Л.М.** Моделі нанометричної та мікрометричної шорсткості поверхні твердих тіл (Огляд) // Фізика і хімія твердого тіла. – 2010. – Т. 11. – № 2. – С. 423 – 446.
2. **Семенюк Н.Ф., Сіренко Г.А.** Описание топографии анизотропных шероховатых поверхностей трения с помощью модели случайного поля: 1. Распределение высот вершин, средняя кривизна в вершинах, градиент поверхности // Трение и износ. – 1980. – Т.1. – №3. – С. 465 – 471.
3. **Сіренко Г.О., Семенюк М.Ф., Солтис Л.М.** Щільність ймовірностей розподілу висот вершин шорстких поверхонь твердих тіл, змодельованих випадковим полем // Фізика і хімія твердого тіла. – 2010. – Т. 11. – № 3. – С. 768 – 779.
4. **Сіренко Г.О., Семенюк М.Ф., Солтис Л.М.** Розподіл кривин у вершинах мікро- та нанонерівностей шорстких поверхонь твердих тіл, змодельованих випадковим полем // Фізика і хімія твердого тіла. – 2010. – Т. 11. – № 4. – С. 914 – 927.
5. **Семенюк М.Ф., Сіренко Г.О., Солтис Л.М.** Градієнт анізотропної нано- та мікросшорсткої поверхні твердого тіла, змодельованої випадковим полем // Фізика і хімія твердого тіла. – 2011. – Т. 12. – № 1. – С. 200 – 207.
6. **Найяк П.Р.** Применение модели случайного поля для исследования шероховатых поверхностей // Проблемы трения и смазки. – 1971. – Т.93. – Сер. F. – №3. – С. 85-95.
7. **Семенюк Н.Ф., Сіренко Г.А.** Описание топографии анизотропных шероховатых поверхностей трения с помощью модели случайного поля: 2. Полная кривизна, главные кривизны и отношение главных кривизн в вершинах микронеровностей, удельная площадь гауссовской поверхности и удельный объем зазора // Трение и износ. – 1980. – Т.1. – №5. – С. 815 – 823.
8. **Семенюк Н.Ф., Сіренко Г.А.** Описание топографии анизотропных шероховатых поверхностей трения при помощи модели случайного поля: 3. Фактическая площадь контакта, коэффициент трения, термическое сопротивление, адгезионное взаимодействие с учетом деформации в зоне контакта // Трение и износ. – 1980. – Т.1. – №6. – С. 1010 – 1019.
9. **Айнбиндер С.Б., Андреева Н.Г., Тюнина Э.Л.** Параметры шероховатости контртела, определяющие износостойкость полиэтилена // Трение и износ. – 1981. – Т.11. – №1. – С. 12 – 21.
10. **Айнбиндер С.Б., Тюнина Э.Л.** Трение полимерных материалов. Расчет коэффициента трения при контакте изотропных поверхностей // Механика полимеров. – 1977. – №2. – С. 241.
11. **Айнбиндер С.Б., Тюнина Э.Л.** Трение полимерных материалов. Расчет коэффициента трения при контакте поверхностей с неровностями несферической формы // Механика полимеров. – 1977. – №4. – С. 651.
12. **Бачинская Н.К.** Исследования контактных характеристик шероховатых, сильно анизотропных поверхностей: Дис. ... канд. техн. наук: 05.02.04. – Хмельницкий, 1994. – 166 с.
13. **Романишина О.В., Семенюк Н.Ф.** Предварительное смещение единичного выступа при различных режимах нагружения // Проблемы трибологии. – 1997. – №2. – С. 35–51.
14. **Романишина О.В.** Исследования предварительного смещения упругого контакта шероховатых изотропных поверхностей: Дис. ... канд. техн. наук: 05.02.04. – Хмельницкий, 1998. – 178 с.
15. **Семенюк Н.Ф., Калмыкова Т.Ф.** Фактическая площадь упругого контакта анизотропной шероховатой поверхности с гладкой // Трение и износ. – 1983. – Т.4. – №3. – С. 467 – 475.

16. **Семенюк Н.Ф., Романишина О.В.** Предварительное смещение шероховатых изотропных поверхностей. I. // Проблемы трибологии. – 1997. – №4. – С. 90 – 101.
17. **Семенюк Н.Ф., Романишина О.В.** Рассеяние энергии на единичном контакте в режиме предварительного смещения // Проблемы трибологии. – 1997. – №2. – С. 52–56.
18. **Семенюк Н.Ф., Сиренко Г.А.** Топография и контактные явления анизотропных шероховатых поверхностей трения // Тез. докл. Всесоюз. науч.-техн. конфер. «Трибоника и антифрикционное материаловедение». – Новочеркасск. 27-29.05.1980. – Новочеркасск: Изд-во Новочеркас. политех. ин-та, 1980. – С. 22.
19. **Семенюк Н.Ф., Калда Г.С., Соколан Е.С.** Использование метода случайных полей при расчете параметров шероховатости, влияющих на тепловые процессы в трущихся телах // Проблемы трибологии. – 1996. – №1.
20. **Сиренко Г., Кедик М.** Вплив анізотропної шорсткості поверхонь, змодельованих випадковим полем, на контактні явища // Вісник Прикарп. нац. ун-ту ім. Василя Стефаника. Серія Хімія. – 2004. – Вип. IV. – С. 50 – 53.
21. **Сиренко Г., Семенюк М.** Адгезія з деформацією в зоні контакту анізотропних шорстких поверхонь, змодельованих випадковим полем // Вісник Прикарп. нац. ун-ту ім. Василя Стефаника. Серія Хімія. – 2001. – Вип. I. – С. 66 – 85.
22. **Сиренко Г.О.** Створення антифрикційних матеріалів на основі порошків термостійких полімерів та вуглецевих волокон: Дис. на здобуття наук. ступеня докт. технічних наук: спец. 05.16.06 – порошкова металургія та композиційні матеріали, Хмельницький технологічний ін-т. – Захищ. 8.12.1997 в Ін-ті проблем матеріалознавства ім. І.М. Францевича НАНУ – Київ, 1997. – 537 с.: іл., табл. – Бібліогр.: с. 432 – 451 (275 назв).
23. **Сиренко Г.А.** Осложнение контактных явлений поверхности уплотнительных материалов анизотропной микрошероховатости // Тез. докл. 3-го Всесою. совещания по уплотнительной технике. ВНИИкомпрессормаш. – Сумы, 1982. – С. 44 – 45.
24. **Свирденко А.И., Калмыкова Т.Ф.** Исследование фактической площади фрикционного контакта полимер – металл с помощью акустических колебаний. Сооб. 1 // Трение и износ. – 1980. – Т.1. – №5. – С. 898 – 907.
25. **Свирденко А.И., Калмыкова Т.Ф., Холодильов О.В.** Исследование фактической площади фрикционного контакта полимер – металл с помощью акустических колебаний. Сооб. 2 // Трение и износ. – 1982. – Т.3. – №5. – С. 808 – 812.
26. **Semenjuk N.F.** Entwicklung von Berechnungsverfahren der Reibungs und Verschlei.theorie mit Hilfe des Modells stochastischer Felder: Diss. В an der Technisen Hochschule Zittau. –Zittau, 1991. – 160 s.
27. **Зимон А.Д.** Адгезия жидкости и смачивание. – Москва: Химия, 1974. – 416 с.
28. **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике для научных работников и инженеров / Пер. И.Г. Арамановича, А.М. Березмана, И.А. Войштейна и др. – Москва: Наука, 1978. – 832 с.
29. **Математическая энциклопедия** / глав. ред. И.М. Виноградов; ред. колл. С.И. Адян, П.С. Александров, Н.С. Бахвалов и др. – Москва: Сов. энциклопедия. – Т. 1, 1977. – 1152 стб., ил. – Т. 2, 1979. – 1104 стб., ил.
30. **Abramowitz Milton, Stegun Irene A.** Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables. – New York: Dover, 1972.
31. **Бермант А.Ф.** Краткий курс математического анализа. – Москва: Физматиздат, 1963. – 664 с.
32. <http://functions.wolfram.com/GammaBetaErf/InverseErf/06/01/>.
33. **Сиренко Г.А.** Антифрикционные карбопластики. – Киев: Техніка, 1985. – 195 с.
34. **Сиренко Г.А., Свидерский В.П., Герасимов В.Д., Никинов В.З.** Антифрикционные термостойкие полимеры. Киев: Техніка, 1978. – 246 с.
35. **А.с. 1635523** (СССР), МКИ С08J5/16; С08L27/18; С08K13/00. Антифрикционный материал / Г.А. Сиренко, А.Ф. Будник, Г.М. Сорокин, Л.М. Кириченко, В.И. Яшук (Украина). – 1990.
36. **А.с. 1467893** (СССР), МКИ В32В3/12; D04С5/00; F16С33/12. Антифрикционный материал / Г.А. Сиренко, Г.М. Сорокин, А.Ф. Будник, А.М. Сиренко (Украина). – 1988.
37. **Сиренко Г.О., Шийчук О.В.** Математичний опис процесу дроблення вуглецевих волокон для наповнення полімерів // Композиційні полімерні матеріали. – 2003. – XXV. – № 1. – С. 49-53.
38. **Сиренко Г.О., Семенюк М.Ф., Солтис Л.М.** Методика експериментального дослідження нано- та мікрошорсткості поверхні за допомогою моделі випадкового поля // Вісник Прикарп. нац. ун-ту ім. Василя Стефаника. Серія Хімія. – Вип. X. – 2010. – С. 123-140.
39. **Мюллер П., Нойман П., Шторм Р.** Таблицы по математической статистике / Пер. с нем. и предисловие В.М. Ивановой. – Москва: Финансы и статистика, 1982. – 272 с.: ил.
40. **Зажигаев Л.С.** Методы планирования и обработки результатов физического эксперимента / Л.С. Зажигаев, А.А. Кишьян, Ю.И. Романиков. – Москва: Атомиздат, 1978. – 232 с.: ил., табл. – Приложение: с. 144-229 (16 табл.). – Библиогр.: с. 230-231.

41. **Бендат Дж.С.** Измерение и анализ случайных процессов / Дж.С. Бендат, А.Г. Пирсол; пер. с англ. Г.В. Матушевского, В.Е. Привальского; под ред. И.Н. Коваленко. – Москва: Мир, 1971. – 408 с. – Перевод за изд.: Measurement and analysis of random data / Julius S. Bendat, Allan G. Piersol. – John Wiley and Sons, Inc. – New York-London-Sydney, 1967.: ил., табл. – Предмет. указатель: с. 403-408. – Библиогр.: с. 400-402 (59 наименов.).
42. **Степнов М.Н.** Статистическая обработка результатов механических испытаний / Михаил Никитович Степнов. – Москва: Машиностроение, 1972. – 232 с. : ил., табл. – Библиогр.: с. 229-230 (36 назв.).

Сіренко Г.О. – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри неорганічної та фізичної хемії.

Солтис Л.М. – аспірант кафедри неорганічної та фізичної хемії.

Семенюк М.Ф. – доктор технічних наук, професор кафедри машинознавства.

Рецензент

Мідак Л.Я. – кандидат хімічних наук, доцент кафедри неорганічної та фізичної хемії Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника.