

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

УДК 621.891+621.89+621.567; 539.62

Г.О. Сіренко¹, М.Ф. Семенюк², Л.М. Солтис¹, М.Б. Складанюк¹, Мартинюк М.І.¹

Математичний опис нано- та мікрошорстких поверхонь тертя та зношування твердих тіл

¹Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,
вул. Шевченка, 57, м. Івано-Франківськ, 76025, Україна

²Хмельницький національний університет,
вул. Інститутська, 11, м. Хмельницький, 29016, Україна

Розглянуті методи та методика дослідження нано- та мікрошорстких поверхонь, змодельованих анізотропним та ізотропним випадковим полем.

Ключові слова: методика, метод, нанопорсткість, мікропорсткість, анізотропія, ізотропія, модель, випадкове поле, профілограма.

H.O. Sirenko¹, M.F. Semenyuk², L.M. Soltys¹, M.B. Skladanyuk¹

Mathematical description of nano- and micro-rough friction surfaces and wear of solids

¹Yasyl Stefanyk Precarpathian National University,
57, Shevchenko Str., Ivano-Frankivsk, 76025, Ukraine

²Khmelnitsky National University,
11, Instytutska Str., Khmelnytsky, 29016, Ukraine

The methods and technique of research of nano- and microrough surfaces modeled by anisotropic and isotropic random field have been considered.

Key words: technique, method, nanoroughness, microroughness, anisotropy, isotropy, model, random field, profilogram.

Стаття постуила до редакції 20.09.2019; прийнята до друку 05.12.2019.

А. Методика експериментального дослідження нано- та мікрошорсткості поверхні за допомогою моделі випадкового поля

Вступ

Використовуючи модель випадкового поля шорсткої поверхні і не пов'язуючи її з автокореляційною функцією (АКФ) якогось певного виду, і не використовуючи припущення, які прийняті для опису поверхні одномірними випадковими функціями або поверхні з сильною анізотропією і орієнтованими мікронерівностями, а також не припускаючи певної форми нерівностей, в [1–42] отримано співвідношення для щільності ймовірності розподілу висот вершин, розподілу кривин у вершинах

нерівностей, розподілу градієнту анізотропної поверхні.

У [1–13, 16, 24, 38–42] показана придатність теорії випадкового поля для опису топографії гауссовських поверхонь і контактних явищ, при цьому порівняння розрахунків фактичної площі контакту (ФПК) пружного контакту шорсткої гауссовської анізотропної поверхні з рівною методом випадкового поля з результатами експериментального визначення ФПК оптико-акустичним методом показало на близькість експериментальних даних і результатів розрахунків.

Загальна теорія випадкового поля викладена в [43, 44]. Для інтегральних перетворень використали [45–46].

Мета роботи полягала в тому, щоби, на підставі математичного опису профілограми, розробити методику для розрахунків параметрів поверхні.

I. Теоретична частина

1. Опис випадкових процесів і випадкових полів для нано- та мікроскопичних поверхонь.

1.1. Автокореляційна функція шорсткої поверхні.

Нехай анізотропна шорстка поверхня описана рівнянням $z = z(x, y)$, де z – випадкова функція для двох змінних x і y (випадкове поле), а x, y – декартові координати на середній площині висот шорсткої поверхні, але разом з тим статистичні характеристики поверхні залежать від напрямків $\theta = \text{arctg}(k_y/k_x)$ та інваріантні до переміщення початку координат на поверхні (однорідна поверхня). У якості поверхні, від якої здійснюється відлік висот, є площина, яка відповідає середній висоті шорсткої поверхні.

Випадкова функція z , яка описує таку шорстку статистично однорідну анізотропну поверхню, має автокореляційну функцію $R(x, y)$ і допускає її спектральний розклад Фур'є $\Phi(k_x, k_y)$ на гармонічні компоненти, де k_x, k_y – компоненти хвильового вектора \bar{k} , який дорівнює $\bar{k} = 2\pi / \lambda$ з довжиною хвилі λ .

Тоді автокореляційна функція за означенням дорівнює [16]:

$$R(x, y) = \lim_{\substack{L_1 \rightarrow \infty \\ L_2 \rightarrow \infty}} \frac{1}{4L_1L_2} \times \int_{-L_1}^{L_1} \int_{-L_2}^{L_2} z(x_1, y_1) z(x_1 + \Delta x, y_1 + \Delta y) dx_1 dy_1. \quad (1)$$

Якщо шорстка поверхня ізотропна, то функція $R(x, y)$ залежить лише від змінної $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ і не залежить від полярного кута $\theta = \text{arctg}(y/x)$.

1.2. Спектральною щільністю (СЩ) шорсткої поверхні є перетворення Фур'є від функції $R(x, y)$ [16]:

$$\Phi(K_x, K_y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R(x, y) \times \exp[-i(xK_x + yK_y)] dx dy, \quad (2)$$

а зворотне перетворення $\Phi(k_x, k_y)$ [16]:

$$R(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(K_x, K_y) \times \exp[i(xK_x + yK_y)] dK_x dK_y. \quad (3)$$

З виразу (1) видно, що $R(0, 0) = \sigma^2$, де σ^2 – дисперсія, а σ – середнє квадратичне (стандартне) відхилення висоти нерівностей [16, 17]. Тому з (3) витікає [16, 17]:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(k_x, k_y) dk_x dk_y. \quad (4)$$

Вираз (4) відбиває те, що функція $\Phi(k_x, k_y)$ визначає той внесок у величину дисперсії σ^2 , який додає різні спектральні компоненти, що відповідають хвилям з хвильовим числом k і довжинами [16]:

$$\lambda = 2\pi / |k| \quad (5)$$

та напрямками [16]:

$$\theta = \text{arctg}(k_x / k_y). \quad (6)$$

Для ізотропних поверхонь функція Φ залежить тільки від змінної $k \equiv |k|$.

Моменти спектральної щільності шорсткої поверхні (СЩ) визначаються так [16, 17]:

$$m_{pq} = \text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(k_x, k_y) k_x^p k_y^q dk_x dk_y, \quad (7)$$

де Re – дійсна частина числа.

$$\text{Згідно (7) маємо: } m_{00} = \sigma^2. \quad (8)$$

1.3. Щільність ймовірностей розподілу висот вершин випадкової шорсткої поверхні.

1.3.1. Анізотропна поверхня. Залежність щільності ймовірностей розподілу висот вершин анізотропної поверхні [1, 5] від $\varepsilon'_1 = z/m_{00} = z/\sigma$ – безрозмірної (нормованої) висоти:

$$\begin{aligned}
 p_{sum}(\varepsilon'_1) &= \frac{1}{4} D^{-1} \pi^{-3} \Delta^{-1/2} m_{00}^{1/2} m_{22}^{5/2} \times \\
 &\times \exp \left[-\frac{\Delta_2 m_{00}}{2\Delta_{12}} (\varepsilon'_1)^2 \right] \int_{-\infty}^0 \exp(A_1 t^2 + A_7 \varepsilon'_1 t) dt \times \\
 &\times \int_0^{-t} (t^2 - \rho^2) \rho d\rho \int_0^{2\pi} \exp[A_4 \rho^2 \cos^2 \varphi + \\
 &+ A_5 \rho^2 \cos \varphi \sin \varphi + A_6 \rho^2 \sin^2 \varphi + \\
 &+ (A_2 t + A_8 \varepsilon'_1) \rho \cos \varphi + (A_3 t + A_9 \varepsilon'_1) \rho \sin \varphi] d\varphi,
 \end{aligned} \tag{9}$$

де

$$\begin{aligned}
 A_1 &= -\frac{m_{22}(\Delta_6 + 2\Delta_8 + \Delta_{11})}{2\Delta_{12}}; A_2 = -\frac{m_{22}(\Delta_6 - \Delta_{11})}{\Delta_{12}} \\
 ; A_3 &= \frac{m_{22}(\Delta_7 + \Delta_{10})}{\Delta_{12}}; \\
 A_4 &= -\frac{m_{22}(\Delta_6 - 2\Delta_8 + \Delta_{11})}{2\Delta_{12}}; \\
 A_5 &= \frac{m_{22}(\Delta_7 - \Delta_{10})}{\Delta_{12}}; A_6 = -\frac{\Delta_9 m_{22}}{2\Delta_{12}}; \\
 A_7 &= \frac{(\Delta_3 + \Delta_5)(m_{00} m_{22})^{1/2}}{\Delta_{12}}; \\
 A_8 &= \frac{(\Delta_3 - \Delta_5)(m_{00} m_{22})^{1/2}}{\Delta_{12}}; A_9 = -\frac{\Delta_4 (m_{00} m_{22})^{1/2}}{\Delta_{12}};
 \end{aligned}$$

$\Delta, \Delta_1, \dots, \Delta_{12}, D, t, \rho, \varphi$ [1, 5].

1.3.2. Ізотропна поверхня. Розглядаючи ізотропну шорстку поверхню як поодинокий випадок анізотропної шорсткої поверхні, коли АКФ і моменти СЩ не залежать від напрямку, на підставі (7), будемо мати співвідношення:

$$\begin{aligned}
 m_{00} &= m_0; m_{20} = m_{02} = m_2; \\
 m_{11} &= m_{13} = m_{31} = 0; \\
 3m_{22} &= m_{40} = m_{04} = m_4.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Звідки за (9) щільність ймовірностей розподілу висот вершин ізотропної поверхні [1, 5, 16]:

$$\begin{aligned}
 p_{sum}(\varepsilon'_1) &= \frac{\sqrt{3C_1}}{2\pi} \left[\left(\frac{1}{C_1} - 2 \right) J_0 + \varepsilon'_1 \sqrt{\frac{3}{\alpha}} J_1 + 2J_2 \right] = \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \left\{ \exp[-C_1 (\varepsilon'_1)^2] \sqrt{\frac{3(2\alpha-3)}{\alpha^2}} \varepsilon'_1 + \right. \\
 &+ \exp \left[-\frac{(\varepsilon'_1)^2}{2} \right] (1 + \operatorname{erf} \beta) \frac{3\sqrt{2\pi}}{2\alpha} [(\varepsilon'_1)^2 - 1] + \\
 &+ \left. \sqrt{2\pi} \exp \left[-\frac{\alpha (\varepsilon'_1)^2}{2(\alpha-1)} \right] (1 + \operatorname{erf} \gamma) \sqrt{\frac{\alpha}{3(\alpha-1)}} \right\},
 \end{aligned} \tag{11}$$

$$\text{де } \beta = \varepsilon'_1 \sqrt{\frac{3}{2(2\alpha-3)}}; \gamma = \varepsilon'_1 \sqrt{\frac{\alpha}{2(\alpha-1)(2\alpha-3)}};$$

$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt$ – інтеграл ймовірностей похибок [46];

$$\left\{ \begin{aligned}
 C_1 &= \frac{\alpha}{2\alpha-3}; C_2 = C_1 \sqrt{\frac{12}{\alpha}}; \\
 \alpha &= \frac{m_0 m_4}{m_2^2} \text{ – параметер широкосмугастости}
 \end{aligned} \right. \tag{12}$$

спектру шорсткої ізотропної випадкової поверхні; $1,5 \leq \alpha < \infty$. Фізичний смисл параметра α пов'язаний з характеристичною шириною СЩ-поверхні: широкий спектр містить значний діапазон довжин хвиль (характеристична ширина зростає: $\alpha \rightarrow \infty$), а вузький спектр – всі хвилі мають приблизно однакову довжину (характеристична ширина зменшується: $\alpha \rightarrow 1,5$).

На рис. 1 приведена залежність щільності ймовірностей розподілу висот вершин $p(\varepsilon'_1)$ шорсткої ізотропної поверхні в залежності від безрозмірної (нормованої) висоти ε'_1 та параметра широкосмугастости спектру α , який змінюється в межах $1,5 \dots \infty$ [16].

За [16] для опису ізотропних шорстких поверхонь необхідно використати три спектральні моменти ($\mathbf{m}_0, \mathbf{m}_2$ і \mathbf{m}_4) і один параметер широкосмугастости спектру $\alpha = \frac{(m_0 m_4)}{m_2^2}$, який не залежить від орієнтації системи координат на поверхні.

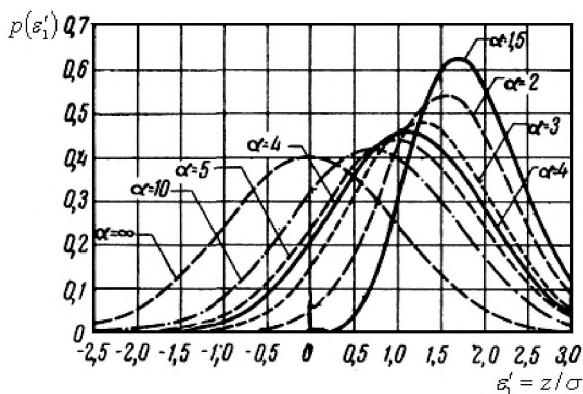


Рис. 1. Залежність щільності ймовірностей розподілу висот вершин ізотропної шорсткої поверхні, змодельованої випадковим полем, від безрозмірної (нормованої) висоти для параметра широкосмугастості спектру СЩ-поверхні $\alpha=1,5; 2; 3; 4; 5; 10; \infty$ [16].

Згідно [16], параметр широкосмугастості СЩ α для ізотропної випадкової поверхні знаходиться в межах $1,5 \leq \alpha < \infty$. Для граничних значень α щільність ймовірностей розподілу висот вершин ізотропної поверхні дорівнює [16]:

- при $\alpha \rightarrow 1,5$ ($\beta \rightarrow \infty; \gamma \rightarrow \infty; C_1 \rightarrow \infty$)

$$p(\varepsilon_1') = \left\{ \begin{array}{l} \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\varepsilon_1')^2}{2}\right] \times \\ \times \left\{ (\varepsilon_1')^2 - 1 + \exp\left[-(\varepsilon_1')^2\right] \right\} \quad \varepsilon_1' \geq 0 \\ 0, \quad \varepsilon_1' < 0 \end{array} \right\} \quad (13)$$

тобто розподіл (11) близький до релеєвського розподілу;

- при $\alpha \rightarrow \infty$ ($\beta \rightarrow 0; \gamma \rightarrow 0; C_1 \rightarrow 1/2$)

$$p(\varepsilon_1') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\varepsilon_1')^2}{2}\right], \quad (14)$$

тобто розподіл (11) підпорядкований гауссовському розподілу.

У загальному випадку щільність ймовірностей висот вершин залежить від двох параметрів: α і ε_1' , а в граничних випадках – від одного параметра ε_1' .

Як видно з рис. 1, для $\alpha \rightarrow \infty$ спостерігається гауссовський розподіл щільності ймовірностей висот вершин при $\varepsilon_1' = -3,5 \dots +3,5$, при цьому $0 \leq p(\varepsilon_1') \leq 0,4$, а при $\alpha=1,5$ маємо релеєвський розподіл в межах $0 \leq \varepsilon_1' \leq +3,5$, при цьому $0 \leq p(\varepsilon_1') \leq 0,627$.

Щільність ймовірностей висот $\varepsilon_1 = z$ поверхні [1, 5]:

$$p(\varepsilon_1) = \sqrt{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{\varepsilon_1^2}{2\sigma^2}\right). \quad (15)$$

Таким чином, розподіл висот поверхні підпорядкований гауссовському закону.

1.4. Функція розподілу висот вершин ізотропної шорсткої поверхні [16], яка визначає частку тих вершин, у яких величини висот не перевищують значення ε_1' :

$$f(\varepsilon_1') = \int_{-\infty}^{\varepsilon_1'} p(\varepsilon_1') d\varepsilon_1', \quad (16)$$

де $0 \leq f(\varepsilon_1') \leq 1$ при $0 \leq \varepsilon_1' < 3,5$ та $1,5 \leq \alpha < \infty$.

На рис. 2 приведена залежність функції розподілу висот вершин $f(\varepsilon_1')$ шорсткої ізотропної поверхні [16] від нормованої висоти ε_1' , яка змінюється від 0 до 3,0 для значень параметра широкосмугастості спектру $\alpha=1,5; 2; 3; 4; 5; 10; \infty$.

Як видно з рис. 2, при $\alpha \rightarrow 1,5$ відбувається зменшення відносного числа тих вершин, висоти яких не перевищують рівень $+3\sigma$ (при $\varepsilon_1' < 3$) [16].

1.5. Середня кривина шорсткої поверхні у вершині виступів висотою ε_1' .

1.5.1. Анізотропна поверхня [1, 6]:

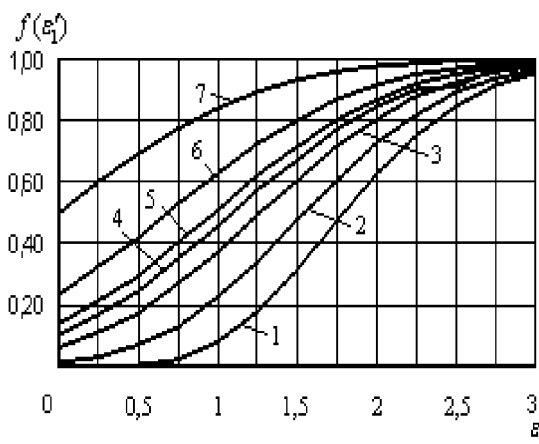


Рис. 2. Залежність функції розподілу $f(\varepsilon_1')$ висот вершин ізотропної шорсткої поверхні, змодельованої випадковим полем, від безрозмірної (нормованої) висоти вершини ε_1' для параметра широкосмугастості спектру СЩ-поверхні $\alpha: 1 - \alpha=1,5; 2 - \alpha=2; 3 - \alpha=3; 4 - \alpha=4; 5 - \alpha=5; 6 - \alpha=10; 7 - \alpha \rightarrow \infty$.

$$\begin{aligned}
 E\bar{K}_{sum}(\varepsilon'_1) = & -m_{22}^{1/2} \left\{ \left[\frac{m_{00}^{1/2} m_{22}^{5/2}}{4D\pi^3 \Delta^{1/2}} \times \right. \right. \\
 & \times \exp \left[-\frac{\Delta_2 m_{00}}{2\Delta_{12}} (\varepsilon'_1)^2 \right] \int_{-\infty}^0 t \exp(A_1 t^2 + A_7 \varepsilon'_1 t) dt \times \\
 & \times \int_0^{-t} (t^2 - \rho^2) \rho d\rho \int_0^{2\pi} \exp[A_4 \rho^2 \cos^2 \varphi + \\
 & + A_5 \rho^2 \cos \varphi \cdot \sin \varphi + A_6 \rho^2 \sin^2 \varphi + \\
 & + (A_2 t + A_8 \varepsilon'_1) \rho \cos \varphi + (A_3 t + A_9 \varepsilon'_1) \times \\
 & \times \rho \sin \varphi] d\varphi \left. \right\} / \left(\frac{1}{4} D^{-1} \pi^{-3} \Delta^{-1/2} m_{00}^{1/2} m_{22}^{5/2} \times \right. \\
 & \times \exp \left[-\frac{\Delta_2 m_{00}}{2\Delta_{12}} (\varepsilon'_1)^2 \right] \int_{-\infty}^0 \exp(A_1 t^2 + A_7 \varepsilon'_1 t) dt \times \\
 & \times \int_0^{-t} (t^2 - \rho^2) \rho d\rho \int_0^{2\pi} \exp[A_4 \rho^2 \cos^2 \varphi + \\
 & + A_5 \rho^2 \cos \varphi \sin \varphi + A_6 \rho^2 \sin^2 \varphi + (A_2 t + \\
 & + A_8 \varepsilon'_1) \rho \cos \varphi + (A_3 t + A_9 \varepsilon'_1) \rho \sin \varphi] d\varphi \left. \right\}. \quad (17)
 \end{aligned}$$

1.5.2. Ізотропна поверхня [16]:

$$E\bar{K}_{sum}(\varepsilon'_1) = \sqrt{\frac{m_4}{3}} \cdot \frac{J_3(\varepsilon'_1) - 2J_1(\varepsilon'_1) + 2J_5(\varepsilon'_1)}{J_2(\varepsilon'_1) - 2J_0(\varepsilon'_1) + 2J_4(\varepsilon'_1)},$$

де J_0, \dots, J_5 – функції параметрів ε'_1 і α [16]:

$$\begin{aligned}
 J_0 &= \sqrt{\frac{\pi}{2C_1}} \exp \left[-\frac{(\varepsilon'_1)^2}{2} \right] (1 + erf\beta); \\
 J_1 &= \frac{1}{C_1} \left\{ \exp[-C_1(\varepsilon'_1)^2] + \beta\sqrt{\pi} \exp \left[-\frac{(\varepsilon'_1)^2}{2} \right] (1 + erf\beta) \right\}; \\
 J_2 &= \sqrt{\frac{2}{C_1^3}} \left\{ \beta \exp[-C_1(\varepsilon'_1)^2] + \sqrt{\pi} \exp \left[-\frac{(\varepsilon'_1)^2}{2} \right] \times \right. \\
 & \times (1 + erf\beta) (\beta^2 + 1/2) \left. \right\}; \\
 J_3 &= \frac{2}{C_1^2} \left\{ \exp[-C_1(\varepsilon'_1)^2] (1 + \beta^2) + \sqrt{\pi} \exp \left[-\frac{(\varepsilon'_1)^2}{2} \right] \times \right. \\
 & \times (1 + erf\beta) (\beta^3 + 3\beta/2) \left. \right\}; \\
 J_4 &= \sqrt{\frac{\pi}{2(1+C_1)}} \exp \left[-\frac{\alpha(\varepsilon'_1)^2}{2(\alpha-1)} \right] (1 + erf\gamma);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_5 &= \frac{1}{C_1 + 1} \left\{ \exp[-C_1(\varepsilon'_1)^2] + \gamma\sqrt{\pi} (1 + erf\gamma) \times \right. \\
 & \times \exp \left[-\frac{\alpha(\varepsilon'_1)^2}{2(\alpha-1)} \right] \left. \right\}.
 \end{aligned}$$

Цей же результат за [1, 6]:

$$\begin{aligned}
 E\bar{K}_{sum}(\varepsilon'_1) &= \sqrt{\frac{m_4}{3}} \times \\
 & \times \left[\frac{\frac{\varepsilon'_1}{C_1} \sqrt{\frac{3}{\alpha}} J_0 + \left(\frac{2}{C_1} + \frac{3(\varepsilon'_1)^2}{\alpha} - 2 \right) J_1 + 2J_3}{\left(\frac{1}{C_1} - 2 \right) J_0 + \varepsilon'_1 \sqrt{\frac{3}{\alpha}} J_1 + 2J_2} \right]. \quad (18)
 \end{aligned}$$

Граничні залежності для $\bar{K}_{sum}(\varepsilon'_1)$ [16]:

$$\bullet \text{ при } \alpha \rightarrow 1,5 \left. \begin{aligned} \bar{K}_{sum}(\varepsilon'_1) &= \varepsilon'_1 \sqrt{\frac{2}{3}} m_4, & \varepsilon'_1 \geq 0 \\ &0, & \varepsilon'_1 < 0 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

$$\bullet \text{ при } \alpha \rightarrow \infty \quad \bar{K}_{sum}(\varepsilon'_1) = \frac{8}{3} \sqrt{\frac{m_4}{\pi}}. \quad (20)$$

На рис. 3 приведена залежність сподівання значення безрозмірної (нормованої) середньої кривини ізотропної шорсткої поверхні у вершині $\bar{K}_m / \sqrt{m_4}$ від безрозмірної (нормованої) висоти ε'_1 та параметра широкосмугастості спектру α .

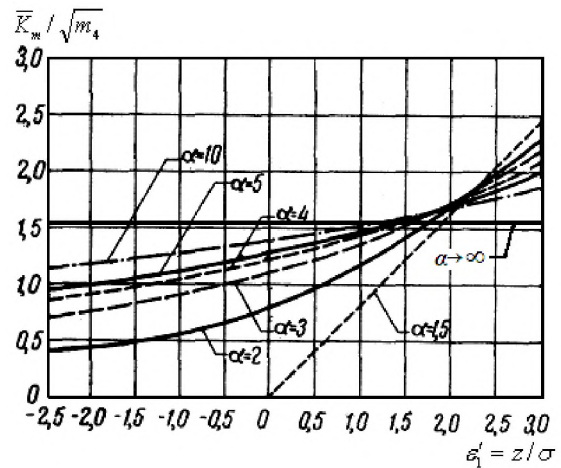


Рис. 3. Сподіване значення безрозмірної нормованої середньої кривини ізотропної шорсткої поверхні, змодельованої випадковим полем, у вершині нано- чи мікронерівностей від безрозмірної (нормованої) висоти для параметра широкосмугастості спектру СЦ-поверхні $\alpha=1,5; 2; 3; 4; 5; 10; \infty$ [16].

1.6. Градієнт випадкової шорсткої поверхні визначається за [1, 7, 13, 16].

1.6.1. Анізотропна поверхня:

$$Eq_{sum} = \sqrt[4]{\frac{4\Delta_1}{\pi^2}} \exp\left(\frac{\eta_1}{2}\right) E_1\left(\sqrt{1 - \exp(-2\eta_1)}\right), \quad (21)$$

де зворотній гіперболічний косинус [46]:

$$\eta_1 = \text{Arch} \frac{M_2}{2\sqrt{\Delta_1}},$$

де $\frac{M_2}{2\sqrt{\Delta_1}} \geq 1$;

$E_1(x)$ – повний еліптичний інтеграл Лежандра 2-го роду.

1.6.2. Для ізотропної поверхні [1] $\Delta_1 = m_2^2$; $M_2 = 2m_2$; $\eta_1 = 0$, тоді вираз (21) набуде вигляду [1, 7, 16]:

$$Eq_{sum} = \sqrt{\frac{\pi m_2}{2}}. \quad (22)$$

2. Опис профілограми випадкових процесів і полів шорсткої поверхні.

2.1. Автокореляційна функція (АКФ) профілограми. За [16], якщо профілограма поверхні вимірюється у довільному напрямку «зрізу» (перерізу) $\theta = \theta_i$, то висота $z(x, y)$ виступів профілограми залежить лише від відстані r точки профіля поверхні від начала координат (x, y) . Тоді, автокореляційна функція профілограми в площині $\theta = \theta_i$ за [16] визначається виразом:

$$R_{\theta_i}(r) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L z(r_1) z(r_1 + r) dr_1. \quad (23)$$

2.2. Спектральна щільність (СЩ) профілограми. СЩ профілограми вимірюваної шорсткості поверхні так визначається за перетворенням Фур'є [16]:

$$\Phi_{\theta_i}(k') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{\theta_i}(r) \exp(-ik'r) du, \quad (24)$$

де індекс « θ_i » відносить статистичну характеристику до профілограми.

2.3. Співвідношення між спектральними щільностями поверхні (Φ) та її профілограми (Φ_{θ_i}) визначається за [41]:

$$\Phi_{\theta_i}(k') = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(k_x, k_y) dl, \quad (25)$$

$$\text{де } l = \sqrt{(k_x^2 + k_y^2 - (k')^2)}. \quad (26)$$

За [16] співвідношення (25) має таке тлумачення (рис. 4): точка **P** на площині хвильових чисел має координати $P(k'\sin\theta_i; k'\cos\theta_i)$, що відповідає хвилі з хвильовим числом k' у напрямку «зрізу» профілограми шорсткої поверхні, при цьому пряма лінія **NPR**, яка перпендикулярна **OP**, уявляє собою геометричне місце тих точок площини хвильових чисел, для яких проекція хвильового вектора на пряму

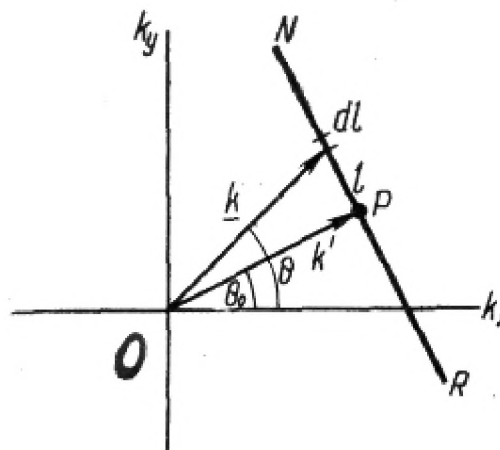


Рис. 4. Означення спектральної щільності (СЩ) профілограми, вимірюваної у довільному напрямку θ_i по СЩ-поверхні [16].

лінію **OP** має довжину k' [таким чином, будь-яка хвиля, для якої кінець хвильового вектора лежить на прямій **NPR**, має хвильове число k' у напрямку **OP**, тоді пряма лінія **NPR** уявляє собою шлях інтегрування у виразі (25)].

2.4. Моменти спектральної щільності профілограми шорсткої поверхні за [16] визначаються так:

$$m_{n\theta_i} = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{\theta_i}(k') (k')^n dk'. \quad (27)$$

Моменти СЩ анізотропної поверхні m_{pq} та СЩ її профілограми пов'язані між собою такими залежностями [41] на основі виразів (7), (25), (27):

$$m_{n\theta_i} = m_{n0} \cos^n \theta_i + C_1^n m_{n-1,1} \cos^{n-1} \theta_i \sin \theta_i + C_2^n m_{n-2,2} \cos^{n-2} \theta_i \sin^2 \theta_i + \dots + m_{0n} \sin^n \theta_i, \quad (28)$$

$$\text{де } C_m^n = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \quad (29)$$

Для ізотропної поверхні на підставі (7) і (28) можна отримати співвідношення (10).

2.5. Вибіркова аналіза випадкових ізотропних поверхонь.

2.5.1. Якщо виміряна профілограма ізотропної випадкової поверхні у довільному напрямку, то за [16] її АКФ можна розрахувати за (23), а за (24) – розрахувати СЩ профілограми і за формулою (27) – розрахувати моменти m_0 , m_2 , m_4 .

2.5.2. За Лонге-Гітінсом [41] ця процедура спрощена:

1) Розраховується щільність нулів $D_{zero, \theta}$ (перетин профілограми зі середньою арифметичною лінією) та екстремумів (максимумів + мінімумів профілограми шорсткої випадкової поверхні) за формулами [41]:

$$D_{zero, \theta} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{m_2}{m_0}}; \quad (30)$$

$$D_{extr, \theta} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{m_4}{m_2}}, \quad (31)$$

де індекс « θ » вказує, що статистична характеристика відноситься до профілограми, а не означає анізотропію (за профілограмою розраховують за МНК $\sigma = \sqrt{m_0}$).

2) Після цього визначають m_2 за (30) та m_4 за (31), підрахувавши кількість «нулів» та «екстремумів» на одиницю базової довжини профілограми [16, 41]:

$$m_2 = \pi^2 \sigma^2 (D_{zero, \theta})^2 = \pi^2 m_0 (D_{zero, \theta})^2; \quad (32)$$

$$\begin{aligned} m_4 &= \pi^4 \sigma^2 (D_{zero, \theta})^2 (D_{extr, \theta})^2 = \\ &= \pi^4 m_0 (D_{zero, \theta})^2 (D_{zero, \theta})^2. \end{aligned} \quad (33)$$

2.5.3. Параметр широкосмугастости спектру α визначається за (12):

$$\alpha = \frac{m_0 m_4}{m_2^2} = \left(\frac{D_{extr, \theta}}{D_{zero, \theta}} \right)^2. \quad (34)$$

2.5.4. З-за симетрії щільність піків (максимумів) профілограми дорівнює половині відповідної щільності екстремумів [16]:

$$D_{peak, \theta} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m_4}{m_2}}. \quad (35)$$

За (32), (33) отримаємо:

$$D_{peak, \theta} = \frac{1}{2} D_{extr, \theta}. \quad (36)$$

За формулою (49) для щільності вершин шорсткої випадкової поверхні маємо вираз [16]:

$$D_{sum} = \frac{1}{6\pi\sqrt{3}} \left(\frac{m_4}{m_2} \right), \quad (37)$$

тоді, порівнюючи (35) з (37), отримаємо співвідношення між щільностями вершин поверхні D_{sum} та її профілограми D_{peak} :

$$\begin{aligned} D_{sum} &= \frac{2\pi \cdot D_{peak}^2}{3\sqrt{3}} \approx 1,2092 D_{peak}^2 = \\ &= \frac{\pi \cdot D_{extr}^2}{6\sqrt{3}} \approx 0,3023 \cdot D_{extr}^2. \end{aligned}$$

Сучасні прилади дозволяють отримувати вихідний сигнал m_0 , m_2 , m_4 .

2.5.5. Певними недоліками методу Лонге-Гітінса [41] по визначенню $D_{zero, \theta}$; $D_{extr, \theta}$; m_2 , m_4 ; α ; D_{peak} ; D_{sum} полягає у тому, що сигнал, який подолав фільтр високих частот, за профілограмою містить низькочастотні компоненти (тобто, які містять малі хвильові числа) – піки (максимуми), западини (мінімуми), перетини нульового рівня, а високочастотні компоненти (тобто, які містять великі хвильові числа) Φ_0 будуть відфільтровані і, навпаки, сигнал, який подолав фільтр низьких частот за профілограмою містить лише великі піки, западини і перетини нульового рівня [16].

2.5.6. Щільність ймовірностей розподілу висот піків профілограми (максимумів) ізотропної випадкової поверхні отримано в [47] за [48]:

$$p_{peak}(\varepsilon'_1) = \sqrt{\frac{\alpha-1}{2\pi\alpha}} \left\{ \exp\left[-\frac{\alpha(\varepsilon'_1)^2}{2(\alpha-1)}\right] + \varepsilon'_1 \sqrt{\frac{\pi}{2(\alpha-1)}} \exp\left[-\frac{(\varepsilon'_1)^2}{2}\right] \times \left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{\varepsilon'_1}{\sqrt{2(\alpha-1)}}\right) \right] \right\}, \quad (38)$$

де $\alpha = \frac{m_0 m_4}{m_2^2}$; $1 \leq \alpha < \infty$.

Фізичний смисл параметра α для профілограми відповідає α для ізотропної випадкової поверхні: малі значення α відповідають вузькосмугастому спектру, а великі значення α – широкосмугастому спектру [16]. Але для випадкового процесу, що представляє профілограму ізотропної випадкової шорсткої поверхні, можливі лише значення $\alpha > 1,5$ [16].

Для граничних значень α вираз для p_{peak} має такий вигляд [16]:

$$\alpha=1,0 \quad p_{peak}(\varepsilon'_1) = \begin{cases} \varepsilon'_1 \exp\left[-\frac{(\varepsilon'_1)^2}{2}\right], & \varepsilon'_1 \geq 0 \\ 0, & \varepsilon'_1 < 0 \end{cases} \quad (39)$$

$$\alpha \rightarrow \infty \quad p_{peak}(\varepsilon'_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\varepsilon'_1)^2}{2}\right] \quad (40)$$

[це відповідає (15) для $p_{sum}(\varepsilon'_1)$].

На рис. 5 показані графіки функції $p_{peak} = f(\varepsilon'_1)$ – щільності ймовірностей висот піків профілограми від нормованої величини ε'_1 , яка змінюється від $-2,5$ до $+3,0$, для значень параметра широкосмугастости спектру $\alpha=1; 1,5; 2; 3; 10; \infty$ [16].

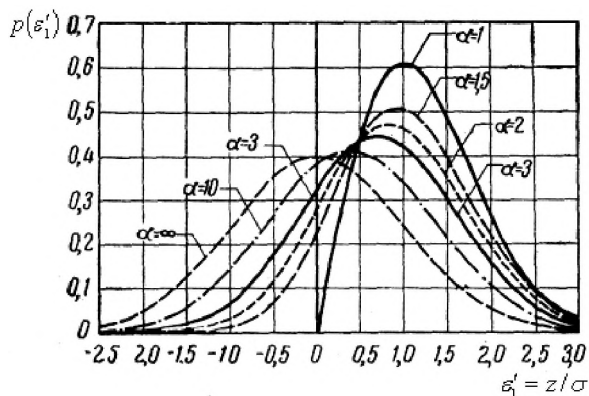


Рис. 5. Залежність щільностей ймовірностей розподілу висот піків профілограми шорсткої ізотропної поверхні від безрозмірної (нормованої) висоти для параметра широкосмугастости спектру профілограми $\alpha=1; 1,5; 2; 3; 10; \infty$ [16].

2.5.7. Функція розподілу висот піків профілограми ізотропної поверхні за [16] має вигляд:

$$f_{peak}(\varepsilon'_1) = \int_{-\infty}^{\varepsilon'_1} p_{peak}(\varepsilon'_1) d\varepsilon'_1, \quad (41)$$

де $0 \leq f(\varepsilon'_1) \leq 0,6$ при $-3,5 \leq \varepsilon'_1 \leq +3,5$ та $1 \leq \alpha < \infty$.

На рис. 6 показані залежності функції розподілу висот піків профілограми $f_{peak}(\varepsilon'_1)$ шорсткої ізотропної поверхні від нормованої висоти ε'_1 , яка змінюється від 0 до 3,0 для значень параметра широкосмугастости спектру $\alpha=1,0; 1,5; 2; 3; 4; 5; 10; \infty$.

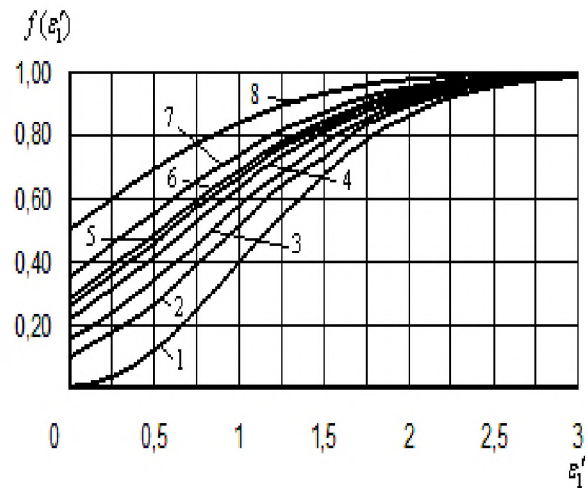


Рис. 6. Залежність функції розподілу висот піків профілограми шорсткої ізотропної поверхні від безрозмірної (нормованої) висоти для параметра широкосмугастости спектру профілограми $\alpha: 1 - \alpha=1,0; 2 - \alpha=1,5; 3 - \alpha=2; 4 - \alpha=3; 5 - \alpha=4; 6 - \alpha=5; 7 - \alpha=10; 8 - \alpha \rightarrow \infty$.

2.5.8. Кривина піків профілограми ізотропної поверхні.

Вираз для сподіваного значення середньої кривини піків профілограми ізотропної поверхні, отриманий аналогічно $E\bar{K}_{sum}(\varepsilon'_1)$ (18), за [1, 6, 16] має вигляд:

На рис. 7 показані залежності безрозмірних (нормованих) середніх кривин піків профілограми ізотропної поверхні $E\bar{K}_{peak}(\varepsilon'_1)$ від безрозмірної (нормованої) висоти ε'_1 , яка змінюється від $-2,5$ до $+3,0$ для значень параметра широкосмугастости спектру $\alpha=1; 1,5; 2; 3; 4; 5; 10; \infty$ [16].

$$\begin{aligned}
 EK_{peak}(\varepsilon'_1) = & \sqrt{m_4} \sqrt{\frac{2(\alpha-1)}{\alpha}} \times \\
 & \left\{ \left[\frac{\varepsilon'_1}{\sqrt{2(\alpha-1)}} + \sqrt{\pi} \exp \left[\frac{(\varepsilon'_1)^2}{2(\alpha-1)} \right] \right] \times \right. \\
 & \times \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{\varepsilon'_1}{\sqrt{2(\alpha-1)}} \right) \right] \left[\frac{(\varepsilon'_1)^2 + (\alpha-1)}{2(\alpha-1)} \right] \Bigg] \Bigg/ \\
 & \Bigg/ \left[\left(1 + \frac{\varepsilon'_1 \sqrt{\pi}}{\sqrt{2(\alpha-1)}} \right) \exp \left[\frac{(\varepsilon'_1)^2}{2(\alpha-1)} \right] \right] \times \\
 & \times \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{\varepsilon'_1}{\sqrt{2(\alpha-1)}} \right) \right] \Bigg\}.
 \end{aligned}
 \tag{42}$$

2.6. Порівняння властивостей ізотропної шорсткої поверхні та її профілограми.

Найяк [16] розглянув методику знаходження моментів спектральної щільності ізотропної поверхні за однією профілограмою, яка виміряна

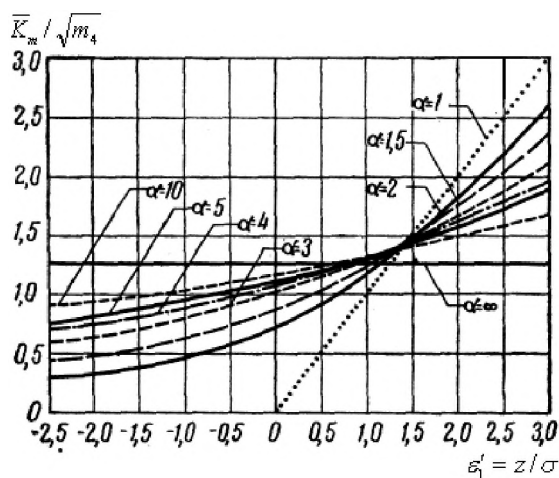


Рис. 7. Сподіване значення безрозмірної нормованої середньої кривини піків профілограми шорсткої ізотропної поверхні у вершині від безрозмірної (нормованої) висоти для параметра широкосмугастості спектру профілограми $\alpha=1; 1,5; 2; 3; 4; 5; 10; \infty$ [16].

у довільному напрямку, а також показав відмінності щільності ймовірностей висот вершин поверхні і піків профілограми від очікуваних значень, кривин вершин поверхні та кривин піків профілограми.

Крім того, у [16] показана відмінність характеристик шорсткості ізотропної поверхні від характеристик її профілограми.

Порівняння щільності ймовірностей розподілу висот піків профілограми (1) та вершин шорсткої ізотропної поверхні (2) для $\alpha=1,5$ (а), $\alpha=5$ (б), $\alpha=10$ (в), $\alpha \rightarrow \infty$ (г) приведені на рис. 8. Порівняння сподіваних значень кривин піків профілограми (1) та вершин шорсткої ізотропної поверхні (2) для $\alpha=1,5$ (а), $\alpha=5$ (б), $\alpha=10$ (в), $\alpha \rightarrow \infty$ (г) приведені на рис. 9.

Порівняння сподіваних значень функцій розподілу висот піків профілограми (1) та вершин шорсткої ізотропної поверхні (2) для $\alpha=1,5$ (а); $\alpha=5$ (б); $\alpha=10$ (в); $\alpha \rightarrow \infty$ (г) приведені на рис. 10.

Як видно з рис. 8, 9, 10, є значна статистична різниця між даними профілограми та поверхні, яка зростає по мірі зміни параметра широкосмугастості α від ∞ до 1,5. Встановлена відмінність статистичних характеристик поверхні та профілограми ймовірно суттєва і для анізотропної поверхні та буде зростати при переході від ізотропної до анізотропної моделі.

Як буде показано далі, наприклад, параметер широкосмугастості спектру α для поверхонь тертя металу і карбопластика дорівнював в основному 2,5–6,0 і не перевищував 15–20, а максимальне викривлення поверхні профілограмою спостерігається при $\alpha=1,5$ (при $\alpha \rightarrow \infty$ це викривлення відсутнє). Таким чином, вивчення навіть ізотропних шорстких поверхонь за допомогою лише параметрів її профілограми несе за собою значні неправдиві результати.

З рис. 8 видно, що профілограма спотворює поверхню: вона вказує на значно менше число високих піків і значно більше число низьких піків порівняно з тими вершинами (піками), які правдиво має поверхня (викривлення максимальне для $\alpha=1,5$, а при $\alpha \rightarrow \infty$ – відсутнє) [16]. Причина спотворення полягає у тому, що сигнал профілометра з набагато більшою ймовірністю проходить по схилу вершини, ніж по самій вершині, внаслідок чого на профілограмі з'являється пік меншої висоти, ніж це має місце на відповідній вершині поверхні [16].

Як видно з рис. 9, на профілограмі спостерігається викривлення властивостей кривини ізотропної шорсткої поверхні, але при $\alpha > 2,5$ це викривлення мале, а при $\alpha \leq 2,5$ сподівана кривина піків профілограми виявляється більшою, а при $\alpha > 2,5$ меншою, ніж у вершинах поверхні.

Як видно з рис. 10, число вершин поверхні з висотою більше $+3\sigma = +3\sqrt{m_0}$ значно перевищує те число, що виміряне профілограмою, якщо вилучити випадок $\alpha \rightarrow \infty$ [16].

2.7. Кутовий коефіцієнт профілограми ізотропної шорсткої поверхні.

1. Нехай профілограма виміряна у напрямках x та y . Сумісна щільність ймовірностей змінних ε_1 та ε_2 , ε_1 та ε_3 за [16] дорівнює:

• за напрямком x

$$p(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = p(\varepsilon_1)p(\varepsilon_2); \quad (43)$$

• за напрямком y

$$p(\varepsilon_1, \varepsilon_3) = p(\varepsilon_1)p(\varepsilon_3), \quad (44)$$

де $\varepsilon_1 = z$; $\varepsilon_2 = \frac{\partial z}{\partial x}$; $E(\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2) = 0$; $\varepsilon_3 = \frac{\partial z}{\partial y}$;

$$E(\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_3) = 0.$$

З (43), (44) витікає, що кутові коефіцієнти поверхні в певному напрямку і висоти поверхні у відповідних точках статистично незалежні [16].

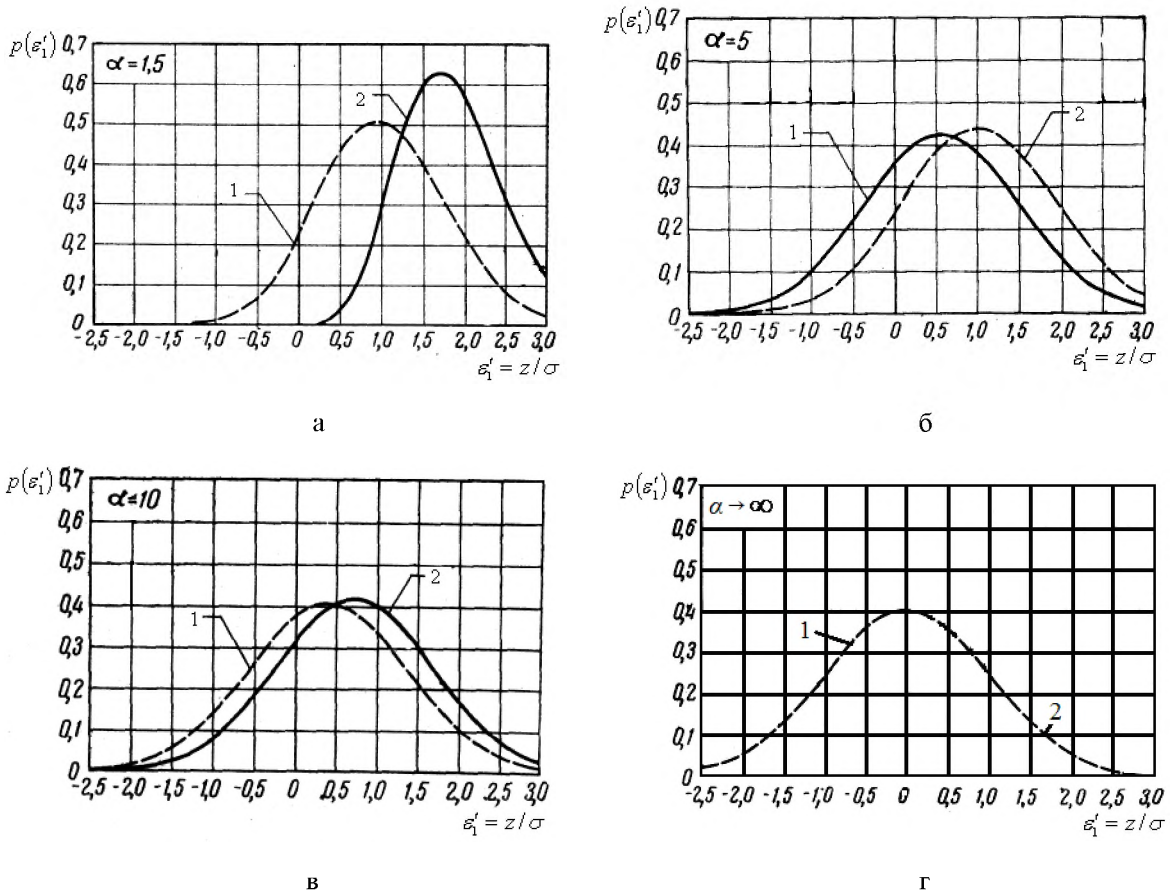


Рис. 8. Порівняння залежностей щільності ймовірностей розподілу висот піків профілограми (1) та висот вершин шорсткої ізотропної поверхні (2) для $\alpha=1,5$ (а); $\alpha=5$ (б); $\alpha=10$ (в); $\alpha \rightarrow \infty$ (г) [16].

• за напрямком x

$$p(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = p(\varepsilon_1)p(\varepsilon_2); \quad (43)$$

• за напрямком y

$$p(\varepsilon_1, \varepsilon_3) = p(\varepsilon_1)p(\varepsilon_3), \quad (44)$$

де $\varepsilon_1 = z$; $\varepsilon_2 = \frac{\partial z}{\partial x}$; $E(\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2) = 0$; $\varepsilon_3 = \frac{\partial z}{\partial y}$;

$$E(\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_3) = 0.$$

З (43), (44) витікає, що кутові коефіцієнти поверхні в певному напрямку і висоти поверхні у відповідних точках статистично незалежні [16].

2. За методом [1, 6, 16] знаходимо:

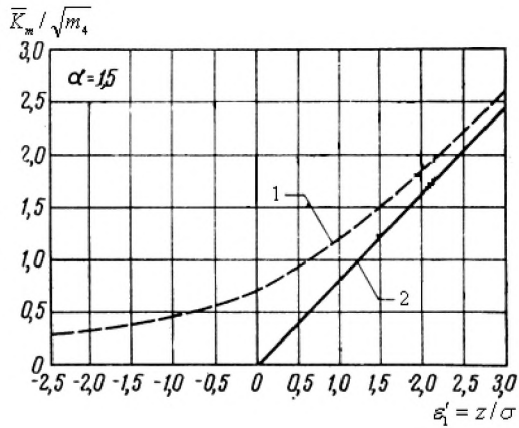
• за напрямком x

$$p(\varepsilon_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi m_2}} \exp\left(-\frac{\varepsilon_2^2}{2m_2}\right); \quad (45)$$

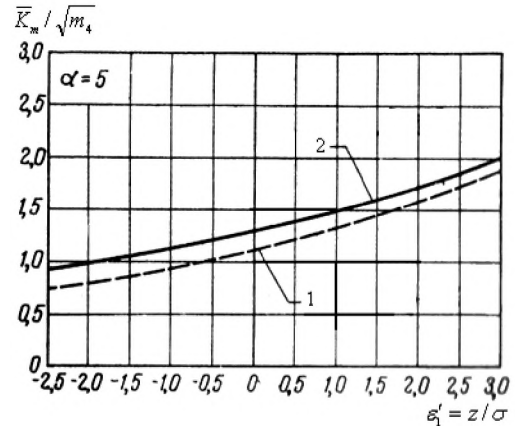
• за напрямком y

$$p(\varepsilon_3) = \frac{1}{\sqrt{2\pi m_2}} \exp\left(-\frac{\varepsilon_3^2}{2m_2}\right). \quad (46)$$

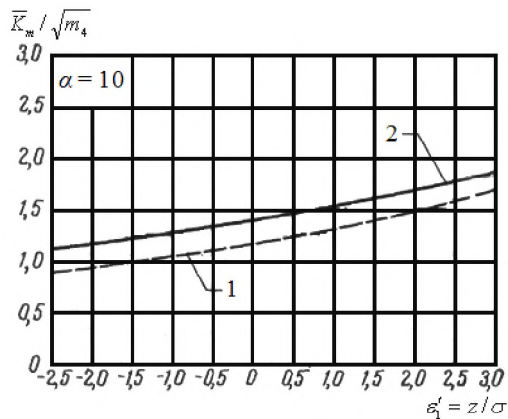
З виразів (45), (46) знайдено [16] сподіване значення модуля кутового коефіцієнта $E|\varepsilon_2|$ та $E|\varepsilon_3|$ профілограми при довільній висоті [16]:



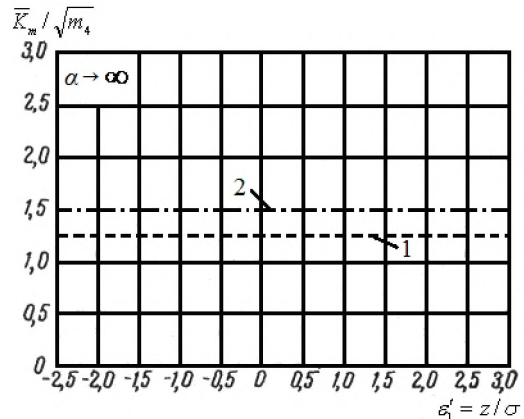
а



б



в



г

Рис. 9. Порівняння сподіваних значень кривин піків профілограми (1) та вершин ізотропної шорсткої поверхні (2) для $\alpha=1,5$ (а); $\alpha=5$ (б); $\alpha=10$ (в); $\alpha \rightarrow \infty$ (г) [16].

• за напрямком x

$$E|\varepsilon_2| = \sqrt{\frac{2}{\pi m_2}} \int_0^{\infty} \varepsilon_2 \exp\left(-\frac{\varepsilon_2^2}{2m_2}\right) d\varepsilon_2 = \sqrt{\frac{2m_2}{\pi}}; \quad (47)$$

• за напрямком y

$$E|\varepsilon_3| = \sqrt{\frac{2}{\pi m_2}} \int_0^{\infty} \varepsilon_3 \exp\left(-\frac{\varepsilon_3^2}{2m_2}\right) d\varepsilon_3 = \sqrt{\frac{2m_2}{\pi}}.$$

Порівнюючи сподіване значення середнього градієнта ізотропної поверхні [16]:

$$E\zeta_{sum} = \int_0^{\infty} \zeta p(\zeta) d\zeta = \sqrt{\frac{\pi m_2}{2}} \quad (49)$$

(нормоване значення $\zeta_{sum}/\sqrt{m_2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \approx 1,2533 = \text{const}$) з виразами для кутового коефіцієнта профілограми ізотропної поверхні (47), (48)

знаходимо, що сподіване значення середнього кутового коефіцієнта профілограми [16]:

$$E\zeta_{peak} = \frac{\pi}{2} E|\varepsilon_2| = \frac{\pi}{2} |\varepsilon_3| \quad (50)$$

завжди менше середнього значення градієнта ізотропної поверхні:

$$|E\zeta_{peak}| < |E\zeta_{sum}|. \quad (51)$$

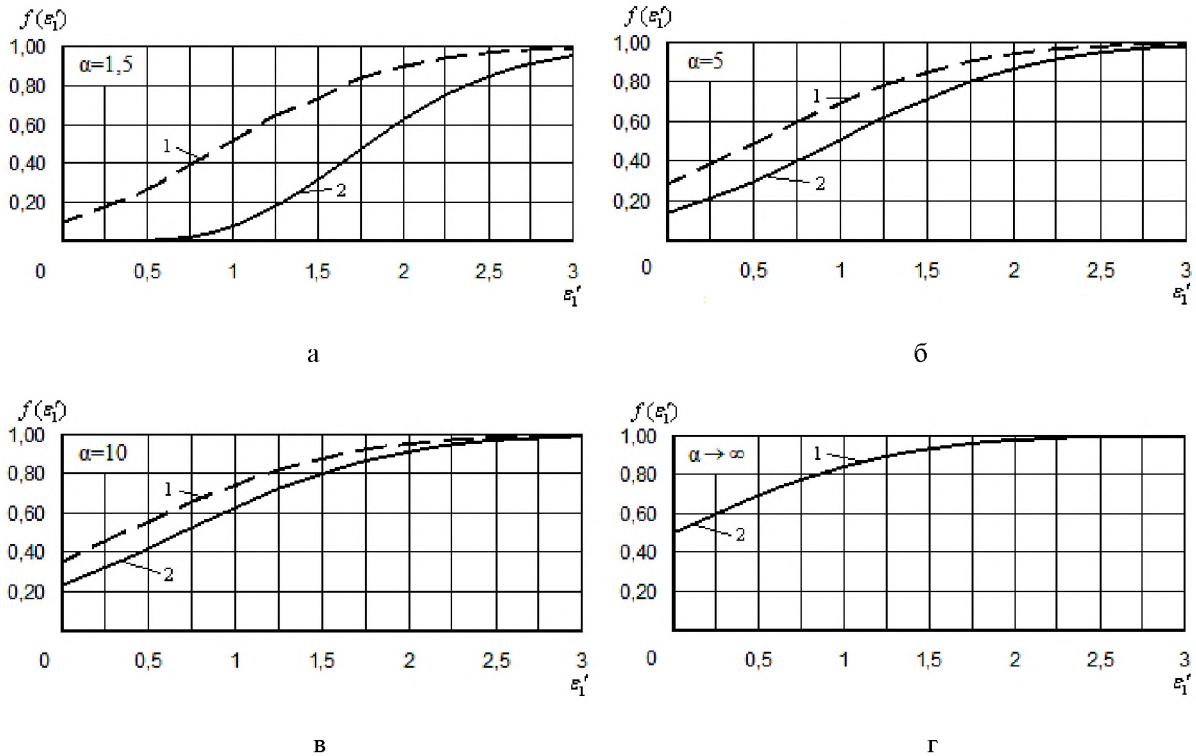


Рис. 10. Порівняння сподіваних значень функцій розподілу висот піків профілограми (1) та вершин ізотропних шорстких поверхонь (2), змодельованих випадковим полем, від безрозмірної (нормованої) висоти для значень параметра широкосмугастості спектру $\alpha=1,5$ (а); $\alpha=5$ (б); $\alpha=10$ (в); $\alpha \rightarrow \infty$ (г).

II. Методологічна частина

2.1. Для аналізу анізотропної поверхні необхідно визначити дев'ять моментів СЦ [16]:

нульового порядку – m_{00} ;

другого порядку – m_{20} , m_{02} , m_{11} ;

четвертого порядку – m_{13} , m_{22} , m_{31} , m_{04} , m_{40} .

З цією метою на поверхні тертя довільно вибирали нульовий напрямок, який не співпадав з напрямком слідів технологічної обробки, напрямком ковзання та інших напрямків технологічних чи природніх впливів, і знімали профілограми в непаралельних перерізах $\theta_i = \theta_j$, $i \neq j$. Тоді можна записати для 3-х моментів СЦ профілограми n співвідношень (28):

• для моменту нульового порядку – n співвідношень виду: $m_{0\theta_i} = m_{00}$, де $i = 1, \dots, n$; (52)

• для моментів другого порядку – n співвідношень виду:

$$m_{2\theta_i} = m_{20} \cos^2 \theta_i + 2m_{11} \cos \theta_i \sin \theta_i + m_{02} \sin^2 \theta_i, \quad (53)$$

де $i = 1, \dots, n$, причому будь-які три із n рівнянь (53) лінійно незалежні;

• для моментів четвертого порядку – n співвідношень виду:

$$m_{4\theta_i} = m_{40} \cos^4 \theta_i + 4m_{31} \cos^3 \theta_i \times \sin \theta_i + 6m_{22} \cos^2 \theta_i \sin^2 \theta_i + 4m_{13} \times \cos \theta_i \sin^3 \theta_i + m_{04} \sin^4 \theta_i, \quad (54)$$

де $i = 1, \dots, n$, причому будь-які п'ять із n рівнянь (54) лінійно незалежні.

Таким чином, для визначення характеристик анізотропної поверхні необхідно зняти п'ять профілограм, вимірюваних в непаралельних напрямках, наприклад, $\theta_i = 0^0, 30^0, 45^0, 60^0, 90^0$. Для кожного напрямку визначаємо три моменти $m_{0\theta_i}, m_{2\theta_i}, m_{4\theta_i}$, і, застосовуючи метод найменших квадратів (МНК) для обробки інформації, отримуємо формули:

$$m_{00} = \frac{1}{5}(m_{0,0^0} + m_{0,30^0} + m_{0,45^0} + m_{0,60^0} + m_{0,90^0}); \quad (55)$$

$$m_{20} = \frac{1}{10} \left[6m_{2,0^0} + \left(7 + \frac{5}{\sqrt{3}} \right) m_{2,30^0} - (1 + 2\sqrt{3}) \times \right. \\ \left. \times m_{2,45^0} - (3 + \sqrt{3}) m_{2,60^0} + \left(1 + \frac{4}{\sqrt{3}} \right) m_{2,90^0} \right]; \quad (56)$$

$$m_{40} = \frac{1}{10} \left[- \left(\frac{3}{2} + 2\sqrt{3} \right) m_{4,0^0} - (2 - \sqrt{3}) m_{4,30^0} + \right. \\ \left. + (7 + 2\sqrt{3}) m_{4,45^0} - (2 - \sqrt{3}) m_{4,60^0} - \right. \\ \left. - \left(\frac{3}{2} + 2\sqrt{3} \right) m_{4,90^0} \right]; \quad (57)$$

$$m_{02} = \frac{1}{10} \left[\left(1 + \frac{4}{\sqrt{3}} \right) m_{2,0^0} - (3 + \sqrt{3}) m_{2,30^0} - \right. \\ \left. - (1 + 2\sqrt{3}) m_{2,45^0} + \left(7 + \frac{5}{\sqrt{3}} \right) m_{2,60^0} + 6m_{2,90^0} \right]; \quad (58)$$

$$m_{40} = m_{4,0^0}; \quad (59)$$

$$m_{31} = - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) m_{4,0^0} + (1 + \sqrt{3}) m_{4,30^0} - \\ - \left(\frac{3}{2} + \sqrt{3} \right) m_{4,45^0} + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) m_{4,60^0} - \frac{1}{4} m_{4,90^0}; \quad (60)$$

$$m_{22} = \frac{4\sqrt{3} + 3}{18} m_{4,0^0} - \frac{8\sqrt{3} + 12}{9} m_{4,30^0} + \\ + \frac{8 + 4\sqrt{3}}{3} m_{4,45^0} - \frac{8\sqrt{3} + 12}{9} m_{4,60^0} + \\ + \frac{4\sqrt{3} + 3}{18} m_{4,90^0}; \quad (61)$$

$$m_{13} = - \frac{1}{4} m_{4,0^0} + (1 + \sqrt{3}) m_{4,30^0} - \\ - \left(\frac{3}{2} + \sqrt{3} \right) m_{4,45^0} + (1 + \sqrt{3}) m_{4,60^0} - \\ - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) m_{4,90^0}; \quad (62)$$

$$m_{04} = m_{4,90^0}. \quad (63)$$

2.2. Для ізотропної поверхні знаходили моменти нульового \mathbf{m}_0 , другого \mathbf{m}_2 і четвертого \mathbf{m}_4 порядків за методом [16, 41], визначивши щільність нулів \mathbf{D}_0 і екстремумів (мінімумів і максимумів) \mathbf{D}_{extr} за профілограмою, виміряної в одному напрямку, яке не співпадає з напрямком ковзання та направленням обробки поверхні:

$$m_0 = m_{00}; \quad (64)$$

$$m_2 = m_0 (\pi D_{0,\theta})^2; \quad (65)$$

$$m_4 = m_0 (\pi^2 D_{0,\theta} D_{extr,\theta})^2. \quad (66)$$

Так як $\mathbf{m}_0 = \sigma^2$, то безпосереднім вимірюванням середньоарифметичного відхилення профілю поверхні R_a , визначаємо середньогогеометричне відхилення профілю поверхні:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = R_q = R_a \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \quad (67)$$

2.3. Використовуючи метод [16, 41] визначаємо моменти СЩ профілограми:

$$m_{00} = \sigma^2 = \frac{1}{n} \frac{\pi}{2} \sum_{i=1}^n R_{a\theta_i}^2; \quad (68)$$

$$m_{2\theta_i} = m_{00} (\pi D_{0,\theta_i})^2; \quad (69)$$

$$m_{4\theta_i} = m_{00} (\pi^2 D_{0,\theta_i} D_{extr,\theta_i})^2, \quad (70)$$

що дозволяє розрахувати моменти СЩ поверхні.

2.4. Частина експериментальних даних анізотропних поверхонь отримана вимірюванням параметрів R_a , D_0 , D_{extr} у дванадцяти непаралельних перерізах, які задані співвідношеннями $\theta_i=15^\circ$ ($i-1$), $i=1, \dots, 12$. У цьому випадку m_{00} визначали за (68). Величини моментів другого порядку СЩ профілограми за напрямками, які розраховували за (69), використовували для розрахунків спектральних моментів другого порядку:

$$m_{2-j,j} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi m_2(\theta) C_{2-j,j}(\theta) d\theta, \quad j = 0, 1, 2. \quad (71)$$

Після розрахунків скоригованих значень моментів другого порядку за напрямками (53), використовуючи (70), знаходили моменти четвертого порядку:

$$m_{4\theta_i} = m_{2\theta_i} (\pi D_{extr,\theta_i})^2, \quad i = 1, \dots, 12, \quad (72)$$

і далі знаходили спектральні моменти четвертого порядку:

$$m_{4-j,j} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi m_4(\theta) C_{4-j,j}(\theta) d\theta, \quad j = 0, 1, 2, 3, 4. \quad (73)$$

2.5. Для статистичної характеристики анізотропної поверхні використовували дев'ять моментів m_{pq} спектральної щільності, але ці

моменти СЩ залежать від орієнтації системи координат.

2.6. При $p+q \leq 4$ існує сім інваріантних комбінацій цих моментів [16]. Для характеристики анізотропної поверхні будемо використовувати наступні сім інваріантних комбінацій моментів СЩ, які не залежать від орієнтації системи координат:

інваріанти нульового порядку:

$$M_0 = m_{00}; \quad (74)$$

інваріанти другого порядку:

$$M_2 = m_{02} + m_{20}; \quad (75)$$

$$M_3 = m_{20}m_{02} - m_{11}^2 = \Delta_1; \quad (76)$$

інваріанти четвертого порядку:

$$M_4 = m_{40} + 2m_{22} + m_{04}; \quad (77)$$

$$M_5 = m_{40}m_{04} - 4m_{13}m_{31} + 3m_{22}^2; \quad (78)$$

$$M_6 = (m_{40} + m_{22})(m_{22} + m_{04}) - (m_{31} + m_{13})^2; \quad (79)$$

$$M_7 = m_{40}(m_{22}m_{04} - m_{13}^2) - m_{31}(m_{31}m_{04} - m_{13}m_{22}) + m_{22}(m_{31}m_{13} - m_{22}^2) = \Delta_2. \quad (80)$$

2.7. Введемо у науковий обіг параметри широкосмугаості спектру анізотропної поверхні:

$$\alpha_1 = \frac{M_0 M_4}{M_2^2} = \frac{m_{00}(m_{40} + 2m_{22} + m_{04})}{(m_{02} + m_{20})^2}; \quad (81)$$

$$\alpha_2 = \frac{M_0 M_5}{M_2^2} = \frac{m_{00}(m_{40}m_{04} - 4m_{13}m_{31} + 3m_{22}^2)}{(m_{02} + m_{20})^2}; \quad (82)$$

$$\alpha_3 = \frac{M_0 M_6}{M_2^2} = \frac{m_{00}[(m_{40} + m_{22})(m_{22} + m_{04}) - (m_{31} + m_{13})^2]}{(m_{02} + m_{20})^2}; \quad (83)$$

$$\alpha_4 = \frac{M_0 M_7}{M_2^2} = \frac{m_{00}[m_{40}(m_{22}m_{04} - m_{13}^2) - m_{31}(m_{31}m_{04} - m_{13}m_{22}) + m_{22}(m_{31}m_{13} - m_{22}^2)]}{(m_{02} + m_{20})^2}; \quad (84)$$

$$\alpha_5 = \frac{M_0 M_4}{M_3^2} = \frac{m_{00}(m_{40} + 2m_{22} + m_{04})}{(m_{20}m_{02} - m_{11}^2)^2}; \quad (85)$$

$$\alpha_6 = \frac{M_0 M_5}{M_3^2} = \frac{m_{00}(m_{40}m_{04} - 4m_{13}m_{31} + 3m_{22}^2)}{(m_{20}m_{02} - m_{11}^2)^2}; \quad (86)$$

$$\alpha_7 = \frac{M_0 M_6}{M_3^2} = \frac{m_{00} [(m_{40} + m_{22})(m_{22} + m_{04}) - (m_{31} + m_{13})^2]}{(m_{20} m_{02} - m_{11}^2)^2}; \quad (87)$$

$$\alpha_8 = \frac{M_0 M_7}{M_3^2} = \frac{m_{00} [m_{40}(m_{22} m_{04} - m_{13}^2) - m_{31}(m_{31} m_{04} - m_{13} m_{22}) + m_{22}(m_{31} m_{13} - m_{22}^2)]}{(m_{20} m_{02} - m_{11}^2)^2}. \quad (88)$$

2.8. Для статистичної характеристики ізотропної поверхні використовували три моменти СЦ (інваріанти):

нульового порядку $m_0 = m_{00} = M_0$;

другого порядку $m_2 = m_{20} = m_{02} = m_{11} = M_2$;

четвертого порядку $m_4 = m_{13} = m_{22} = m_{31} = m_{04} = m_{40} = M_4$.

Для ізотропної поверхні параметр α , який характеризує широкосмугастість спектру [16]:

$$\alpha = \frac{m_0 m_4}{m_2^2}, \quad \alpha = 1, 5; \dots; \infty. \quad (89)$$

Середньоквадратичне значення ширини спектру характеризує параметр [16]:

$$\Lambda = 1 - \frac{1}{\alpha} = \frac{m_0 m_4 - m_2^2}{m_0 m_4}, \quad \Lambda = 0, 333(3); \dots; 1, 0. \quad (90)$$

2.9. Вимірювання шорсткості криволінійних поверхонь. Відомо [54], що для оцінки шорсткості циліндричних та інших криволінійних поверхонь, а також внутрішніх циліндричних та торцевих поверхонь наскрізних та глухих отворів у діапазоні $R_a = 0,08 - 10,0$ мкм, використовується малогабаритний прилад – індикатор шорсткості поверхні непрямої дії, який працює в режимі компаратора [54].

Для поверхонь циліндрів, штоків і ущільнювальних кілець можливе зняття профілограм тільки перпендикулярно слідам обробки в напрямку ковзання. У цьому випадку для анізотропної поверхні використовувалися співвідношення для ізотропної поверхні шляхом введення еквівалентних моментів:

$$m_{0e} = \sqrt{m_{0x} m_{0y}}; \quad (91)$$

$$m_{2e} = \sqrt{m_{2x} m_{2y}}; \quad (92)$$

$$m_{4e} = \sqrt{m_{4x} m_{4y}}; \quad (93)$$

де x, y відносяться до напрямків вздовж (x) і поперек (y) слідов обробки.

При цьому приймали, що поверхня має яскраво виражений напрямок слідов обробки. Тоді ширину просторового спектру мікронерівностей або нанонерівностей у напрямках x і y будуть характеризувати параметри широкосмугастості СЦ:

$$\alpha_1 = \frac{m_{00} m_{40}}{m_{20}^2}; \quad (94)$$

$$\alpha_2 = \frac{m_{00} m_{04}}{m_{02}^2}. \quad (95)$$

За еквівалентними параметрами визначали еквівалентні значення параметру широкосмугастості СЦ:

$$\alpha_e = \frac{m_{0e} m_{4e}}{m_{2e}^2}. \quad (96)$$

Внаслідок симетрії і припущення про концентричні еліпси, будемо мати $m_{11} = m_{13} = m_{31} = m_{21} \approx 0$; $m_{04} \gg m_{40}$; $m_{02} \gg m_{20}$, тоді $m_{0e} \approx m_{2y}$; $m_{2e} \approx m_{2y}$; $m_{4e} \approx m_{4y}$, а еквівалентне значення параметра широкосмугастості СЦ:

$$\alpha_e \approx \frac{m_{0y} m_{4y}}{m_{2y}^2}. \quad (97)$$

Таким чином, еквівалентне значення α_e для анізотропних поверхонь впливає із аналізу однієї профілограми, виміряної поперек слідов обробки. При цьому, статистичні характеристики поверхні, які залежать від α_e вважаємо ізотропними характеристиками, еквівалентними характеристикам профілограми у напрямку нормалі до слідов обробки.

2.10. Методи дослідження мікршорсткості поверхні. Полімерні зразки діаметром 10 мм і висотою 15 мм або із стороною квадрата 10 мм і висотою 15 мм після токарної обробки або фрезерування, послідовно припрацьовували на шліфувальній шкурці та металевому контргтілі. Металеве контргтіло шліфували, а потім обробляли на шліфувальній шкурці в одному напрямку (для того, щоб отримати анізотропну поверхню) і у випадкових напрямках (для того, щоб отримати

поверхню, яка була б близькою до ізотропної поверхні). Після припрацювання полімерних зразків металеве контртіло знову припрацьовували на шліфувальній шкурці.

Профілограми мікрошорсткості знімали за допомогою профілометра-профілографа моделі ВЭИ «Калибр» і моделі «252». Для одного напрямку знімали 50-60 базових довжин профілограм для металевого контртіла і 10-15 базових довжин профілограм для полімерного зразка. Для ізотропної поверхні профілограму знімали під кутом $\sim 45^\circ$ до напрямку ковзання. Ділянки зйомки поверхні були рівнорозподілені за слідом тертя. Статистичні характеристики різних ділянок поверхні були однаковими в статистичному розумінні.

Профілограми оброблялися за методом МНК: знаходили середньоарифметичне відхилення профіля поверхні R_a , щільність нулів D_0 і щільність екстремумів D_{extr} . Виміряна R_a і розрахункова за профілограмами D_0 (для моделі «252» D_0 виміряна) були статистично рівні.

Великий об'єм виборки і рівномірний розподіл її по поверхні забезпечили рівень вмісту довгохвильових компонентів спектру, і, таким чином, показність m_{00} . Границя дрібно-масштабних мікронерівностей у ділянці малих довжин хвиль спектру була обмежена величиною, яка не перебільшувала у 2-3 рази похибку вимірювань. Параметер широкосмугастості α був більше 1,8, тобто тієї величини, яка характерна для «білого шуму».

2.11. Методи дослідження наношорсткості поверхні. Наношорсткість поверхонь досліджують за допомогою атомно-силової мікроскопії (АСМ) на приладі Nanoscope за Dimension 3000 (Digital Instruments, USA) у режимі періодичного контакту [49]. Вимірювання проводили в центральній частині зразків з використанням кремнієвих зондів NSG-11 із номінальним радіусом закруглення вістря до 10 нм (NTOMDT) [49]. Профілограми поверхні знімали на приладі [49] WSxM 4.0 Develop 10.4. За результатами АСМ та профілограм визначали [49]: розміри нанокристалів у латеральному напрямку, максимальну висоту нанонерівностей та наношорсткість поверхні за R_a (середнє арифметичне відхилення профіля поверхні від середньої площини [50]).

Для безконтактного оптичного вимірювання шорсткості поверхні твердого тіла використовують тривимірний поверхневий профілограф «New View 5022 S». Характеристика приладу: вимірювана висота мікронерівностей від середньої

поверхні від 1 нм до 5000 мкм при швидкості сканування 10 мкм/с з роздільною здатністю за висотою 0,1 нм; площа досліджуваної поверхні сягала 50x50 мм (можливе зшивання зображень) [51].

Принцип роботи приладу: в основу покладено явище інтерферометрії, коли зображення темних і світлих ліній з'являється з-за різниці оптичного пробігу падаючого та відбитого потоку променя від поверхні (прилад працює, використовуючи скануючий білий потік променя світла інтерферометра і дає зображення високої роздільної здатності) [51]. Падаюче світло розділяється в інтерферометрі: один промінь направлений на шорстку, а другий – на еталонну поверхню; після відбиття потоки променів рекомбінуються в інтерферометрі, даючи зображення світлих і темних ділянок зразка (програмне забезпечення дозволяє проводити вимірювання одночасно в п'яти позиціях, що приводить до малої похибки) [51].

III. Деякі зауваги до АКФ профілограми у вигляді моделі експоненціальної функції

У [55] досліджується шорстка поверхня за профілограмами, АКФ яких змодельована експоненціальною функцією:

$$R(r) = m_0 \exp(-\beta|r|), \quad (98)$$

де β – параметер, який характеризує швидкість згасання кореляцій.

Використовуючи (24) [16], для випадку (98) будемо мати вираз для СЦ профілограми [55]:

$$\Phi(k') = \frac{m_0}{2\pi} \cdot \frac{2\beta}{\beta^2 + (k')^2}. \quad (99)$$

З (98) видно, що при великих значеннях β АКФ профілограми швидко згасає, а СЦ профілограми є сталою, навіть до великих значень k' [55].

Визначимо m_2 і m_4 за (27) [16] шляхом введення (99) у (27), при цьому отримаємо результат, який відомий з теорії марковських процесів [46, 56, 57]: у випадковому процесі з експоненціальною АКФ середні квадрати першої та другої похідних m_2 та m_4 прагнуть ∞ [16, 55].

що видно з експоненціальної АКФ, яка немає другої та четвертої похідних при $x = 0$ [16, 55].

Зворотне перетворення (24) [16] має вигляд:

$$R(r) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(k') \exp(ik'r) dk'. \quad (100)$$

Диференціювання (100) і використання (27) приводить до такого результату [16, 55]:

$$\left(\frac{d^2 R}{dr^2} \right)_{r=0} = - \int_{-\infty}^{\infty} (k')^2 \Phi(k') dk' = -m_2; \quad (101)$$

$$\left(\frac{d^4 R}{dr^4} \right)_{r=0} = \int_{-\infty}^{\infty} (k')^4 \Phi(k') dk' = m_4. \quad (102)$$

Таким чином, щоби m_2 і m_4 (та, відповідно, α) існували, необхідно, щоби АКФ профілограми була надзвичайно рівною на початку процесу (тобто, щоби АКФ на початку процесу мала 2-гу та 4-ту похідні) [16, 55]. Ймовірно, що при великих r АКФ $R(r)$ і є експонента, але її не можна екстраполювати до малих r [16].

Вислід з цього: теоретична експоненціальна модель АКФ відкидає існування кутів нахилу (m_2) та кривин (m_4) профілограм, але аналіза шорсткості поверхні за профілограмами, апроксимованої експоненціальною моделлю, практично можлива з-за конечности інтервалу, так як при цьому малі хвильові компоненти СЩ (тобто компоненти з великими хвильовими числами) відфільтровуються і на самому початку змінюються властивості АКФ [16]. Відфільтровка малих хвильових компонент викликає такі результати.

Якщо СЩ профілограми має вигляд [16]:

$$\Phi(k') = \frac{C}{\beta^2 + (k')^2}, \quad (103)$$

де $|k'| \leq k_0$, то з (27) отримаємо [16]:

$$m_0 = \frac{2C}{\beta} \arctg\left(\frac{k_0}{\beta}\right); \quad (104)$$

$$m_2 = 2C \left[k_0 - \beta \arctg\left(\frac{k_0}{\beta}\right) \right]; \quad (105)$$

$$m_4 = 2C \left[\frac{k_0^3}{3} - \beta^2 k_0 + \beta^3 \arctg\left(\frac{k_0}{\beta}\right) \right]. \quad (106)$$

За (12) [16]:

$$\alpha = \arctg\left(\frac{k_0}{\beta}\right) \left[\frac{1}{3} \left(\frac{k_0}{\beta}\right)^3 - \left(\frac{k_0}{\beta}\right) + \arctg\left(\frac{k_0}{\beta}\right) \right] / \left[\left(\frac{k_0}{\beta}\right) - \arctg\left(\frac{k_0}{\beta}\right) \right]. \quad (107)$$

З (107) видно, що при $\left(\frac{k_0}{\beta}\right) \rightarrow \infty$, то й $\alpha \rightarrow \infty$

[16], тобто висоти вершин нерівностей мають розподіл Гаусса [16], що співпадає з [55]. Для інших $\left(\frac{k_0}{\beta}\right)$ параметер α визначають за (107),

після чого визначають статистичні характеристики профілограми і поверхні.

Модель анізотропної шорсткої поверхні у вигляді реалізації однорідного випадкового поля $z=z(x,y)$, отриманого із відповідного ізотропного поля шляхом розтягування за однією з координат, розглянута в [58, 59]. Ця модель являє собою рідкісний випадок анізотропної поверхні, яка може бути отримана при окремих видах абразивної обробки або фрикційного припрацювання.

Використовуючи апроксимації АКФ виду $R(x,y) = \exp[-(a_1 x^2 + a_2 y^2)]$, в [60] аналізується анізотропна поверхня. Вибір такої апроксимації пов'язаний з тим, щоби далі отримати матрицю кореляційних співвідношень для анізотропної поверхні, яка співпадала би зі структурою з матрицею кореляційних співвідношень для ізотропної поверхні. Це говорить про штучний підхід до опису анізотропної поверхні.

Цінність викладених методів у [1–7] та у цій статті полягає в тому, що використана модель шорсткої поверхні та профілограми випадкового поля, не пов'язуючи з АКФ якогось певного виду і не використовуючи припущення, які прийняті для опису поверхні іншими функціями або поверхні з сильною анізотропією і орієнтовними мікро- та нанонерівностями та не припускаючи певної форми нерівностей.

Висновки

1. Узагальнені теоретичні основи математичного опису нано- та мікросорстких поверхонь

випадковим полем. Приведені математичні формули та графічні залежності для щільності ймовірностей розподілу висот вершин випадкових анізотропної та ізотропної поверхонь, функції розподілу висот вершин, середньої кривини цих шорстких поверхонь у вершині виступів нано- та мікронерівностей та градієнтів цих поверхонь.

2. Дано означення автокореляційної функції та спектральної щільності профілограми випадкових шорстких поверхонь і приведені співвідношення між спектральними щільностями поверхонь та їх профілограмами. Дано означення моментів спектральної щільності поверхні та її профілограми.

3. Приведена процедура методу Лонге-Гітінса вибіркової аналізи ізотропної випадкової поверхні за її профілограмою та показані недоліки цього методу.

4. Узагальнені теоретичні основи математичного опису профілограм нано- та мікрошорстких випадкових поверхонь. Приведені математичні формули та графічні залежності щільності ймовірностей розподілу висот піків профілограми (максимумів), функції розподілу висот піків профілограми, кривини піків профілограми та кутового коефіцієнта профілограми ізотропної випадкової шорсткої поверхні.

5. Проведена порівняльна аналіза статистич-

них властивостей ізотропної випадкової шорсткої поверхні та її профілограми. Показано на значні відмінності статистичних властивостей поверхні та її профілограми при малих значеннях параметра широкосмугастості спектру (α) та малі відмінності – при великих значеннях цього параметру (α) (якщо $\alpha \rightarrow \infty$, то ці відмінності відсутні, а для кривин – малі).

6. Для аналізи анізотропної та ізотропної поверхонь знайдені математичні співвідношення та процедури знаходження моментів нульового, другого та четвертого порядків спектральної щільності профілограми та за цими результатами – розрахунків таких моментів для поверхні.

7. Розроблений метод вимірювання та статистичної аналізи шорсткості криволінійних поверхонь за еквівалентними параметрами.

8. Описані інструментальні методи дослідження нано- та мікрошорсткості поверхонь.

9. Дискутується питання про обґрунтованість вибору експоненціальних моделей автокореляційної функції профілограми для статистичної аналізи випадкових шорстких поверхонь порівняно з методом вибору моделі шорсткої поверхні та її профілограми, яка не пов'язана з певним видом автокореляційної функції та певної форми нерівностей виступів висот поверхні та її піків профілограми.

Література

1. Семенюк Н.Ф., Сиренко Г.А. Описание топографии анизотропных шероховатых поверхностей трения с помощью модели случайного поля: 1. Распределение высот вершин, средняя кривизна в вершинах, градиент поверхности // Трение и износ. – 1980. – Т.1. – №3. – С. 465 – 471.
2. Семенюк Н.Ф., Сиренко Г.А. Описание топографии анизотропных шероховатых поверхностей трения с помощью модели случайного поля: 2. Полная кривизна, главные кривизны и отношение главных кривизн в вершинах микронеровностей, удельная площадь гауссовской поверхности и удельный объем зазора // Трение и износ. – 1980. – Т.1. – №5. – С. 815 – 823.
3. Семенюк Н.Ф., Сиренко Г.А. Описание топографии анизотропных шероховатых поверхностей трения при помощи модели случайного поля: 3. Фактическая площадь контакта, коэффициент трения, термическое сопротивление, адгезионное взаимодействие с учетом деформации в зоне контакта // Трение и износ. – 1980. – Т.1. – №6. – С. 1010 – 1019.
4. Сиренко Г.О., Солтис Л.М. Моделі нанометричної та мікрOMETричної шорсткості поверхні твердих тіл (Огляд) // Фізика і хімія твердого тіла. – 2010. – Т. 11. – № 2. – С. 423 – 446.
5. Сиренко Г.О., Семенюк М.Ф., Солтис Л.М. Щільність ймовірностей розподілу висот вершин шорстких поверхонь твердих тіл, змодельованих випадковим полем // Фізика і хімія твердого тіла. – 2010. – Т. 11. – № 3. – С. 768 – 779.
6. Сиренко Г.О., Семенюк М.Ф., Солтис Л.М. Розподіл кривин у вершинах мікро- та нанонерівностей шорстких поверхонь твердих тіл, змодельованих випадковим полем // Фізика і хімія твердого тіла. – 2010. – Т. 11. – № 4. – С. 914 – 927.
7. Семенюк М.Ф., Сиренко Г.О., Солтис Л.М. Градієнт анізотропної нано- та мікрошорсткої поверхні твердого тіла, змодельованої випадковим полем // Фізика і хімія твердого тіла. – 2011. – Т. 12. – № 1. – С. 200 – 207.
8. Семенюк М.Ф., Сиренко Г.О., Солтис Л.М. Означення ізотропності нано- та мікрошорстких поверхонь твердих тіл під час математичного опису контактних явищ // Вісник Прикарп. нац. ун-ту ім. Василя Стефаника. Серія Хімія. – 2010. – Вип. IX. – С. 62 – 70.
9. Айнбіндер С.Б., Андреева Н.Г., Тюнина Э.Л. Параметри шероховатости контртела, определяющие износостойкость полиэтилена // Трение и износ. – 1981. – Т.11. – №1. – С. 12 – 21.
10. Айнбіндер С.Б., Тюнина Э.Л. Трение полимерных материалов. Расчет коэффициента трения при контакте изотропных поверхностей // Механика полимеров. – 1977. – №2. – С. 241.

11. **Айнбіндер С.Б., Тюнина Э.Л.** Трение полимерных материалов. Расчет коэффициента трения при контакте поверхностей с неровностями несферической формы // *Механика полимеров*. – 1977. – №4. – С. 651.
12. **Бачинская Н.К.** Исследования контактных характеристик шероховатых, сильно анизотропных поверхностей: Дис. ... канд. техн. наук: 05.02.04. – Хмельницкий, 1994. – 166 с.
13. **Лонге-Хиггинс М.С.** Статистическая геометрия случайных поверхностей // *Гидродинамическая неустойчивость*. – Москва: Мир, 1964. – С.124 – 167.
14. **Романишина О.В., Семенов Н.Ф.** Предварительное смещение единичного выступа при различных режимах нагружения // *Проблемы трибологии*. – 1997. – №2. – С. 35–51.
15. **Романишина О.В.** Исследования предварительного смещения упругого контакта шероховатых изотропных поверхностей: Дис. ... канд. техн. наук: 05.02.04. – Хмельницкий, 1998. – 178 с.
16. **Найяк П.Р.** Применение модели случайного поля для исследования шероховатых поверхностей // *Проблемы трения и смазки*. – 1971. – Т.93. – Сер. F. – №3. – С. 85-95.
17. **Семенов Н.Ф., Калмыкова Т.Ф.** Фактическая площадь упругого контакта анизотропной шероховатой поверхности с гладкой // *Трение и износ*. – 1983. – Т.4. – №3. – С. 467 – 475.
18. **Семенов Н.Ф.** Плотность вероятности высот вершин. Характеристики вершин анизотропной шероховатой поверхности // *Трение и износ*. – 1986. – Т.7. – № 6. – С. 1017 – 1024.
19. **Семенов Н.Ф., Романишина О.В.** Предварительное смещение шероховатых изотропных поверхностей. I. // *Проблемы трибологии*. – 1997. – №4. – С. 90 – 101.
20. **Семенов Н.Ф., Романишина О.В.** Рассеяние энергии на единичном контакте в режиме предварительного смещения // *Проблемы трибологии*. – 1997. – №2. – С. 52–56.
21. **Семенов Н.Ф., Сиренко Г.А.** Топография и контактные явления анизотропных шероховатых поверхностей трения // Тез. докл. Всесоюз. науч.-техн. конфер. «Трибоника и антифрикционное материаловедение». – Новочеркасск. 27-29.05.1980. – Новочеркасск: Изд-во Новочеркас. политех. ин-та, 1980. – С. 22.
22. **Семенов Н.Ф., Соколан К.С.** Кривизна в вершинах выступів поверхонь тертя поршневих ущільнень // *Проблемы трибологии*. – 2000. – №2.
23. **Семенов Н.Ф., Соколан Е.С.** Основное уравнение контактирования элементов бессмазочных поршневых уплотнений // *Проблемы трибологии*. – 2002. – №1.
24. **Семенов Н.Ф.** Средние значения полной и средней кривизн в вершинах, высоты неровностей анизотропной шероховатой поверхности // *Трение и износ*. – 1986. – Т.7. – № 5. – С. 830 – 840.
25. **Семенов Н.Ф.** Средняя высота выступов шероховатой поверхности и плотность пятен контакта при контактировании шероховатой поверхности с гладкой // *Трение и износ*. – 1986. – Т.7. – №1. – С. 85–90.
26. **Свирденко А.И., Калмыкова Т.Ф.** Исследование фактической площади фрикционного контакта полимер – металл с помощью акустических колебаний. Сооб. 1 // *Трение и износ*. – 1980. – Т.1. – №5. – С. 898 – 907.
27. **Свирденко А.И., Калмыкова Т.Ф., Холодиллов О.В.** Исследование фактической площади фрикционного контакта полимер – металл с помощью акустических колебаний. Сооб. 2 // *Трение и износ*. – 1982. – Т.3. – №5. – С. 808 – 812.
28. **Семенов Н.Ф., Бачинская Н.К.** Слияние пятен контакта при нагружении шероховатых, сильно анизотропных поверхностей // *Проблемы трибологии*. – 1998. – №3. – С. 103 – 107.
29. **Семенов Н.Ф., Калда Г.С., Соколан Е.С.** Использование метода случайных полей при расчете параметров шероховатости, влияющих на тепловые процессы в трущихся телах // *Проблемы трибологии*. – 1996. – №1.
30. **Семенов Н.Ф., Терлецкая Е.В.** Моделирование шероховатых изотропных поверхностей. Сообщение I // *Проблемы трибологии*. – 1998. – №1. – С. 83 – 89.
31. **Семенов Н.Ф., Терлецкая Е.В.** Моделирование шероховатых изотропных поверхностей. Сообщение II // *Проблемы трибологии*. – 1998. – №1. – С. 90 – 97.
32. **Сіренко Г., Кедик М.** Вплив анізотропної шорсткості поверхонь, змодельованих випадковим полем, на контактні явища // *Вісник Прикарп. нац. ун-ту ім. Василя Стефаника. Серія Хімія*. – 2004. – Вип. IV. – С. 50 – 53.
33. **Сіренко Г., Семенов М.** Адгезія з деформацією в зоні контакту анізотропних шорстких поверхонь, змодельованих випадковим полем // *Вісник Прикарп. нац. ун-ту ім. Василя Стефаника. Серія Хімія*. – 2001. – Вип. I. – С. 66 – 85.
34. **Сіренко Г.О.** Створення антифрикційних матеріалів на основі порошків термостійких полімерів та вуглецевих волокон: Дис. на здобуття наук. ступеня докт. технічних наук: спец. 05.16.06 – порошкова металургія та композиційні матеріали, Хмельницький технологічний ін-т. – Захищ. 8.12.1997 в Ін-ті проблем матеріалознавства ім. І.М. Францевича НАНУ – Київ, 1997. – 537 с.: іл., табл. – Бібліогр.: с. 432 – 451 (275 назв).

35. **Сиренко Г.А.** Осложнение контактных явлений поверхности уплотнительных материалов анизотропной микрошероховатости // Тез. докл. 3-го Всесою. совещания по уплотнительной технике. ВНИИкомпрессормаш. – Сумы, 1982. – С. 44 – 45.
36. **Сиренко Г.А., Семенюк Н.Ф.** Методика определения моментов спектральной плотности шероховатых поверхностей уплотнительной пары // Тез. докл. 3-го Всесою. совещания по уплотнительной технике. ВНИИкомпрессормаш. – Сумы, 1982. – С. 46 – 47.
37. **Терлецкая Е.В.** Исследование характеристик фрикционного упругого контакта шероховатых изотропных поверхностей: Дис. ... канд. техн. наук: 05.02.03, Хмельницкий, 1996. – 195 с.
38. **Longuet-Higgins M.S.** On the statistical distribution of the highs of sea waves // J. Marine Research. – 1952. – Vol.11. – N3. – P. 245.
39. **Longuet-Higgins M.S.** Statistical Properties of a moving waveform // Proc. Cambridge Philos. Soc. – London, 1956. – N52. – P. 234.
40. **Longuet-Higgins M.S.** Statistical Properties of an isotropic random surface // Philos. Trans. of the Royal Soc. – London, 1957. – Vol.250. – Ser. A. – P. 157-174.
41. **Longuet-Higgins M.S.** The Statistical Analysis of a Random Moving Surface // Philos. Trans. of the Royal Soc. – London, 1957. – Vol.249. – Ser. A. – P. 321-387.
42. **Longuet-Higgins M.S.** The Statistical distribution of the curvature of a random Gaussian surface // Proc. Cambridge Philos. Soc. – London, 1958. – N54. – P. 439.
43. **Хусу А.П., Виттенберг Ю.Р., Пальмов В.А.** Шероховатость поверхностей. Теоретико-вероятностный подход. – Москва: Наука, 1975. – 344 с.
44. **Ядренко М.И.** Спектральная теория случайных полей. – Київ: Вища шк., 1980. – 208 с.
45. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. – Изд. второе, исп. / Пер. с англ. Н.В. Леви; под ред. К.А. Семендяева. – Москва: Наука, 1966. – 228 с.
46. **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике для научных работников и инженеров / Пер. И.Г. Арамановича, А.М. Березмана, И.А. Войнштейна и др. – Москва: Наука, 1978. – 832 с.
47. **Gartwright D.E., Longuet-Higgins M.S.** The statistical distribution of the maxima of a random function // Proceedings of the Royal Soc. – London. – 1956. – Vol.237. – Ser. A., N1209 – P. 212.
48. **Rice S.O.** Mathematical Analysis of Random Noise // Selected Paper on Noise and Stochastic.
49. **Термоелектричні властивості тонких плівок PbTe при витримці на повітрі / Д.М. Фреїк, І.К. Юрчишин, В.В. Бачук та ін. // Фізика і хімія твердого тіла. – 2010. – Т. 11. – № 3. – С. 598 – 603.**
50. **Розмірні ефекти в термоелектричних властивостях наноструктурних плівок телуриду свинцю / Д.М. Фреїк, А.П. Шпак, Б.С. Дзундза та ін. // Фізика і хімія твердого тіла. – 2010. – Т. 11. – № 2. – С. 356 – 360.**
51. **Іваніцька В.Г.** Взаємодія поверхні CdTe різної кристалографічної орієнтації з розчинами на основі I₂ та H₂O₂ – НІ. – Дис. ... к.х.н. – Прикарп. нац. ун-т ім. В. Стефаника, 2008. – 161 с.
52. **Сэйлс Р.С., Томас Т.Р.** Измерение статистических характеристик микрогеометрии поверхностей, встечающихся в технике // Проблемы трения и смазки. – 1979. – № 4. – С. 16 – 28.
53. **Дунин-Барковский И.В., Карташова А.Н.** Измерение и анализ шероховатости, волнистости и некруглости поверхности. – Москва: Машиностроение, 1978. – 232 с.
54. **Щербинский В.Г.** Индикатор шероховатости поверхности // Трение и износ. – 1991. – Т.12. – № 6. – С. 1133 – 1135.
55. **Whitehouse D.J., Archard J.F.** The properties of random surfaces of significance in their contact // Proceedings of the Royal Society. – 1970. – Vol.316. – Ser. A. – P. 97 – 121.
56. **Майн Х., Осаки С.** Марковские процессы принятия решений / Пер. с англ. В.В. Калашникова, В.С. Манусевича / Под ред. Н.П. Бусленко. – Москва: Наука, 1977. – 176 с.
57. **Сигорский В.П.** Математический аппарат инженера. – Киев: Техніка, 1977. – 768 с.
58. **Гупта П.К., Кук Н.Х.** Статистический анализ механического взаимодействия шероховатых поверхностей // Проблемы трения и смазки. – 1972. – Т.94, №1. – С. 14.
59. **Kubo M., Peklenik J.** An analysis of micro-geometrical isotropy for random surfaces structures // Ann. of CIRP. – 1968. – Vol.16. – P. 235.
60. **Кризберг Ю.Я., Кокин В.П., Рудзит Я.А.** Определение микротопографических параметров нерегулярной шероховатости // Технологические методы повышения качества поверхности деталей машин. – Ленинград: Ленинградский университет, 1978. – С. 152.

Б. Питома площа гавсовської анізотропної та ізотропної шорстких поверхонь

Вступ

1. У [1] приведена аналіза математичних моделей опису шорсткості поверхні твердих тіл на основі теорії випадкового поля, з якої випливають висновки про продуктивність використання моделі випадкового поля.

2. Використовуючи модель випадкового поля шорсткої поверхні і не пов'язуючи її з автокореляційною функцією (АКФ) якогось певного виду, і не використовуючи припущення, які прийняті для опису поверхні одномірними випадковими функціями або поверхні із сильною анізотропією і орієнтованими мікронерівностями, а також не припускаючи певної форми нерівностей, в [2–6] отримано співвідношення для щільності ймовірності розподілу висот вершин, розподілу кривин у вершинах мікронерівностей, розподілу градієнту анізотропної та ізотропної поверхонь.

3. У [7–23] показана придатність теорії випадкового поля та, відповідно, отриманих співвідношень [2–6], для опису контактних явищ, при цьому порівняння розрахунків фактичної площі пружного контакту (ФПК) шорсткої гавсовської анізотропної поверхні з рівною методом випадкового поля з результатами експериментального визначення ФПК оптико-акустичним методом показало на близькість експериментальних даних і результатів розрахунків [24–26].

4. Тому, під час опису таких контактних явищ, як тертя, зношування та мащення, адсорбція, змочування, електрокінетичні та електрохімічні процеси, процеси хемічної кінетики та каталізу та ін., необхідно знати питому площу \bar{s} шорсткої поверхні. Наприклад, крайові кути змочування для рівної (θ) та шорсткої поверхонь (θ_m) пов'язані співвідношенням: $\cos\theta_m = \bar{s} \cos\theta$ [27].

І. Теоретична частина

Нехай шорстка поверхня твердого тіла уявляє собою гавсовську модель і описується рівнянням $z = z(x, y)$, де z – висота нерівностей шорсткої поверхні, а x, y – декартові координати. Введемо змінні: $\varepsilon_1 = z$; $\varepsilon_2 = \frac{\partial z}{\partial x}$; $\varepsilon_3 = \frac{\partial z}{\partial y}$.

1. Питома площа гавсовської поверхні.

1.1. Введемо означення питомої площі гавсовської анізотропної шорсткої поверхні, яка припадає на одиницю номінальної площі ідеально рівної поверхні, як площу, що дорівнює [7]:

$$s = \frac{1}{L^2} \int_0^L \int_0^L \sqrt{1 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2} \, dx dy, \quad (1)$$

спільна щільність ймовірностей величин $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ має вигляд [2, 5]:

$$p(\varepsilon_2, \varepsilon_3) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\Delta_1}} \times \exp\left[-\frac{1}{2\Delta_1}(m_{02}\varepsilon_2^2 - 2m_{11}\varepsilon_2\varepsilon_3 + m_{20}\varepsilon_3^2)\right], \quad (2)$$

$$\text{де } \Delta_1 = \begin{vmatrix} m_{20} & m_{11} \\ m_{11} & m_{02} \end{vmatrix};$$

m_{02}, m_{11}, m_{20} – моменти спектральної щільності другого порядку анізотропної шорсткої поверхні [1, 3].

1.2. Математичне сподівання питомої площі анізотропної поверхні дорівнює [7]:

$$\begin{aligned} \bar{s} &= M\bar{s} = M\left(\frac{1}{L^2} \int_0^L \int_0^L \sqrt{1 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2} \, dx dy\right) = \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{\Delta_1}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{1 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2} \times \\ &\times \exp\left[-\frac{1}{2\Delta_1}(m_{02}\varepsilon_2^2 - 2m_{11}\varepsilon_2\varepsilon_3 + m_{20}\varepsilon_3^2)\right] d\varepsilon_2 d\varepsilon_3, \end{aligned} \quad (3)$$

де L – довжина профілю поверхні.

Введемо нові змінні ζ, φ :

$$\begin{cases} \varepsilon_2 = \zeta \cos \varphi; \\ \varepsilon_3 = \zeta \sin \varphi. \end{cases} \quad (4)$$

Площина зміни нових змінних:

$$\begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi; \\ 0 \leq \zeta < \infty. \end{cases} \quad (5)$$

Тоді питома площа анізотропної шорсткої поверхні дорівнює [7]:

$$\begin{aligned} \bar{s} = & \frac{1}{2\pi\sqrt{\Delta_1}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \zeta(1+\zeta^2)^{1/2} \exp\left[-\frac{\zeta^2}{2\Delta_1} \times \right. \\ & \times (m_{02} \cos^2 \varphi - 2m_{11} \sin \varphi \cdot \cos \varphi + \\ & \left. + m_{20} \sin^2 \varphi)\right] d\varphi d\zeta = \Delta_1^{-1/2} \int_0^{\infty} \zeta(1+\zeta^2)^{1/2} \times \\ & \times \exp\left(-\frac{M_2 \zeta^2}{4\Delta_1}\right) I_0\left[\frac{\zeta^2(M_2^2 - 4\Delta_1)^{1/2}}{4\Delta_1}\right] d\zeta, \end{aligned} \quad (6)$$

де $M_2 = m_{20} + m_{02}$;

I_0 – нульова функція Бесселя з уявним аргументом [28].

Якщо позначити $t = \zeta^2$, то (6) буде зведено до (7):

$$\bar{s} = \frac{1}{2\Delta_1^{1/2}} \int_0^{\infty} (1+t)^{1/2} \left(-\frac{M_2 t}{4\Delta_1}\right) I_0\left[\frac{t(M_2^2 - 4\Delta_1)^{1/2}}{4\Delta_1}\right] dt. \quad (7)$$

1.3. Для ізотропної шорсткої поверхні, коли $m_{02} = m_{11} = m_{20} = m_2$; $M_2 = 2m_2$; $\Delta_1 = m_2^2$, то (7) набуде вигляду для питомої поверхні:

$$\bar{s} = \frac{1}{2m_2} \int_0^{\infty} (1+t)^{1/2} \exp\left(-\frac{t}{2m_2}\right) dt, \quad (8)$$

де m_2 – момент спектральної щільності другого порядку ізотропної шорсткої поверхні [1–6].

Після інтегрування (8) отримаємо у кінцевому вигляді вираз для питомої площі ізотропної шорсткої поверхні [7]:

$$\begin{aligned} \bar{s} = & 1 + \sqrt{\frac{\pi m_2}{2}} \exp\left(\frac{1}{2m_2}\right) \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{2m_2}}\right)\right] = \\ = & 1 + \sqrt{\frac{\pi m_2}{2}} \exp\left(\frac{1}{2m_2}\right) \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{2m_2}}\right). \end{aligned} \quad (9)$$

2. Інтеграл помилок.

2.1. У виразі (9)

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt - \quad (10)$$

інтеграл ймовірностей (інтеграл помилок; функція помилок) [28, 29], де $|x| < \infty$, $x = \frac{1}{\sqrt{2m_2}}$.

У виразі (10) властивості функції помилок:

$\operatorname{erf}(0) = 0$; $\operatorname{erf}(0,5) = 0,5284$; $\operatorname{erf}(x) = -\operatorname{erf}(-x)$;
 $\operatorname{erf}(-x) = -\operatorname{erf}(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{erf}(x) \rightarrow 1$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{erf}(x) \rightarrow -1$ [28,

29]; $\frac{d[\operatorname{erf}(x)]}{dx} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-x^2)$ [30].

Інші позначення [29]:

$$\operatorname{Erf}(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(x);$$

$$\operatorname{Erf}(i \cdot x) = -i \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(ix) = \int_0^x \exp(t^2) dt;$$

$$\operatorname{Erfc}(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \operatorname{Erf}(x) = \int_x^{\infty} \exp(-t^2) dt;$$

$$\alpha(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt - 1 = \frac{2}{\pi} \operatorname{Erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right).$$

2.2. Додатковий інтеграл ймовірностей (доповнююча функція помилок) [28, 29]:

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} \exp(-t^2) dt. \quad (11)$$

2.3. Комплексна функція помилок визначається через функцію помилок [30]:

$$w(x) = \exp(-x^2) = \operatorname{erfc}(-ix), \quad (12)$$

причому для будь-якого комплексного числа x виконується залежність [30]:

$$\operatorname{erf}(\bar{x}) = \overline{\operatorname{erf}(x)}, \quad (13)$$

де риска зверху позначає комплексне числа x .

2.4. Неелементарні функції $\operatorname{erf}(x)$ і, відповідно, $\operatorname{erfc}(x)$ малодосліджені, тому приведемо кілька формул для їх розрахунку [28–30].

2.5. Функцію помилок як неелементарну функцію (10) можна представити через елементарні функції, розкладаючи інтегральний вираз (10) у ряд Тейлора [28, 31] та інтегруючи

його почленно, тоді (10) можна подати у вигляді ряду [28–30] в околі точки $x = 0$:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \frac{x^9}{4!9} - \dots + \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{n!(2n+1)} + \dots \right) \quad (14)$$

Ряд (14) збігається (рівність (14) виконується) як для будь-якого дійсного числа x , так і на всій комплексній площині [30].

Для ітеративного обчислення елементів ряду (14) за [30] його представляють у вигляді:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \left[x \prod_{i=1}^n \left(\frac{-(2i-1)x^2}{i(2i+1)} \right) \right] = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{2n+1} \prod_{i=1}^n \left(\frac{-x^2}{i} \right), \quad (15)$$

де \prod – знак добутку;

i – загальне позначення номера співмножника.

Для ряду (15) співмножник

$$\left(\frac{-(2i-1)x^2}{i(2i+1)} \right) \quad (16)$$

перетворює i -й член ряду в $(i+1)$ -й, при цьому вважають першим членом (x) .

2.6. Обернена функція помилок уявляє собою ряд [30]:

$$\operatorname{erf}^{-1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{C_k}{2k+1} \left(\frac{x\sqrt{\pi}}{2} \right)^{2k+1} \right], \quad (17)$$

де для $k = 0$ $C_0 = 1$;

$$\text{для } k \geq 1 \quad C_k = \sum_{m=0}^{k-1} \frac{C_m C_{k-m-1}}{(m+1)(2m+1)}. \quad (18)$$

Звідки: $C_1 = 1$; $C_2 = 1,16667$; $C_3 = 1,41111$;

$$C_4 = 1,73373; C_5 = 2,14858; C_6 = 2,67717; \dots \quad (19)$$

Тому, ряд (17), враховуючи (19), можна подати у такому вигляді [32]:

$$\operatorname{erf}^{-1}(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(x + \frac{2\pi x^3}{3 \cdot 2^3} + \frac{7\pi^2 x^5}{3 \cdot 5 \cdot 2^5} + \frac{127\pi^3 x^7}{3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 2^7} + \frac{4369\pi^4 x^9}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 2^9} + \frac{243649\pi^5 x^{11}}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 2^{11}} + \frac{20036983\pi^6 x^{13}}{2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 2^{13}} + \dots \right) \quad (20)$$

2.7. При великому аргументі (x) та дійсної частини числа (x) $\operatorname{Re}x > 0$ продуктивним є асимптотичний розклад для додаткової функції помилок $\operatorname{erfc}(x)$ [29, 30]:

$$1 - \operatorname{erf}(x) = \operatorname{erfc}(x) \approx \frac{\exp(-x^2)}{x\sqrt{\pi}} \times \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{(2x^2)^n} \right]. \quad (21)$$

За [30] асимптотичний ряд (21) для будь-якого скінченного (x) є розбіжним, але практично достатньо перших декількох членів для обчислення $\operatorname{erfc}(x)$ із доброю точністю (зауважимо, що, незважаючи на те, що ряд Тейлора (14) збігається, це відбувається доволі повільно).

З (21) випливає вираз до прямої функції помилок $\operatorname{erf}(x)$ [30]:

$$\operatorname{erf}(x) \approx 1 - \frac{\exp(-x^2)}{x\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{n!(2x)^{2n}}. \quad (22)$$

2.8. Наближена формула для розрахунку прямої функції помилок $\operatorname{erf}(x)$ дана в [30]:

$$\operatorname{erf}(x) \approx \sqrt{1 - \exp\left(-\frac{x^2(4/\pi + ax^2)}{1 + ax^2}\right)}, \quad (23)$$

$$\text{де } a = \frac{-8(\pi - 3)}{3\pi(\pi - 4)} \approx 0,14001.$$

2.9. Узагальнені функції помилок. На напіввісі $x > 0$ всі узагальнені функції помилок можна виразити, виходячи з виразу для узагальнених функцій помилок [30], через гамма-функцію $\Gamma(x)$ [28, 29]:

$$E_n(x) = \frac{x(x^n)^{-1/n} \Gamma(n) [\Gamma(1/n) - \Gamma(1/n, x^n)]}{\sqrt{\pi}}, \quad (24)$$

де $x > 0$.

Отже, наближену формулу для розрахунку прямої функції помилок $erf(x)$ можна виразити через гамма-функцію [30]:

$$erf(x) \approx 1 - \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}, x^2\right)}{\sqrt{\pi}}. \quad (25)$$

У (24), (25) за [28, 29] гамма-функція може бути виражена так:

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)(z+2) \dots (z+n)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^z}{z(1+z)(1+\frac{z}{2}) \dots (1+\frac{z}{n})}. \end{aligned} \quad (26)$$

За виразом (26) Л. Ейлер отримав інтеграл для $\text{Re}x > 0$ [29]:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} \exp(-t) dt. \quad (27)$$

У (27) багатозначність функції (t^{x-1}) усувається заміною її виразом [28]:

$$t^{x-1} = \exp[(x-1) \ln t]. \quad (28)$$

Тоді

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} \exp[(x-1) \ln t] \exp(-t) dt. \quad (29)$$

Основні співвідношення гамма-функції [28, 29]:

добуток Вейерштрасса [28]:

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x \exp(C_0 x) \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{k}\right) \exp\left(-\frac{x}{k}\right), \quad (30)$$

де стала Ейлера-Маскерони визначена за [28] так:

$$\begin{aligned} C_0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k}\right) - \ln n \right] = - \int_0^{\infty} \exp(-t) \ln t dt = \\ &= - \int_0^1 \ln\left(\ln \frac{1}{\tau}\right) d\tau \approx 0,5772157, \end{aligned}$$

(31)

а інші співвідношення [28, 29]:

$$x\Gamma(x) = \Gamma(x+1); \quad (32)$$

$$\Gamma(x)\Gamma(-x) = \frac{\pi}{x \sin(\pi x)}; \quad (33)$$

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n+1)}{x(x+1) \dots (x+n)}; \quad (34)$$

$\Gamma(1) = 1$; $\Gamma(n+1) = n!$ (де $n = 0, 1, 2, 3, \dots, n$; $n > 0$ – ціле число, а $0! = \Gamma(1) = 1$);

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}; \quad (35)$$

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi};$$

$$\Gamma(1/2+x) \cdot \Gamma(1/2-x) = \frac{\pi}{\cos(\pi x)}; \quad (36)$$

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)}{2^n} \sqrt{\pi}. \quad (37)$$

Якщо $n > 0$ – ціле число, то за [28, 29]:

$$\left| \Gamma\left(\frac{1}{2} + iy\right) \right|^2 = \frac{\pi}{\text{ch}(y\pi)}, \quad (38)$$

де y – дійсне число;

ch – гіперболічний косинус за [29] означений так:

$$\text{ch}(x) = \cosh(x) = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2} = \frac{1 + \exp(2x)}{2 \exp(x)};$$

• при великих значеннях (x):

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &= (x-1)\Gamma(x-1) = (x-1)(x-2)\Gamma(x-2) = \\ &= (x-1)(x-2)(x-3)\Gamma(x-3) = \dots; \end{aligned} \quad (39)$$

• при $x < 1$ ($x \neq 0, -1, -2, \dots$):

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} = \frac{\Gamma(x+2)}{x(x+1)} = \dots; \quad (40)$$

$$\Gamma(nx) = \sqrt{\frac{n^{2nx-1}}{(2\pi)^{n-1}}} \cdot \Gamma(x) \Gamma\left(x + \frac{1}{n}\right) \times \dots \times \Gamma\left(x + \frac{n-1}{n}\right), \quad (41)$$

де $n = 2, 3, 4, \dots, n$.

2.10. Знайдемо наближену формулу для визначення питомої площі. Відомо, що при $0 \leq x < \infty$ має місце наближення [7]:

$$\operatorname{erf} x \approx 1 - \exp(-x^2) \sum_{i=1}^5 a_i y^i, \quad (42)$$

де $y = 1/(1+0,3275911x)$;

a_1, \dots, a_5 – числові коефіцієнти.

Найбільша абсолютна помилка такої заміни складає $1,5 \cdot 10^{-7}$. Тоді за [7] питома площа поверхні:

$$\bar{s} \approx 1 + \sqrt{\frac{\pi m_2}{2}} \sum_{i=1}^5 a_i \tilde{y}^i, \quad (43)$$

де
$$\tilde{y} = \left(1 + \frac{0,3275911}{\sqrt{2m_2}}\right)^{-1}. \quad (44)$$

II. Експериментальна частина

1. Матеріали зразків.

1.1. Отримання волокнистого матеріалу.

Досліджували зносостійкість композитного матеріалу – карбопластика «флубон-15 (20)» [22, 33, 34] на основі ПТФЕ, наповненого 20% карбонізованого низькомодульного (LM) вуглецевого волокна, отриманого з гідратцелюлозного волокна тканини УТМ-8 під час термообробки у печі «Таммана» (за температури 1123 К у середовищі CH_4 в присутності антипіренів $\text{Na}_2\text{B}_4\text{O}_7 \cdot 10\text{H}_2\text{O}$ та $(\text{NH}_4)_2\text{HPO}_4$).

1.2. Дисперсії вуглецевого волокна та композицію матеріалу отримували за такою технологією: для попереднього подрібнення вуглецевої тканини УТМ-8 застосовували модифіковану молоткову дробарку КДУ 2,0 «Українка» з рухомими молотками, сепаруючим пристроєм у вигляді змінної ґратки з діаметром отворів 1,5–5,0 та 0,8–1,5 мм і вентилятором, який гнав повітря через ґратки. Діаметр робочих органів з молотками становив 0,48 м, число обертів 2700 за хвилину, що визначало частоту обертання 45 с^{-1} та максимальну лінійну швидкість 67 м/с. Дробарка КДУ 2,0 забезпечувала тонину помелу волокон 3–15 мм. Для більш тонкого подрібнення волокон та активаційного змішування інгредієнтів

композиції використали дробарку-млинок МРП-1 з подовими ножами при 7000 обертання ножів за хвилину, діаметрі ножів 0,205 м, частоті обертання 117 с^{-1} , максимальній лінійній швидкості 75 м/с. Після здрібнення волокна мали широкий розподіл за довжинами від 0 до 3500 мкм з основною фракцією 50–200 мкм.

2. За [35, 36] у композит вводили короткі вуглецеві волокна, що отримані за ХМА-технологією [22, 33], які мали об'ємний (масовий) розподіл за довжинами за ймовірним гамма-законом розподілу в композиції [37]:

$$P_2(l) = \frac{\lambda^{\theta+1} l^\theta \exp(-\lambda l)}{\Gamma(\theta+1)}, \quad (45)$$

де $l \geq 0$ – довжина волокна;

θ, λ – параметри гамма-розподілу;

$\Gamma(x)$ – гамма-функція [28];

$P_2(l)$ – щільність ймовірностей об'ємного (масового) гамма-розподілу за довжинами волокон з математичним сподіванням:

$$M_2(l) = \frac{\theta+1}{\lambda}; \quad (46)$$

та дисперсією:

$$D_2^2(l) = \frac{\theta+1}{\lambda^2}. \quad (47)$$

Щільність ймовірностей об'ємного (масового) гамма-розподілу за довжинами волокон $P_2(l)$ пов'язана із щільністю ймовірностей числового гамма-розподілу за довжинами волокон $\varphi_2(l)$ так:

$$P_2(l) = \frac{l}{E_2(l)} \varphi_2(l), \quad (48)$$

де
$$\varphi_2(l) = \frac{\lambda^\theta}{\Gamma(\theta)} l^{\theta-1} \exp(-\lambda l) \quad (49)$$

з математичним сподіванням:

$$E_2(l) = \frac{\theta}{\lambda} = M_2(l) - \frac{1}{\lambda}, \quad (50)$$

та дисперсією:

$$\sigma_2^2(l) = \frac{\theta}{\lambda^2} = D_2^2(l) - \frac{1}{\lambda^2}. \quad (51)$$

3. Для вирішення завдання лінійної аналізи вихідних дроблених волокон, отриманих за ХМА-технологією, та після змішування їх з порошком полімеру шляхом дроблення, використовували автоматичний аналізатор зображень мікрооб'єктів «Морфоквант» із обчислювальною машиною ЕС–5060. Аналізатор був налагоджений на макси-

мальну кількість кроків 512, мінімальний крок 0,2 мкм, діапазон кроків під час сканування 512*512 та на кількість різних ступенів тонів 128. При цьому відносна похибка вимірювання лінійних розмірів волокон становила 0,2 %. Програма забезпечувала аналізу 250 частинок за одну пробу (кількість проб 20-25). Статистичну відповідність емпіричного розподілу теоретичному гамма-розподілу перевіряли за критеріями хі-квадрат та омега-квадрат з рівнем значущості $\alpha = 0,05$.

4. У результаті технологічних операцій в композиції отримали волокна, що мали об'ємний (масовий) розподіл за гамма-законом за довжинами з параметрами $\lambda = 0,005 - 0,045 \text{ мкм}^{-1}$, $\theta = 1,0 - 2,55$, отриманих із вихідних вуглецевих волокон, розподілених за довжинами за тим же законом з параметрами розподілу $\lambda = 0,002 - 0,04 \text{ мкм}^{-1}$, $\theta = 0,5 - 2,5$, щільність ймовірностей розподілу в обох випадках $P_2(l) = (0,2 - 6,0) \cdot 10^{-3} \text{ мкм}^{-1}$ при наборі довжин $l = 0 - 3500 \text{ мкм}$ з основною фракцією $l = 20 - 200 \text{ мкм}$.

5. Фрикційні випробування без машення. Зносостійкість композитного матеріалу під час тертя та зношування без машення досліджували на трибометрі ХТІ-72 за схемою контакту [I-1] [22]: торець пальчика діаметром $10 \pm 0,05 \text{ мм}$ і висотою $15 \pm 0,1 \text{ мм}$ по площині металевому контртіла. Контртіло було виконано порожнистим діаметром $60 \pm 0,15 \text{ мм}$, висотою $35 \pm 0,2 \text{ мм}$, товщиною робочої частини поверхні тертя $5 \pm 0,2 \text{ мм}$. Через порожнину контртіла проходила холодна вода, або розміщувався термонагрівач, завдяки яким підтримувався заданий тепловий режим поверхні тертя вуглецевої сталі 45, термообробленої до НВ 4,5 ГПа, з вихідним середнім арифметичним відхиленням профілю поверхні: $Ra_0 = 0,085 \text{ мкм}$ (дослід №70); $Ra_0 = 0,22 \text{ мкм}$ (дослід №72); $Ra_0 = 0,49 \text{ мкм}$ (дослід №73); $Ra_0 = 0,85 \text{ мкм}$ (дослід №74); $Ra_0 = 1,42 \text{ мкм}$ (дослід №75). Питоме навантаження на 3 зразки складало $p = 3 \text{ МПа}$ (нормальне навантаження на зразок $N_i = 235,62 \text{ Н}$); швидкість ковзання $v = 1,1 \text{ м/с}$; температура $T = 373 \pm 1 \text{ К}$, що була визначена термпарою ХК на відстані $1 \pm 0,05 \text{ мм}$ від поверхні тертя контртіла зі сталі 45, а величини (в мВ) записувались на стрічку потенціометра КСП-4. Шлях тертя складав $S = 1000 \text{ км}$ із заміром величини зносу через 100 км .

Знос полімерних зразків визначали за зміною їх висоти Δh до та після кожного етапу зношування (шляху тертя), вимірюючи висоту зразка разом із гніздовою головкою, після 1 год. релаксації за кімнатної температури, на вертикальному оптиметрі з точністю $\pm 0,5 \text{ мкм}$. За лінійним зносом Δh [мм] розраховували об'ємний знос ΔV [мм³], за яким розраховували об'ємну

інтенсивність зношування:

$$J_i = \frac{\Delta V_i}{S} \left[\frac{\text{мм}^3}{\text{м}} \right], \quad (52)$$

де S – шлях тертя [м], а потім об'ємну питому інтенсивність зношування:

$$J = \frac{\Delta V_i}{N_i \cdot S} = \frac{\Delta V}{N \cdot S} \left[\frac{\text{мм}^3}{\text{Н} \cdot \text{м}} \right], \quad (53)$$

де ΔV_i , ΔV – об'ємний знос [мм³] одного або трьох зразків відповідно;

N_i , N – нормальне навантаження [Н] на один (N_i) або три (N) зразки відповідно.

Полімерні зразки послідовно припрацьовували на шліфувальній шкурці, що знаходилась на масивному плоскому металевому тілі, та металевому контртілі при терті та зношуванні. Металево контртіло шліфували, а потім оброблювали на шліфувальній шкурці в одному напрямку (для того, щоб отримати анізотропну поверхню) і у випадкових напрямках (для того, щоб отримати поверхню, яка була б близькою до ізотропної поверхні). Після припрацювання полімерних зразків металеве контртіло знову припрацьовували на шліфувальній шкурці.

6. Методи дослідження мікрошорсткості поверхні. Профілограми мікрошорсткості знімали за допомогою профілометра-профілографа моделі ВЭИ «Калибр» та моделі «252». Для одного напрямку знімали 50-60 базових довжин профілограм для металевому контртіла і 10-15 базових довжин профілограм для полімерного зразка. Для ізотропної поверхні профілограму знімали під кутом $\sim 45^\circ$ до напрямку ковзання. Ділянки зйомки поверхні були рівнорозподілені за слідом тертя. Статистичні характеристики різних ділянок поверхні були однаковими в статистичному відношенні.

Профілограми оброблялися за методом МНК: знаходили середньоарифметичне відхилення профіля поверхні R_a , щільність нулів D_0 і щільність екстремумів D_{extr} . Виміряна R_a і розрахункова за профілограмами D_0 (для моделі «252» D_0 виміряна) були статистично рівні. За R_a , D_0 , D_{extr} , використовуючи методику [38], розраховували моменти спектральної щільності поверхні: m_0 , m_2 , m_4 .

Великий об'єм виборки і рівномірний розподіл її по поверхні забезпечили рівень вмісту довгохвильових компонентів спектру, і, таким чином, показність m_{00} . Границя дрібномасштабних мікронерівностей у ділянці малих довжин хвиль спектру була обмежена величиною, яка не перебільшувала у 2-3 рази похибку вимірювань. Параметер широкосмугастості α був більше 1,8,

тобто тієї величини, яка характерна для «білого шуму».

7. Електронні мікроскопічні дослідження. Поверхні зразків тертя, металевих спряжених поверхонь та композиту досліджували на растровому електронному мікроскопі РЕМ-200 із здатністю до розв'язання об'єкту 30–50 нм та збільшенням від 20 до 26000. Збільшення змінювали ступенями з компенсацією під час зміни прискорюючої напруги і цифровій реєстрації. Зразки знімали у звичайному режимі та з використанням «у-модуляції». Рівень «у-модуляції» підбирали візуально за знімальним об'єктом (при необхідності навмисно збільшували рівень «у-модуляції» для виявлення ефекту і межі розділу фаз). Поверхня зразка перед зйомкою ретельно очищалися розчином хромпіка та етиловим спиртом. Зразки, які мали великий

питомий електричний опір, під дією електронного пучка заряджалися, що приводило до викривлення зображення об'єкту. З метою зняття електричного заряду поверхні таких зразків покривалися шаром золота товщиною 10–12 нм. Термічне наплення золота проводили за допомогою вакуумного універсального приладу ВУП-4.

III. Результати та обговорення

1. Результати дослідження інтенсивності зношування (J) зразків полімерного композиту «флубон-15(20)» по контргтілу із загартованої сталі 45 та моментів спектральної щільності шорсткої поверхні контргтіла від шляху тертя S = 0–1000 км та шорсткості Ra₀ вихідної поверхні сталі 45 зведені в табл. 1.

Таблиця 1

Результати дослідження залежностей інтенсивності зношування (J) зразків полімерного композиту «флубон-15(20)» по сталі 45 та зміни параметрів шорсткості поверхні контргтіла (m₀, m₂, m₄) від шляху тертя та вихідної шорсткості поверхні за Ra₀

S, км	$J, \times 10^{-7} \frac{\text{мм}^3}{\text{Н} \cdot \text{м}}$	m ₀ , мкм ²	m ₂	m ₄ , мкм ⁻²	α	Λ
Ra ₀ =0,085 мкм (дослід №70)						
0	0	0,011301	0,0002309	0,00002147	4,550899	0,780263
50	2,14	0,017490	0,0003738	0,00003378	4,228349	0,763501
100	1,24	0,007712	0,0001702	0,00000869	2,313490	0,567753
200	2,38	0,011500	0,0002528	0,00002195	3,949828	0,746824
300	2,11	0,009625	0,0002915	0,00003063	3,469530	0,711777
400	0,97	0,006723	0,0002368	0,00005701	6,835193	0,853698
500	1,37	0,009753	0,0004727	0,00013932	6,081077	0,835555
600	1,47	0,017220	0,0005206	0,00005391	3,425265	0,708052
700	2,31	0,008728	0,0001078	0,00001236	9,283157	0,892278
800	0,70	0,013110	0,0000788	0,00000593	12,520020	0,920128
900	3,05	0,015860	0,0003121	0,00006753	10,995430	0,909053
1000	1,84	0,012060	0,0001524	0,00001404	7,290285	0,862831
Ra ₀ =0,22 мкм (дослід №72)						
0	0	0,053360	0,0003492	0,00001198	5,242328	0,809245
50	3,6	0,012178	0,0001126	0,00000417	4,005302	0,750331
100	2,07	0,061022	0,0004435	0,00001498	4,647410	0,784826
200	2,73	0,057614	0,0003605	0,00001114	4,938587	0,797513
300	3,83	0,061716	0,0004616	0,00001101	3,188992	0,686421
400	1,63	0,074445	0,0014758	0,00009749	3,332273	0,699905
500	1,70	0,059589	0,0001444	0,00000194	5,544130	0,819629
600	1,83	0,036553	0,0002337	0,00000458	3,065287	0,673766
700	1,63	0,044434	0,0002070	0,00000567	5,879735	0,829924
800	1,07	0,045120	0,0001390	0,00000295	6,889084	0,854843
900	1,63	0,046281	0,0001268	0,00000329	9,470221	0,894406
1000	2,17	0,044685	0,0001576	0,00000668	12,017823	0,916790
Ra ₀ =0,49 мкм (дослід №73)						
0	0	0,373363	0,0037697	0,00009350	2,456571	0,592929
50	8,53	0,181631	0,0009309	0,00001285	2,693314	0,628710

100	3,00	0,272209	0,0009657	0,00001437	4,194448	0,761590
200	1,83	0,296093	0,0010464	0,00001226	3,315302	0,698368
300	3,36	0,215600	0,0004321	0,00000282	3,256337	0,692906
400	2,50	0,093830	0,0004773	0,00000749	3,084897	0,675840
500	3,12	0,059555	0,0003875	0,00001332	5,282981	0,810713
600	2,64	0,058638	0,0003944	0,00001248	4,704570	0,787441
700	1,95	0,049754	0,0002573	0,00000967	7,267330	0,862398

Продовження табл. 1

800	2,74	0,068332	0,0003258	0,00000879	5,658624	0,823279
900	2,15	0,055481	0,0003112	0,00001085	6,215769	0,839119
1000	1,98	0,061226	0,0002504	0,00000965	9,423116	0,893878

$Ra_0=0,85$ мкм (дослід №74)

0	0	0,688124	0,0094013	0,0030556	23,789613	0,957965
50	21,4	0,441975	0,0091864	0,0049251	25,794199	0,961232
100	3,60	0,453603	0,0049997	0,0018954	34,394492	0,970926
200	4,03	0,277977	0,0022508	0,0005449	29,898669	0,966554
300	4,27	0,271635	0,0019342	0,0005616	40,776512	0,975476
400	5,13	0,201744	0,0014471	0,0003060	29,479829	0,966079
500	2,93	0,220691	0,0015783	0,0003146	27,871749	0,964121
600	3,53	0,095866	0,0004918	0,0001009	39,992516	0,974995
700	2,60	0,113902	0,0002131	0,0000233	58,441368	0,982889
800	2,24	0,129203	0,0002578	0,0000326	63,375934	0,984221
900	2,15	0,109305	0,0002475	0,0000445	79,405326	0,987406
1000	2,43	0,098982	0,0002656	0,0000654	91,765161	0,989103

$Ra_0=1,42$ мкм (дослід №75)

0	0	3,189049	0,0137365	0,0001935	3,270318	0,694219
50	49,93	1,336082	0,0023406	0,00000693	1,690098	0,408318
100	7,67	0,986542	0,0012404	0,00000536	3,436821	0,709033
200	2,47	0,235362	0,0008864	0,00001089	3,262156	0,693454
300	5,00	0,312807	0,0012212	0,00002005	4,205496	0,762216
400	2,80	0,362825	0,0003567	0,00000217	6,188006	0,838397
500	3,20	0,510053	0,0005029	0,00000259	5,223382	0,808553
600	2,27	0,785134	0,0011900	0,00000465	2,578118	0,612120
700	2,27	0,430828	0,0007116	0,00000373	3,173517	0,684892
800	3,02	0,475262	0,0006761	0,00000452	4,699478	0,787210
900	2,42	0,449981	0,0005867	0,00000316	4,130942	0,757924
1000	2,11	0,505112	0,0006315	0,00000405	5,129748	0,805059

У табл. 1 широкосмугастість спектру характеризує чинник [6, 38]:

$$\alpha = \frac{m_0 m_4}{m_2^2} \quad (\text{де } 1 \leq \alpha < \infty), \quad (54)$$

а середнє квадратичне значення ширини спектру характеризує чинник [6, 38]:

$$\Lambda = 1 - \frac{1}{\alpha} = \frac{m_0 m_4 - m_2^2}{m_0 m_4} \quad (\text{де } 0,33(3) \leq \Lambda \leq 1). \quad (55)$$

2. За результатами табл. 1 за формулою (9)

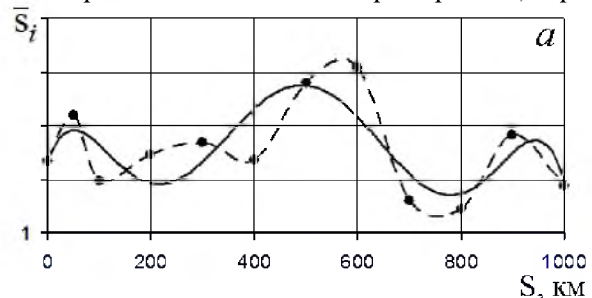
та використання виразів (10) – (25) для розрахунку інтеграла помилки $\text{erf}(x)$ та виразів (26) – (41) – для розрахунку гамма-функції знаходили значення питомої поверхні. Виявлено, що жоден вираз (10) – (25) непридатний для виконання цієї процедури. Найбільш продуктивними виявилися вирази (42) – (44). Для розрахунку питомої площі за результатами табл. 1 прийняли значення a_i у виразі (43) такими:

$$a_i = \{1; 2; 3; 4; 5\} \quad (56)$$

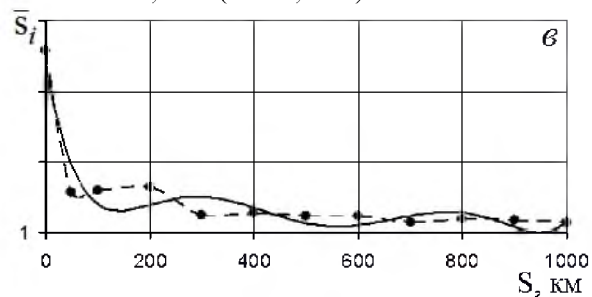
та

$$a_i = \{10; 20; 30; 40; 50\}. \quad (57)$$

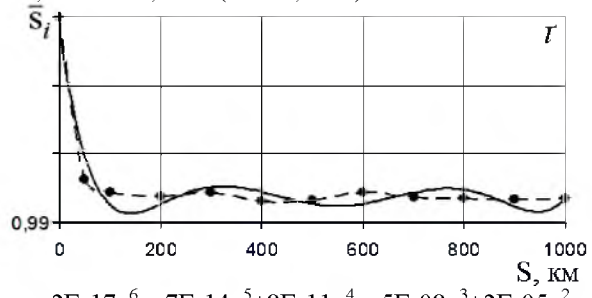
На рис. 1 показана якісна картинка зміни питомої поверхні [для a_i за (56) та (57) у виразах (42) – (44)] контртіла зі сталі 45 під час тертя та зношування полімерного композиту «флубон-15(20)» на шляху тертя від 0 до 1000 км. Як видно з рис. 1, ці зміни \bar{S}_i визначаються не лише шляхом тертя S , а й, у значній мірі, вихідною шорсткістю поверхні: для відносно рівних поверхонь сталі [$Ra_0=0,085$ мкм (дослід №70, рис. 1 а); $Ra_0= 0,22$ мкм (дослід №72, рис. 1 б)] спостерігається хвильовий характер змін, при



$$y = -1E-18x^6 + 4E-15x^5 - 4E-12x^4 + 2E-09x^3 - 4E-07x^2 + 3E-05x + 1,0013 \quad (R^2 = 0,5773).$$



$$y = 4E-18x^6 - 1E-14x^5 + 2E-11x^4 - 1E-08x^3 + 3E-06x^2 - 0,0004x + 1,0242 \quad (R^2 = 0,9224).$$

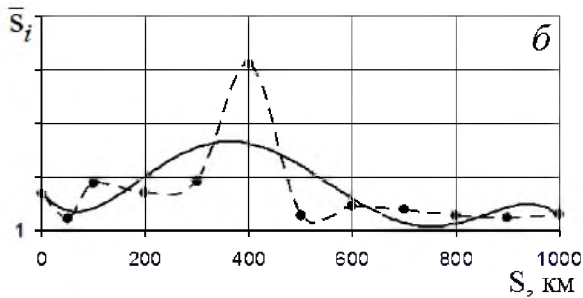


$$y = 2E-17x^6 - 7E-14x^5 + 8E-11x^4 - 5E-08x^3 + 2E-05x^2 - 0,0022x + 1,1048 \quad (R^2 = 0,9567).$$

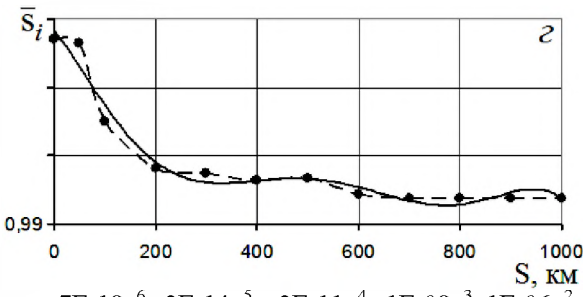
Така закономірність зміни питомої поверхні зі шляхом тертя та вихідної шорсткості поверхні контртіла пов'язана із формуванням на поверхні металевго контртіла проміжної плівки із композиту (переважно із ПТФЕ) під час тертя та зношування (рис. 2), стан якої визначається умовами тертя (N , T , v , середовище), вихідною шорсткістю поверхні (Ra_0), складом композиту та технологією її отримання, станом вихідної поверхні металевго контртіла тощо:

1. На рис. 2 а, б, в показані електронні мікро-

цьому коефіцієнти апроксимації залежності $\bar{S}_i = f(S)$ поліномами шостого порядку дорівнюють $R^2 = 0,5773$ та $R^2 = 0,4344$ відповідно. А для більш шорстких поверхонь [$Ra_0=0,49$ мкм (дослід №73, рис. 1 в); $Ra_0= 0,85$ мкм (дослід №74, рис. 1 г); $Ra_0=1,42$ мкм (дослід №75, рис. 1 г)] залежності $\bar{S}_i = f(S)$ різко спадають під час зростання шляху тертя від 0 до 100-200 км з подальшою хвильовою зміною \bar{S}_i малої висоти до 1000 км, при цьому коефіцієнти апроксимації становлять $R^2 = 0,9224 - 0,9702$.



$$y = -2E-19x^6 + 5E-17x^5 + 7E-13x^4 - 9E-10x^3 + 3E-07x^2 - 4E-05x + 1,0021 \quad (R^2 = 0,4344).$$



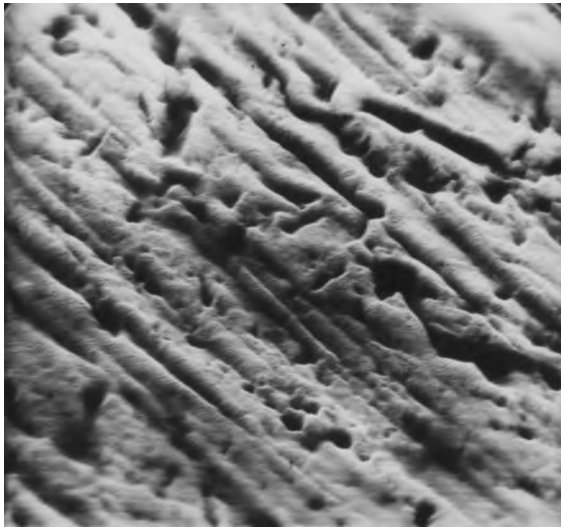
$$y = -7E-18x^6 + 2E-14x^5 - 2E-11x^4 + 1E-08x^3 - 1E-06x^2 - 0,0003x + 1,075 \quad (R^2 = 0,9702).$$

Рис. 1. Залежності питомої поверхні \bar{S}_i сталевго контртіла від шляху тертя під час тертя та зношування полімерного композиту «флубон-15(20)» при вихідній шорсткості поверхні контртіла із сталі 45: а – $Ra_0=0,085$ мкм (дослід №70); б – $Ra_0=0,22$ мкм (дослід №72); в – $Ra_0=0,49$ мкм (дослід №73); г – $Ra_0=0,85$ мкм (дослід №74); г – $Ra_0= 1,42$ мкм (дослід №75). Крискована лінія – експеримент, суцільна лінія – апроксимація поліномом 6-го порядку.

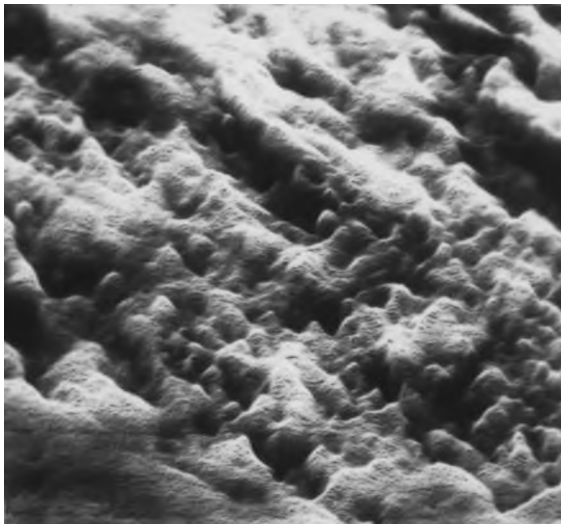
світлини поверхонь тертя металевго контртіла із сталі 45 (НВ 1,9 ГПа; $Ra_0=0,25$ мкм) після 13 год. ($S=42$ км) ковзання зразка композиту «флубон-15(20)» [ПТФЕ + 20% карбонізованого волокна УТМ-8] за схемою контакту [IV-6]: торець втулки (зовнішній діаметер $d_3 = 41 \pm 0,1$ мм; внутрішній діаметер $d_4 = 28 \pm 0,1$ мм; висота $h = 22 \pm 0,1$ мм) – площа контртіла [22]; при параметрах випробувань: питоме навантаження $p=1,3$ МПа; нормальне навантаження $N=915,85$ Н; швидкість ковзання $v=0,9$ м/с; температура поверхні контртіла

T=323 K (а); T=503 K (б); T=613 K (в) [x2850 (а); x2100 (б); x950 (в)].

2. На рис. 2 г, г показані електронні мікросвітлинні поверхонь тертя металевого контртіла із сталі 45 (НВ 4,5 ГПа; Ra₀=0,23 мкм) після 6 год. (S=18 км) ковзання зразка композиту «флубон-ДМГ-С 1» [ПТФЕ + 13% карбонізованого волокна УТМ-8 + 8% порошку MoS₂ + 6% порошку колоїдного графіту С 1] за схемою контакту [I-1]: торці 3-х пальчиків (діаметер d_i = 10 ± 0,05 мм; висота h = 15 ± 0,1 мм) – площина контртіла [22]; при параметрах випробувань: p=1,3 МПа; N=306,31 Н; N_i=102,10 Н; v=0,9 м/с; T=373 K (г);



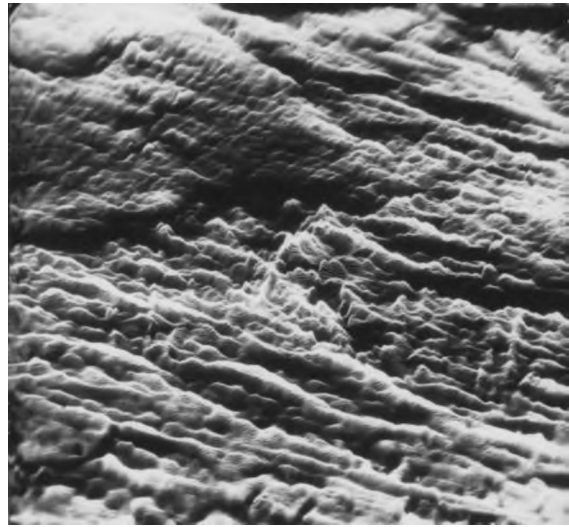
а



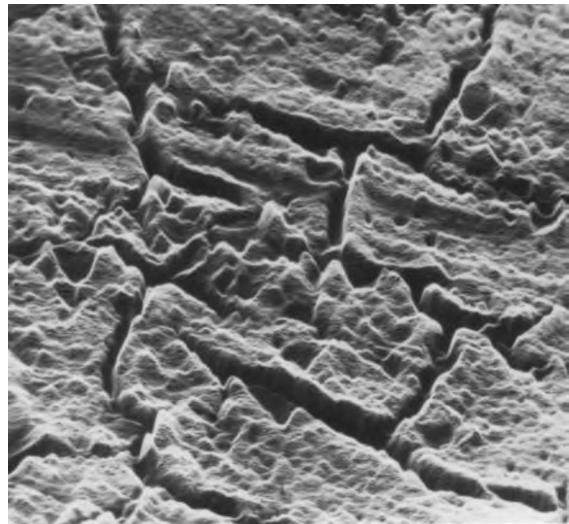
б

T=473 K (г) [x820 (г); x1250 (г)].

3. На рис. 2 д, е, є показані електронні мікросвітлинні поверхонь тертя металевого контртіла із сталі 45 (НВ 1,9 ГПа; Ra₀=0,25 мкм) після 13 год. (S=42 км) ковзання зразка композиту «флубон-310» [ПТФЕ + 10% КВ УТМ-8 + 10% порошку колоїдного графіту С 1 + 10% Al-порошку] за схемою контакту [IV-6]: торець втулки (зовнішній діаметер d₃ = 41 ± 0,1 мм; внутрішній діаметер d_в = 28 ± 0,1 мм; висота h = 22 ± 0,1 мм) – площина контртіла [22]; при параметрах випробувань: p=1,3 МПа; N=915,85 Н; v=0,9 м/с; T=323 K (д); T=423 K (е); T=473 K (є) [x2350 (д); x2100 (е); x1050 (є)].



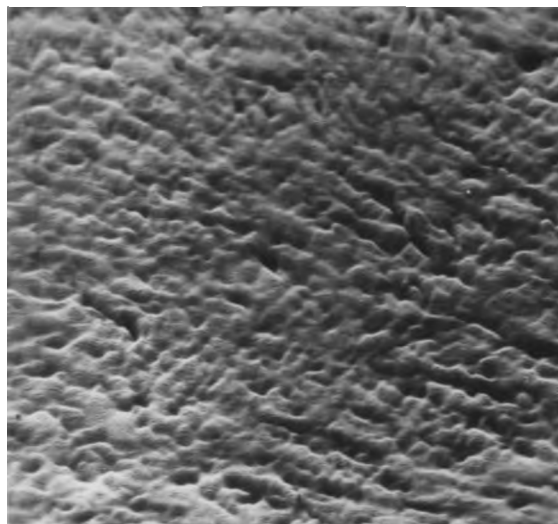
г



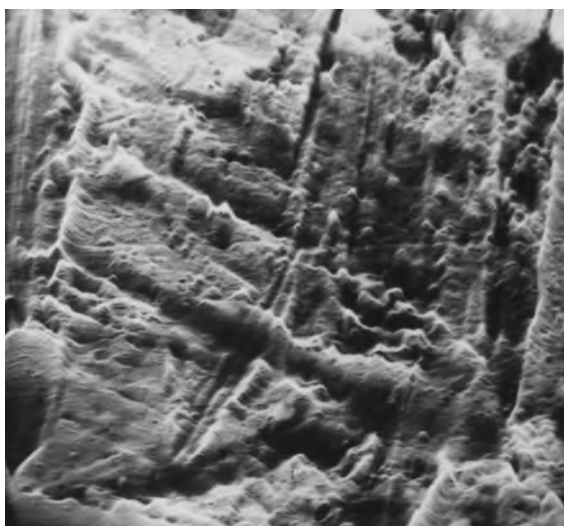
г



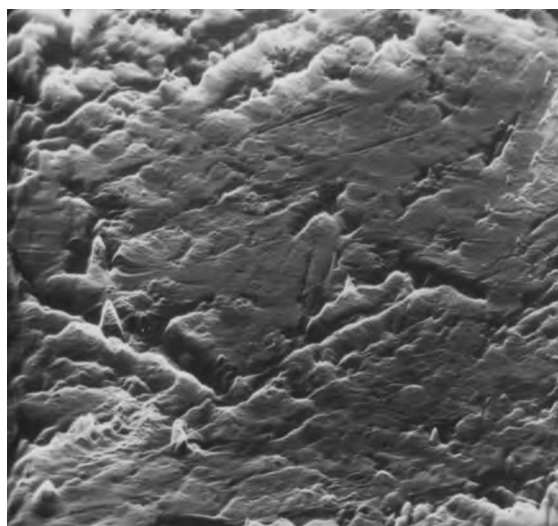
в



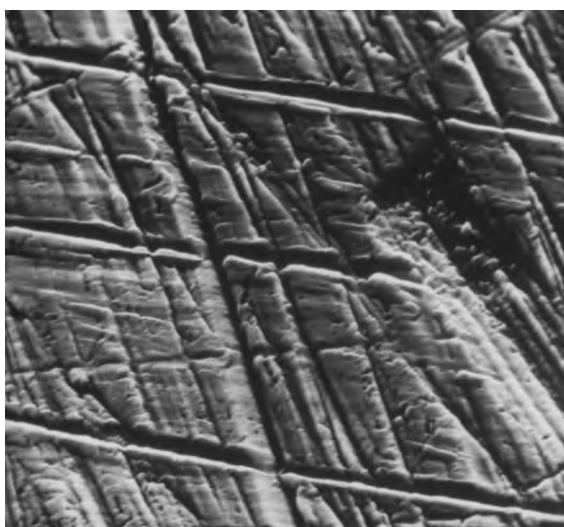
д



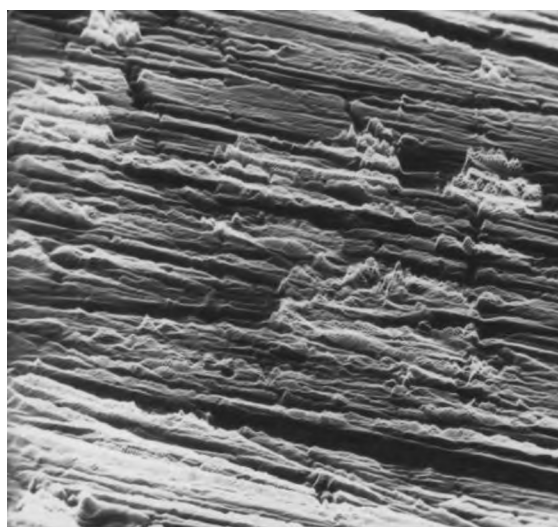
е



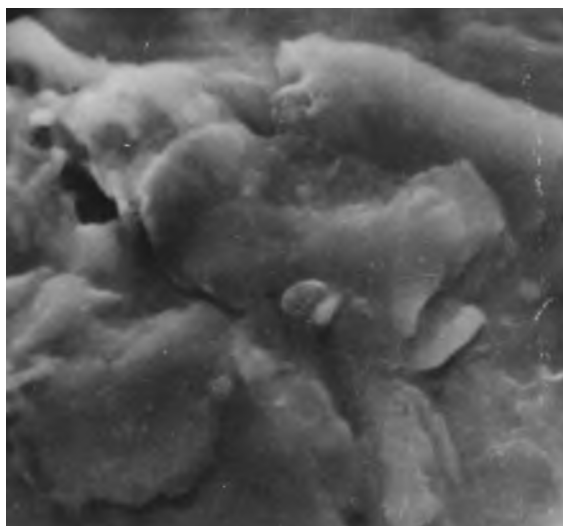
з



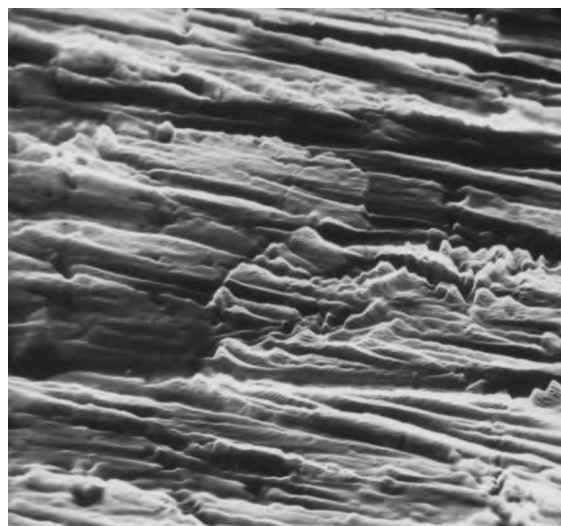
є



к



ж



л

Рис. 2. Електронні мікросвітлинки поверхонь тертя металевого контртіла із сталі 45 під час контакту з полімерними композитами «флубон» при різних схемах контакту, температури та шляху тертя (x 415 – 2850).

4. На рис. 2 ж показана електронна мікросвітлина поверхні тертя металевого контртіла із сталі 45 (HV 4,5 ГПа; Ra₀=0,22 мкм) після 6 год. (S=18 км) ковзання зразка композиту «флубон-К15 ВВ 5» [ПТФЕ + 15% порошку термообробленого коксу + 5% карбонізованого волокна УТМ-8] за схемою контакту [I-1]: торці 3-х пальчиків (діаметер d_i = 10 ± 0,05 мм; висота h = 15 ± 0,1 мм) – площа контртіла [22]; при параметрах випробувань: p=1,3 МПа; N=306,31 Н; N_i=102,10 Н; v=0,9 м/с; T=323 К [x1820].

5. На рис. 2 з, к, л показані електронні мікросвітлинки поверхонь тертя металевого контртіла із сталі 45 (HV 4,5 ГПа; Ra₀=0,22 мкм) після 6 год. (S=18 км) ковзання зразка композиту «флубон-К10 ВВ 10» [ПТФЕ + 10% порошку термообробленого коксу + 10% карбонізованого волокна УТМ-8] за схемою контакту [I-1]: торці 3-х пальчиків (діаметер d_i = 10 ± 0,05 мм; висота h = 15 ± 0,1 мм) – площа контртіла [22]; при параметрах випробувань: p=1,3 МПа; N=306,31 Н; N_i=102,10 Н; v=0,9 м/с; T=428 К (з); T=528 К (к); T=628 К (л) [x415 (з); x850 (к); x1050 (л)].

3. Кореляційна аналіза залежностей питомих інтенсивностей зношування (J) та питомої площі поверхні контртіла: вихідної – перед кожним етапом дослідження $\bar{S}_i = f(S_i)$, де S_i=0, 100, 200, ..., 900 км (i = 0, 1, 2, ..., 9) (а); після кожного етапу дослідження $\bar{S}_{i+1} = f(S_{i+1})$, де S_{i+1}=100, 200, 300, ..., 1000 км (i+1=1, 2, 3, ..., 10) (б) та середньої за етап $\bar{\bar{S}}_{i,i+1} = f(S_{i,i+1})$, де

$$S_{i,i+1} = \frac{0+100}{2}; \quad \frac{100+200}{2}; \quad \frac{200+300}{2}; \dots;$$

$$\frac{900+1000}{2} \text{ км } (i,i+1=0, 0+1; 1, 1+2; 2, 2+3; \dots; 9, 9+10 \text{ (в)}).$$

3.1. Розраховували коефіцієнти кореляції між величинами інтенсивності зношування полімерного композитного матеріалу та питомою площею зазору за формулою [39–42]:

$$r_{J,\bar{S}} = \frac{\sum_{i=1}^N [(J_i - \bar{J})(\bar{S}_i - \bar{\bar{S}})]}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (J_i^2) - N(\bar{J})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^N (\bar{S}_i^2) - N(\bar{\bar{S}})^2}}, \quad (58)$$

де N = 50.

3.2. Висунемо нульову гіпотезу:

$$\left. \begin{array}{l} H_0^0: \rho = 0 \\ \uparrow \\ r_p \neq 0 \end{array} \right\} \quad (59)$$

Про рівність нулю генерального коефіцієнта кореляції (ρ), статистичною оцінкою якого є вибірковий коефіцієнт кореляції (r_p), перевіряли H₀⁰ за трьома критеріями: критичним значенням коефіцієнта кореляції (r_{кр}), критерієм Стюдента (t_T) та за Z-перетворенням Фішера (z_T · σ_z) з рівнями значущості α = 0,05 та α = 0,01.

3.3. Розраховували статистику r_{кр} за Р. Фішера [39]:

$$r_{кр} = \frac{t_T}{\sqrt{f + t_T^2}} = \frac{t_\alpha}{\sqrt{f + t_\alpha^2}}, \quad (60)$$

де $f = N - 2$ – число ступенів вільностей;

$t_T \{q = 1 - \frac{\alpha}{2}; f\} = t_\alpha$ – табличне (теоретичне)

значення критерія Стюдента [39–41].

Критичне значення коефіцієнта кореляцій за [39]:

- $\alpha = 0,05$ $r_\alpha = r_{0,05} = r_{кр.} \{q=1-\alpha/2=0,975; f=N-2=50-2=48\} = 0,2787;$
- $\alpha = 0,01$ $r_\alpha = r_{0,01} = r_{кр.} \{q=1-\alpha/2=0,995; f=N-2=50-2=48\} = 0,3610.$

Розраховані значення коефіцієнтів кореляцій:

- $a_i = 1, 2, 3, 4, 5$ у виразі (43):

$$(a) r_p(a) = 0,68921;$$

$$(б) r_p(б) = 0,42197;$$

$$(в) r_p(в) = 0,67338.$$

- $a_i = 10, 20, 30, 40, 50$ у виразі (43):

$$(a) r_p'(a) = 0,68881;$$

$$(б) r_p'(б) = 0,42197;$$

$$(в) r_p'(в) = 0,67338.$$

3.4. Ступінь лінійности кореляційного зв'язку за критичним значенням коефіцієнта кореляції.

При виконанні нерівності $|r_p| > r_{кр.}$, нульову гіпотезу H_0^0 відкидали на рівні значущости $\alpha = 1 - p$, стверджуючи з ймовірністю p , що між двома змінними існує статистично надійний лінійний зв'язок зі ступенем лінійности:

$$\xi_2(r)_\alpha = \frac{|r_p(j)|}{r_{кр}(\alpha)}, \quad (61)$$

де $j \equiv a, б, в,$

та залишковим ступенем нелінійности у лінійному кореляційному зв'язку:

$$\xi_1(r)_\alpha = \frac{r_{кр}(\alpha)}{|r_p(j)|}, \quad (62)$$

де $j \equiv a, б, в.$

3.5. Ступінь лінійности кореляційного зв'язку за критерієм Стюдента.

Розраховуємо статистику t_p за [42]:

$$t_p = \frac{r_p}{\sqrt{1-r_p^2}} \sqrt{N-2}. \quad (63)$$

Розрахункові значення статистики t_p :

- $a_i = 1, 2, 3, 4, 5$ у виразі (43):

$$(a) t_p(a) = 6,59017;$$

$$(б) t_p(б) = 3,22464;$$

$$(в) t_p(в) = 6,31047.$$

- $a_i = 10, 20, 30, 40, 50$ у виразі (43):

$$(a) t_p'(a) = 6,58289;$$

$$(б) t_p'(б) = 3,22464;$$

$$(в) t_p'(в) = 6,31047.$$

Табличне (теоретичне) значення критерія Стюдента $t_T = t_\alpha$ за [39]:

- $\alpha = 0,05$ $t_\alpha = t_{0,05} = t_T \{q=1-\alpha/2=0,975; f=N-2=50-2=48\} = 2,0110;$
- $\alpha = 0,01$ $t_\alpha = t_{0,01} = t_T \{q=1-\alpha/2=0,995; f=N-2=50-2=48\} = 2,6828.$

При виконанні нерівності $|t_p| > t_T$, нульову гіпотезу H_0^0 відкидали з рівнем значущости $\alpha = 1 - p$, стверджуючи, що з ймовірністю p , між двома змінними існує статистично надійний лінійний зв'язок зі ступенем лінійности кореляційного зв'язку:

$$\xi_2(t)_\alpha = \frac{|t_p(j)|}{t_T(\alpha)}, \quad (64)$$

де $j \equiv a, б, в,$

та залишковим ступенем нелінійности у лінійному кореляційному зв'язку:

$$\xi_1(t)_\alpha = \frac{t_T(\alpha)}{|t_p(j)|}, \quad (65)$$

де $j \equiv a, б, в.$

3.6. Ступінь лінійности кореляційного зв'язку за Z-перетворенням Фішера.

За перетворенням Фішера розраховували статистику Z_p [42]:

$$Z_p = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r_p}{1-r_p}. \quad (66)$$

Розрахункові значення статистики Z_p :

• $a_i = 1, 2, 3, 4, 5$ у виразі (43):

(а) $z_p(a) = 0,84645$;

(б) $z_p(б) = 0,45009$;

(в) $z_p(в) = 0,81690$.

• $a_i = 10, 20, 30, 40, 50$ у виразі (43):

(а) $z_p'(a) = 0,84569$;

(б) $z_p'(б) = 0,45009$;

(в) $z_p'(в) = 0,81690$.

Розраховували добуток $(z_T \cdot \sigma_z)$, де $z_T = z_\alpha \{q=1-\alpha/2\}$ – квантиль нормованого нормального розподілу [42];

$\sigma_z = \frac{1}{\sqrt{N-3}}$ – середнє квадратичне відхилення у нормальному законі розподілу Z [42].

Розрахункові значення добутку $(z_T \cdot \sigma_z)$:

• $\alpha = 0,05$ $Z_{0,975} = Z_T \{q=0,975\} = 1,96$ [42];

• $\alpha = 0,01$ $Z_{0,995} = Z_T \{q=0,995\} = 2,58$ [42];

$$\sigma_z = \frac{1}{\sqrt{N-3}} = \frac{1}{\sqrt{50-3}} = 0,145865;$$

• $\alpha = 0,05$ $(Z_{0,975} \cdot \sigma_z) = 0,28590$;

• $\alpha = 0,01$ $(Z_{0,995} \cdot \sigma_z) = 0,37633$.

У разі виконання нерівності $|z_p| > (z_\alpha \cdot \sigma_z)$, нульову гіпотезу H_0^0 відкидали, стверджуючи, що між двома змінними існує статистично надійний лінійний зв'язок зі ступенем лінійності кореляційного зв'язку:

$$\xi_2(z)_\alpha = \frac{|z_p(j)|}{[z_T(q) \cdot \sigma_z]}, \quad (67)$$

де $q = 1-\alpha$;

$j \equiv a, б, в,$

та залишковим ступенем нелінійности у лінійному кореляційному зв'язку:

$$\xi_1(z)_\alpha = \frac{[z_T(q) \cdot \sigma_z]}{|z_p(j)|}, \quad (68)$$

де $q = 1-\alpha$; $j \equiv a, б, в,$

3.7. У табл. 2 і 3 приведені ступені лінійности (ξ_2) та нелінійности (ξ_1) лінійних кореляційних зв'язків, які визначені за $r_{кр.}$, t , Z -критеріями з рівнем значущости $\alpha = 0,05$ та $\alpha = 0,01$.

4. На рис. 3 і 4 приведені залежності питомої об'ємної інтенсивности зношування полімерного композиту на основі ПТФЕ та карбонізованих волокон («флубон-15(20)») від питомої поверхні (\bar{S}_i) контртіла із сталі 45 до і після тертя та зношування (розрахованої за виразом (43) за коефіцієнтами $a_i = 1, 2, 3, 4, 5$ (рис. 3) та $a_i = 10, 20, 30, 40, 50$ (рис. 4)) за вихідною питомою поверхнею перед кожним етапом випробувань \bar{S}_i (а), за питомою поверхнею після кожного етапу випробувань \bar{S}_{i+1} (б) та середньою питомою поверхнею до і після кожного етапу випробувань $\bar{S}_{i,i+1}$ (в). Для побудови залежностей використаний весь масив інформації табл. 1 ($N = 50$ даних випробувань для вихідної шорсткості поверхні сталі $Ra_0 = 0,085; 0,22; 0,49; 0,85; 1,42$ мкм).

Як видно із підписаних даних до рис. 3 і 4, результати досліджень апроксимуються як поліномами шостого порядку $R_1^2 = 0,6008 - 0,6065$ для випадку (а), $R_1^2 = 0,3869$ – для (б) та $R_1^2 = 0,6240$ – для (в), так і поліномом першого порядку $R_2^2 = 0,4745$; $r_{x,y} = 0,6888 - 0,6892$ для випадку (а), $R_2^2 = 0,1781$; $r_{x,y} = 0,4220$ – для (б) та $R_2^2 = 0,4534$; $r_{x,y} = 0,6734$ – для (в).

Судячи за коефіцієнтами кореляції, лінійна кореляція більше прийнятна у широкому діапазоні питомих поверхонь.

Як видно з рис. 3 і 4, інтенсивність зношування полімерного композиту лінійно зростає із збільшенням питомої поверхні металевого контртіла.

Таблиця 2

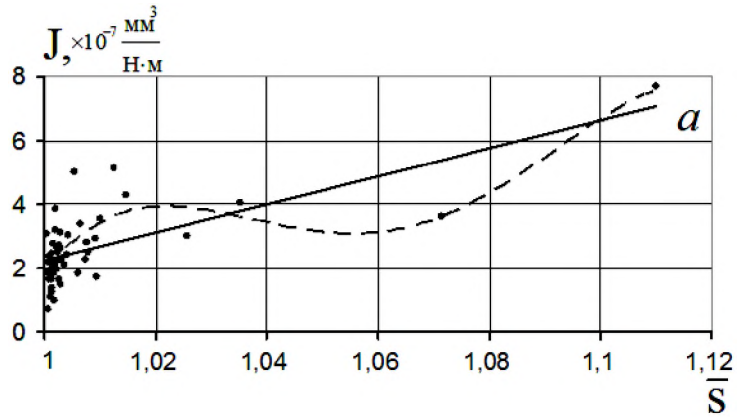
Ступені лінійності $\xi_2(\theta)$ та нелінійності $\xi_1(\theta)$ лінійних кореляційних зв'язків між інтенсивністю зношування (J) та питомою поверхнею контргіла із сталі 45 (\bar{s}_i) (розрахованої за виразом (43) за коефіцієнтами $a_i = 1, 2, 3, 4, 5$), що утворилася під час тертя та зношування полімерного композиту «флубон-15(20)», за критичним значенням коефіцієнта кореляції ($r_{кр.}$), критерієм Стьюдента (t_T) та критерієм Z_T перетворення Фішера ($\theta \equiv r, t, Z$)

Критерій лінійності	(j)	$\alpha=0,05$		$\alpha=0,01$	
		$\xi_2(\theta)$	$\xi_1(\theta)$	$\xi_2(\theta)$	$\xi_1(\theta)$
$r_{кр.}$	а	2,473	0,404	1,909	0,524
	б	1,514	0,660	1,169	0,856
	в	2,416	0,414	1,865	0,536
t_T	а	3,277	0,305	2,456	0,407
	б	1,604	0,624	1,202	0,832
	в	3,138	0,319	2,352	0,425
Z_T	а	2,961	0,338	2,249	0,445
	б	1,574	0,635	1,196	0,836
	в	2,857	0,350	2,171	0,461

Таблиця 3

Ступені лінійності $\xi_2(\theta)$ та нелінійності $\xi_1(\theta)$ лінійних кореляційних зв'язків між інтенсивністю зношування (J) та питомою поверхнею контргіла із сталі 45 (\bar{s}_i) (розрахованої за виразом (43) за коефіцієнтами $a_i = 10, 20, 30, 40, 50$), що утворилася під час тертя та зношування полімерного композиту «флубон-15(20)», за критичним значенням коефіцієнта кореляції ($r_{кр.}$), критерієм Стьюдента (t_T) та критерієм Z_T перетворення Фішера ($\theta \equiv r, t, Z$)

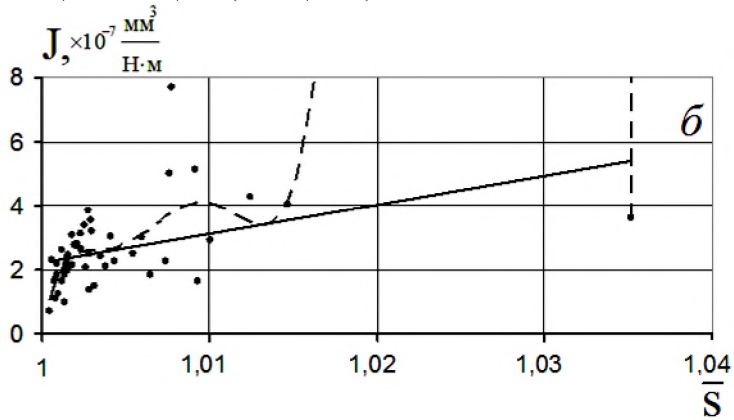
Критерій лінійності	(j)	$\alpha=0,05$		$\alpha=0,01$	
		$\xi_2(\theta)$	$\xi_1(\theta)$	$\xi_2(\theta)$	$\xi_1(\theta)$
$r_{кр.}$	а	2,472	0,405	1,908	0,524
	б	1,514	0,660	1,169	0,856
	в	2,416	0,414	1,865	0,536
t_T	а	3,273	0,306	2,454	0,408
	б	1,604	0,624	1,202	0,832
	в	3,138	0,319	2,352	0,425
Z_T	а	2,958	0,338	2,247	0,445
	б	1,574	0,635	1,196	0,836
	в	2,857	0,350	2,171	0,461



$$y_1 = -305443x^6 + 1E+06x^5 - 2E+06x^4 + 641352x^3 + 196404x^2 - 155710x$$

$$(R^2 = 0,6008)$$

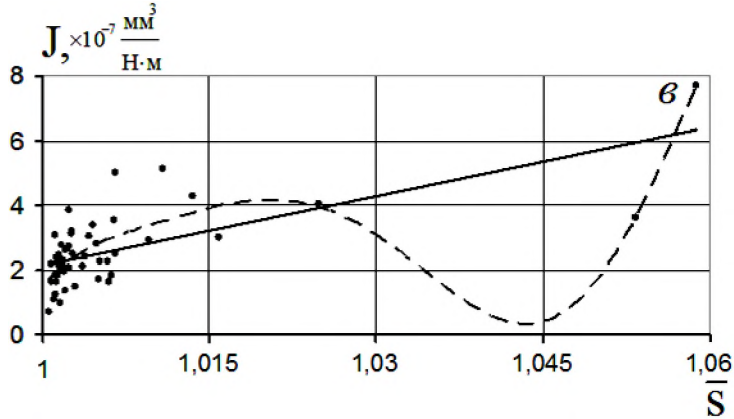
$$y_2 = 44,211x - 41,988 (R^2 = 0,4745)$$



$$y_1 = -1E+13x^6 + 7E+13x^5 - 2E+14x^4 + 3E+14x^3 - 2E+14x^2 + 8E+13x - 1E+13$$

$$(R^2 = 0,3869)$$

$$y_2 = 90,94x - 88,731 (R^2 = 0,1781)$$

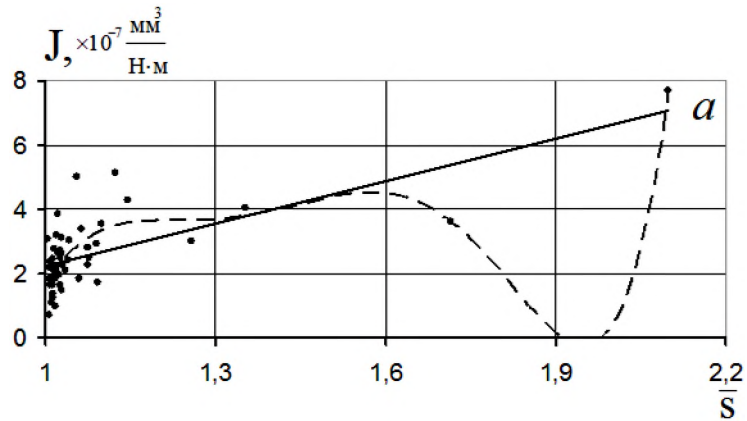


$$y_1 = -1E+10x^6 + 9E+10x^5 - 2E+11x^4 + 3E+11x^3 - 2E+11x^2 + 1E+11x - 2E+10$$

$$(R^2 = 0,624)$$

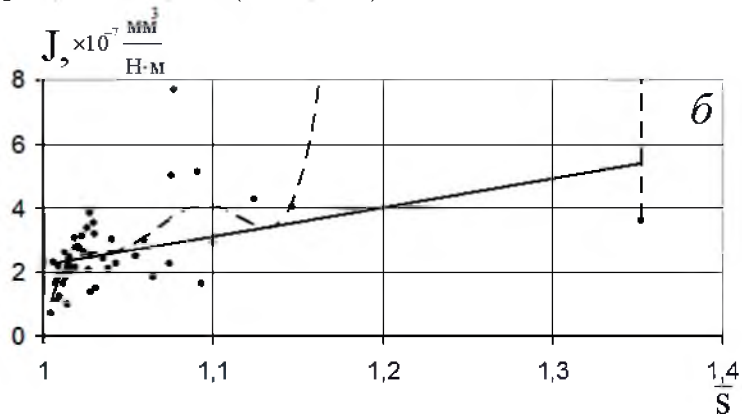
$$y_2 = 71,464x - 69,32 (R^2 = 0,4534)$$

Рис. 3. Залежність питомої об'ємної інтенсивності зношування полімерного композиту «флубон-15(20)» (J_s) від питомої поверхні контртіла із сталі 45 до та під час тертя та зношування (розрахованої за виразом (43) за коефіцієнтами $a_i = 1, 2, 3, 4, 5$), за вихідною питомою поверхнею перед кожним етапом \bar{S}_i (а), за питомою поверхнею після кожного етапу \bar{S}_{i+1} (б) та середньою питомою поверхнею до та після кожного етапу $\bar{S}_{i,i+1}$ (в). Суцільна лінія – лінійна апроксимація, крискована лінія – апроксимація поліномом 6-го порядку.



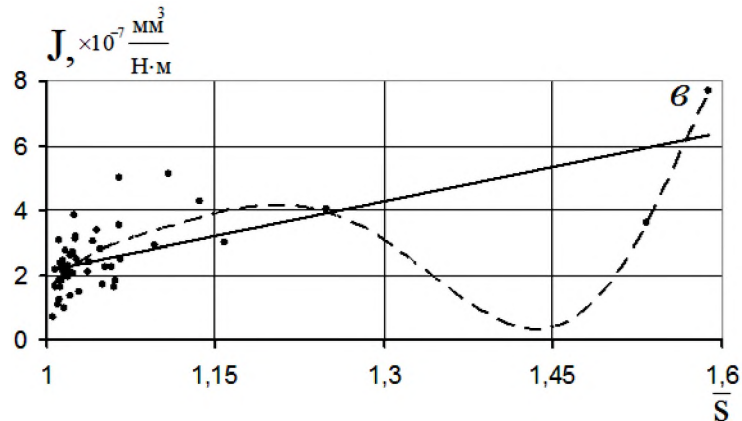
$$y_1 = 203,27x^6 - 1518,2x^5 + 4477,2x^4 - 6521,3x^3 + 4694,1x^2 - 1333,3x \quad (R^2 = 0,6065)$$

$$y_2 = 4,4211x - 2,1985 \quad (R^2 = 0,4745)$$



$$y_1 = -1E+07x^6 + 8E+07x^5 - 2E+08x^4 + 3E+08x^3 - 3E+08x^2 + 1E+08x - 2E+07 \quad (R^2 = 0,3869)$$

$$y_2 = 9,094x - 6,885 \quad (R^2 = 0,1781)$$



$$y_1 = -14206x^6 + 109173x^5 - 346976x^4 + 584014x^3 - 549308x^2 + 273899x - 56593 \quad (R^2 = 0,624)$$

$$y_2 = 7,1464x - 5,0016 \quad (R^2 = 0,4534)$$

Рис. 4. Залежність питомої об'ємної інтенсивності зношування полімерного композиту «флубон-15(20)» (J_i) від питомої поверхні контртіла із сталі 45 до та під час тертя та зношування (розрахованої за виразом (43) за коефіцієнтами $a_i = 10, 20, 30, 40, 50$), за вихідною питомою поверхнею перед кожним етапом \bar{S}_i (а), за питомою поверхнею після кожного етапу \bar{S}_{i+1} (б) та середньою питомою поверхнею до та після кожного етапу $\bar{\bar{S}}_{i,i+1}$ (в). Суцільна лінія – лінійна апроксимація, крижована лінія – апроксимація поліномом 6-го порядку.

Висновки

1. На основі математичного опису анізотропної та ізотропної гавсівських шорстких поверхонь за допомогою випадкового поля отримані математичні вирази для розрахунку питомих площ поверхонь.

2. Показано, що для розрахунку питомої площі поверхні необхідно піддати аналізу функцію помилок, яка входить у математичний вираз для питомої площі поверхні. Представлення функції помилок у вигляді ряду Тейлора з інтегруванням почленно чи методом ітеративного обчислення, ряду з оберненою функцією помилок, через експоненціальний асимптотичний розклад додаткової функції помилок, представлення

інтегралу помилок через гамма-функцію не є продуктивним. Знайдений вираз у вигляді поліному п'ятої степені для розрахунку питомої площі поверхні, за яким надійно з малою помилкою проведені розрахунки.

3. Досліджена зміна питомої площі металеві поверхні від шляху тертя під час зношування полімерного композиту по сталевій поверхні контртіла, при цьому показано, що характер цих змін обумовлений вихідною шорсткістю поверхні.

4. Знайдений надійний лінійний зв'язок між питомою інтенсивністю зношування полімерного композиту та питомою площею поверхні металічного контртіла як вихідною, так й утвореної в процесі тертя та зношування.

Література

1. Сіренко Г.О., Солтис Л.М. Моделі нанометричної та мікрометричної шорсткості поверхні твердих тіл (Огляд) // Фізика і хімія твердого тіла. – 2010. – Т. 11. – № 2. – С. 423 – 446.
2. Семенов Н.Ф., Сиренко Г.А. Описание топографии анизотропных шероховатых поверхностей трения с помощью модели случайного поля: 1. Распределение высот вершин, средняя кривизна в вершинах, градиент поверхности // Трение и износ. – 1980. – Т.1. – №3. – С. 465 – 471.
3. Сіренко Г.О., Семенов Н.Ф., Солтис Л.М. Щільність ймовірностей розподілу висот вершин шорстких поверхонь твердих тіл, змодельованих випадковим полем // Фізика і хімія твердого тіла. – 2010. – Т. 11. – № 3. – С. 768 – 779.
4. Сіренко Г.О., Семенов Н.Ф., Солтис Л.М. Розподіл кривин у вершинах мікро- та нанонерівностей шорстких поверхонь твердих тіл, змодельованих випадковим полем // Фізика і хімія твердого тіла. – 2010. – Т. 11. – № 4. – С. 914 – 927.
5. Семенов Н.Ф., Сіренко Г.О., Солтис Л.М. Градієнт анізотропної нано- та мікрошорсткої поверхні твердого тіла, змодельованої випадковим полем // Фізика і хімія твердого тіла. – 2011. – Т. 12. – № 1. – С. 200 – 207.
6. Найяк П.Р. Применение модели случайного поля для исследования шероховатых поверхностей // Проблемы трения и смазки. – 1971. – Т.93. – Сер. F. – №3. – С. 85-95.
7. Семенов Н.Ф., Сиренко Г.А. Описание топографии анизотропных шероховатых поверхностей трения с помощью модели случайного поля: 2. Полная кривизна, главные кривизны и отношение главных кривизн в вершинах микронеровностей, удельная площадь гауссовской поверхности и удельный объем зазора // Трение и износ. – 1980. – Т.1. – №5. – С. 815 – 823.
8. Семенов Н.Ф., Сиренко Г.А. Описание топографии анизотропных шероховатых поверхностей трения при помощи модели случайного поля: 3. Фактическая площадь контакта, коэффициент трения, термическое сопротивление, адгезионное взаимодействие с учетом деформации в зоне контакта // Трение и износ. – 1980. – Т.1. – №6. – С. 1010 – 1019.
9. Айнбиндер С.Б., Андреева Н.Г., Тюнина Э.Л. Параметри шероховатости контртела, определяющие износостойкость полиэтилена // Трение и износ. – 1981. – Т.11. – №1. – С. 12 – 21.
10. Айнбиндер С.Б., Тюнина Э.Л. Трение полимерных материалов. Расчет коэффициента трения при контакте изотропных поверхностей // Механика полимеров. – 1977. – №2. – С. 241.
11. Айнбиндер С.Б., Тюнина Э.Л. Трение полимерных материалов. Расчет коэффициента трения при контакте поверхностей с неровностями несферической формы // Механика полимеров. – 1977. – №4. – С. 651.
12. Бачинская Н.К. Исследования контактных характеристик шероховатых, сильно анизотропных поверхностей: Дис. ... канд. техн. наук: 05.02.04. – Хмельницкий, 1994. – 166 с.
13. Романишина О.В., Семенов Н.Ф. Предварительное смещение единичного выступа при различных режимах нагружения // Проблемы трибологии. – 1997. – №2. – С. 35–51.
14. Романишина О.В. Исследования предварительного смещения упругого контакта шероховатых изотропных поверхностей: Дис. ... канд. техн. наук: 05.02.04. – Хмельницкий, 1998. – 178 с.
15. Семенов Н.Ф., Калмыкова Т.Ф. Фактическая площадь упругого контакта анизотропной шероховатой поверхности с гладкой // Трение и износ. – 1983. – Т.4. – №3. – С. 467 – 475.

16. Семенюк Н.Ф., Романишина О.В. Предварительное смещение шероховатых изотропных поверхностей. I // Проблемы трибологии. – 1997. – №4. – С. 90 – 101.
17. Семенюк Н.Ф., Романишина О.В. Рассеяние энергии на единичном контакте в режиме предварительного смещения // Проблемы трибологии. – 1997. – №2. – С. 52–56.
18. Семенюк Н.Ф., Сиренко Г.А. Топография и контактные явления анизотропных шероховатых поверхностей трения // Тез. докл. Всесоюз. науч.-техн. конфер. «Трибоника и антифрикционное материаловедение». – Новочеркасск. 27-29.05.1980. – Новочеркасск: Изд-во Новочеркас. политех. ин-та, 1980. – С. 22.
19. Семенюк Н.Ф., Калда Г.С., Соколан Е.С. Использование метода случайных полей при расчете параметров шероховатости, влияющих на тепловые процессы в трущихся телах // Проблемы трибологии. – 1996. – №1.
20. Сиренко Г., Кедик М. Вплив анізотропної шорсткості поверхонь, змодельованих випадковим полем, на контактні явища // Вісник Прикарп. нац. ун-ту ім. Василя Стефаника. Серія Хімія. – 2004. – Вип. IV. – С. 50 – 53.
21. Сиренко Г., Семенюк М. Адгезія з деформацією в зоні контакту анізотропних шорстких поверхонь, змодельованих випадковим полем // Вісник Прикарп. нац. ун-ту ім. Василя Стефаника. Серія Хімія. – 2001. – Вип. I. – С. 66 – 85.
22. Сиренко Г.О. Створення антифрикційних матеріалів на основі порошків термостійких полімерів та вуглецевих волокон: Дис. на здобуття наук. ступеня докт. технічних наук: спец. 05.16.06 – порошкова металургія та композиційні матеріали, Хмельницький технологічний ін-т. – Захищ. 8.12.1997 в Ін-ті проблем матеріалознавства ім. І.М. Францевича НАНУ – Київ, 1997. – 537 с.: іл., табл. – Бібліогр.: с. 432 – 451 (275 назв).
23. Сиренко Г.А. Осложнение контактных явлений поверхности уплотнительных материалов анизотропной микрошероховатости // Тез. докл. 3-го Всесою. совещания по уплотнительной технике. ВНИИкомпрессормаш. – Сумы, 1982. – С. 44 – 45.
24. Свирденко А.И., Калмыкова Т.Ф. Исследование фактической площади фрикционного контакта полимер – металл с помощью акустических колебаний. Сооб. 1 // Трение и износ. – 1980. – Т.1. – №5. – С. 898 – 907.
25. Свирденко А.И., Калмыкова Т.Ф., Холодилов О.В. Исследование фактической площади фрикционного контакта полимер – металл с помощью акустических колебаний. Сооб. 2 // Трение и износ. – 1982. – Т.3. – №5. – С. 808 – 812.
26. Semenjuk N.F. Entwicklung von Berechnungsverfahren der Reibungs und Verschlei.theorie mit Hilfe des Modells stochastischer Felder: Diss. B an der Technisen Hochschule Zittau. –Zittau, 1991. – 160 s.
27. Зимон А.Д. Адгезия жидкости и смачивание. – Москва: Химия, 1974. – 416 с.
28. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Пер. И.Г. Арамановича, А.М. Березмана, И.А. Войнштейна и др. – Москва: Наука, 1978. – 832 с.
29. Математическая энциклопедия / глав. ред. И.М. Виноградов; ред. колл. С.И. Адян, П.С. Александров, Н.С. Бахвалов и др. – Москва: Сов. энциклопедия. – Т. 1, 1977. – 1152 стб., ил. – Т. 2, 1979. – 1104 стб., ил.
30. Abramowitz Milton, Stegun Irene A. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables. – New York: Dover, 1972.
31. Бермант А.Ф. Краткий курс математического анализа. – Москва: Физматиздат, 1963. – 664 с.
32. <http://functions.wolfram.com> / GammaBetaErf / InverseErf / 06 / 01 /.
33. Сиренко Г.А. Антифрикционные карбопластики. – Киев: Техніка, 1985. – 195 с.
34. Сиренко Г.А., Свицерский В.П., Герасимов В.Д., Никшинов В.З. Антифрикционные термостойкие полимеры. Киев: Техніка, 1978. – 246 с.
35. А.с. 1635523 (СССР), МКИ С08J5/16; С08L27/18; С08K13/00. Антифрикционный материал / Г.А. Сиренко, А.Ф. Будник, Г.М. Сорокин, Л.М. Кириченко, В.И. Ящук (Украина). – 1990.
36. А.с. 1467893 (СССР), МКИ В32В3/12; D04C5/00; F16C33/12. Антифрикционный материал / Г.А. Сиренко, Г.М. Сорокин, А.Ф. Будник, А.М. Сиренко (Украина). – 1988.
37. Сиренко Г.О., Шийчук О.В. Математичний опис процесу дроблення вуглецевих волокон для наповнення полімерів // Композиційні полімерні матеріали. – 2003. – XXV. – № 1. – С. 49-53.
38. Сиренко Г.О., Семенюк М.Ф., Солтис Л.М. Методика експериментального дослідження нано- та мікрошорсткості поверхні за допомогою моделі випадкового поля // Вісник Прикарп. нац. ун-ту ім. Василя Стефаника. Серія Хімія. – Вип. X. – 2010. – С. 123-140.
39. Мюллер П., Нойман П., Шторм Р. Таблицы по математической статистике / Пер. с нем. и предисловие В.М. Ивановой.– Москва: Финансы и статистика, 1982. – 272 с.: ил.
40. Зажигаев Л.С. Методы планирования и обработки результатов физического эксперимента / Л.С. Зажигаев, А.А. Кишьян, Ю.И. Романиков. – Москва: Атомиздат, 1978. – 232 с.: ил., табл. – Приложение: с. 144-229 (16 табл.). – Библиогр.: с. 230-231.

41. Бендат Дж.С. Измерение и анализ случайных процессов / Дж.С. Бендат, А.Г. Пирсол; пер. с англ. Г.В. Матушевского, В.Е. Привальского; под ред. И.Н. Коваленко. – Москва: Мир, 1971. – 408 с. – Перевод за изд.: Measurement and analysis of random data / Julius S. Bendat, Allan G. Piersol. – John Wiley and Sons, Inc. – New York-London-Sydney, 1967.: ил., табл. – Предмет. указатель: с. 403-408. – Библиогр.: с. 400-402 (59 наименов.).
42. Степнов М.Н. Статистическая обработка результатов механических испытаний / Михаил Никитович Степнов. – Москва: Машиностроение, 1972. – 232 с. : ил., табл. – Библиогр.: с. 229-230 (36 назв.).

В. Означення ізотропності нано- та мікрошорстких

Вступ

1. Шорсткість поверхні значно впливає на такі фізико-хімічні контактні явища та процеси, як: корозійну та радіаційну стійкість; теплопровідність; змочування поверхні твердих тіл крапельними рідинами і розтопами металів та полімерів; електрохімічне полірування та травлення; конденсація на поверхні та випаровування з поверхні; кипіння; перегін (сублімація) з поверхні та деперегін (конденсація газу або рідини) на поверхню твердого тіла; адсорбція, адгезія, когезія твердих тіл, зчеплення поверхонь; електроконтактні та електрокінетичні явища; електроосмос та електрофорез; розподіл ζ – потенціалу біля поверхонь тощо [1, 2].

2. При описі шорсткої твердої поверхні та розрахунках фактичної площі контакту (ФПК) застосовують моделі поверхні у такому вигляді: набору сфер, розподілених за висотою лінійно або нелінійно [3 – 11]; набору стрижнів, розподілених за висотою лінійно або за законом Гаусса [1, 6, 12 – 14]; набору сфер або циліндрів, рівномірно розподілених на поверхні і таких, що мають однаковий радіус кривини і однакову висоту [15]; конусів [16 – 18]; зрізаних конусів [19]; пірамід [20]; сфер, симетричних клинів, конусів з кутом розхилу $\pi/2$, які мають лінійний, нормальний або Пуассона розподіл за висотою і випадковий розподіл по поверхні [21]; еліпсоїдів [16, 22] тощо. При цьому припускають сталість радіуса або кута при вершині, а закон розподілу висоти нерівностей визначають експериментально за параметрами шорсткості поверхні. Накладання обмежень на форму виступів віддаляє модель від реальної поверхні. Як засвідчила зйомка топографічної мапи поверхні ряду профілів, реальна форма мікровиступів є далекою від правильної [23, 24].

3. Статистична оцінка шорсткості поверхні [2, 25 – 30]: існують способи опису нано- та мікрошорсткої поверхні, що базуються на використанні 24 параметрів шорсткості і хвилястості [31, 32], які визначаються за профілограмами профілю поверхні та зняті в кількох напрямках.

Параметри статистичної оцінки шорстких поверхонь включають:

- середню (або центральну) лінію профілю Z_1 , вибірковою оцінкою якої є середнє арифметичне відхилення профілю поверхні Ra від базової лінії в межах базової довжини L [25];

- квадрат лінії профілю [2], вибірковою оцінкою якої є середнє квадратичне відхилення профілю поверхні Rq [25];

- функцію автокореляції Z_3 , вибірковою оцінкою в межах базової довжини L є $R_1(\tau)$ [2];

- якщо функція $y=f(x)$ є стаціонарною з нормальним розподілом Гаусса (н.з.р.), то вона повністю характеризує висотні якості профілю поверхні. Тоді розподіл ординат за довжиною профілю поверхні підпорядкований н.з.р. Гаусса [12, 33 – 36], а сам розподіл характеризує: щільність ймовірностей нормального розподілу, нормовану щільність ймовірностей нормального розподілу;

- розподіл висот вершин характеризує: теоретична та фізична спектральні щільності (степеневі функції щільності) профілю поверхні. Спектральні щільності $S(\omega)$, що відповідають кореляційним функціям розподілу висот вершин, можна визначити за допомогою перетворення Фур'є [2, 12, 33, 37];

- частотні характеристики спектру [33];

- когерентні характеристики спектру [33];

- інші параметри: параметр нахилу нерівностей [2]; параметр гостроверхости (кривини) вершин нерівностей [2]; параметр напрямку нахилу виступів [2]; ширина розподілу (розмах варіювання) ординат профілю; нормалізована (стандартизована) висота нерівностей профілю поверхні за 10 точками (Rz) [25];

- крокові параметри нерівностей поверхні: середній крок нерівностей [25]; середній крок нерівностей за вершинами; середній крок нерівностей за западинами;

- до структурного параметру нерівностей поверхні відносять [1, 2, 25] стандартизовану відносну опорну довжину профілю t_p на рівні p (від R_{max}) перерізу профіля (y % або відносних

одиниць від базової довжини L) – опорна крива Аббота [1, 38 – 40];

- відомі спроби створення простого критерію оцінки шорсткості, який би у повній мірі характеризував експлуатаційні властивості поверхні [31, 41]. Так, в [42 – 46] запропонований безрозмірний комплекс Δ^* .

4. Теоретико-ймовірнісні моделі.

Одним із найбільш вагомих факторів, який утруднює математичний опис шорсткості поверхонь твердих тіл, є її нерегулярність, що виникає в результаті фізичних та фізико-хімічних способів обробки та формування поверхонь твердих тіл, яка і викликає необхідність застосування для її опису та аналізу теоретико-ймовірнісних методів [47, 48].

Дослідження шорсткої поверхні методами одномірних випадкових функцій [49 – 53] базуються на двох припущеннях:

- статистичні характеристики поверхні приймаються рівними статистичним характеристикам профілограми цієї ж поверхні;
- вершини нерівностей вважають сферичними.

Профілограма вказує на менше число високих піків порівняно з дійсним числом високих вершин на поверхні, тому що профілограма з більшою ймовірністю проходить по схилу виступу поверхні, ніж по вершині. Навіть для грубої поверхні та поверхні, яка отримана різанням з вузькою спектральною функцією, мало ймовірно, що всі нерівності будуть проходити через середню лінію профілю. Як показано в [54], середня висота виступів профілю приблизно на 80% менша середньої висоти виступів поверхні.

Таким чином, перше припущення приводить до помилки при визначенні розподілу висот вершин, кривини і градієнту поверхні: профілограма дає занижені ймовірності високих вершин, кривини у вершинах і середні градієнти.

На цій же підставі крива опорної поверхні доволі неточно визначає площу поверхні на відповідному рівні, тому що певна сума відрізків профілограми являє собою переріз нерівностей поверхні по схилах і, таким чином, непропорційна реальній площі на даній висоті. Ймовірність, що на профілограмі зустрінеться максимальний виступ, дуже мала.

Таким чином, величини параметрів R_{\max} та кривої Аббота опорної поверхні визначаються з малою точністю. Друге припущення допускає рівність кривин у напрямках осей, що приводить до похибок у визначенні середньої кривини, головних кривин і відношення головних кривин у вершині мікронерівностей.

Наприклад, завдання визначення головних кривин і відношення головних кривин у вершинах мікронерівностей вирішується таким чином: в двох перпендикулярних напрямках, які відповідають поздовжній і поперечній шорсткостям поверхні, знімаються профілограми, за ними визначаються радіуси кривин у вершинах мікронерівностей, які і приймаються за головні. Дослідження [55] точности цього методу визначення головних кривин і відношення головних кривин (l) показало, що при відносній похибці при значеннях кута похибки $\psi = 1^\circ, 3^\circ, 5^\circ, 10^\circ$ відношення кривини l міняється від 1 до 0,0004. Так, при $l \geq 0,126$ метод дає задовільні результати. При малому відношенні кривин ($l < 0,126$) із зменшенням l похибка катастрофічно зростає, що веде до непридатності формули для визначення ексцентриситету. Тому, необхідно було знайти метод визначення головних кривин, який не вимагає визначення поздовжнього та поперечного напрямків на поверхні і, таким чином, не був би пов'язаний з кутом похибки ψ .

Для опису статистично однорідної ізотропної поверхні в [56 – 62] при дослідженні поверхні океану при хвилюванні і в [37] при вивченні ізотропної поверхні твердого тіла застосували випадкову функцію для двох змінних $z=z(x,y)$, яка має автокореляційну функцію $R(x,y)$ [37] і допускає її спектральний розклад Фур'є $\Phi(k_x, k_y)$ на гармонійні компоненти k_x, k_y хвильового вектора \vec{K} [37], при цьому характеристики поверхні можна виразити через моменти спектральної щільності (СЩ).

Лонге-Гіггінс отримав співвідношення для щільності піків анізотропної гауссовської поверхні [60, 61], а в [56] розглядає питання про кутові коефіцієнти і градієнти такої поверхні.

Наближені методи отримання характеристик анізотропної поверхні на основі теорій випадкових функцій і з використанням кривої опорної поверхні, а також пов'язані з ними методи розрахунків фактичної площі контакту, оцінки триботехнічних властивостей контактуючої поверхні узагальнені в [22, 31].

Найяк [37] отримав розподіл висот вершин, середню кривину у вершині та градієнт ізотропної поверхні, а також висоти та кривини піків і кутовий коефіцієнт профілограми цієї ж поверхні.

Взагалі, апроксимація $R(x,y)$ функціями визначеного виду [49, 52, 63 – 66] веде до згрублення випадкового процесу і може бути джерелом похибок при визначенні спектральної щільності розподілу висот вершин. Необгрунтованість подібного підходу показана в [37].

Використовуючи модель випадкового поля шорсткої поверхні і не пов'язуючи її з АКФ якогось певного виду, не використовуючи припущення, які прийняті для опису поверхні одномірними випадковими функціями або поверхні з сильною анізотропією і орієнтованими мікронерівностями, а також не припускаючи певної форми нерівностей, в [54, 55, 67–71] отримано співвідношення для законів розподілення та їх основних параметрів анізотропних поверхонь: щільності ймовірності висот вершин, середньої кривини у вершині мікронерівностей, градієнту поверхні, повної кривини у вершині, головних кривин і співвідношення головних кривин у вершині мікронерівностей анізотропної поверхні, а також для середньої висоти виступів шорсткої поверхні і щільності плям контакту при сполученні шорсткої поверхні з рівною.

При цьому, з опису топографії анізотропної поверхні як частинний випадок витікали результати для ізотропної поверхні, які для щільності ймовірності висот вершин, середньої кривини мікронерівностей поверхні у вершині та градієнта, приведені до раніше відомих результатів [37], крім того, дослідження фактичної площини контакту за методами опорних кривих і випадкового поля показало, що запропонована в [68] модель опису анізотропної поверхні випадковим полем дає розрахунок ФПК близький до експериментального [72], що дозволяє прийняти цю модель у подальших теоретичних дослідженнях контактних явищ на шорстких поверхнях твердих тіл, як таку, що описує анізотропну шорстку поверхню з високою надійністю та точністю. Тому, необхідно дослідити ізотропність шорсткої поверхні твердих тіл.

І. Теоретична частина

Існує дві точки зору на поняття ізотропності поверхонь: 1) при статистичній оцінці шорстку ізотропну поверхню визначають як поверхню, яка змодельована у вигляді набору сфер [3–11]; 2) у низці робіт [47, 73] розуміють ізотропність в тому смислі, як вона визначена в теорії випадкового поля.

У теорії випадкового поля $z=f(x, y)$ ізотропним прийнято називати поле, автокореляційна функція $\mathbf{R}(x, y)$ [37, 68, 74, 75] якого залежить лише від змінної $r=(x^2+y^2)^{1/2}$ і не залежить від полярного кута $\theta=\arctg(y/x)$, а спектральна щільність $\Phi(k_x, k_y)$ [37, 68, 74, 75] залежить тільки від змінної $\mathbf{k} \equiv \left| \vec{k} \right|$ [29].

За теорією випадкового поля, ізотропна поверхня уявляє собою поверхню, яка змодельована виступами, що відрізняються

головними кривинами у вершинах нано- та мікронерівностей (наприклад, цю умову задовольняє еліпсоїдна модель), причому розподіл кута повороту виступів є рівномірним [29]. При такому означенні ізотропності на форму нано- та мікронерівностей не накладаються *a priori* певні обмеження.

Ці два означення ізотропності не є тотожними. Поверхня може бути змодельована набором сфер, а $\mathbf{R}(x, y)$ при цьому буде залежати від полярного кута θ .

Нехай $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2$ – головні кривини, а $l=\mathbf{H}_1/\mathbf{H}_2$ – співвідношення головних кривин [55]. Із означення ізотропності за ідеальною сферичною моделлю витікає, що для ізотропної поверхні головні кривини та співвідношення головних кривин дорівнюють:

$$E\mathbf{H}_1(\varepsilon'_1)=E\mathbf{H}_2(\varepsilon'_1); \quad E l(\varepsilon'_1)=1, \quad (1)$$

де E – знак математичного сподівання;

$$\varepsilon'_1 = \frac{z}{\sigma} = \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{m_{00}}} - \text{безрозмірна зведена (при-}$$

ведена) висота;

m_{00} – момент нульового порядку спектральної щільності анізотропної поверхні при $p=0, q=0$ [37, 61, 68];

$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$, де σ^2 – дисперсія висот вершин нерівностей.

Визначимо ці величини для анізотропної поверхні, яка описується випадковим полем, а потім запишемо отримані співвідношення для ізотропної поверхні.

Нехай $\mathbf{H}_1 \geq \mathbf{H}_2$. У вершинах мікронерівностей будемо мати [55]:

- для середньої кривини:

$$\bar{H} = -m_{22}^{1/2} t; \quad (2)$$

- для повної кривини:

$$K = m_{22} (t^2 - \rho^2), \quad (3)$$

де m_{22} – момент четвертого порядку спектральної щільності анізотропної поверхні при $p=2, q=2$ [37, 61, 68];

t, ρ, ϕ – змінні, які пов'язані з $\varepsilon_4 = \partial^2 z / \partial x^2$;

$\varepsilon_5 = \partial^2 z / \partial x \partial y$; $\varepsilon_6 = \partial^2 z / \partial y^2$ співвідношеннями [55, 68, 75].

Використовуючи відоме [55, 76, 77] співвідношення між повною K , середньою \bar{H} і головними кривинами $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2$ для вершин нано- та мікронерівностей отримаємо [55]:

$$\bullet H_1 = \bar{H} - \sqrt{\bar{H}^2 - K} = \bar{H} - m_{22}^{1/2} \rho = -m_{22}^{1/2} t - m_{22}^{1/2} \rho; \quad (4)$$

$$\bullet H_2 = \bar{H} + \sqrt{\bar{H}^2 - K} = \bar{H} + m_{22}^{1/2} \rho = -m_{22}^{1/2} t + m_{22}^{1/2} \rho; \quad (5)$$

$$\bullet l = \frac{H_1}{H_2} = \frac{-t - \rho}{-t + \rho} = \frac{t + \rho}{t - \rho}. \quad (6)$$

Математичні сподівання головних кривин і відношення головних кривин анізотропної поверхні у вершині нано- та мікронерівностей висотою ε'_1 визначається так [55, 76, 77]:

$$\bullet EH_1(\varepsilon'_1) = E\bar{H}(\varepsilon'_1) - \frac{\iiint_{V_1} \rho p(\varepsilon'_1, t, \rho, \varphi) dt d\rho d\varphi}{\iiint_{V_1} p(\varepsilon'_1, t, \rho, \varphi) dt d\rho d\varphi}; \quad (7)$$

$$\bullet EH_2(\varepsilon'_1) = E\bar{H}(\varepsilon'_1) + \frac{\iiint_{V_1} \rho p(\varepsilon'_1, t, \rho, \varphi) dt d\rho d\varphi}{\iiint_{V_1} p(\varepsilon'_1, t, \rho, \varphi) dt d\rho d\varphi}; \quad (8)$$

$$\bullet EI(\varepsilon'_1) = \frac{\iiint_{V_1} \left(\frac{t + \rho}{t - \rho} \right) p(\varepsilon'_1, t, \rho, \varphi) dt d\rho d\varphi}{\iiint_{V_1} p(\varepsilon'_1, t, \rho, \varphi) dt d\rho d\varphi}, \quad (9)$$

де об'єм (простір) інтегрування $V_1(t, \rho, \varphi)$ визначається нерівностями [68, 75]:

$$\begin{cases} t < 0 \\ 0 \leq \rho \leq -t \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases}$$

Або ці величини визначаються так [55]:

$$\bullet EH_1(\varepsilon'_1) = E\bar{H}(\varepsilon'_1) - m_{22}^{1/2} \frac{T(\varepsilon'_1)}{p(\varepsilon'_1)}; \quad (10)$$

$$\bullet EH_2(\varepsilon'_1) = E\bar{H}(\varepsilon'_1) + m_{22}^{1/2} \frac{T(\varepsilon'_1)}{p(\varepsilon'_1)}; \quad (11)$$

$$\bullet EI(\varepsilon'_1) = \frac{W(\varepsilon'_1)}{p(\varepsilon'_1)}, \quad (12)$$

де функції $T(\varepsilon'_1)$ і $W(\varepsilon'_1)$ визначаються таким чином [55]:

$$\bullet T(\varepsilon'_1) = \frac{m_{00}^{1/2} m_{22}^{5/2}}{4\pi^3 \Delta^{1/2} D} \exp\left[-\frac{\Delta_2 m_{00}}{2\Delta_{12}} (\varepsilon'_1)^2\right] \times \int_{-\infty}^0 \exp(A_1 t^2 + A_7 \varepsilon'_1 t) dt \int_0^{-t} (t^2 - \rho^2) \rho^2 d\rho \times \int_0^{2\pi} \exp\left[A_4 \rho^2 \cos^2 \varphi + A_5 \rho^2 \cos \varphi \sin \varphi + A_6 \rho^2 \sin^2 \varphi + (A_2 t + A_8 \varepsilon'_1) \rho \cos \varphi + (A_3 t + A_9 \varepsilon'_1) \rho \sin \varphi\right] d\varphi; \quad (13)$$

$$\bullet W(\varepsilon'_1) = \frac{m_{00}^{1/2} m_{22}^{5/2}}{4\pi^3 \Delta^{1/2} D} \exp\left[-\frac{\Delta_2 m_{00}}{2\Delta_{12}} (\varepsilon'_1)^2\right] \times \int_{-\infty}^0 \exp(A_1 t^2 + A_7 \varepsilon'_1 t) dt \int_0^{-t} (t + \rho)^2 \rho d\rho \times \int_0^{2\pi} \exp\left[A_4 \rho^2 \cos^2 \varphi + A_5 \rho^2 \cos \varphi \sin \varphi + A_6 \rho^2 \sin^2 \varphi + (A_2 t + A_8 \varepsilon'_1) \rho \cos \varphi + (A_3 t + A_9 \varepsilon'_1) \rho \sin \varphi\right] d\varphi, \quad (14)$$

де $\Delta, \Delta_{12}, \Delta_1, \dots, \Delta_9$ – визначники [68, 75];

D – щільність вершин [37, 60];

A_1, \dots, A_9 – вирази [68, 75].

Для ізотропної поверхні вирази (13) і (14) набувають такого вигляду [55]:

$$\bullet T(\varepsilon'_1) = \frac{(3C_1)^{1/2}}{(2\pi)^2} \exp\left[-C_1 (\varepsilon'_1)^2\right] \times \int_{-\infty}^0 \exp\left[-\frac{1}{2} (C_1 t + C_2 \varepsilon'_1 t)\right] dt \times \int_0^{-t} (t^2 - \rho^2) \rho^2 d\rho \int_0^{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2} \rho^2\right) d\varphi; \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \bullet W(\varepsilon'_1) &= \frac{(3C_1)^{1/2}}{(2\pi)^2} \exp[-C_1(\varepsilon'_1)^2] \times \\ &\times \int_{-\infty}^0 \exp\left[-\frac{1}{2}(C_1 t + C_2 \varepsilon'_1 t)\right] dt \times \\ &\times \int_0^{-t} (t + \rho)^2 \rho d\rho \int_0^{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2}\rho^2\right) d\varphi. \end{aligned} \quad (16)$$

Після інтегрування (15), (16) отримаємо:

$$\bullet T(\varepsilon'_1) = \frac{\sqrt{3C_1}}{2\pi} \left[\sqrt{\frac{\pi}{2}} J_4 + 3J_3 \right]; \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \bullet W(\varepsilon'_1) &= \frac{\sqrt{3C_1}}{2\pi} \left[\left(\frac{1}{C_1} + 2 \right) J_0 + \right. \\ &\left. + \varepsilon'_1 \sqrt{\frac{3}{\alpha}} J_1 - 2J_2 + \sqrt{2\pi} J_5 \right], \end{aligned} \quad (18)$$

де інтеграли J_0, J_1, \dots, J_5 [37, 55, 68, 75]:

$$\bullet J_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2C_1}} \exp\left[-\frac{(\varepsilon'_1)^2}{2}\right] (1 + \operatorname{erf}\beta); \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \bullet J_1 &= \frac{1}{C_1} \left\{ \exp[-C_1(\varepsilon'_1)^2] + \right. \\ &\left. + \beta\sqrt{\pi} \exp\left[-\frac{(\varepsilon'_1)^2}{2}\right] (1 + \operatorname{erf}\beta) \right\}; \end{aligned} \quad (20)$$

$$\bullet J_2 = \sqrt{\frac{\pi}{2(1+C_1)}} \exp\left[-\frac{\alpha(\varepsilon'_1)^2}{2(\alpha-1)}\right] (1 + \operatorname{erf}\gamma); \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \bullet J_3 &= \frac{2}{C_1^2} \left\{ \exp[-C_1(\varepsilon'_1)^2] (1 + \beta^2) + \right. \\ &\left. + \sqrt{\pi} \exp\left[-\frac{(\varepsilon'_1)^2}{2}\right] (1 + \operatorname{erf}\beta) (\beta^3 + 3\beta/2) \right\}; \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \bullet J_4 &= \exp[-C_1(\varepsilon'_1)^2] \int_{-\infty}^0 (t^2 - 3) \times \\ &\times \operatorname{erf}\left(-\frac{t}{\sqrt{2}}\right) \exp\left[-\frac{1}{2}(C_1 t^2 + C_2 \varepsilon'_1 t)\right] dt; \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \bullet J_5 &= \exp[-C_1(\varepsilon'_1)^2] \int_{-\infty}^0 t \cdot \operatorname{erf}\left(-\frac{t}{\sqrt{2}}\right) \times \\ &\times \exp\left[-\frac{1}{2}(C_1 t^2 + C_2 \varepsilon'_1 t)\right] dt, \end{aligned} \quad (24)$$

де $C_1 = \alpha/(2\alpha - 3)$; $\alpha = m_0 m_4 / m_2^2$; $C_2 = C_1 \sqrt{\frac{12}{\alpha}}$.

Виходячи з виразів (2) – (18) та виразів для $p(\varepsilon'_1)$ і $E\bar{H}(\varepsilon'_1)$ для ізотропної поверхні [55, 68, 75] вирази для математичного сподівання головних кривин і співвідношення головних кривин у вершині нано- та мікронервностей ізотропної поверхні будуть мати вигляд [55]:

$$\begin{aligned} \bullet EH_1(\varepsilon'_1) &= \sqrt{\frac{m_4}{3}} \times \\ &\times \left[\frac{\frac{\varepsilon'_1}{C_1} \sqrt{\frac{3}{\alpha}} J_0 + \left(\frac{2}{C_1} + \frac{3(\varepsilon'_1)^2}{\alpha} - 2 \right) J_1 - J_3 - \sqrt{\frac{\pi}{2}} J_4}{\left(\frac{1}{C_1} - 2 \right) J_0 + \varepsilon'_1 \sqrt{\frac{3}{\alpha}} J_1 + 2J_2} \right]; \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \bullet EH_2(\varepsilon'_1) &= \sqrt{\frac{m_4}{3}} \times \\ &\times \left[\frac{\frac{\varepsilon'_1}{C_1} \sqrt{\frac{3}{\alpha}} J_0 + \left(\frac{2}{C_1} + \frac{3(\varepsilon'_1)^2}{\alpha} - 2 \right) J_1 + 5J_3 + \sqrt{\frac{\pi}{2}} J_4}{\left(\frac{1}{C_1} - 2 \right) J_0 + \varepsilon'_1 \sqrt{\frac{3}{\alpha}} J_1 + 2J_2} \right]; \end{aligned} \quad (26)$$

$$\bullet EI(\varepsilon'_1) = \frac{\left(\frac{1}{C_1} + 2 \right) J_0 + \varepsilon'_1 \sqrt{\frac{3}{\alpha}} J_1 - 2J_2 + \sqrt{2\pi} J_5}{\left(\frac{1}{C_1} - 2 \right) J_0 + \varepsilon'_1 \sqrt{\frac{3}{\alpha}} J_1 - 2J_2}, \quad (27)$$

де $\mathbf{m}_4 = 3\mathbf{m}_{22} = \mathbf{m}_{40} = \mathbf{m}_{04}$ – момент четвертого порядку спектральної щільності ізотропної поверхні [37, 75].

Визначимо ці величини для ізотропної поверхні при $\alpha \rightarrow \infty$ за (25) – (27), тоді інтеграли J_4, J_5 приймають вигляд [55]:

$$\bullet J_4 = \exp\left[-\frac{1}{2}(\varepsilon'_1)^2\right] \int_{-\infty}^0 (t^2 - 3) \operatorname{erf}\left(-\frac{t}{\sqrt{2}}\right) \times \\ \times \exp\left(-\frac{1}{4}t^2\right) dt = \exp\left[-\frac{1}{2}(\varepsilon'_1)^2\right] \times \quad (28) \\ \times 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{2}{3} - \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arccctg} \sqrt{2}\right);$$

$$\bullet J_5 = \exp\left[-\frac{1}{2}(\varepsilon'_1)^2\right] \int_{-\infty}^0 t \cdot \operatorname{erf}\left(-\frac{t}{\sqrt{2}}\right) \times \quad (29) \\ \times \exp\left(-\frac{1}{4}t^2\right) dt = -2\sqrt{\frac{2}{3}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\varepsilon'_1)^2\right].$$

Формули для розрахунку математичного сподівання безрозмірних головних кривин і співвідношення головних кривин для ізотропної поверхні набувають вигляду [55]:

• при $\alpha \rightarrow \infty$:

$$\frac{EH_1(\varepsilon'_1)}{\sqrt{m_4}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{arccctg} \sqrt{2} = \quad (30) \\ = 0,944140745;$$

$$\frac{EH_2(\varepsilon'_1)}{\sqrt{m_4}} = \frac{13}{3\sqrt{\pi}} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{arccctg} \sqrt{2} = \quad (31) \\ = 2,064870367,$$

за (30), (31)

$$El(\varepsilon'_1) = \frac{EH_1(\varepsilon'_1)}{EH_2(\varepsilon'_1)} = 0,457239718 \approx \quad (32) \\ \approx 0,457... < 1;$$

• при $\alpha = 1,5$ співвідношення головних кривин дорівнює:

$$El(\varepsilon'_1) = 0,333(3)... < 1. \quad (33)$$

Крім того, проведемо оцінку математичного сподівання $El(\varepsilon'_1)$ за двома формулами:

1) замінюючи у виразах (4) – (6) величини \mathbf{H}_1 , \mathbf{H}_2 , \mathbf{K} їх математичними сподіваннями, тоді при $\alpha \rightarrow \infty$ будемо мати [55]:

$$El(\varepsilon'_1) \approx \frac{E\bar{H}(\varepsilon'_1) - \sqrt{[E\bar{H}(\varepsilon'_1)]^2 - EK(\varepsilon'_1)}}{E\bar{H}(\varepsilon'_1) + \sqrt{[E\bar{H}(\varepsilon'_1)]^2 - EK(\varepsilon'_1)}} \approx \quad (34) \\ \approx 0,600 < 1.$$

2) замінімо в (7) величини \mathbf{H}_1 і \mathbf{H}_2 їх математичними сподіваннями $EH_1(\varepsilon'_1)$ (10) і $EH_2(\varepsilon'_1)$ (11), тоді при $\alpha \rightarrow \infty$ будемо мати:

$$El(\varepsilon'_1) \approx \frac{EH_1(\varepsilon'_1)}{EH_2(\varepsilon'_1)} \approx 0,458... < 1. \quad (35)$$

Таким чином, ідеальна сферична модель ізотропної поверхні, передбачаючи, що всі вершини нано- та мікроступів мають вигляд сфер, приводить до співвідношення головних кривин $El(\varepsilon'_1) = 1$, а для ізотропної поверхні, змодельованої випадковим полем, отримуємо $El(\varepsilon'_1) = (0,333 - 0,600) < 1$ (рис. 1).

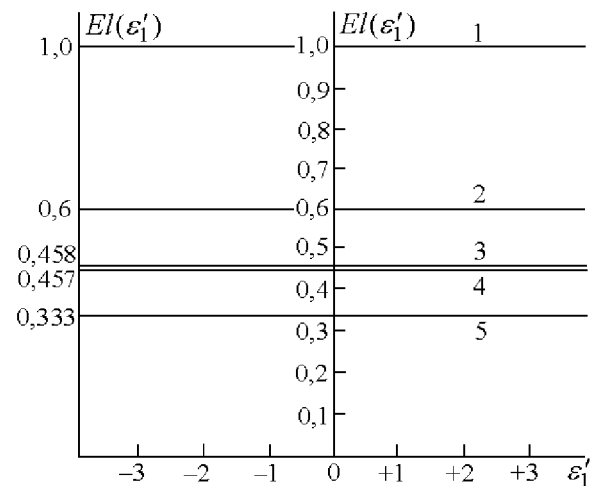


Рис. 1. Залежність математичного сподівання співвідношення головних кривин у вершині від безрозмірної зведеної висоти нано- та мікронерівностей ізотропної поверхні твердого тіла, описаної ідеальною сферичною моделлю (1) та моделлю випадкового поля (2-5) при широкосмужності спектру $\alpha \rightarrow \infty$ (2-4) та $\alpha = 1,5$ (5).

Ці результати доводять, що в моделі шорсткої поверхні у вигляді ізотропного випадкового поля немає місця сферичній моделі. У той же час теорія випадкового поля не відкидає того положення, що окремі вершини ізотропної поверхні можуть мати вигляд сфер, але показує, що всі вершини одночасно не можуть бути сферами.

Величину $El(\varepsilon'_1)$ можна отримати осередненням величин $l_i(\varepsilon'_1)$, де $l_i(\varepsilon'_1)$ – співвідношення головних кривин в i -тій вершині висотою ε'_{1i} . Ясно, що $El(\varepsilon'_1)$ дорівнює одиниці тільки в тому випадку, коли всі $l_i(\varepsilon'_1) = 1$. Так як $El(\varepsilon'_1) < 1$, то ізотропна поверхня, що змодельована випадковим полем, має вершини,

для яких $l_i(\varepsilon'_i) < 1$, тобто має місце наявність несферичних виступів.

Висновки

Ідеальна сферична модель в загальному випадку не має місця під час моделювання нано-

та мікросорсткої поверхні ізотропним випадковим полем, бо завжди, поруч зі сферичними виступами, має місце наявність несферичних виступів. Цей факт необхідно враховувати під час опису фізико-хімічних явищ і процесів, які відбуваються на нано- та мікросорстких поверхнях твердих тіл.

Література

1. **Крагельський І.В.** Трение и износ. – М.: Машиностроение, 1968. – 480 с.
2. **Мур Д.** Трения и смазка эластомеров / Пер. с англ. Г.И. Бродского. – М.: Химия, 1977. – 264 с.
3. **Демкин Н.Б.** Геометрия и механика контактирования шероховатых тел // Теория трения, износа и проблемы стандартизации. – Брянск: Брянское книжное изд-во, 1978. – С. 274.
4. **Демкин Н.Б.** Контактное взаимодействие шероховатых поверхностей. – М.: Наука, 1970. – 227 с.
5. **Журавлев В.А.** К вопросу о теоретическом обосновании закона Амонтона-Кулона для трения несмазанных поверхностей // Журнал технической физики. – 1940. – Т.10. – Вып. 17. – С.1447.
6. **Крагельський І.В., Добычин М.Н., Комбалов В.С.** Основы расчетов на трение и износ. – М.: Машиностроение, 1977. – 526 с.
7. **Archard J.E.** Elastic Deformation and the Contact of Surfaces // Nature. – 1951. – Vol.192. – P. 918.
8. **Archard J.E.** Elastic Deformation and the laws of friction // Proc. Roy. Soc. – 1957. – Ser. A. – Vol.243. – N1233. – P. 190.
9. **Greenwood J.A., Williamson J.B.P.** Contact of Nominally Flat Surfaces // Proceedings of the Royal Society. – 1966. – Vol.295. – Ser. A., N1442 – P. 300.
10. **Longe A.S., Howell H.G.** Friction of Elastic Solids // The Proceedings of the Physical Society. – 1954. – Vol.67, N410. – P. 89.
11. **Schallamach A.** The Load Dependence of Rubber Friction // The Proceedings of the Physical Society. – 1952. – Vol.65B. – P. 647.
12. **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике для научных работников и инженеров / Пер. И.Г. Арамановича, А.М. Березмана, И.А. Войнштейна и др. – М.: Наука, 1978. – 832 с.
13. **Крагельський І.В.** Влияние различных параметров на величину коэффициента трения несмазанных поверхностей // Журнал технической физики. – 1943. – Т.13. – Вып. 13. – 145 с.
14. **Крагельський І.В.** Трение покоя двух шероховатых поверхностей // Известия АН СССР, ОТН. – 1948. – №10. – С. 1621.
15. **Rubinstein C.** A general theory of the surface friction of solids // Proc. Phys. Soc. – 1956. – Sect. B, Vol.69. – P. 921.
16. **Площадь фактического контакта сопряженных поверхностей / П.Е. Дьяченко, Н.Н. Толкачева, Г.А. Андреева, Т.М. Карпова.** – М.: Изд-во АН СССР, 1963. – 95 с.
17. **Joshimoto G., Tsukizoe T.** On the Mechanism of wear between Metal Surfaces // Wear. – 1958. – Vol.1, N6. – P. 472.
18. **Kubo M., Pkelnik J.** An analysis of micro-geometrical isotropy for random surfaces structures // Ann. of CIRP. – 1968. – Vol.16. – P. 235.
19. **Bowden F.P., Tabor D.** The friction and lubrication of solids // Clarendon Press. – Oxford. – 1954. – P. 372.
20. **Hisacado T.** On the mechanism of Contact between Solid Surfaces (4th report). Surface Roughness Effects on Dry Friction // Bull. ISME. – 1970. – Vol.13, N55 – P. 129.
21. **Ling F.F.** On Asperity Distributions of Metallic Surfaces // J. of Appl. Physics. – 1958. – Vol.29, N8. – P. 1168.
22. **Айнбиндер С.Б., Тюнина Э.Л.** Введение в теорию полимеров. – Рига: Зинатне, 1978. – 224 с.
23. **Lubricant films in rolling contact of rough surfaces / T.E. Tallian, Y.P. Chui, D.F. Huttenlocher, J.S. Kamenshine, L.B. Sibley, N.E. Sindlinger** // Transactions of the ASLE. – 1964. – Vol.7. – P. 109.
24. **Thomas T.R.** Recent advances in the measurement and analysis of surface micro-geometry // Wear. – 1975. – Vol.33, N2. – P. 205.
25. **Дунин-Барковский И.В., Карташова А.Н.** Измерение и анализ шероховатости, волнистости и некруглости поверхности. – М.: Машиностроение, 1978. – 232 с.
26. **Назаров Ю.Ф., Шкилько А.М., Тихоненко В.В., Компанец И.В.** Методы исследования и контроля шероховатости поверхности металлов и сплавов // ФІП. – 2007. – Т.5. – №3-4. – С. 207 – 216.
27. **Прилуцкий В.А.** Технологические методы снижения волнистости поверхностей. – М.: Машиностроение, 1978. – 136 с.

28. **Трение, изнашивание и смазки:** Справочник в 2-х кн. / Под ред. И.В. Крагельского, В.В. Алисина. – М.: Машиностроение, 1978. – Кн. 1: 400 с. – 1979. – Кн. 2: 358 с.
29. **Хусу А.П., Витгенберг Ю.Р., Пальмов В.А.** Шероховатость поверхностей. Теоретико-вероятностный подход. – М.: Наука, 1975. – 344 с.
30. **Friction, Wear, Lubrication.** Tribology handbook. Vol. 3 / Edited by I.V. Kragelsky, V.V. Alisin. Mir Publishers, Moscow. Vol. 1: 385 p. (1981). Vol. 2: 281 p. (1981). Vol. 3: 264 p. (1982).
31. **Комбалов В.С.** Оценка триботехнических свойств контактирующих поверхностей. – М.: Наука, 1983. – 136 с.
32. **Комбалов В.С.** Состояние и перспективы работ по исследованию влияния шероховатости на фрикционные характеристики пар трения // Трение и износ. – 1980. – Т.1. – №3. – С. 440 – 452.
33. **Бендат Дж., Пирсол А.** Измерение и анализ случайных процессов / Пер. с англ. Г.В. Матушевского, В.Е. Привальского. – М.: Мир, 1971. – 408 с.
34. **Сигорский В.П.** Математический аппарат инженера. – К.: Техніка, 1977. – 768 с.
35. **Степнов М.Н.** Статистическая обработка результатов механических испытаний. – М.: Машиностроение, 1972. – 232 с.
36. **Peklenik J. C.I. R.P.** Annalen. – 1965. – V. XII. – №3. – S. 3 – 8.
37. **Найяк П.Р.** Применение модели случайного поля для исследования шероховатых поверхностей // Проблемы трения и смазки. – 1971. – Т.93. – Сер. Ф. – №3. – С. 85-95.
38. **Белый В.А., Свириденко А.И., Петроковец М.И., Савкин В.Г.** Трение полимеров. – М.: Наука, 1972. – 204 с.
39. **Польцер Г., Майснер Ф.** Основы трения и изнашивание / Пер. с нем. О.Н. Озерского, В.Н. Пальянова. – М.: Машиностроение, 1984. – 264 с.
40. **Abbot E.J., Firestone F.A.** Specifying surface quality // Mech. Eng. – 1933. – Vol.55. – P. 569.
41. **Михин Н.М.** Внешнее трение твердых тел. – М.: Наука, 1977. – 222 с.
42. **Комбалов В.С.** Влияние шероховатости твердых тел на трение и износ. – М.: Наука, 1974. – 112 с.
43. **Комбалов В.С.** О комплексной оценке шероховатости поверхностей в задачах трения и износа и ее связи с величиной Δ^* // Контактное взаимодействие твердых тел и расчет сил трения и износа. – М.: Наука, 1971. – С. 89.
44. **Рыжов Э.В., Рыбицкий В.А., Созин Ю.И., Щеголь Н.И.** Исследование качества поверхности при алмазном шлифовании износостойких наплавочных материалов // Трение и износ. – 1982. – Т.3. – №4. – С. 734 – 738.
45. **Рыжов Э.В., Рыбицкий В.А., Щеголь Н.И.** Математический метод расчета безразмерного комплекса для оценки шероховатости поверхности // Трение и износ. – 1981. – Т.2. – №5. – С. 904 – 907.
46. **Рыжов Э.В., Суслов А.Г., Улашкин У.П.** Комплексный параметр для оценки состояния поверхности трения // Трение и износ. – 1980. – Т.1. – №3. – С. 436 – 439.
47. **Ядренко М.И.** Спектральная теория случайных полей. – К.: Вища шк., 1980. – 208 с.
48. **Argatov I.I.** The theory of elastic nonsaturated contact between rough surfaces // Friction and wear. – 2003. – V.25. – №1. – P. 27 – 34.
49. **Рудзит Я.А.** Микрогеометрия и контактное взаимодействие поверхностей. – Рига: Зинатне, 1975. – 210 с.
50. **Харач Г.М., Экслер Л.И.** Об определении характеристик микрогеометрии поверхности со случайной шероховатостью при расчетах трения и износа // Контактное взаимодействие твердых тел и расчет сил трения и износа. – М.: Наука, 1971. – С. 169.
51. **Cooper M.G., Mikis V.B., Yovanovich M.M.** Thermal contact conductance // International Journal of heat and mass transfer. – 1969. – Vol.12. – P. 279.
52. **Whitehouse D.J., Archard J.F.** The Properties of Random Surfaces of Significance in the contact // Proceedings of the Royal Soc. – 1970. – Vol.316. – Ser. A. – P. 97-121.
53. **Whitehouse D.J., Archard J.F.** The properties of random surfaces in contact // Surface Mechanics, Proceedings of the ASME Annual winter meeting. – Los Angeles, Calif. – 1969. – November. – P. 16-20.
54. **Семенов Н.Ф.** Средняя высота выступов шероховатой поверхности и плотность пятен контакта при контактировании шероховатой поверхности с гладкой // Трение и износ. – 1986. – Т.7. – №1. – С. 85 – 90.
55. **Семенов Н.Ф., Сиренко Г.А.** Описание топографии анизотропных шероховатых поверхностей трения с помощью модели случайного поля: 2. Полная кривизна, главные кривизны и отношение главных кривизн в вершинах микронеровностей, удельная площадь гауссовской поверхности и удельный объем зазора // Трение и износ. – 1980. – Т.1. – №5. – С. 815 – 823.
56. **Лонге-Хиггинс М.С.** Статистическая геометрия случайных поверхностей // Гидродинамическая неустойчивость. – М.: Мир, 1964. – С.124 – 167.
57. **Gartwright D.E., Longuet-Higgins M.S.** The statistical distribution of the maxima of a random function //

- Proceedings of the Royal Soc. – London. – 1956. – Vol.237. – Ser. A., N1209 – P. 212.
58. **Longuet-Higgins M.S.** On the statistical distribution of the highs of sea waves // J. Marine Research. – 1952. – Vol.11. – N3. – P. 245.
 59. **Longuet-Higgins M.S.** Statistical Properties of a moving waveform // Proc. Cambridge Philos. Soc. – London, 1956. – N52. – P. 234.
 60. **Longuet-Higgins M.S.** Statistical Properties of an isotropic random surface // Philos. Trans. of the Royal Soc. – London, 1957. – Vol.250. – Ser. A. – P. 157-174.
 61. **Longuet-Higgins M.S.** The Statistical Analysis of a Random Moving Surface // Philos. Trans. of the Royal Soc. – London, 1957. – Vol.249. – Ser. A. – P. 321-387.
 62. **Longuet-Higgins M.S.** The Statistical distribution of the curvature of a random Gaussian surface // Proc. Cambridge Philos. Soc. – London, 1958. – N54. – P. 439.
 63. **Рудзит Я.А., Звиедрис А.В.** Методические основы определения более сложных статистических характеристик шероховатости // Приборостроение. – Вип. 9. – Рига: Рижский политехнический институт, 1973.
 64. **Рудзит Я.А., Кризберг Ю.Я.** Расчет вероятностных характеристик микротопографических параметров шероховатых поверхностей, используемых в задачах трения и износа // Трение и износ. – 1982. – Т.3. – №6. – С. 1048 – 1057.
 65. **Рудзит Я.А., Одитис И.А., Лининьш О.А.** Определение исходных параметров профиля нерегулярной шероховатости // Приборостроение. – Вип. 9. – Рига: Рижский политехнический институт, 1973. – С. 17.
 66. **Рудзит Я.А., Одитис И.А.** О параметрах нерегулярной шероховатости поверхности // Приборостроение. – Вип. 8. – Рига: Рижский политехнический институт, 1972. – С. 3.
 67. **Семенюк Н.Ф.** Исследования топографии поверхностей методом случайного поля и разработка расчетных методов оценки фактической площади контакта при трении твердых тел: Дис. ... канд. техн. наук: 05.02.04. – Якутск: Ин-т физико-техн. проблем Севера СО ЯФ АН СССР, 1983. – 149 с.
 68. **Семенюк Н.Ф., Сиренко Г.А.** Описание топографии анизотропных шероховатых поверхностей трения с помощью модели случайного поля: 1. Распределение высот вершин, средняя кривизна в вершинах, градиент поверхности // Трение и износ. – 1980. – Т.1. – №3. – С. 465 – 471.
 69. **Семенюк Н.Ф., Сиренко Г.А.** Топография и контактные явления анизотропных шероховатых поверхностей трения // Тез. докл. Всесоюз. науч.-техн. конфер. «Трибоника и антифрикционное материаловедение». – Новочеркасск. 27-29.05.1980. – Новочеркасск: Изд-во Новочеркас. политех. ин-та, 1980. – С. 22.
 70. **Semenjuk N.F.** Entwicklung von Berechnungsverfahren der Reibungs und Verschlei.theorie mit Hilfe des Modells stochastischer Felder: Diss. B an der Technisen Hochschule Zittau. –Zittau, 1991. – 160 s.
 71. **Sirenko G., Semenyuk M.** Surface Phenomena on Rough Mating Surfaces Modelled by an Anisotropic Random Fields // Abstracts, information and participants Ukrainian-French Symposium << Condensed Matter: Science and Industry. – Lviv, 20-27 February 1993. – Lviv: IPhCS NANU, 1993. – P. 60.
 72. **Семенюк Н.Ф., Калмыкова Т.Ф.** Фактическая площадь упругого контакта анизотропной шероховатой поверхности с гладкой // Трение и износ. – 1983. – Т.4. – №3. – С. 467– 475.
 73. **Khmyl A.A., Dostanko A.P., Anisimovich V.G., Chizhik S.A.** Effect of polishing on steel surface roughness and contact performance // Friction and wear. – 1996. – V.18. – №4. – P. 491 – 496.
 74. **Сиренко Г.О., Солгис Л.М.** Моделі нанометричної та мікрометричної шорсткості поверхні твердих тіл (Огляд) // Фізика і хімія твердого тіла. – 2010. – Т. 11. – № 2. – С. 423 – 446.
 75. **Сиренко Г.О., Семенюк М.Ф., Солгис Л.М.** Щільність ймовірностей розподілу висот вершин шорстких поверхонь твердих тіл, змодельованих випадковим полем // Фізика і хімія твердого тіла. – 2010. – Т. 11. – № 3. – С. 768 – 779.
 76. **Семенюк Н.Ф.** Средние значения полной и средней кривизн в вершинах, высоты неровностей анизотропной шероховатой поверхности // Трение и износ. – 1986. – Т.7. – № 5. – С. 830 – 840.
 77. **Семенюк Н.Ф.** Плотность вероятности высот вершин. Характеристики вершин анизотропной шероховатой поверхности // Трение и износ. – 1986. – Т.7. – № 6. – С. 1017 – 1024.

Г. Трибоповерхневі властивості карбопластика під час тертя по шорсткій ізотропній поверхні сталі 45 без мащення

Вступ

Відомо, що трибоповерхневі властивості композиційних полімерних матеріалів під час тертя по металевих контртілах визначаються параметрами шорсткої поверхні, величиною навантаження пари тертя, швидкістю ковзання, температурою поверхонь тертя та середовищем, в якому відбувається динамічний контакт.

Відомо, також [1-5], що найкращий математичний опис шорсткості поверхні виконаний за допомогою теорії випадкового поля.

Завдання дослідження: знайти за методом Брандона апроксимаційні рівняння інтенсивності зношування полімерного композиту з моментами спектральної щільності (СЩ) шорсткої ізотропної поверхні, а також проаналізувати результати та встановити мінорантні ряди впливу моментів спектральної щільності на інтенсивність зношування полімерного композиту на основі політетрафторетилену та вуглецевого волокна.

I. Експериментальна частина

Досліджували зносостійкість композитного матеріалу – карбопластика на основі ПТФЕ, наповненого 20% карбонізованого низькомодульного (LM) вуглецевого волокна УТМ-8, отриманого з гідратцелюлозного волокна (при термообробці за температури 1123 К в середовищі CH_4 в присутності антипіренів $\text{Na}_2\text{B}_4\text{O}_7 \cdot 10\text{H}_2\text{O}$ та $(\text{NH}_4)_2\text{HPO}_4$) під час тертя та зношування без мащення на трибометрі ХТІ-72 за схемою [I-1]: торець пальчика діаметром $10 \pm 0,05$ мм і висотою $15 \pm 0,1$ мм – площа контртіла; контртіло було виконано порожнистим діаметром $60 \pm 0,15$ мм, висотою $35 \pm 0,2$ мм, товщиною робочої частини поверхні тертя $5 \pm 0,2$ мм, через порожнину проходила вода, завдяки якій підтримувався заданий тепловий режим поверхні тертя; вуглецева сталь 45 термооброблена (НВ 4,6 ГПа) з початковою шорсткістю поверхні $Ra_0 = 0,22 \pm 0,02$ мкм; питома навантаження $p = 3$ МПа; швидкість ковзання $v = 1,1$ м/с; температура, що була визначена термопарою ХК на відстані $1 \pm 0,05$ мм від поверхні сталі 45, а величини (в мВ) записувались на стрічку потенціометра КСП-4; профілограми знімали за допомогою профілометра-профілографа ВЭИ «Калибр»; знімали 50-60 базових довжин профілограми під кутом 45° до напрямку ковзання поверхні сталі 45.

Шорсткість поверхні оцінювали за моментами спектральної щільності (СЩ): нульового порядку m_0 , пов'язаного з висотним параметром; другого

порядку m_2 , пов'язаного з градієнтом поверхні; четвертого порядку m_4 , пов'язаного з кривиною висот вершин ізотропної поверхні.

Інтенсивність зношування карбопластика збільшується із зростанням m_0 , m_2 , m_4 вихідної поверхні. На шляху тертя без мащення 0-50 км це збільшення відбувається інтенсивніше, ніж на шляху 300-400 км і залежить від природи спряженої поверхні.

Топографія поверхні спряженого металу є домінуючим фактором у визначенні величини зносу карбопластиків не тільки на початку тертя (тобто пов'язане з параметрами вихідної поверхні), але і в процесі тертя, коли спряжена поверхня твориться самим композитом.

II. Результати та обговорення

Дамо оцінку внеску моментів СЩ поверхні вуглецевої сталі 45 термообробленої (НВ 4,6 ГПа) в інтенсивність зношування карбопластика, пов'язавши рівнянням ці величини за методом Брандона (місце моментів m_0 , m_2 , m_4 в апроксимаційних рівняннях визначали за коефіцієнтами кореляцій між I_i та m_j).

Рівняння зв'язку інтенсивності зношування карбопластика під час тертя без мащення з моментами СЩ m_0 , m_2 , m_4 вихідної поверхні сталі має такий вигляд (адекватність рівнянь визначали за критерієм Фішера з рівнем значущості 0,05):

- для шляху тертя 0...50 км

$$I_1 = (1,232 + 29,74m_0 - 4,533m_0^2)(1,194 - 18,17m_2)(0,994 + 53,893m_4) \cdot 10^{-7};$$

$$r_0 = 0,981; r_2 = 0,958; r_4 = 0,546; \quad (1)$$

- для шляху тертя 50...100 км

$$I_2 = (1,571 + 3,495m_0 - 0,497m_0^2)(0,996 + 0,203m_2)(1,012 - 94,692m_4) \cdot 10^{-7};$$

$$r_0 = 0,983; r_2 = 0,930; r_4 = 0,578; \quad (2)$$

- для шляху тертя 200...300 км

$$I_4 = (2,913 + 1,244 \cdot 10^2 m_2 + 2,012 \cdot 10^3 m_2^2)(0,999 + 1,121 \cdot 10^{-3} m_0)(1,007 - 58,403m_4) \cdot 10^{-7};$$

$$r_0 = 0,755; r_2 = 0,829; r_4 = 0,656; \quad (3)$$

- для шляху тертя 300...400 км

$$I_5 = (1,33 + 4,945 \cdot 10^3 m_4 + 2,343 \cdot 10^7 m_4^2)(1,017 - 3,178m_2)(1,021 - 24,2m_0) \cdot 10^{-7};$$

$$r_0 = 0,267; r_2 = 0,673; r_4 = 0,955; \quad (4)$$

де I_1, I_2, I_4, I_5 – інтенсивності зношування композиту на шляху тертя 0...50, 50...100, 200...300 та 300...400 км відповідно в $\text{мм}^3/\text{Н}\cdot\text{м}$;

m_0 (мкм^2), m_2 (безрозмірна величина), m_4 (мкм^2) – моменти спектральної щільності вихідної поверхні сталі 45;

r_0, r_2, r_4 – коефіцієнти кореляцій інтенсивностей зношування композиту та моментів нульового, другого та четвертого порядку СЩ вихідної поверхні сталі відповідно.

Як видно з величин коефіцієнтів рівнянь регресії (1–4), інтенсивність зношування карбопластика суттєво залежить від моментів СЩ вихідної поверхні контртіла із сталі 45, при цьому за силою внеску моментів СЩ в інтенсивність зношування їх можна поставити у такі мінорантні ряди (оцінка за абсолютними величинами коефіцієнтів кореляцій):

для шляху тертя

$$0 \dots 50 \text{ км} \quad E(m_0) > E(m_2) \gg E(m_4); \quad (5)$$

$$50 \dots 100 \text{ км} \quad E(m_0) > E(m_2) \gg E(m_4); \quad (6)$$

$$200 \dots 300 \text{ км} \quad E(m_2) > E(m_0) \gg E(m_4); \quad (7)$$

$$300 \dots 400 \text{ км} \quad E(m_4) \gg E(m_2) > E(m_0). \quad (8)$$

Як видно із цього порівняння, на шляху тертя до 100-150 км привалює висотний параметр, при $S > 150$ км до 300 км – параметр, пов'язаний з градієнтом вихідної поверхні сталі, а при $S > 300$ км – параметр, пов'язаний з кривинами вихідної поверхні сталі. Таким чином, можна стверджувати, що при терті без мащення на формування проміжних шарів впливають в першу чергу кривини, а потім градієнт вихідної поверхні контртіла.

Рівняння зв'язку інтенсивності зношування ($\text{мм}^3/\text{Н}\cdot\text{м}$) на шляху тертя 300-400 км з моментами m'_0, m'_2, m'_4 СЩ поверхні контртіла із сталі 45, яка утворилася після 300 км ковзання композиту, має такий вигляд:

$$I_5 = 1,004(1,348 + 4,44 \cdot 10^2 m'_2 + 7,632 \cdot 10^5 m'^2_2) \times \\ \times (0,808 + 1,107 m'_0)(1,188 - 7,892 \cdot 10^3 m'_4) \cdot 10^{-7}; \\ r'_2 = 0,937; r'_0 = 0,771; r'_4 = 0,644, \quad (9)$$

Як видно із величин коефіцієнтів рівняння регресії (9), інтенсивність зношування суттєво залежить від моментів СЩ поверхні контртіла із сталі 45, що утворилася в процесі тертя, при цьому, судячи з (7), (8), (9), ця залежність підпорядкована моментам СЩ фактично хвилястої плавучої поверхні контртіла у такій послідовності: $E(m_2) > E(m_0) > E(m_4)$. Через 200 км (після 300 км) тертя інтенсивність зношування знову, як і (8), залежить від моментів СЩ поверхні, що утворилася після 300 км, так: $E(m'_4) \gg E(m'_2) > E(m'_0)$.

Висновки

Кривини у вершинах вихідної шорсткої ізотропної поверхні вуглецевої сталі 45 визначають формування поверхонь пари тертя та зносостійкість полімерного композиту на основі політетрафторетилену та карбонізованого вуглецевого волокна при умовах тертя без мащення, коли утворюється проміжна плівка на суміжних поверхнях.

Література

1. Найяк П.Р. Применение модели случайного поля для исследования шероховатых поверхностей // Проблемы трения и смазки. – 1971. – Т.93. – Сер. F. – №3. – С. 85.
2. Семенюк Н.Ф., Сиренко Г.А. Описание топографии анизотропных шероховатых поверхностей трения с помощью модели случайного поля: 1. Распределение высот вершин, средняя кривизна в вершинах, градиент поверхности // Трение и износ. – 1980. – Т.1. – №3. – С. 465 – 471.
3. Семенюк Н.Ф., Сиренко Г.А. Описание топографии анизотропных шероховатых поверхностей трения с помощью модели случайного поля: 2. Полная кривизна, главные кривизны и отношение главных кривизн в вершинах микронеровностей, удельная площадь гауссовской поверхности и удельный объем зазора // Трение и износ. – 1980. – Т.1. – №5. – С. 815 – 823.
4. Семенюк Н.Ф., Сиренко Г.А. Описание топографии анизотропных шероховатых поверхностей трения с помощью модели случайного поля: 3. Фактическая площадь контакта, коэффициент трения, термическое сопротивление, адгезионное взаимодействие с учетом деформации в зоне контакта // Трение и износ. – 1980. – Т.1. – №6. – С. 1010 – 1019.
5. Семенюк Н.Ф., Сиренко Г.А. Топография и контактные явления анизотропных шероховатых поверхностей трения // Тез. докл. Всесоюз. науч.-техн. конфер. «Трибоника и антифрикционное материаловедение». – Новочеркасск. 27-29.05.1980. – Новочеркасск: Изд-во Новочеркас. политех. ин-та, 1980. – С. 22.

6. **Найяк П.Р.** Применение модели случайного поля для исследования шероховатых поверхностей // Проблемы трения и смазки. – 1971. – Т.93. – Сер. F. – №3. – С. 85.
7. **Семенюк Н.Ф., Сиренко Г.А.** Описание топографии анизотропных шероховатых поверхностей трения с помощью модели случайного поля: 1. Распределение высот вершин, средняя кривизна в вершинах, градиент поверхности // Трение и износ. – 1980. – Т.1. – №3. – С. 465 – 471.
8. **Семенюк Н.Ф., Сиренко Г.А.** Описание топографии анизотропных шероховатых поверхностей трения с помощью модели случайного поля: 2. Полная кривизна, главные кривизны и отношение главных кривизн в вершинах микронеровностей, удельная площадь гауссовской поверхности и удельный объем зазора // Трение и износ. – 1980. – Т.1. – №5. – С. 815 – 823.
9. **Семенюк Н.Ф., Сиренко Г.А.** Описание топографии анизотропных шероховатых поверхностей трения с помощью модели случайного поля: 3. Фактическая площадь контакта, коэффициент трения, термическое сопротивление, адгезионное взаимодействие с учетом деформации в зоне контакта // Трение и износ. – 1980. – Т.1. – №6. – С. 1010 – 1019.
10. **Семенюк Н.Ф., Сиренко Г.А.** Топография и контактные явления анизотропных шероховатых поверхностей трения // Тез. докл. Всесоюз. науч.-техн. конфер. «Трибоника и антифрикционное материаловедение». – Новочеркасск. 27-29.05.1980. – Новочеркасск: Изд-во Новочеркас. политех. ин-та, 1980. – С. 22.

Сиренко Г.О. – доктор технічних наук, професор кафедри хімії;

Семенюк М.Ф. – доктор технічних наук;

Солтис Л.М. – к.ф.-м.н.;

Складанюк М.Б. – к.ф.-м.н., доцент кафедри хімії;

Мартинюк М. І. – магістр, здобувач наукової ступені по кафедрі хімії.