Вісник Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника. ISSN 2310-1288
Серія Хімія. Випуск XXII (2018), С. 91-107

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ В ХЕМІЇ

УДК 620.17:519.24

Г.О. Сіренко, М,Б Складанюк, І.В. Говдяк, М.І. Мартинюк

Статистичні методи в хемії та хемічній технолоґії: 1. Дисперсійна аналіза (теорія)

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, вул. Шевченка, 57, м. Івано-Франківськ, 76018, Україна, skladanyuk16@gmail.com

Рукопис статті, що описує математичні методи в хемії та хемічній технології, містить теорію дисперсійної аналізи. Матеріал може бути прикладений для опису аналізів у хемічній технології експериментальних досліджень.

Ключові слова: дисперсія, статистична рівність, дисперсійна аналіза.

H.O.Sirenko, M.B. Skladanyuk, I.V. Hovdiak, M.I. Martynyuk

Mathematical methods in chemistry and chemical technology: dispersion analysis (theory)

[1]*Vasyl Stefanyk Precarpathian National University,57, Shevchenko Str., Ivano-Frankivsk, 76018, Ukraine*

A manuscript that describes mathematical methods in chemistry and chemical technology, namery the teory of dispersion analysis. The material on the application of dispersion analysis in chemical technology has been worked out.

Keywords: variance, statistical equality, dispersion analysis

Стаття поступила до редакції 15.09.2018; прийнята до друку 05.12.2018

Вступ

Актуальність теми. Метою більшости досліджень у хемії та хемічній технології є вирішення складних багаточинникових експериментальних завдань, які пов`язані зі встановленням надійних зв`язків між неперервними випадковими величинами, пошуком оптимальних рішень якости матеріалів, пошуком оптимальних умов проведення хеміко – технологічних процесів, розробкою раціональних конструкцій хемічного обладнання тощо.

1. **Існують два різних шляхів підходів до вирішення таких завдань**. Традиційні методи досліджень у хемії та хемічній технології пов`язані з «пасивним» експериментом, який потребує значних витрат і часу. У пасивному експерименті вирішенню експериментальних завдань передує всебічне дослідження механізму процесу та властивостей речовини. «Пасивний» експеримент пов`язаний з почерговим варіюванням окремих змінних. Базуючись на результатах такого дослідження можна створити наближену теорію процесу, за допомогою якої можна вирішувати подальші експериментальні завдання. Але точність і надійність таких результатів низька. Та й системи, які належить описати теоретично та їх оптимізувати є багаточинниковими, багаторівневими та виявляються настільки складними, що не підлягають теоретичному вивченню у прийняті терміни. Окрім того, у більшости випадків експериментальні завдання вирішуються при неповному знанні механізмів процесів та явищ. Методологія находження таких рішень залишається неформалізованою.

2. **Другий метод використовує теорію «активного» експерименту**, що дозволяє вибрати оптимальну стратегію дослідження при неповноті знанні про об`єкт дослідження та багаточинникові завданні. При цьому, на кожному етапі дослідження використовують математичне планування та аналізу експерименту. Математичне планування та аналіза експерименту базується на низці загально-методичних концепціях:

1) дисперсійної аналізи;
2) регресійної аналізи;
3) кореляційної аналізи;
4) рандомізації (надання випадкового характеру реалізації дослідів та їх повторень);
5) послідовного експерименту;
6) оптимального використання чинникового простору;
7) компактности інформації;
8) статистичних оцінок, тощо.

3. Мета та завдання дослідження.

Мета роботи полягала в узагальнені, систематизації матеріалу для більш точного дослідження математичних методів у хемії та хемічній технології, а саме: дисперсійної аналізи.

Об'єктом дослідження був літературні джерела інформації з математичних методів у хемії та хемічній технології.

Предметом дослідження **був** огляд та аналізи літературних джерел інформації з математичних методів у хемії та хемічній технології.

Для досягнення поставленої мети необхідно було вирішити наступні **завдання**:

а) зробити огляд теоретичного матеріалу про математичні методи в хемії та хемічній технології;
б) опрацювати теоретичний матеріал про дисперсійну аналізу;
в) застосувати метод та методологію дисперсійної аналізи в експериментальних дослідженнях у галузях хемії, хемічній технології, фізичному та хемічному матеріалознавстві, в медичній хемії, харчовій хемії, фармацевтичній хемії, тощо.

Розділ 1
ДИСПЕРСІЙНА АНАЛІЗА (теоретична частина)
1.1. Статистична рівність двох ґенеральних дисперсій

1. Нехай маємо два варіаційних ряди для двох неперервних випадкових величин X та Y:

$$X: x_1 \le x_2 \le x_3 \le \ldots \le x_i \le \ldots \le x_{N1}: \bar{x}, S_x^2, S_x, N_x, \ldots \quad (1.1)$$

$$Y: y_1 \le y_2 \le y_3 \le \ldots \le y_i \le \ldots \le y_{N2}: \bar{y}, S_y^2, S_y, N_y, \ldots \quad (1.2)$$

2. Висуваємо нульову гіпотезу: $H_0: \sigma_x^2 = \sigma_y^2$

$$\uparrow \quad \uparrow \text{ оцінки}$$

$$S_x^2 \neq S_y^2,$$

або словами:

H_0: дві ґенеральні дисперсії σ_x^2 і σ_y^2, яким дана оцінка за відповідними вибірковими дисперсіями, S_x^2 і S_y^2, статистично рівні.

Альтернативною гіпотезою H_1 (щодо H_0) буде гіпотеза:

$$H_1: \sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$$

$$\uparrow \quad \uparrow \text{ оцінки}$$

$$S_x^2 \neq S_y^2$$

або словами:

H_1: дві ґенеральні дисперсії, яким дана оцінка за відповідними вибірковими дисперсіями, статистично нерівні.

Нехай: $S_x^2 > S_y^2$, де відповідні вибіркові дисперсії дорівнюють:

$$S_x^2 = \frac{SS_x}{f_x} > S_y^2 = \frac{SS_y}{f_y}, \tag{1.3}$$

де $f_x = N_x - 1$, $f_y = N_y - 1$ – числа відповідних ступенів вільностей.

3. Перевірку H_0 та H_1 проведемо за критерієм Фішера, розрахувавши перед цим статистику F_p: Нехай $S_x^2 > S_y^2$:

$$F_p = \frac{S^2_{max}}{S^2_{min}} = \frac{S_x^2}{S_y^2} \tag{1.4}$$

4. Аналіза:

а) **якщо $F_p \leq F_\alpha$** $= F_T\{\alpha;\ f_{max}=f_x=N_x-1;\ f_{min}=f_y=N_y-1\}$, то H_0 приймається з рівнем значущости α = 1-p (з рівнем ймовірности p=1-α) за обсягах двох виборок N_x та N_y, тобто: **дві ґенеральні дисперсії статистично рівні** (дві відповідні вибіркові дисперсії статистично однорідні).

Введемо у науковий обіг означення **ступеня рівности** двох ґенеральних дисперсій за критерієм Фішера F:

$$\xi_1(F) = \frac{F_T(\alpha)}{F_p} \geq 1, \tag{1.5}$$

а так як ми маємо справу зі статистичними оцінками, то при цій статистичній рівности залишковий **ступінь нерівности** двох ґенеральних дисперсій дорівнює:

$$\xi_2(F) = \frac{F_p}{F_T(\alpha)} < 1. \tag{1.6}$$

б) **якщо $F_p > F_\alpha = F_T$**$\{\alpha;\ f_{max}=f_x=N_x-1;\ f_{min}=f_y=N_y-1\}$, то H_0 відкидаємо з α = 1-p (p=1-α), α приймаємо альтернативну гіпотезу H_1 з α = 1-p (p=1-α) та обсягами вибірок N_x та N_y, тобто: **дві ґенеральні дисперсії статистично нерівні** (відповідні вибіркові дисперсії статистично неоднорідні).

Введемо у науковий обіг означення **ступеня нерівности** двох ґенеральних дисперсій:

$$\xi_2(F) = \frac{F_p}{F_T(\alpha)} > 1, \tag{1.7}$$

А так, як ми маємо справи зі статистичними оцінками, то при цій статистичній нерівности залишковий **ступінь рівности** двох ґенеральних дисперсій:

$$\xi_1(F) = \frac{F_T(\alpha)}{F_p} \leq 1. \tag{1.8}$$

1.2. Статистична рівність двох математичних сподівань

1. Для рядів (1.1) і (1.2) висуваємо нульову гіпотезу оцінки:

$$H_0:\ a_x = a_y$$
$$\uparrow \quad \uparrow$$
$$\bar{x} \neq \bar{y}$$

або словами:

H_0: дві ґенеральні середні (математичні сподівання) a_x і a_y, яким дана оцінка за відповідними вибірковими середніми $\bar{x}$ і $\bar{y}$, **статистично рівні**).

Альтернативною (відносно H_0) гіпотезою буде гіпотеза H_1 оцінки:

$$H_1:\ a_x \neq a_y$$
$$\uparrow \quad \uparrow$$
$$\bar{x} \neq \bar{y}$$

або словами:

H_1: дві ґенеральні середні (математичні сподівання) a_x і a_y, яким дана оцінка за відповідними вибірковими середніми $\overline{x}$ і $\overline{y}$, статистично нерівні.

2. Перевірку H_0 та H_1 проведемо за критерієм Стьюдента $t_T = t_\alpha$:

1) Якщо попередньо доведено, що ґенеральні дисперсії двох сукупностей неперервних випадкових величин статистично рівні $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$, то розраховуємо об'єднану вибіркову дисперсію:

$$S_{xy}^2 = \frac{SS_x + SS_y}{f_x + f_y} = \frac{SS_{xy}}{f_{xy}} = \frac{f_x S_x^2 + f_y S_y^2}{N_x + N_y - 2} \qquad (1.9)$$

2) Розраховуємо за абсолютною величиною статистику t_p:

$$t_p = \left| \frac{\overline{x} - \overline{y}}{S_{xy}\sqrt{\dfrac{1}{N_x} + \dfrac{1}{N_y}}} \right|. \qquad (1.10)$$

3. Аналіза:

а) якщо при цьому $|t_p| \le t_\alpha = t_T\{\alpha;\ f_{xy}=N_x+N_y-2\}$, то H_0 приймаємо з α=1-p(p=1-α), тобто ґенеральні середні статистично рівні $a_x = a_y$, а відповідні вибіркові середні статистично однорідні.

Введемо у науковий обіг означення ступеня рівности двох ґенеральних середніх:

$$\xi_1(t) = \frac{t_T(\alpha)}{|t_p|} \ge 1, \qquad (1.11)$$

а так як ми маємо справу зі статистичними оцінками, то за статистичній рівности залишковий ступінь нерівности двох ґенеральних середніх дорівнює:

$$\xi_2(t) = \frac{|t_p|}{t_T(\alpha)} < 1; \qquad (1.12)$$

б) якщо при цьому $|t_p| \ge t_\alpha = t_T\{\alpha;\ f_{xy}=N_x+N_y-2\}$, то H_0 відкидаємо з α=1-p (p=1-α), приймаємо H_1 з α = 1-p (p=1-α) – ґенеральні середні статистично нерівні $a_x \neq a_y$, а вибіркові середні відповідно статистично неоднорідні.

Введемо у науковий обіг означення ступеня нерівности двох ґенеральних середніх:

$$\xi_2(t) = \frac{|t_p|}{t_T(\alpha)} > 1, \qquad (1.13)$$

При цьому за нерівністю залишковий ступінь рівности двох ґенеральних середніх дорівнює:

$$\xi_1(t) = \frac{t_T(\alpha)}{|t_p|} \le 1. \qquad (1.14)$$

4. Якщо попередньо доведено, що ґенеральні дисперсії двох сукупностей неперервних випадкових величин **статистично нерівні** $\sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$, то **розраховуємо за абсолютною величиною статистику t_p:**

$$t_p = \left| \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{S_x^2}{N_x} + \frac{S_y^2}{N_y}}} \right|. \quad (1.15)$$

а) якщо при цьому $| t_p | \le t_\alpha = t_T\{\alpha;\ f\}$, то H_0 приймаємо з α = 1-p (p=1-α), тобто **ґенеральні середні статистично рівні** $a_x=a_y$, а вибіркові середні **статистично однорідні** зі ступенем рівности двох ґенеральних середніх:

$$\xi_1(t) = \frac{t_T(\alpha)}{|t_p|} \ge 1, \quad (1.16)$$

при цьому залишковий ступінь нерівности становить:

$$\xi_2(t) = \frac{|t_p|}{t_T(\alpha)} < 1. \quad (1.17)$$

б) якщо при цьому $| t_p | \ge t_\alpha = t_T\{\alpha;\ f\}$, то H_0 відкидаємо з α = 1-p (p=1-α), тобто приймаємо H_1 з α = 1-p (p=1-α) – **ґенеральні середні статистично нерівні** $a_x \ne a_y$, а вибіркові середні статистично неоднорідні зі ступенем нерівности:

$$\xi_2(t) = \frac{|t_p|}{t_T(\alpha)} > 1, \quad (1.18)$$

при цьому залишковий ступінь рівности становить:

$$\xi_1(t) = \frac{t_T(\alpha)}{|t_p|} \le 1. \quad (1.19)$$

Теоретичні значення критерію Стьюдента вибирають із таблиць для числа ступенів вільностей:

$$f = \frac{f_x \cdot f_y}{f_y c^2 + (1-c)^2 f_x}, \quad (1.20)$$

$$\text{де } c = \frac{S_x^2 / N_x}{S_x^2 / N_x + S_y^2 / N_y} \quad (\text{якщо } S_x^2 > S_y^2). \quad (1.21)$$

1.3. Одночинниковий експеримент

1.3.1. Статистична рівність ряду ґенеральних дисперсій

1. Нехай виконується реальний експеримент під час дослідження функції y=f(x).

2. Експеримент сплановано таким чином, що чинник X варіюється на N рівнях (i); на кожному рівні i плануємо повторні досліди n_i-раз.

3. Модель такого експерименту:

$$a_y = a_0 + \Phi_i + \varepsilon_{ij}, \quad (1.22)$$

де a_0 – середній результат;

Φ_i – ефект від X-чинника на i-рівні;

ε_{ij} – помилка досліду на і-рівні при j-повторенні.

План такого експерименту подано в табл. 1.1.

4. Усім дослідам, включаючи і повторні, присвоєно номери, згідно цих чисел досліди рандомізовано у часі за таблицею випадкових чисел.

5. Результати експерименту занесені в табл. 1.1.

6. Розрахуємо середню кожного ряду:

$$\bar{y}_i = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}}{n_i}. \tag{1.23}$$

7. Розраховуємо загальну середню:

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}}{\sum_{i=1}^{N} n_i} = \frac{\sum_{i=1}^{N} n_i \bar{y}_i}{\sum_{i=1}^{N} n_i}. \tag{1.24}$$

Таблиця 1.1

План та результати одночинникового експерименту

Рівень чинника X (i)	Повторні досліди						Всього повторних дослідів (n) ряду	Середній результат у рядку $\bar{y}_i$	Дисперсія ряду S_i^2	Середнє квадратичне відхилення у ряду S_i
	1	2	…	j	…	n_i				
	результати експерименту									
1	y_{11}	y_{12}		y_{1j}		y_{1n1}	n_1	$\bar{y}_1$	S_1^2	S_1
2	y_{21}	y_{22}		y_{2j}		y_{2n2}	n_2	$\bar{y}_2$	S_2^2	S_2
…										
i	y_{i1}	y_{i2}		y_{ij}		y_{ini}	n_i	$\bar{y}_i$	S_i^2	S_i
…										
N	y_{N1}	y_{N2}		y_{Nj}		y_{NnN}	n_N	$\bar{y}_N$	S_N^2	S_N

8. Розрахуємо дисперсію в ряду:

$$S_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij} - \bar{y}_i)^2}{n_i - 1} = \frac{SS_i}{f_i}, \tag{1.25}$$

де число ступенів вільностей для дисперсії результатів і-ряду:

$$f_i = n_i - 1. \tag{1.26}$$

9. Розраховуємо загальну дисперсію всього експерименту:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} f_i \cdot S_i^2}{\left(\sum_{i=1}^{N} n_i\right) - N} = \frac{SS}{f_2}, \tag{1.27}$$

де $f_2 = \left(\sum_{i=1}^{N} n_i\right) - N$ - число ступенів вільностей для дисперсії всіх результатів (табл. 1.1.) (1.28)

У разі, коли n_i = const = n, то число ступенів вільностей:

$$f_2 = N(n-1). \quad (1.29)$$

10. Процедурою доведемо або приймаємо, якщо для цього є підстави, що результати у кожному ряду підпорядковані нормальному закону розподілу (н.з.р.) Ґавса.

11. Висуваємо нульову гіпотезу H_0:

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_i^2 = \ldots = \sigma_N^2$$

↑ ↑ ↑ ↑ оцінки

$$S_1^2 \neq S_2^2 \neq \ldots \neq S_i^2 \neq \ldots \neq S_N^2$$

(ряд ґенеральних дисперсій статистично рівний).

12. Альтернативною (до нульової H_0) буде гіпотеза H_1:

$$H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \neq \ldots \neq \sigma_i^2 \neq \ldots \neq \sigma_N^2$$

↑ ↑ ↑ ↑ оцінки

$$S_1^2 \neq S_2^2 \neq \ldots \neq S_i^2 \neq \ldots \neq S_N^2$$

(ряд ґенеральних дисперсій статистично нерівний),

13. Перевірка нульової гіпотези H_0:

1) якщо n_i = const = n, то H_0 перевіряють **за критерієм Кохрана (Кохрена, Кокрана, Кокрена),** розраховуючи статистику:

$$G_p = \frac{S_{i\,max}^2}{\sum_{i=1}^{N} S_i^2} \quad (1.30)$$

де $S_{i\,max}^2$ – максимальна дисперсія у ряду дисперсій;

$\sum_{i=1}^{N} S_i^2$ - сума N дисперсій всього ряду, включаючи з $S_{i\,max}^2$.

а) якщо при цьому $G_p \leq G_\alpha = G_T$ $\{\alpha;\ N;\ f_i = n_i - 1 = n - 1\}$, де $G_\alpha = G_T$ – табличне значення критерія Кохрана, то H_0 приймаємо з α = 1-p (p = 1 – α) – ряд ґенеральних дисперсій статистично рівний (відповідний ряд вибіркових дисперсій статистично однорідний).

Введемо в науковий обіг означення **ступеня рівности** ряду дисперсій за критерієм Кохрана:

$$\xi_1(G) = \frac{G_T(\alpha)}{G_p} \geq 1, \quad (1.31)$$

при цьому через статистичні оцінки залишковий ступінь нерівности ряду дисперсій за критерієм Кохрана становить:

$$\xi_2(G) = \frac{G_p}{G_T(\alpha)} < 1. \quad (1.32)$$

б) якщо при цьому $G_p > G_T$ $\{\alpha;\ N;\ f_i = n_i - 1 = n - 1\}$, то H_0 відкидаємо з α = 1-p (p = 1 – α), тобто приймаємо H_1 з α = 1-p (p = 1 – α) – ряд ґенеральних дисперсій статистично нерівний (відповідний ряд вибіркових дисперсій статистично неоднорідний).

Введемо в науковий обіг означення ступеня нерівности ряду дисперсій за критерієм Кохрана:

$$\xi_2(G) = \frac{G_p}{G_T(\alpha)} > 1, \tag{1.33}$$

при цьому через статистичні оцінки залишковий ступінь рівности ряду дисперсій за критерієм Кохрана становить:

$$\xi_1(G) = \frac{G_T(\alpha)}{G_p} \leq 1. \tag{1.34}$$

2) **якщо n_i = const або $n_i \neq$ const**, то H_0 перевіряють **за критерієм Фішера,** розраховуючи статистику F_p:

$$F_p = \frac{S_{max}^2}{S_{min}^2}, \tag{1.35}$$

де $S_i^2{}_{max}$, $S_j^2{}_{min}$ – максимальна та мінімальна дисперсія відповідно, які вибрані із ряду дисперсій;

а) якщо при цьому $F_p \leq F_\alpha = F_T\{\alpha;\ f_{max}=N_{imax}-1;\ f_{min}=N_{imin}-1\}$, де $F_\alpha = F_T$ – табличне значення критерія Фішера, то H_0 приймається з α = 1-p (p=1-α) – ряд генеральних дисперсій статистично рівний (відповідний ряд вибіркових дисперсій статистично однорідний).

Введемо в науковий обіг означення ступеня рівности ряду дисперсій за критерієм Фішера:

$$\xi_1(F) = \frac{F_T(\alpha)}{F_p} \geq 1, \tag{1.36}$$

при цьому через статистичні оцінки **залишковий ступінь нерівности** ряду дисперсій при їх статистичній рівности за критерієм Фішера становить:

$$\xi_2(F) = \frac{F_p}{F_T(\alpha)} < 1. \tag{1.37}$$

б) якщо при цьому $F_p > F_\alpha = F_T\{\alpha;\ f_{max};\ f_{min}\}$, то H_0 відкидається з α = 1-p (p=1-α), приймається альтернативна гіпотеза H_1 з α = 1-p (p=1-α) – ряд генеральних дисперсій **статистично нерівний** (відповідний ряд вибіркових дисперсій статистично неоднорідний).

Введемо в науковий обіг означення ступеня нерівности ряду дисперсій за критерієм Фішера:

$$\xi_2(F) = \frac{F_p}{F_T(\alpha)} > 1, \tag{1.38}$$

при цьому через статистичні оцінки **залишковий ступінь рівности** ряду дисперсій при їх статистичній нерівности за критерієм Фішера становить:

$$\xi_1(F) = \frac{F_T(\alpha)}{F_p} \leq 1. \tag{1.39}$$

3) якщо **n_i = var**, то для перевірки H_0 застосовують більш точний **критерій Бартлета** (точніше критерій Пірсона χ^2 у формі Бартлета), розраховуючи статистику χ^2_p:

$$\chi_p^2 = \frac{1}{c}\left[\left(f_2 \ln S_2^2\right) - \sum_{i=1}^{N}(f_i \ln S_i^2)\right], \tag{1.40}$$

$$\text{де} \quad c = \frac{1}{\ln 10}\left[1 + \frac{1}{3f_1}\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{f_i} - \frac{1}{f_2}\right)\right]. \tag{1.41}$$

$$f_i=n_i-1;\ f_j=N-1;\ f_2 = \left(\sum_{i=1}^{N} n_i\right) - N;\ S_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n_i}\left(y_{ij} - \overline{y}_i\right)^2}{f_i};\ S_2^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(f_i \cdot S_i^2\right)}{f_2};$$

N – число дисперсій (табл. 1.1).

а) Якщо при цьому $\chi^2_p \le \chi^2_\alpha = \chi^2_T \{\alpha;\ f_1\}$, де $\chi^2_\alpha = \chi^2_T$ – табличне значення критерія Пірсона, то H_0 приймається з α = 1-p (p=1-α) – ряд генеральних дисперсій статистично рівний (відповідний ряд вибіркових дисперсій статистично однорідний).

Введемо в науковий обіг означення ступеня рівности ряду дисперсій за критерієм Пірсона у формі Бартлета:

$$\xi_1(\chi^2) = \frac{\chi^2_T(\alpha)}{\chi^2_p} \ge 1, \qquad (1.42)$$

при цьому через статистичні оцінки залишковий ступінь нерівности ряду дисперсій при їх статистичній рівности за критерієм Пірсона у формі Бартлета становить:

$$\xi_2(\chi^2) = \frac{\chi^2_p}{\chi^2_T(\alpha)} < 1. \qquad (1.43)$$

б) Якщо при цьому $\chi^2_p > \chi^2_T \{\alpha;\ f_1\}$, то H_0 відкидається з α = 1-p (p=1-α). Приймаємо H_1 – ряд генеральних дисперсій статистично нерівний (відповідний ряд вибіркових дисперсій статистично неоднорідний).

Введемо в науковий обіг означення ступеня нерівности ряду дисперсій за критерієм Пірсона у формі Бартлета:

$$\xi_2(\chi^2) = \frac{\chi^2_p}{\chi^2_T(\alpha)} > 1, \qquad (1.44)$$

при цьому через статистичні оцінки залишковий ступінь рівности ряду дисперсій при їх статистичній нерівности за критерієм Пірсона у формі Бартлета становить:

$$\xi_1(\chi^2) = \frac{\chi^2_T(\alpha)}{\chi^2_p} \le 1. \qquad (1.45)$$

1.3.2. Порівняння двох виборок за їх ознаками

1. У табл. 1.2 приведений приклад статистичних даних за ознаками для двох об’єктів порівняння.

У табл. 1.2: n_{1i}, n_{2i} – абсолютні частоти зустрічі ознак у відповідній виборці;

ω_{1i}, ω_{2i} - відносні частоти зустрічі ознак у відповідній виборці; k – кількість ознак; N_1, N_2 – загальна сума абсолютних ознак у відповідній виборці.

2. Висуваємо нульову гіпотезу:

H_0: немає статистичної різниці (відмінности) між об’єктами 1 і 2 за їх ознакамии.

Альтернативною до H_0 буде гіпотеза:

H_1: між об’єктами 1 і 2 існує статистична різниця (відмінність) за їх ознакамии.

3. Розраховуємо статистику χ^2_p:

$$\chi^2_p = N_1 N_2 \sum_{i=1}^{k} \left[\frac{\left(\frac{n_{1i}}{N_1} - \frac{n_{2i}}{N_2} \right)^2}{n_{1i} + n_{2i}} \right] = N_1 N_2 \sum_{i=1}^{k} \left[\frac{(\omega_{1i} - \omega_{2i})^2}{n_{1i} + n_{2i}} \right], \qquad (1.46)$$

Таблиця 1.2

i	Назва ознаки	Об'єкт 1		Об'єкт 2	
		n_{1i}	$\omega_{1i}=\frac{n_{1i}}{N_1}$	n_{2i}	$\omega_{2i}=\frac{n_{2i}}{N_2}$
1	LiCl	n_{11}	ω_{11}	n_{21}	ω_{21}
2	NaCl	n_{12}	ω_{12}	n_{22}	ω_{22}
. . .	NaF, NaBr…	. . .	. . .	. . .	. . .
i	KCl	n_{1i}	ω_{1i}	n_{2i}	ω_{2i}
. . .	KF, KBr…	. . .	. . .	. . .	. . .
k	CsCl	n_{1k}	ω_{1k}	n_{2k}	ω_{2k}
		$N_1=\sum_{i=1}^{k} n_{1i}$	1,0	$N_2=\sum_{i=1}^{k} n_{2i}$	1,0

4. Аналіза:

а) якщо $\chi^2_р \le \chi^2_\alpha = \chi^2_Т$ $\{\alpha; f\}$, де $\chi^2_\alpha = \chi^2_Т$ – табличне значення критерія Пірсона; f=k-1, то H_0 приймається з α = 1-р (р=1-α) – між двома вибірками відсутня статистична різниця (відмінність).

При цьому ступінь статистичної однаковости об'єктів 1 і 2:

$$\xi_1(\chi^2) = \frac{\chi^2_Т(\alpha)}{\chi^2_р} \ge 1. \qquad (1.47)$$

із залишками ступіня статистичної відмінности об'єктів 1 і 2:

$$\xi_2(\chi^2) = \frac{\chi^2_р}{\chi^2_Т(\alpha)} < 1. \qquad (1.48)$$

б) якщо $\chi^2_{розр} > \chi^2_Т$ $\{\alpha; f\}$, то H_0 відкидається з α = 1-р (р=1-α). Приймаємо H_1 з α = 1-р (р=1-α) між об'єктами дослідження існує статистична відмінність.

При цьому:

Ступінь статистичної відмінности об'єктів 1 і 2:

$$\xi_2(\chi^2) = \frac{\chi^2_р}{\chi^2_Т(\alpha)} > 1. \qquad (1.49)$$

Із залишками ступіня статистичної однаковости об'єктів 1 і 2 у статистичній відмінности:

$$\xi_1(\chi^2) = \frac{\chi^2_Т(\alpha)}{\chi^2_р} \le 1. \qquad (1.50)$$

1.3.3. Рівність ряду математичних сподівань (ґенеральних середніх)

1. За результатами табл. 1.1 перевіримо рівність ряду ґенеральних середніх за відповідними вибірковими середніми.

2. Висуваємо нульову гіпотезу H_0: $a_{y1} = a_{y2} = \ldots = a_{yi} = \ldots = a_{yN}$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \text{ оцінка} \\ \bar{y}_1 \neq & \bar{y}_2 \neq & \ldots \neq & \bar{y}_i \neq & \ldots \neq & \bar{y}_N . \end{matrix}$$

(ряд ґенеральних середних статистично рівний).

3. Доводимо однорідність вибіркових дисперсій рядків (рівність відповідних ґенеральних дисперсій).

4. Доводимо або приймаємо, що результати у кожному ряду підпорядковані нормальному закону розподілу Ґавса:

5. Розрахунок дисперсій:

а) Дисперсія за рівнями чинників:

$$S_1^2 = \frac{SS_1}{f_1} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{y}_i - \bar{y})^2}{N-1}, \; f_1 = N\text{-}1. \tag{1.51}$$

б) Дисперсія внутрішня (залишкова) [сумарна в середині повторних дослідів]:

$$S_2^2 = \frac{SS_2}{f_2} = \frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij} - \bar{y}_i)^2}{\left(\sum_{i=1}^{N} n_i\right) - N}, \; f_2 = \left(\sum_{i=1}^{N} n_i\right) - N, \tag{1.52}$$

де $S_2^2 = S_\varepsilon^2$ застосовують для оцінки дисперсії помилки всього експерименту.

в) Загальна (повна) дисперсія:

$$S_3^2 = \frac{SS_3}{f_3} = \frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij} - \bar{y})^2}{\left(\sum_{i=1}^{N} n_i\right) - 1}, \; f_3 = \left(\sum_{i=1}^{N} n_i\right) - 1. \tag{1.53}$$

6. Аналіза:

1) Вплив чинника (розраховуємо статистику F_p):

Якщо $F_p = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{S_1^2}{S_\varepsilon^2} \leq F_T\{\alpha; f_1; f_2\}$, H_0 приймаємо з α = 1-p (p=1 – α) (ряд ґенеральних середніх за рівнями чинника статистично рівний на рівні помилки всього експерименту), при цьому

Ступінь рівности:

$$\xi_1(F) = \frac{F_T(\alpha)}{F_p} \geq 1. \tag{1.54}$$

2) тоді всі результати експерименту належать до одного фраґменту ґенеральної сукупности з нормальним законом розподілу обсягом $\sum_{i=1}^{N} n_i$ з параметрами: $a_y \leftarrow \bar{y}$; $\sigma_y^2 \leftarrow S_3^2$

3) Довірчі інтервали та довірча ймовірність для a_y та σ_y^2:

$$p\left(\bar{y}-\frac{S_3 t_T\{\alpha;f_3\}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N} n_i}}<a_y<\bar{y}+\frac{S_3 t_T\{\alpha;f_3\}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N} n_i}}\right)=1-\alpha\,; \qquad (1.55)$$

$$p\left(z_1^2 S_3^2\frac{f_3}{f_3+1}<\sigma_y^2<z_2^2 S_3^2\frac{f_3}{f_3+1}\right)=1-\alpha\,; \qquad (1.56)$$

або

$$p\left(\frac{f_3 S_3^2}{\chi_T^2\left\{\frac{\alpha}{2};f_3\right\}}<\sigma_y^2<\frac{f_3 S_3^2}{\chi_T^2\left\{1-\frac{\alpha}{2};f_3\right\}}\right)=1-\alpha\,. \qquad (1.57)$$

4) Якщо $F_p > F_T$, то H_0 відкидаємо, приймаємо H_1:

Вплив чинника за рівнями статистично суттєвий, порівняно з помилкою експерименту, при цьому:

Ступінь нерівности:

$$\xi_2(F)=\frac{F_p}{F_T(\alpha)}>1. \qquad (1.58)$$

Із залишками ступеня рівности у нерівности:

$$\xi_1(F)=\frac{F_T(\alpha)}{F_P}\le 1.$$

5) Тоді ми маємо ситуацію, коли результати експерименту кожного рядка (системи спостережень) як виборки, що взяті з відповідних ґенеральних сукупностей з нормальним законом розподілу Ґавса обсягом n_i кожна з параметрами: $a_{yi} \leftarrow \bar{y}_i$; $\sigma_y^2 \leftarrow S_2^2$.

6) Довірчі інтервали та довірча ймовірність для a_y та σ_y^2:

$$p\left(\bar{y}_i-\frac{S_2 t_T\{\alpha;f_2\}}{\sqrt{n_i}}<a_y<\bar{y}_i+\frac{S_2 t_T\{\alpha;f_2\}}{\sqrt{n_i}}\right)=1-\alpha\,; \qquad (1.59)$$

$$p\left(z_1^2 S_2^2\frac{f_2}{f_2+1}<\sigma_y^2<z_2^2 S_2^2\frac{f_2}{f_2+1}\right)=1-\alpha\,; \qquad (1.60)$$

або

$$p\left(\frac{f_2 S_2^2}{\chi_T^2\left\{\frac{\alpha}{2};f_2\right\}}<\sigma_y^2<\frac{f_2 S_2^2}{\chi_T^2\left\{1-\frac{\alpha}{2};f_2\right\}}\right)=1-\alpha\,. \qquad (1.61)$$

7) Оцінка дисперсії середніх:

$$S_{yi}^2=S_{\bar{y}_i}^2=\frac{N-1}{\sum_{i=1}^{N} n_i}\left(S_1^2-S_2^2\right)=\frac{f_1}{f_3+1}\left(S_1^2-S_2^2\right). \qquad (1.62)$$

1.3.4. Обґрунтування нижніх і верхніх ґарантованих толерантних меж

1. **Нижню толерантну межу $X_н$** знаходять для заданого рівня довірчої ймовірности γ та рівня значущости $\alpha = 1 - p$, виходячи з умови $X \geq X_н$ (1). При нормальному законі розподілу результат досліду характеризується $x_н = \bar{x} - ks$ (2), яке з довірчою ймовірністю γ гарантує в $p \cdot 100\% = (1 - \alpha) \cdot 100\%$ випадках дотримання умов (1). Рівняння (2) є оцінкою рівняння $x_н = a_x - k\sigma$.

Для верхньої толерантної межі $X \leq x_в$:

$$x_в = \bar{x} + ks \xrightarrow{\text{оцінка}} x_в = a_X + k\sigma, \tag{1.63}$$

$$\text{де } k = z_p\left(1 + \frac{z_\gamma}{\sqrt{2N}} + \frac{5Z_\gamma^2 + 10}{12N}\right), \tag{1.64}$$

z_p, z_γ - квантилі нормального закону розподілу для ймовірностей p і γ.

1.4. Двочинниковий експеримент

1) y=f (x_1, x_2) на рівнях $N_1(i)$ та $N_2(j)$ відповідно. Кількість повторних дослідів n=const.

2) Модель експерименту:

$$a_y = a_0 + \Phi_i + \Phi_j + \Phi_{ij} + \varepsilon_{ij\nu}, \tag{1.65}$$

де a_0 – загальний ефект;
Φ_i - ефект від x_1-чинник на i-рівні;
Φ_j - ефект від x_2- чинник на j-рівні;
Φ_{ij} – ефект взаємодії двох чинників x_1 на i-рівні та x_2 на j-рівні;
$\varepsilon_{ij\nu}$– помилка досліду на i-рівні x_1-чинника та на j-рівні x_2-чинника при ν-повторних дослідів.

3) План експерименту і результати занесені в табл. 1.3 (попередньо проведена нумерація дослідів, в т.ч. і повторних, і їх рандомізація).

Таблиця 1.3

План та результати двочинникового експерименту

j		1	2	…	j	…	N_2
i	x_{2j}	x_{21}	x_{21}	…	x_{21}	…	x_{21}
	x_{1i}	1 2 … ν …n	1 2 … ν …n	…	1 2 … ν …n	…	1 2 … ν …n
1	x_{11}	$y_{111}\, y_{112} \cdots y_{11\nu} \cdots y_{11n}$	$y_{121}\, y_{122} \cdots y_{12\nu} \cdots y_{12n}$	…	$y_{1j1}\, y_{1j2} \cdots y_{1j\nu} \cdots y_{1jn}$	…	$y_{1N21}\, y_{1N22} \cdots y_{1N2\nu} \cdots y_{1N2n}$
2	x_{12}	$y_{211}\, y_{212} \cdots y_{21\nu} \cdots y_{21n}$	$y_{221}\, y_{222} \cdots y_{22\nu} \cdots y_{22n}$	…	$y_{2j1}\, y_{2j2} \cdots y_{2j\nu} \cdots y_{2jn}$	…	$y_{2N21}\, y_{2N22} \cdots y_{2N2\nu} \cdots y_{2N2n}$
. . .	. . .	. . .	. . .	…	. . .	…	. . .
i	x_{1i}	$y_{i11}\, y_{i12} \cdots y_{i1\nu} \cdots y_{i1n}$	$y_{i21}\, y_{i22} \cdots y_{i2\nu} \cdots y_{i2n}$	…	$y_{ij1}\, y_{ij2} \cdots \mathbf{y_{ij\nu}} \cdots y_{ijn}$	…	$y_{iN21}\, y_{iN22} \cdots y_{iN2\nu} \cdots y_{iN2n}$
. . .	. . .	. . .	. . .	…	. . .	…	. . .
N_1	x_{1N1}	$y_{N111}\, y_{N112} \cdots y_{N11\nu} \cdots y_{N11n}$	$y_{N121}\, y_{N122} \cdots y_{N12\nu} \cdots y_{N12n}$	…	$y_{N1j1}\, y_{N1j2} \cdots y_{N1j\nu} \cdots y_{N1jn}$	…	$y_{N1N21}\, y_{N1N22} \cdots y_{N1N2\nu} \cdots y_{N1N2n}$

4) Доводимо за кожною системою спостережень, що результати підпорядковані нормальному закону розподілу.

5) Доводимо однорідність ряду дисперсій для системи спостережень.

6) Середня системи спостережень:

$$\bar{y}_{ij} = \frac{\sum_{\nu=1}^{n} y_{ij\nu}}{n} \quad (1.66)$$

7) Дисперсія в системі спостережень

$$S_{ij}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{\nu=1}^{n}\left(y_{ij\nu} - \bar{y}_{ij}\right)^2, \; f_{ij} = n - 1 = \text{const}. \quad (1.67)$$

8) Зведемо середні в табл. 1.4.

9) Середня ряду:

$$\bar{y}_{i.} = \frac{\sum_{j=1}^{N_2} \bar{y}_{ij}}{N_2} = \frac{\sum_{j=1}^{N_2}\sum_{\nu=1}^{n} y_{ij\nu}}{N_2 n} \quad (1.68)$$

10) Середня ґрафа:

$$\bar{y}_{.j} = \frac{\sum_{i=1}^{N_1} \bar{y}_{ij}}{N_1} = \frac{\sum_{i=1}^{N_1}\sum_{\nu=1}^{n} y_{ij\nu}}{N_1 n} \quad (1.69)$$

Таблиця 1.4

Матриця середніх результатів для двочинникового експерименту за системами спостережень

j		1	2	…	j	…	N_2		
i	x_{2j} \ x_{1i}	x_{21}	x_{21}	…	x_{21}	…	x_{21}	$\bar{y}_{i.}$	$S_{i.}^2$
1	x_{11}	$\bar{y}_{11}$	$\bar{y}_{12}$	…	$\bar{y}_{1j}$	…	$\bar{y}_{1N_2}$	$\bar{y}_{1.}$	$S_{1.}^2$
2	x_{12}	$\bar{y}_{21}$	$\bar{y}_{22}$	…	$\bar{y}_{2j}$	…	$\bar{y}_{2N_2}$	$\bar{y}_{2.}$	$S_{2.}^2$
. . .	. . .	. . .	. . .	…	. . .	…	. . .	. . .	. . .
i	x_{1i}	$\bar{y}_{i1}$	$\bar{y}_{i2}$	…	$\bar{y}_{ij}$	…	$\bar{y}_{iN_2}$	$\bar{y}_{i.}$	$S_{i.}^2$
. . .	. . .	. . .	. . .	…	. . .	…	. . .	. . .	. . .
N_1	x_{1N1}	$\bar{y}_{N_1 1}$	$\bar{y}_{N_1 2}$	…	$\bar{y}_{N_1 j}$	…	$\bar{y}_{N_1 N_2}$	$\bar{y}_{N_1 .}$	$S_{N1.}^2$
	$\bar{y}_{.j}$	$\bar{y}_{.1}$	$\bar{y}_{.2}$		$\bar{y}_{.j}$		$\bar{y}_{.N_2}$	$\bar{y}_{..}$	
	$S_{.j}^2$	$S_{.1}^2$	$S_{.2}^2$		$S_{.j}^2$		$S_{.N2}^2$	$S_{..}^2$	

11) Загальна середня:

$$\bar{y}_{..} = \frac{\sum_{i=1}^{N_1} \bar{y}_{i.}}{N_1} = \frac{\sum_{j=1}^{N_2} \bar{y}_{.j}}{N_2} = \frac{\sum_{i=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{N_2} \bar{y}_{.j}}{N_1 N_2} = \frac{\sum_{i=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{N_2}\sum_{\nu=1}^{n} y_{ij\nu}}{N_1 N_2 n} \qquad (1.70)$$

12) Дисперсія між середніми за рядами:

$$S_1^2 = \frac{1}{N_1 - 1}\sum_{i=1}^{N_1} N_2 n \left(\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}\right)^2 = \frac{SS_1}{f_1}, \text{ де } f_1 = N_1 - 1. \qquad (1.71)$$

13) Дисперсія між середніми за ґрафами:

$$S_2^2 = \frac{1}{N_2 - 1}\sum_{j=1}^{N_2} N_1 n \left(\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..}\right)^2 = \frac{SS_2}{f_2}, \text{ де } f_2 = N_2 - 1. \qquad (1.72)$$

14) Дисперсія взаємодії двох чинників:

$$S_3^2 = \frac{1}{(N_1 - 1)(N_2 - 1)}\sum_{i=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{N_2} n\left[\bar{y}_{ij} - \left(\bar{y}_{i.} + \bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..}\right)\right]^2 = \frac{SS_3}{f_3}, \text{ де } f_3 = (N_1 - 1)(N_2 - 1). \qquad (1.73)$$

15) Залишкова (внутрішня) дисперсія:

$$S_4^2 = \frac{1}{N_1 N_2 (n-1)}\sum_{i=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{N_2}\sum_{\nu=1}^{n} \left(y_{ij\nu} - \bar{y}_{ij}\right)^2 = \frac{SS_4}{f_4}, \text{ де } f_4 = N_1 N_2 (n-1). \qquad (1.74)$$

16) Повна (сумарна, загальна) дисперсія:

$$S_5^2 = \frac{1}{N_1 N_2 n - 1}\sum_{i=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{N_2}\sum_{\nu=1}^{n} \left(y_{ij\nu} - \bar{y}_{..}\right)^2 = \frac{SS_5}{f_5}, \text{ де } f_5 = N_1 N_2 n - 1 \qquad (1.75)$$

17) Аналіза:

1. Висуваємо нульову гіпотезу відносно взаємодії двох чинників:

H_0: $\sigma_3^2 = \sigma_4^2 = \sigma_\varepsilon^2$ – відсутність взаємодії між факторами x_1 і x_2.

$\uparrow \quad \uparrow$ оцінка

$S_3^2 \neq S_4^2$

(чинники x_1 і x_2 можуть або підсилювати один одного (синергізм), або ослаблювати один одного за впливом на y (антагонізм), або діяти незалежно).

2. Перевірка H_0:

а) Якщо $F_{0p} = \frac{S_3^2}{S_4^2} = \frac{S_3^2}{S_\varepsilon^2} > F_{0T}\{\alpha;\, f_3;\, f_4\}$, то H_0 відкидаємо з α (p=1 – α) (між чинниками x_1 і x_2 існує взаємодія).

Якщо ступінь взаємодії:

$$\xi_{02}(F) = \frac{F_{0p}}{F_{0T}(\alpha)} \geq 1{,}0\text{-}1{,}15, \qquad (1.76)$$

то взаємодією можна знехтувати.

Якщо $\xi_{02} > 1{,}15\text{-}1{,}3$, то подальші оцінки та висліди будуть приблизними. Якщо $\xi_{02} > 1{,}3$, то необхідні спеціальні методи аналізи.

б) Якщо $F_{0p} \leq F_{0T}\{\alpha;\ f_3;\ f_3\}$, то H_0 приймаємо з α (p=1 – α) (взаємодія статистично мала, порівняно з помилкою експерименту)

Ступінь малости взаємодії:

$$\xi_{01}(F) = \frac{F_{0T}(\alpha)}{F_{0p}} \geq 1, \tag{1.77}$$

А ступінь ваговости взаємодії при цьому

$$\xi_{02}(F) = \frac{F_{0p}}{F_{0T}(\alpha)} < 1, \tag{1.78}$$

в) Тоді дисперсію помилки $S_4^2 = S_\varepsilon^2$ обєднують з дисперсією взаємодії S_3^2, утворюючи нову помилку експерименту $S_6^2 = S_{34}^2$:

$$S_6^2 = S_{34}^2 = \frac{SS_3 + SS_4}{f_3 + f_4} = \frac{f_3 S_3^2 + f_4 S_4^2}{f_3 + f_4} = \frac{SS_6}{f_6} = \frac{SS_{34}}{f_{34}}, \tag{1.79}$$

$$\text{де } f_6 = f_{34} = f_3 + f_4 = (N_1 - 1)(N_2 - 1) + N_1 N_2 (n-1) = N_1 N_2 n - N_1 - N_2 + 1. \tag{1.80}$$

18) Далі досліджуємо значущість впливу на Y чинника x_1, порівняно з новою помилкою експерименту, перевіряючи нульову гіпотезу:

H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_{34}^2$.

↑ ↑ оцінка

$S_1^2 \neq S_{34}^2$

Якщо $F_{1p} = \dfrac{S_1^2}{S_{34}^2} > F_{1T}\{\alpha;\ f_1;\ f_{34}\}$, H_0 відкидаємо з α (p=1 – α) (перший чинник суттєво впливає на Y).

Ступінь впливу суттєвого першого чинника:

$$\xi_{2(1)} = \frac{F_{1p}}{F_{1T}(\alpha)} > 1{,}0 \tag{1.81}$$

19) Досліджуємо значущість впливу другого чинника x_2 із залишками несуттєвого впливу:

$$\xi_{1(1)} = \frac{F_{1T}}{F_{1P}} < 1{,}0 \tag{1.82}$$

Якщо $F_{2p} = \dfrac{S_2^2}{S_{34}^2} > F_{2T}\{\alpha;\ f_2;\ f_{34}\}$, H_0 відкидаємо з α (p=1 – α) (другий фактор суттєво впливає на Y).

Ступінь суттєвого впливу другого чинника:

$$\xi_{2(2)} = \frac{F_{2p}}{F_{2T}(\alpha)} \geq 1{,}0 \tag{1.83}$$

Із залишками несуттєвого впливу:

$$\xi_{1(2)} = \frac{F_{2T}(\alpha)}{F_{2P}} < 1 \qquad (1.84)$$

20) Тоді маємо фрагменти (N_1N_2) ґенеральної сукупности, яка має н.з.р. кожна обсягом n з параметрами

$a_{yij} \leftarrow \bar{y}_{ij}$

$\sigma_y^2 \leftarrow S_{34}^2$

21) Довірчі інтервали та довірча ймовірність для a_{yij} та σ_y^2:

$$p\left(\bar{y}_{ij} - \frac{S_{34} t_T\{\alpha; f_{34}\}}{\sqrt{n}} < a_{yij} < \bar{y}_{ij} + \frac{S_{34} t_T\{\alpha; f_{34}\}}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha; \qquad (1.85)$$

ВИСНОВКИ

1. Розроблені методика та методологія дисперсійної аналізи результатів експерименту в хемії та хемічній технології, а саме:
   - статистичної рівности (нерівности) двох ґенеральних дисперсій;
   - статистичної рівности (нерівности) двох ґенеральних середніх;
   - статистичної рівности (нерівности) ряду ґенеральних дисперсій та ряду ґенеральних середніх в однофакторному експерименті;
   - статистичної відмінности двох виборок за їх ознаками;
   - статистичної значущости впливу чинників на результати двофакторного експерименту.

2. Розроблені методика та методологія обґрунтування нижніх і верхніх гарантованих толерантних меж за результатами експерименту для внесення даних в нормативні документи.

Використаних джерела інформації

1. Лариков Л.Н. Структура и свойства металлов и сплавов. Справочник: Тепловые свойства металлов и сплавов / Лариков Л.Н., Юрченко Ю.Ф. − Киев: Наукова думка, 1985. − 438 с.
2. Сіренко Г.О., Базюк Л.В., Мещерякова Н.В. Теплофізичні властивости металів та стопів: залежність зміни ентальпії від температури та радіусу атомів // Фізика і хімія твердого тіла. – Т. 12, № 1. – 2011. – С. 197-207.
3. Степнов М.Н. Статистическая обработка результатов механических испытаний / Михаил Никитович Степнов. – Москва: Машиностроение, 1972. – 232 с. : ил., табл. – Библиогр.: с. 229-230 (36 назв.).
4. Адлер Ю.П. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий / Ю.П. Адлер, Е.В. Маркова, Ю.В. Грановский. – 2-е изд., перераб. и допол. – Москва: Наука, 1976. – 280 с.: ил., табл. – Библиогр. в конце гл.
5. Мюллер П., Нойман П., Шторм Р. Таблицы по математической статистике / Пер. с нем. и предисловие В.М. Ивановой.– Москва: Финансы и статистика, 1982. – 272 с.: ил.
6. Сіренко Г.О., Мідак Л.Я., Сіренко О.Г. Методи лінійної множинної кореляції та реґресії в хемічному матеріалознавстві // Вісник Прикарп. нац. ун-ту ім. Василя Стефаника. Серія Хімія. – Івано-Франківськ: 2011. – Вип. XII. – С. 124-132.
7. Володарський Є.Т., Кошева Л.О. Статистична обробка даних: Навчальний посібник. – Київ: Нац. авіац. ун-т, 2008. – 308 с. – ISBN 978-966-598-406-1.
8. Неділько С.А. Математичні методи в хімії: Підручник. – Київ: Либідь, 2005. – 256 с. – ISBN 966-06-0384-3.
9. Михайліченко Б.М. Курс загальної хімії. Теоретичні основи: Навчальний посібник. – Київ: Вид. «Знання» 2009. – 549с. ISBN 978-966-346-712-2.

Сіренко Г.О. – професор, доктор технічних наук, професор кафедри хімії;
Складанюк М.Б. –к.ф.-м.н., доцент кафедри хімії;
Говдяк І.В. – студентка IV курсу бакалаврату за спеціальністю «хімія»;
Мартинюк М. І. – магістр, здобувач наукової ступені по кафедрі хімії.